Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 1, 15–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:13:21

УДК 517.538.5+517.956.2

М. Я. Мазалов

Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений

Пусть X – произвольный компакт на плоскости. Доказывается, что если L – однородный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами и локально ограниченным фундаментальным решением, то каждая функция f , непрерывная на X и удовлетворяющая уравнению $Lf = 0$ во всех внутренних точках X , равномерно приближается на X решениями того же уравнения с особенностями вне X . Также устанавливается теорема о равномерном приближении функции по частям при более слабых ограничениях, чем в стандартной схеме Витушкина.

Библиография: 24 названия.

Введение

В работе рассматриваются операторы L следующего вида.

Пусть $L(x)$ – однородный эллиптический многочлен с комплексными коэффициентами (где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$; эллиптичность означает, что $L(x) \neq 0$ при $x \neq 0$). Тогда $L = L(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_d)$ – соответствующий дифференциальный оператор (однородный, эллиптический и с постоянными коэффициентами).

Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^d$, X° – множество всех внутренних точек X ; $h(X, L)$ – класс функций f таких, что f непрерывна на X и $Lf = 0$ в X° ; $H(X, L)$ – замыкание в равномерной норме на X множества функций F , каждая из которых удовлетворяет уравнению $LF = 0$ в (своей) окрестности X .

Ясно (в силу эллиптичности L), что каждая функция из $H(X, L)$ принадлежит $h(X, L)$. В работе дается ответ на вопрос, для каких операторов L всегда выполнено равенство $h(X, L) = H(X, L)$.

ТЕОРЕМА 1. *Равенство $h(X, L) = H(X, L)$ для произвольного компакта $X \subset \mathbb{R}^d$ равносильно одновременному выполнению следующих условий:*

- 1) *фундаментальное решение оператора L локально ограничено;*
- 2) *$d = 2$.*

Рассмотрим формулировку теоремы 1 подробнее. Обозначим через n порядок оператора L . Хорошо известно (см., например, [1; теорема 7.1.20]), что существует фундаментальное решение E оператора L , имеющее вид

$$E(x) = E_0(x) - E_1(x) \log|x|, \quad (0.1)$$

где E_0 – вещественно аналитическая функция в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, однородная степени $n - d$, E_1 – однородный многочлен степени $n - d$ (если $n < d$, то $E_1 \equiv 0$). Ясно

(разность фундаментальных решений L вещественно аналитична в окрестности нуля), что в условии 1) теоремы 1 достаточно ограничиться функциями вида (0.1).

Необходимость условия 1) хорошо известна. При $n < d$ для построения контр-примера используется конструкция Долженко (см. [2], а также [3; § 15]); при $n = d = 2$, $E_1 \neq 0$ конструкция уточняется аналогично примеру Гончара–Хедберга (см. [4; пример 6.6]). Более того, для аналитических функций ($L = \partial/\partial\bar{z}$) и гармонических функций ($L = \Delta$) хорошо известны необходимые и достаточные условия (емкостные критерии соответственно Витушкина [5] и Келдыша–Дени [6], [7]), которым должен удовлетворять компакт X для выполнения равенства $h(X, L) = H(X, L)$.

Необходимость условия 2) фактически установлена в [8; § 4, пример 1], где получен весьма общий критерий приближаемости для решений уравнения $Lf = 0$ в пространстве ВМО и ряде классов Липшица.

Достаточность условий 1) и 2) доказывается в §§ 1–4. В силу (0.1) равенство $h(X, L) = H(X, L)$ выполняется для произвольного плоского компакта X при всех операторах порядка выше двух, а также второго порядка при $E_1 \equiv 0$ (соответствующий частный случай теоремы 1 сформулирован в качестве гипотезы в [9; § 4]).

Еще более специальный частный случай теоремы 1 (для $L = \partial^2/\partial\bar{z}^2$) сформулирован в качестве гипотезы в [10], [11] и доказан в [12], [13].

В настоящей работе (несмотря на более общий результат) доказательство проще, чем в [12], [13]. Здесь используется схема Витушкина (см. [5; гл. 1, 2]) и ее дальнейшие усовершенствования (см., например, [14]–[17]). В § 1 изложены подготовительные результаты. Как известно, схема Витушкина сводит приближение функции к задаче уравнивания (с надлежащими оценками) у ее локализаций необходимого числа лорановских коэффициентов, после чего функция приближается по частям. Эта задача нетривиальна уже в случае $L = \partial/\partial\bar{z}$ (см. [5], [17]), где необходимо уравнивать всего лишь один “дополнительный” коэффициент, соответствующий $1/z^2$, и ее сложность существенно возрастает с увеличением порядка оператора и размерности пространства. Естественно возникает задача – получить теорему о приближении функции по частям, которая бы требовала уравнивания возможно меньшего числа коэффициентов.

Такая теорема для произвольного оператора L при всех $d \geq 2$ (теорема 2) получена в § 2. Оказывается, для возможности равномерного приближения достаточно, в отличие от леммы 1 из [5; гл. 2, § 4] или ее обобщения – леммы 14.12 из [3], потребовать, чтобы разность между локализациями и функциями, уравнивающими у них лорановские коэффициенты, при $x \rightarrow \infty$ имела асимптотику $o(|x|^{-d+1})$, а не $o(|x|^{-d})$.

Впервые вариант теоремы о приближении функции по частям, требующий асимптотики $o(|x|^{-d+1})$, доказал В. П. Парамонов (см. [16], [17]) соответственно для гармонических приближений в C^1 -норме и равномерных аналитических приближений, предложив метод группировки индексов. Указанный метод полностью конструктивен и дает хорошую оценку точности приближения (см. [16; формула (5.30)], [17; формула (2.35)], а также [12; лемма 5.2]).

К сожалению, общая схема группировки индексов в случае произвольного оператора L не известна (в [16], [17] и [12] группы имеют существенно разное строение). По этой причине в доказательстве теоремы 2 применяется другой подход; он опирается на теорию сингулярных интегралов, где в качестве ядер

Кальдерона–Зигмунда рассматриваются частные производные порядка n фундаментального решения E . Приближающая функция представляет собой не сумму функций, уравнивающую у локализаций соответствующее число лорановских коэффициентов (как, например, в [5]), а выпуклую комбинацию таких сумм по конечному числу разбиений единицы.

Схема доказательства теоремы 2 хорошо обобщается, в частности она применяется и в §4 в более содержательной ситуации. Заметим, что для приближения в тех классах функций, где сингулярные интегральные операторы с ядрами Кальдерона–Зигмунда ограничены (например, в ВМО или классах Липшица нецелого порядка), в технике §2 необходимости нет.

В §§3, 4 рассматриваются операторы L только при $d = 2$. Для доказательства теоремы 1 надо, уравнивая лорановские коэффициенты у локализаций, добиться выполнения условий теоремы 2. Для этого в силу (0.1) необходимо и достаточно уравнивать коэффициенты при частных производных E до порядка $n - 1$ включительно.

Основной результат §3 содержится в леммах 3.4 и 3.6 (соответственно о двух и о четырех точках). Он имеет следующий смысл: элементарными методами всегда удастся уравнивать у локализаций лорановские коэффициенты при $n - 1$ линейно независимых комбинациях частных производных E порядка $n - 1$ (и при всех частных производных более низких порядков, что значительно проще). Наиболее содержательным здесь является случай $n > 2$ и $E_1 \neq 0$ в (0.1).

В §4 у каждой локализации уравнивается лорановский коэффициент при одной “оставшейся” линейной комбинации частных производных E порядка $n - 1$ (основная лемма 3.7). В общем случае, если компакт X произволен, элементарными методами сделать это не удастся (см. §4, замечание 4.2). Соответствующая техника использует геометрическую конструкцию из [13; §3] и те же аргументы, что были применены при доказательстве теоремы 2 с единственным отличием: в качестве ядер Кальдерона–Зигмунда рассматриваются частные производные E порядка $n - 1$.

§1. Подготовительные результаты

Всюду в дальнейшем через $A, A_0, A_1, A_2, \dots$ обозначаются положительные постоянные, которые могут зависеть только от оператора L (в частности, от n или d). Значения этих постоянных в разных соотношениях могут быть различными (при этом существенны не сами конкретные значения, а факт их существования).

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ – компакт, L – произвольный оператор с фундаментальным решением E вида (0.1), f – функция из $h(X, L)$. С помощью теоремы Уитни (см. [18; гл. 6, п. 2.2]) продолжим f до непрерывной финитной функции в $\mathbb{R}^d$. В силу фундаментальности E имеет место равенство, понимаемое в обобщенном смысле:

$$f = E * (Lf), \quad (1.1)$$

где $*$ означает свертку.

Пусть $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\text{Spt } Lf$ (Spt – замыкание носителя распределения (функции)). Это означает, что $\{\varphi_j\}$ – конечное множество неотрицательных функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (т.е. финитных бесконечно гладких в $\mathbb{R}^d$),

причем $\sum_j \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности $\text{Spt } Lf$. Тогда

$$f = \sum_j f_j, \quad \text{где } f_j = E * (\varphi_j Lf). \quad (1.2)$$

Напомним, что функции f_j называются *локализациями* f , а оператор V_φ , действующий в пространстве распределений $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$ и определяемый по формуле

$$V_\varphi \Psi = E * (\varphi L\Psi), \quad (1.3)$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\Psi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$, называется *локализационным оператором Ви-тушкина* (см., например, [5; гл. 2, § 3], [15]).

В настоящей работе, учитывая технику доказательства теоремы 2 и особенно необходимость повторных локализаций, зависящих от геометрического строения компакта (§ 4), будем использовать разбиения единицы Харви и Полкинга (см. [14; лемма 3.1], [3; § 2, п. 1°]), в которых носители φ_j могут иметь существенно различные размеры.

Предварительно дадим ряд определений. Всюду под *кубами* будем понимать замкнутые кубы с ребрами, параллельными осям координат. Для куба $Q = Q(a, s)$ с центром $a \in \mathbb{R}^d$ и ребром s куб с тем же центром и ребром λs (где $\lambda > 0$) обозначим через λQ . (Аналогично определяется шар λB для $B = B(a, r)$ – замкнутого шара с центром a и радиусом r .) *Двоичными кубами* будем называть кубы следующего вида:

$$Q = [m_1 2^{-k}, (m_1 + 1) 2^{-k}] \times [m_2 2^{-k}, (m_2 + 1) 2^{-k}] \times \cdots \times [m_d 2^{-k}, (m_d + 1) 2^{-k}],$$

где $k, m_1, m_2, \dots, m_d$ – целые числа. Ясно, что если два таких куба имеют общую внутреннюю точку, то один из них содержится в другом.

Говоря о покрытии некоторого компакта конечным семейством двоичных кубов, всегда будем считать, что каждый куб имеет с компактом общие точки и никакой из кубов покрытия не содержится в другом.

Далее, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ обозначает мультииндекс, т.е. набор из d целых неотрицательных чисел. При этом

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

Обозначим для куба Q через $C_{0,n}^\infty(Q)$ класс таких неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, что $\text{Spt } \varphi \subset Q$ и $|\partial^\alpha \varphi| \leq A(s(Q))^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| = 0, 1, \dots, n$, где n – порядок оператора L , постоянная $A > 0$ зависит от n и d и определяется в следующей лемме.

ЛЕММА 1.1 (Харви и Полкинг; см. [14; лемма 3.1]). Пусть $\{Q_j\}$ – конечное семейство двоичных кубов, покрывающих некоторый компакт. Тогда существует семейство функций $\{\varphi_j\}$ таких, что $\sum_j \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности компакта и $\varphi_j \in C_{0,n}^\infty(1.5Q_j)$ для соответствующих номеров j .

Напомним идею доказательства леммы.

Занулируем кубы так, чтобы

$$s(Q_1) \geq \cdots \geq s(Q_j) \geq s(Q_{j+1}) \geq \cdots$$

Возьмем функции $\phi_j \in C_{0,n}^\infty(1.5Q_j)$ такие, что $\phi_j = 1$ на $1.1Q_j$. Пусть $\varphi_1 = \phi_1$, а для $j \geq 2$ положим $\varphi_j = \phi_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \phi_k)$. При этом, как нетрудно проверить по индукции, для всех j

$$\sum_{k=1}^j \varphi_k = 1 - \prod_{k=1}^j (1 - \phi_k)$$

(откуда следует, что $\sum_j \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности $\bigcup_j Q_j$), а нужные оценки частных производных функций φ_j получаются (суммированием геометрической прогрессии) из того, что кратность пересечений кубов $1.5Q_j$ одного размера не превосходит 2^d , и если $s(Q_j) > s(Q_{j+1})$, то $s(Q_j) \geq 2s(Q_{j+1})$.

Напомним основные факты о разложении решений уравнения $Lf = 0$ в ряд Лорана. Пусть E – любое фундаментальное решение оператора L вида (0.1), T – распределение, $\text{Spt } T \subset B(a, \delta)$, $h = T * E$. Тогда (см. [3; § 7, п. 2°], [15], [16; § 3]) существует постоянная $A_0 \geq 1$ такая, что функция $h(x)$ разлагается в ряд Лорана, сходящийся в C^∞ всюду вне шара $B(a, A_0\delta)$:

$$h(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha E(x - a), \quad (1.4)$$

где c_α – лорановские коэффициенты, определяемые по формулам

$$c_\alpha = c_\alpha(h, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T(y) | (y - a)^\alpha \rangle. \quad (1.5)$$

Зафиксируем фундаментальное решение E с условием

$$\max_{|x|=1} (|E_0(x)|, |E_1(x)|) \leq A$$

и рассмотрим оценки локализаций. Если в формуле (0.1) $E_1 \not\equiv 0$, то будет удобно рассматривать локализации с точностью до многочлена степени не выше $n - d$. Возьмем для произвольного $\delta > 0$ следующее фундаментальное решение оператора L :

$$E^\delta(x) = E_0(x) - E_1(x) \log \frac{|x|}{\delta}. \quad (1.6)$$

При этом $E(x) - E^\delta(x) = E_1(x) \log(1/\delta)$ – однородный многочлен степени $n - d$. Ясно, что $\partial^\alpha E^\delta = \partial^\alpha E$ при $|\alpha| > n - d$,

$$|\partial^\alpha E^\delta(x)| \leq A\delta^{n-d-|\alpha|} \quad \text{при } |x| \leq \delta, \quad |\alpha| < n - d, \quad (1.7)$$

а локализационный оператор из (1.3) запишется так:

$$V_\varphi \Psi = V_\varphi^\delta \Psi + \tilde{E}_1, \quad \text{где } V_\varphi^\delta \Psi = E^\delta * (\varphi L\Psi), \quad \tilde{E}_1 = \log \frac{1}{\delta} E_1 * (\varphi L\Psi), \quad (1.8)$$

$\tilde{E}_1$ – многочлен степени не выше $n - d$. Так как $L\tilde{E}_1 \equiv 0$, то многочлен $\tilde{E}_1$ заведомо принадлежит $H(X, L)$ и поэтому не нуждается в приближении (и оценках).

Следующая лемма стандартна (см., например, [5; гл. 2, § 3, лемма 1], [9; предложение 2.5], [3; лемма 14.10]).

ЛЕММА 1.2. Пусть для непрерывной в замкнутом кубе $Q = Q(a, \delta)$ функции f $\omega_f(Q)$ – колебание f на Q , $\varphi \in C_{0,n}^\infty(Q)$, а $V_\varphi^\delta f$ – локализация из (1.8). Тогда:

- 1) функция $V_\varphi^\delta f$ непрерывна в $\mathbb{R}^d$;
- 2) $L(V_\varphi^\delta f) = 0$ всюду вне компакта $\text{Spt } \varphi \cap \text{Spt } Lf$;
- 3) на $2Q$ имеет место оценка $|V_\varphi^\delta f(x)| \leq A_1 \omega_f(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем рассуждения аналогично доказательствам предложений 2.4, 2.5 из [9]. Из (1.8) вытекает (в силу фундаментальности E^δ), что $L(V_\varphi^\delta f) = \varphi Lf$ и, следовательно, $L(V_\varphi^\delta f) = 0$ на $\mathbb{R}^d \setminus (\text{Spt } \varphi \cap \text{Spt } Lf)$.

Оценим $|V_\varphi^\delta \tilde{f}(x)|$ для $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ (общий случай непрерывной функции f получается регуляризацией). По определению

$$V_\varphi^\delta \tilde{f}(x) = \langle E^\delta(x - y) | \varphi(y) L_y(\tilde{f}(y) - \tilde{f}(a)) \rangle,$$

где $\langle \Psi | \psi \rangle$ обозначает действие распределения Ψ на (пробную) функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Используя фундаментальность E^δ и интегрируя по частям, получим

$$V_\varphi^\delta \tilde{f}(x) = \varphi(x)(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)) + \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=n \\ 0 \leq |\alpha| < n}} C_{\alpha,\beta} R_{\alpha,\beta}(x),$$

где α и β – мультииндексы, $C_{\alpha,\beta}$ – постоянные, зависящие от L , $R_{\alpha,\beta}(x)$ – следующие интегралы:

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \int_{Q(a,\delta)} (\tilde{f}(y) - \tilde{f}(a)) \partial_y^\alpha E^\delta(y - x) \partial^\beta \varphi(y) dm(y),$$

$m(y)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. Так как функции $\partial^\alpha E^\delta$ локально интегрируемы при $|\alpha| < n$, то, равномерно приближая на Q непрерывную функцию f функциями $\tilde{f}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, получим, что $V_\varphi^\delta f$ также непрерывна в $\mathbb{R}^d$.

Для оценки $|V_\varphi^\delta f(x)| \leq A_1 \omega_f(Q)$ при $x \in 2Q$ достаточно показать, что

$$\int_{Q(a,\delta)} |\partial_y^\alpha E^\delta(y - x) \partial^\beta \varphi(y)| dm(y) \leq A_2, \quad (1.9)$$

где $|\alpha| < n$, $|\alpha| + |\beta| = n$. Но после линейной замены переменных, переводящей $Q(a, \delta)$ в $Q(0, 1)$ (где учитываются (1.6), однородность $E_0(x)$ и $E_1(x)$ в степени $n - d$ и $\varphi \in C_{0,n}^\infty(Q(a, \delta))$), оценка (1.9) вытекает из следующей очевидной:

$$\max_{\substack{v \in Q(0,2) \\ |\alpha| < n}} \int_{Q(0,1)} |\partial_t^\alpha E(t - v)| dm(t) \leq A_3.$$

Лемма доказана.

Напомним, что при $|x - a| > A_0 \delta \sqrt{d}/2$ в силу (1.4) и (1.5) для $V_\varphi^\delta f$ имеет место лорановское разложение (где $T = \varphi Lf$)

$$V_\varphi^\delta f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a) \partial^\alpha E^\delta(x - a),$$

$$c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle L(f(y) - f(a)) | \varphi(y)(y - a)^\alpha \rangle.$$

В дальнейшем (для применения схемы Витушкина) нам понадобятся оценки коэффициентов при $|\alpha| \leq n$. Интегрируя по частям (аналогично доказательству (2.11) в [9]), нетрудно установить, что

$$|c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a)| \leq A\omega_f(Q)\delta^{d-n+|\alpha|}, \quad |\alpha| \leq n. \quad (1.10)$$

Рассмотрим оценки функции $g(x)$, которая в дальнейшем будет иметь смысл разности между локализацией и функцией, уравнивающей у нее необходимое число лорановских коэффициентов. Сначала уточним представление (1.1).

ЛЕММА 1.3. Пусть функция g непрерывна в $\mathbb{R}^d$, $\text{Spt } Lg$ компактен и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ имеет место представление

$$g = E^\delta * (Lg).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = B(0, R)$ – (достаточно большой) шар такой, что $\text{Spt } Lg \subset B/4$; $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, причем $\text{Spt } \eta \subset B$, $\eta = 1$ на $B/2$ и $|\partial^\alpha \eta| \leq AR^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leq n$; $\varepsilon = \sup_{B \setminus (B/2)} g(x)$, $\varepsilon = o(1)$ при $R \rightarrow \infty$; P – однородный многочлен степени $n - d$. Покажем, что для $x \in B/4$

$$|P * (Lg)(x)| < K\varepsilon, \quad (1.11)$$

где постоянная $K > 0$ зависит только от P и L . Действительно, с помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} P * (Lg)(x) &= P * (\eta Lg)(x) \\ &= \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=n \\ 0 \leq |\alpha| \leq n-d}} D_{\alpha,\beta} \int_{B \setminus (B/2)} g(y) \partial_y^\alpha P(y-x) \partial^\beta \eta(y) \, dm(y) \end{aligned} \quad (1.12)$$

(постоянные $D_{\alpha,\beta}$ зависят только от L), где модуль каждого интеграла оценивается, как правая часть (1.11).

Устремив $R \rightarrow \infty$, получим $P * (Lg) \equiv 0$, и, следовательно, в силу (1.6) функция $E^\delta * (Lg)$ не зависит от δ .

Для завершения доказательства осталось установить следующую оценку:

$$|g(x) - E^R * (\eta Lg)(x)| < A\varepsilon.$$

Но в силу (1.1) $g(x) = g(x)\eta(x) = E^R * [L(g\eta)](x)$, а разность $E^R * [L(g\eta) - \eta Lg](x)$ оценивается аналогично (1.12), так как

$$\text{Spt}[L(g\eta) - \eta Lg] \subset (B \setminus (B/2))$$

и $1/4 \leq |x - y|/R \leq 5/4$ для $y \in (B \setminus (B/2))$. Лемма доказана.

Из леммы 1.3 следует, что функция g разлагается (вне достаточно большого шара) в ряд Лорана (1.4), причем (в силу $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$) $c_\alpha(g, a) = 0$ при всех α , $|\alpha| \leq n - d$, и всех a . Напомним также, что $\partial^\alpha E^\delta \equiv \partial^\alpha E$ при $|\alpha| > n - d$, и поэтому лорановские разложения g в случае различных E^δ (с одним центром) совпадают.

ЛЕММА 1.4. Пусть функция g удовлетворяет условиям леммы 1.3; кроме того, $|g(x)| \leq M$ при $x \in Q = Q(a, \delta)$ и $\text{Spt } Lg \subset Q/2$. Тогда:

- 1) при $n - d + 1 \leq |\alpha| \leq n$ для лорановских коэффициентов $c_\alpha = c_\alpha(g, a)$ имеют место оценки $|c_\alpha| \leq AM\delta^{d-n+|\alpha|}$;
- 2) возьмем $k > n - d$ такое, что $c_\alpha = 0$ при $|\alpha| < k$; при этом значения коэффициентов c_α , $|\alpha| = k$, не зависят от центра разложения a ; если $k \leq n + 1$, то в $\mathbb{R}^d$ имеет место оценка

$$|g(x)| \leq AM \min \left(1, \frac{\delta^{d-n+k}}{|x-a|^{d-n+k}} \right). \quad (1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из леммы 1.3, формул (1.4) и (1.5) и доказывается так же, как и (1.10); независимость c_α от a при $|\alpha| = k$ вытекает из формулы (1.5) и $c_\alpha = 0$ для $|\alpha| < k$.

Установим неравенство (1.13). При $x \in 2Q$ оценка $|g(x)| \leq AM$ следует из лемм 1.3 и 1.2 (где возьмем $\varphi \in C_{0,n}^\infty(Q)$, $\varphi = 1$ на $Q/2$). Пусть $y \in Q$, $x \notin 2Q$. Аналогично доказательству леммы 1.2 из [15], воспользовавшись формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции E и ее частных производных и однородностью в степени $n - d - k$ функций $\partial^\alpha E$ при $|\alpha| = k$, получим, что для следующей функции $R_k(x, y)$:

$$R_k(x, y) = E(y - x) - \sum_{0 \leq |\alpha| < k} \frac{\partial_y^\alpha E(y - x)|_{y=a}}{\alpha!} (y - a)^\alpha,$$

имеют место оценки

$$|\partial_y^\alpha R_k(x, y)| \leq \frac{A\delta^{k-|\alpha|}}{|x-a|^{d-n+k}}, \quad |\alpha| \leq n,$$

откуда в силу $c_\alpha = 0$ при $|\alpha| < k$ и формулы (1.5) (где $T = Lg$) следует

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |E * (Lg)(x)| = |R_k * (Lg)(x)| \\ &\leq \int_Q |g(y) L_y [R_k(x, y) \varphi(y)]| dm(y) \leq \frac{AM\delta^{d-n+k}}{|x-a|^{d-n+k}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 2. Приближение функции по частям

Напомним, что X – компакт в $\mathbb{R}^d$, $f \in h(X, L)$ – непрерывная финитная функция, L – оператор с фундаментальным решением E вида (0.1). Пусть $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности функции f в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что выполняется неравенство $\omega(2\delta) \leq 2\omega(\delta)$.

Пусть $\{Q_j\} = \{Q_j(a_j, s_j)\}$ – покрытие компакта $\text{Spt } Lf$ конечным семейством двоичных кубов; $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы из леммы 1.1, подчиненное покрытию $\{Q_j\}$ (напомним, что $\varphi_j \in C_{0,n}^\infty(1.5Q_j)$). При этом функция f разложена на сумму локализаций: $f = \sum_j f_j$, где $f_j = V_{\varphi_j} f$ из (1.3).

Докажем следующую теорему о приближении функции по частям.

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует $C > 1$ такое, что для любого покрытия $\{Q_j\}$ и для любой соответствующей локализации f_j найдется функция F_j , непрерывная в $\mathbb{R}^d$, со следующими свойствами:

- 1) $\text{Spt } LF_j \subset (CQ_j \setminus X)$;

- 2) $|r_j(x)| \leq C\omega(s_j)$ в $\mathbb{R}^d$, где $r_j = f_j - F_j$;
 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{d-1} r_j(x) = 0$.

Тогда $f \in H(X, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь будем дополнительно считать, что постоянные $A, A_1, A_2, \dots$ могут зависеть от C . Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} r_j(x) = 0$, то к функции r_j применимы леммы 1.3 и 1.4 (где $k = n$). Следовательно, $c_\alpha(r_j, a_j) = 0$ при $|\alpha| < n$ и в $\mathbb{R}^d$ имеет место оценка

$$|r_j(x)| \leq A\omega(s_j) \min\left(1, \frac{(s_j)^d}{|x - a_j|^d}\right). \quad (2.1)$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbf{D}$ – (замкнутый) куб в $\mathbb{R}^d$; $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$ – конечное множество неотрицательных функций, непрерывных на $\mathbf{D}$; $b > 0$ – постоянная.

Если для любой неотрицательной функции $\nu \in L_1(\mathbf{D}, dm)$, $\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm(x) = 1$, найдется номер $k = k(\nu)$ такой, что

$$\int_{\mathbf{D}} \psi_k(x) \nu(x) dm(x) \leq b,$$

то для некоторой выпуклой комбинации $\psi = \sum_{m=1}^p \lambda_m \psi_m$ (где $\lambda_m \geq 0$ и $\sum_{m=1}^p \lambda_m = 1$) будет выполнена оценка

$$\max_{x \in \mathbf{D}} \psi(x) \leq b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(\mathbf{D})$ – пространство вещественнозначных функций g , непрерывных на $\mathbf{D}$, с равномерной нормой $\|g\| = \max_{x \in \mathbf{D}} |g(x)|$. По теореме Рисса сопряженным к $C(\mathbf{D})$ является пространство вещественных борелевских мер (зарядов) μ с носителями на $\mathbf{D}$ (где $\|\mu\|$ – полная вариация меры).

Обозначим через W_1 замкнутый шар $\{g : \|g\| \leq b\}$ в $C(\mathbf{D})$, а через W_2 – выпуклую оболочку множества функций $\psi_1, \dots, \psi_p$. Рассуждая от противного, допустим, что W_1 и W_2 не пересекаются. Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств (см., например, [19; теорема 3.4, б)) найдется мера μ такая, что для любой функции $\psi \in W_2$ выполняется неравенство

$$\sup_{g \in W_1} \left(\int g(x) d\mu(x) \right) = b\|\mu\| < \int \psi(x) d\mu(x).$$

В частности,

$$\min_k \int \psi_k(x) d\mu(x) > b\|\mu\|;$$

так как функции ψ_k неотрицательны, можно считать неотрицательной и меру μ . Такое же неравенство выполняется и для подходящей абсолютно непрерывной меры на $\mathbf{D}$ (регуляризации μ), что противоречит условию. Лемма доказана.

Теорема 2 немедленно вытекает из леммы 2.1 и следующего утверждения.

ЛЕММА 2.2. Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta = 2^{-k_0}$; $X \subset \text{Spt } f \subset \mathbf{D}$; Q_j и r_j – из условия теоремы 2.

Тогда для любой неотрицательной функции $\nu \in L_1(\mathbf{D})$, $\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm(x) = 1$, найдется такое покрытие $\{Q_j\} = \{Q_j\}(\nu)$, что:

- 1) $\min_j s(Q_j) \geq \delta$;
- 2) $\int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j r_j(x) \right| \nu(x) dm(x) < \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(\delta, f, L, \mathbf{D}, C)$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon = 0$.

Действительно, в обозначениях леммы 2.1 число $p \in \mathbb{N}$ имеет смысл числа покрытий $\{Q_j\}$ с $\min_j s(Q_j) \geq \delta$; m – номер покрытия, $m = 1, 2, \dots, p$; $\{r_{j,m} = f_{j,m} - F_{j,m}\}$ – множество функций из теоремы 2, соответствующих этому покрытию; $\psi_m = |\sum_j r_{j,m}|$. Из лемм 2.1 и 2.2 получим, что для некоторого набора $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \geq 0$, $\sum_{m=1}^p \lambda_m = 1$,

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \sum_{m=1}^p \lambda_m \sum_j F_{j,m}(x) \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^p \lambda_m \left| f(x) - \sum_j F_{j,m}(x) \right| = \sum_{m=1}^p \lambda_m \left| \sum_j r_{j,m}(x) \right| < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.2)$$

и, следовательно, $f \in H(X, L)$. Значение ε определяется в (2.3).

Заметим, что построить покрытие $\{Q_j\}(\nu)$ значительно проще, чем непосредственно сконструировать приближающую функцию для теоремы 2. Используемый здесь подход по существу опирается на теорему Мазура (см. [20; гл. 5, § 1, теорема 2]): если последовательность $\{\psi_k\}$ элементов нормированного пространства слабо сходится к элементу Ψ , то некоторая последовательность их выпуклых комбинаций сходится к Ψ сильно.

Этот подход оказывается полезным также и в других ситуациях (см., например, [21]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Сначала определим необходимое покрытие $\{Q_j\}(\nu)$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\delta < \omega(\delta) < 1$, а $\mathbf{D}$ – объединение конечного числа двоичных кубов с ребрами, равными

$$1 = \int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm(x)$$

(совокупность которых назовем *первым поколением кубов*). Зафиксируем некоторое M , $1 < M < 1/\delta$; нужное значение M определяется в (2.3).

Применим к $\mathbf{D}$, ν и M двоичное разложение Кальдерона–Зигмунда (см., например, [18; гл. 1, § 3]), в результате которого куб $\mathbf{D}$ будет покрыт конечным семейством двоичных кубов, разбитых на два непересекающихся класса: так называемых *хороших* кубов D^g и *плохих* кубов D^b . Указанные классы определяются индуктивно по номеру поколения.

Пусть D – куб какого-либо поколения и $s(D) > \delta$.

Если

$$\frac{1}{m(D)} \int_D \nu(x) dm(x) > M,$$

то D объявляется плохим и фиксируется, в противном случае он делится на 2^d двоичных кубов следующего поколения с ребром $s(D)/2$. (Ясно, что все кубы первого поколения нужно делить.)

Если $s(D) = \delta$, то куб D объявляется хорошим и фиксируется.

Нетрудно проверить выполнение следующих *свойств семейства* $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ (см., например, [18; гл. 1, п. 3.4]):

- (1) для любого куба D $\frac{1}{m(D)} \int_D \nu(x) dm(x) \leq 2^d M$;
- (2) сумма $m(D)$ по всем кубам D^b не превосходит $1/M$.

Теперь построим *покрытие* $\{Q_j\} = \{Q_j\}(\nu)$. Для каждого куба D^b рассмотрим его оболочку – множество, состоящее из $3^d - 1$ окружающих его двоичных кубов того же размера. Сначала покроем компакт $\text{Spt } Lf$ семейством двоичных кубов с ребром δ , затем присоединим к этому семейству те кубы D^b и кубы оболочек D^b , которые пересекают $\text{Spt } Lf$, после чего из полученного семейства исключим все кубы, не являющиеся максимальными по включению. Оставшееся множество кубов и образует покрытие $\{Q_j\}$.

Назовем кубы покрытия $\{Q_j\}$ при $s(Q) = \delta$ *белыми*, а при $s(Q) > \delta$ – *красными*. Необходимо отметить, что здесь и в дальнейшем (§ 4) семейство плохих и хороших кубов и семейство красных и белых кубов существенно различаются. Первое из них связано с функцией ν , второе – с покрытием.

Для доказательства леммы 2.2 нам понадобятся следующие *свойства покрытия* $\{Q_j\}$, вытекающие из построения:

- (1) если куб Q покрытия имеет общую внутреннюю точку с кубом $3D^b$ для какого-либо D^b , то Q красный, причем $s(Q) \geq s(D^b)$ (иначе Q был бы исключен);
- (2) сумма $m(Q)$ по всем красным кубам Q не превосходит $3^d/M$.

Для полученного покрытия $\{Q_j\}$ докажем оценку

$$\int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j r_j(x) \right| \nu(x) dm(x) \leq A(\omega(\delta)(m(\mathbf{D})M)^{1/2} + \omega(M^{-1/d})), \quad (2.3)$$

из которой немедленно следует лемма 2.2 (например, при $M = 1/\omega(\delta)$).

Определим для каждого куба D из семейства $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ следующую неотрицательную функцию:

$$\tilde{\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\chi_D(x)}{m(D)} \int_D \nu(y) dm(y),$$

где χ_D – характеристическая функция куба D . Ясно, что

$$\int_{\mathbf{D}} (\tilde{\nu}(x) - \nu(x)) dm(x) = 0, \quad \tilde{\nu}(x) \leq 2^d M, \quad \int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) = 1.$$

Будет удобно заменить в левой части (2.3) ν на $\tilde{\nu}$. В следующей лемме оценим остаток.

ЛЕММА 2.3. *Имеет место оценка*

$$\left| \int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j r_j(x) \right| (\nu(x) - \tilde{\nu}(x)) dm(x) \right| \leq A\omega(M^{-1/d}). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим всевозможные пары кубов Q_j из покрытия $\{Q_j\}$ и D_k из $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ (центры их обозначим соответственно a_j и a'_k). Так как $m(D^b) \leq 1/M$, то $s(Q) \leq M^{-1/d}$ для любого куба Q из $\{Q_j\}$.

Воспользовавшись условием

$$\int_{D_k} (\tilde{\nu}(x) - \nu(x)) dm(x) = 0$$

и свойствами модуля, получим следующую оценку левой части (2.4):

$$\begin{aligned} & \sum_k \left| \int_{D_k} \left(\left| \sum_j r_j(x) \right| - \left| \sum_j r_j(a'_k) \right| \right) (\nu(x) - \tilde{\nu}(x)) dm(x) \right| \\ & \leq \sum_k \int_{D_k} \left| \left| \sum_j r_j(x) \right| - \left| \sum_j r_j(a'_k) \right| \right| |\nu(x) - \tilde{\nu}(x)| dm(x) \\ & \leq \sum_j \sum_k \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x). \end{aligned}$$

Для доказательства (2.4) достаточно установить, что

$$\sum_j \sum_k \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x) \leq A\omega(M^{-1/d}). \quad (2.5)$$

Оценку (2.5) докажем по частям.

1) Сначала рассмотрим такие пары номеров j и k , что кубы $2Q_j$ и $2D_k$ не пересекаются. Воспользовавшись неравенством

$$|\nabla r_j(x)| \leq \frac{A\omega(s_j)(s_j)^d}{|a'_k - a_j|^{d+1}}$$

при $x \in D_k$ (вытекающим так же, как и (2.1), из $c_\alpha(r_j, a_j) = 0$ при $|\alpha| < n$) и теоремой Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x) \\ & \leq A\omega(M^{-1/d}) \frac{(s_j)^d s(D_k)}{|a'_k - a_j|^{d+1}} \int_{D_k} \nu(x) dm(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Зафиксируем k и просуммируем (2.6) по всем соответствующим j . Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\{j | 2Q_j \cap 2D_k = \emptyset\}} \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x) \\ & \leq A_2\omega(M^{-1/d})s(D_k) \int_{|x| \geq s(D_k)} \frac{dm(x)}{|x|^{d+1}} \int_{D_k} \nu(x) dm(x) \\ & \leq A_3\omega(M^{-1/d}) \int_{D_k} \nu(x) dm(x), \end{aligned}$$

откуда суммированием по k получается (2.5).

2) Рассмотрим теперь все пары (j, k) такие, что $2Q_j$ и $2D_k$ пересекаются. Прежде всего из свойства (1) покрытия $\{Q_j\}$ следует, что $s(Q_j) \geq s(D_k)$ (иначе куб Q_j содержался бы в $3D_k$ и был исключен; именно для этого вводились оболочки кубов D^b). Так как $s(D_k) \leq s(Q_j)$ и $2D_k \cap 2Q_j \neq \emptyset$, то из геометрических соображений ясно, что $D_k \subset 5Q_j$.

2а) Пусть Q_j красный. Тогда из свойства (1) покрытия $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ и определения $\tilde{\nu}$ следует

$$\sum_{\{k|D_k \subset 5Q_j, Q_j \text{ красный}\}} \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x) \leq A_4 \omega(M^{-1/d}) m(Q_j) M,$$

откуда в силу свойства (2) покрытия $\{Q_j\}$ получим (2.5).

2б) Пусть Q_j белый. Так как размеры белых кубов минимальны, то для фиксированного k число номеров j таких, что $D_k \subset 5Q_j$, не превосходит 5^d , поэтому

$$\sum_{\{j|Q_j \text{ белый}\}} \sum_{\{k|D_k \subset 5Q_j\}} \int_{D_k} |(r_j(x) - r_j(a'_k))(\nu(x) - \tilde{\nu}(x))| dm(x) \leq A_5 \omega(\delta).$$

Лемма 2.3 доказана.

Вернемся к доказательству оценки (2.3), заменив в силу леммы 2.3 ν на $\tilde{\nu}$. Напомним (см. леммы 1.3 и 1.4), что $r_j = E * (Lr_j)$ и (в силу условия 3) теоремы 2) в лорановском разложении r_j коэффициенты c_α равны нулю для $|\alpha| < n$. Будем рассматривать производные $\partial^\alpha E$ при $|\alpha| = n$ как ядра сингулярных интегральных операторов; такой подход аналогичен примененному в [15].

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, Ψ – распределение умеренного роста (см., например, [1; § 7.1]); $F[\psi]$ – преобразование Фурье ψ , т.е.

$$F[\psi](x) = \int e^{-i(y_1 x_1 + \dots + y_n x_n)} \psi(y) dm(y).$$

Напомним, что $F[\Psi]$ определяется по формуле $\langle F[\Psi] | \psi \rangle = \langle \Psi | F[\psi] \rangle$.

Далее до окончания § 2 всюду $|\alpha| = n$. Ясно, что $F[\partial^\alpha E](x) = x^\alpha / L(x)$; так как $L(x)$ – эллиптический многочлен степени n , то $|F[\partial^\alpha E]| \leq A$ в $\mathbb{R}^d$. По теореме Планшереля в $L_2 = L_2(\mathbb{R}^d, dm)$ имеет место оценка

$$\|(\partial^\alpha E) * \psi\|_{L_2} \leq A \|\psi\|_{L_2}. \quad (2.7)$$

Нетрудно показать, что при всех α , $|\alpha| = n$, и всех $r > 0$

$$\int_{|x|=r} \partial^\alpha E(x) ds(x) = 0, \quad (2.8)$$

где $ds(x)$ – элемент площади сферы S^{d-1} . Действительно, так как функция $\partial^\alpha E$ однородная степени $-d$, то интеграл (2.8) равен $C(L, \alpha) r^{-1}$. Пусть $\eta_1 \in C_{0,n}^\infty(Q(0, 2))$, причем $\eta_1(x) = 1$ на $Q(0, 1)$; $\eta(x) = \eta_1(x) - \eta_1(x/\varepsilon)$ для некоторого ε , $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда, интегрируя по частям один раз и учитывая, что

$$\int_{Q(0, 2\varepsilon)} |\partial^\beta E(x)| dm(x) \leq A\varepsilon$$

при $|\beta| = n - 1$ и $|\nabla \eta_1(x/\varepsilon)| \leq A/\varepsilon$, получим $|\langle \partial^\alpha E | \eta \rangle| \leq A_1$; в то же время непосредственное интегрирование дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \partial^\alpha E | \eta \rangle}{\log(1/\varepsilon)} = C(L, \alpha),$$

поэтому $C(L, \alpha) = 0$.

Пусть для $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ $T^\alpha \psi$ – следующие интегральные операторы:

$$T^\alpha \psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial^\alpha E(x-y) \psi(y) dm(y). \quad (2.9)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $T^\alpha \psi(x)$ непрерывны в $\mathbb{R}^d$, $T^\alpha \psi(x) = O(|x|^{-d})$ при $x \rightarrow \infty$, $\|T^\alpha \psi\|_{L_2} \leq A \|\psi\|_{L_2}$, и если $\psi \in C_{0,n}^\infty(Q)$ для некоторого куба Q , то $|T^\alpha \psi(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^d$.

Теперь для каждой r_j определим видоизмененную функцию $\tilde{r}_j$ по следующей формуле:

$$\tilde{r}_j = \sum_{|\alpha|=n} \frac{c_\alpha(r_j)}{m(Q_j)} T^\alpha \psi_j, \quad (2.10)$$

где $\psi_j \in C_{0,n}^\infty(Q_j)$ и $\int_{Q_j} \psi_j(x) dm(x) = m(Q_j)$ (напомним, что $|T^\alpha \psi_j| \leq A$).

Функции $\tilde{r}_j$ подобраны так, что в соответствии с (1.4) при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика $r_j(x) - \tilde{r}_j(x) = O(|x|^{-d-1})$. Так как в силу теоремы 2, п. 2) и леммы 1.4, п. 1) $|c_\alpha(r_j)|/m(Q_j) \leq A_1 \omega(s_j)$, то из (2.1) и (1.13) вытекает оценка

$$|r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \leq A \omega(s_j) \min\left(1, \frac{(s_j)^{d+1}}{|x - a_j|^{d+1}}\right). \quad (2.11)$$

Используя следующую лемму, заменим в (2.3) не только ν на $\tilde{\nu}$, но и r_j на $\tilde{r}_j$.

ЛЕММА 2.4. *Имеет место оценка*

$$\sum_j \int_{\mathbf{D}} |r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq A \omega(M^{-1/d}). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть куб Q_j красный. Тогда из (2.11) и $\tilde{\nu}(x) \leq 2^d M$ следует

$$\int_{\mathbf{D}} |r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq A M m(Q_j) \omega(M^{-1/d})$$

(напомним, что $s_j \leq M^{-1/d}$). Отсюда в силу свойства (2) покрытия $\{Q_j\}$ получим

$$\sum_{\{j|Q_j \text{ красный}\}} \int_{\mathbf{D}} |r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq A_1 \omega(M^{-1/d}).$$

2) Рассмотрим случай белых кубов Q_j . Так как $s_j = \delta$, то из (2.11) аналогично доказательству леммы 1 из [5; гл. 2, § 4] получим, что для любого x

$$\sum_{\{j|Q_j \text{ белый}\}} |r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \leq A \omega(\delta).$$

Осталось заметить, что $\int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) = 1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство оценки (2.3). Обозначим через $\sum'$ сумму по всем индексам j белых кубов, а через $\sum''$ – соответственно красных. Из неравенства

Коши–Буняковского, формулы (2.10), условия $0 \leq \tilde{\nu}(x) \leq 2^d M$, L_2 -ограниченности операторов T^α , формулы $\int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) = 1$ и свойства (2) покрытия $\{Q_j\}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}} \left| \sum_j \tilde{r}_j(x) \right| \tilde{\nu}(x) dm(x) &\leq \left(\left\| \sum_j' \tilde{r}_j \right\|_{L_2} + \left\| \sum_j'' \tilde{r}_j \right\|_{L_2} \right) \|\tilde{\nu}\|_{L_2} \\ &\leq A_2 \sum_{|\alpha|=n} \left(\omega(\delta) \left\| T^\alpha \left(\sum_j' \psi_j \right) \right\|_{L_2} + \omega(M^{-1/d}) \left\| T^\alpha \left(\sum_j'' \psi_j \right) \right\|_{L_2} \right) \\ &\quad \times M^{1/2} \left(\int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) \right)^{1/2} \\ &\leq A_3 \left(\omega(\delta) \left(\sum_j' m(Q_j) \right)^{1/2} + \omega(M^{-1/d}) \left(\sum_j'' m(Q_j) \right)^{1/2} \right) M^{1/2} \\ &\leq A(\omega(\delta)(m(\mathbf{D})M)^{1/2} + \omega(M^{-1/d})). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу лемм 2.3 и 2.4 оценка (2.3) доказана. Вместе с ней доказаны соответственно лемма 2.2 и теорема 2.

§ 3. Однородные линейные комбинации частных производных фундаментального решения

В §§ 3, 4 с помощью теоремы 2 докажем достаточность условий 1) и 2) из теоремы 1. Будем рассматривать только случай $d = 2$. Прежде всего в лемме 3.1 установим, для каких операторов L в формуле (0.1) выполняется условие $E_1 \equiv 0$. (Этот вопрос важен, так как в случае $E_1 \equiv 0$ все частные производные E порядка $n - 2$ ограничены, и их можно использовать для построения приближающих функций; при $E_1 \not\equiv 0$ нужно отбирать специальные линейные комбинации указанных производных.)

Напомним (см. [1; теорема 7.1.20], [22; § 22, формулы (5), (6), и § 11, формула (5)]), что имеет место следующее интегральное представление (где $n \geq 2$):

$$E_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2(n-2)!} \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^{n-2}}{L(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta. \quad (3.1)$$

Многочлен $L(x_1, x_2)$ разлагается на линейные множители (над $\mathbb{C}$):

$$L(x_1, x_2) = \lambda \prod_{k=1}^n (x_1 - \lambda_k x_2),$$

где в силу эллиптичности среди чисел λ_k нет вещественных (далее считаем, что $\lambda = 1$). Обозначим через $n_+ = n_+(L)$ (соответственно $n_- = n_-(L)$) число номеров k с $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ (соответственно с $\operatorname{Im} \lambda_k < 0$); $n_+ + n_- = n$.

Пусть $L_+(x_1, x_2)$ и $L_-(x_1, x_2)$ – однородные многочлены степеней соответственно n_+ и n_- (с $\lambda = 1$) такие, что $L(x_1, x_2) = L_+(x_1, x_2)L_-(x_1, x_2)$, и для $L_+(x_1, x_2)$ выполнено условие $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ при всех k (соответственно для $L_-(x_1, x_2)$ $\operatorname{Im} \lambda_k < 0$).

Ясно, что $x_1 - \lambda_k x_2 = z(i\lambda_k + 1)/2 - \bar{z}(i\lambda_k - 1)/2$, где $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Преобразовав плоскость функцией $w = (iz - 1)/(iz + 1)$, получим

$$\operatorname{Im} \lambda_k > 0 \iff \left| \frac{i\lambda_k - 1}{i\lambda_k + 1} \right| > 1, \quad \operatorname{Im} \lambda_k < 0 \iff \left| \frac{i\lambda_k - 1}{i\lambda_k + 1} \right| < 1. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть $L(x_1, x_2)$ – однородный эллиптический многочлен. Тогда условия $E_1 \equiv 0$ в (0.1) и $\min(n_+, n_-) = 0$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq 2$ (при $n = 1$ утверждение леммы очевидно). Рассмотрим случай $n_- = 0$. Так как $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ для всех k , то в силу (3.2) рациональная функция комплексной переменной z

$$L\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) = \frac{z^{-n}}{2^n} \prod_{k=1}^n ((i\lambda_k + 1)z^2 - (i\lambda_k - 1)),$$

совпадающая с $L(x_1, x_2)$ на единичной окружности, не имеет нулей при $|z| \leq 1$. По интегральной теореме Коши

$$\int_0^{2\pi} \frac{(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^{n-2}}{L(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta = -4i \oint_{|z|=1} \frac{(x_1(z^2 + 1) - x_2 i(z^2 - 1))^{n-2} z dz}{\prod_{k=1}^n ((i\lambda_k + 1)z^2 - (i\lambda_k - 1))} = 0.$$

Случай $n_+ = 0$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\min(n_+, n_-) > 0$; докажем, что $E_1 \neq 0$. Ясно, что общий случай сводится дифференцированием (3.1) по x_1 и x_2 к случаю $n = 2$, $n_+ = n_- = 1$. Но при $n_+ = n_- = 1$ в силу (3.1) и (3.2) найдутся комплексные числа γ , γ_1 , γ_2 такие, что $\gamma \neq 0$, $|\gamma_1| < 1$, $|\gamma_2| < 1$, и при этом

$$E_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{L(\cos \theta, \sin \theta)} = \gamma \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z - \gamma_1/z)(\gamma_2 z - 1/z)} = \frac{2\pi i \gamma}{\gamma_1 \gamma_2 - 1} \neq 0.$$

Лемма доказана.

Частный случай леммы 3.1 для $n = 2$ установлен (другим способом) в [9; предложение 2.2].

Следующее утверждение понадобится для построения ограниченных линейных комбинаций частных производных E порядка $n - 2$. Здесь факторизация оператора $L = L_1 L_2$ соответствует разложению $L(x_1, x_2) = L_1(x_1, x_2) L_2(x_1, x_2)$ (множители – однородные многочлены ненулевой степени с $\lambda = 1$).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть L – оператор порядка $n \geq 2$ с условием $\min(n_+, n_-) > 0$, E – фундаментальное решение L , $L = L_1 L_2$. Функция $L_1 E$ будет однородной тогда и только тогда, когда многочлен $L_1(x_1, x_2)$ делится на $L_+(x_1, x_2)$ или на $L_-(x_1, x_2)$. При этом в случае однородности для любого $\delta > 0$ $L_1 E \equiv L_1 E^\delta$ (где E^δ – из (1.6)).

Для доказательства следствия заметим, что функция $L_1 E$ является фундаментальным решением оператора L_2 , и применим к L_2 лемму 3.1.

Достаточность условий 1) и 2) из теоремы 1 в силу теоремы 2, леммы 1.1, формул (1.3) и (1.8) вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 3.2. Пусть $d = 2$, L – оператор с локально ограниченным фундаментальным решением E , $X \subset \mathbb{R}^2$ – произвольный компакт, $f \in h(X, L)$, $Q = Q(a, \delta)$ – квадрат, $\varphi \in C_{0,n}^\infty(1.5Q)$, $V_\varphi^\delta f = E^\delta * (\varphi Lf)$ – локализация f . Тогда существует функция G такая, что $\text{Spt } LG \subset ((2Q)^\circ \setminus X)$, и в $\mathbb{R}^2$ имеет место оценка

$$|V_\varphi^\delta f(x) - G(x)| \leq A\omega(\delta) \min\left(1, \frac{\delta^2}{|x - a|^2}\right). \quad (3.3)$$

Рассмотрим план доказательства леммы 3.2.

Лемма 3.2 выводится из основной леммы 3.7 (которая доказывается в § 4) и элементарных лемм 3.4–3.6.

В зависимости от оператора L имеет место один из двух частных случаев.

1) $\min(n_+, n_-) \neq 1$. Для этого случая будет получена лемма 3.4 о двух точках, а именно два варианта – при $\min(n_+, n_-) = 0$ и при $\min(n_+, n_-) \geq 2$. Если $\min(n_+, n_-) = 0$, то все частные производные E порядка $n - 2$ ограничены в $\mathbb{R}^2$, поэтому лемма 3.4 доказывается совсем просто. Если $\min(n_+, n_-) \geq 2$, то для доказательства леммы 3.4 используется вспомогательное утверждение – лемма 3.5.

2) $\min(n_+, n_-) = 1$. Этот случай несколько сложнее. Для него будет получена лемма 3.6 о четырех точках.

До рассмотрения указанных частных случаев сделаем ряд замечаний, упростим обозначения и сформулируем лемму 3.2 в более удобном виде (это будет лемма 3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $V_\varphi^\delta f \equiv 0$ (в частности, если $1.5Q \setminus X^\circ = \emptyset$), то $G \equiv 0$. Если компакт $1.5Q \setminus X^\circ$ состоит из изолированных точек, то для построения функции G достаточно “исправить” $V_\varphi^\delta f$ в проколотых окрестностях этих точек; поэтому далее будем считать, что $1.5Q \setminus X^\circ$ содержит бесконечное множество точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В доказательстве леммы 3.2 будет удобно строить функцию G так, чтобы $\text{Spt } LG$ состоял из конечного (возможно, произвольно большого) числа точек открытого множества $(2Q)^\circ \setminus X$; при этом G может быть разрывной в указанных точках (но локально ограниченной). Ясно, что легко “подправить” функцию G , сделав непрерывной, после изменения ее только в малых окрестностях этих точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пусть a'_1 и a'_2 – наиболее удаленные друг от друга точки $1.5Q \setminus X^\circ$. Так как $\varphi Lf \equiv \varphi_1 \varphi Lf$ для любой функции $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_1(x) = 1$ в окрестности $1.5Q \setminus X^\circ$, то, уменьшив в случае необходимости Q , будем считать, что в лемме 3.2 выполнено условие $\delta \leq |a'_1 - a'_2|$.

Пусть a_1 и a_2 – точки $(2Q)^\circ \setminus X$ такие, что

$$\max(|a_1 - a'_1|, |a_2 - a'_2|) < 0.01|a'_1 - a'_2|.$$

Построим функцию G_1 , $\text{Spt } LG_1 = \{a_1, a_2\}$, для которой выполнена следующая оценка (ослабленный вариант оценки (3.3)):

$$|V_\varphi^\delta f(x) - G_1(x)| \leq A\omega(\delta) \min\left(1, \frac{\delta}{|x - a|}\right). \quad (3.4)$$

В случае $E_1 \equiv 0$ в силу локальной ограниченности $\partial^\alpha E(x)$ при $|\alpha| \leq n-2$, леммы 1.4, п. 2) и неравенства (1.10) достаточно положить

$$G_1(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-2} c_\alpha(V_\varphi f, a_1) \partial^\alpha E(x - a_1)$$

(напомним, что $E = E^\delta$ и $V_\varphi f = V_\varphi^\delta f$ в случае $E_1 \equiv 0$).

При $E_1 \not\equiv 0$ (напомним, что здесь $n \geq 3$, так как функция E локально ограничена) доказательство (3.4) несколько усложняется. Можно утверждать в силу (1.7) и (1.10) только то, что для функции $g_0 = V_\varphi^\delta f - G_0$, где

$$G_0(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-3} c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a_1) \partial^\alpha E^\delta(x - a_1),$$

выполнены условия $|g_0(x)| \leq A\omega(\delta)$ на $2Q$ и $c_\alpha(g_0, a_1) = 0$, $|\alpha| \leq n-3$. Для построения функции G_1 нужно использовать обе точки a_1 и a_2 и применить следствие леммы 3.1. Соответствующее рассуждение представляет собой ослабленный вариант доказательства лемм о двух и о четырех точках.

Рассмотрим любую факторизацию оператора L : $L = L_1 L_2$, где L_1 – оператор порядка $n-3$, а L_2 – оператор третьего порядка с условием $\min(n_+, n_-) = 1$ (при $n = 3$ возьмем $L_2 = L$). Применив следствие леммы 3.1 к оператору L_2 , получим, что для некоторого ζ , $\text{Im } \zeta \neq 0$, функция $(\partial/\partial x_1 + \zeta \partial/\partial x_2)L_1 E$ ограничена в $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, для любого $\theta \in [0, 2\pi)$ функция

$$L_{1,\theta} E \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin \theta \right) L_1 E$$

не ограничена. (В противном случае функции $(\partial/\partial x_1)L_1 E$ и $(\partial/\partial x_2)L_1 E$ ограничены, следовательно, $\min(n_+(L_2), n_-(L_2))$ равно 0, а не 1.)

Таким образом, в силу следствия леммы 3.1 каждую из $n-1$ частных производных $\partial^\alpha E^\delta$ порядка $n-2$ можно разложить по базису, состоящему из $n-2$ ограниченных функций $(\partial^\alpha L_+)E$, $|\alpha| = n_- - 2$, и $(\partial^\alpha L_-)E$, $|\alpha| = n_+ - 2$, и одной неограниченной функции $L_{1,\theta} E^\delta$, с коэффициентами, не превосходящими по модулю постоянной A , зависящей только от оператора L . (Линейная независимость однородных многочленов, соответствующих дифференциальным операторам, действующим на E^δ , вытекает из расположения λ_k ; независимость A от θ следует из компактности единичной окружности.)

Осталось заметить, что для некоторого θ при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$L_1 E^\delta(x - a_2) - L_1 E^\delta(x - a_1) = \gamma L_{1,\theta} E^\delta(x - a_1) + O(|x|^{-1}),$$

где $|\gamma| = |a_2 - a_1|$. Напомним, что в силу (1.10) выполнена оценка

$$|c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a_1)| \leq A\omega(\delta)$$

для $|\alpha| = n-2$, также $|a_2 - a_1| \geq 0.98\delta$, а в силу (1.7) имеет место неравенство $\delta^{-1} |L_1 E^\delta(x - a_2) - L_1 E^\delta(x - a_1)| \leq A$ на $2Q$. Окончательно, используя функции $(\partial^\alpha L_+)E(x - a_1)$ при $|\alpha| = n_- - 2$, $(\partial^\alpha L_-)E(x - a_1)$ при $|\alpha| = n_+ - 2$ и $\delta^{-1} (L_1 E^\delta(x - a_2) - L_1 E^\delta(x - a_1))$ для уравнивания коэффициентов $c_\alpha(V_\varphi^\delta f, a_1)$ при $|\alpha| = n-2$, получим и в случае $E_1 \not\equiv 0$ оценку (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Существенно, что в случае произвольного компакта $X \subset \mathbb{R}^2$ оценку (3.3) не удастся получить тем же способом, что и (3.4), с использованием фиксированного числа точек $(2Q)^o \setminus X$. В частности, при $L = \partial^2/\partial\bar{z}^2$ этот вопрос обсуждается в [10; лемма 2.1 и замечание 2 к лемме 2.2]. Смысл результатов: если компакт X произволен, то для многих квадратов Q не найдутся тройки точек “общего положения” из $(2Q)^o \setminus X$ (в отличие от пар точек) и будет недостаточно функций для уравнивания всех нужных коэффициентов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что прямая (a_1, a_2) параллельна оси x_1 . Действительно, при повороте системы координат оператор L , вообще говоря, изменится, но сохранятся отношения $|i\lambda_k - 1|/|i\lambda_k + 1|$ из (3.2), а следовательно, числа n_+ и n_- . После доказательства оценки (3.3) для указанного расположения точек a_1 и a_2 останется совершить обратный поворот.

Пусть $\mathcal{X}_o = (2B)^o \setminus X$; $\mathcal{X}$ – замыкание $\mathcal{X}_o$. Ясно, что $((1.5B) \setminus X^o) \subset \mathcal{X}$. Следующее утверждение (с учетом сделанных замечаний, изменения масштаба и (3.4)) представляет собой специальный случай леммы 3.2, равносильный общему.

ЛЕММА 3.3. Пусть L – оператор с локально ограниченным фундаментальным решением E , $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{X}_o$ – непустое открытое подмножество квадрата Q_0 , причем существуют точки a_1 и a_2 из $\mathcal{X}_o$ такие, что прямая (a_1, a_2) параллельна оси x_1 и $|a_2 - a_1| \geq 1/2$; $\mathcal{X}$ – замыкание $\mathcal{X}_o$.

Пусть функция g непрерывна в $\mathbb{R}^2$, $|g(x)| \leq 1$, $\text{Spt } Lg \subset \mathcal{X}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Тогда существует функция G такая, что $|G(x)| \leq A$, $LG = 0$ всюду вне конечного подмножества $\mathcal{X}_o$, и в лорановском разложении (1.4), (1.5) с центром $a = 0$ при всех α , $|\alpha| \leq n - 1$, имеют место равенства $c_\alpha(g, 0) = c_\alpha(G, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала (в зависимости от частного случая) докажем леммы о двух и о четырех точках.

Случай 1: $\min(n_+, n_-) \neq 1$. Пусть $\min(n_+, n_-) = 0$. Возьмем произвольный бииндекс α для $|\alpha| = n - 2$. При $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$\partial^\alpha E(x - a_2) - \partial^\alpha E(x - a_1) = \gamma \frac{\partial}{\partial x_1} (\partial^\alpha E(x)) + O(|x|^{-2}), \quad (3.5)$$

где $|\gamma| \geq 1/2$. В силу этого и с учетом (3.4) получим следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4 (о двух точках для $\min(n_+, n_-) = 0$). Пусть функция $\tilde{g}$ удовлетворяет тем же условиям, что и g в лемме 3.3.

Тогда существует функция G_2 такая, что $\text{Spt } LG_2 = \{a_1, a_2\}$, $|G_2(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$ и при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$\tilde{g}(x) - G_2(x) = c_v(\tilde{g}) \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2^{n-1}} E(x) + O(|x|^{-2}),$$

где $c_v(\tilde{g}) = c_{(0, n-1)}(\tilde{g})$ – лорановский коэффициент функции $\tilde{g}$, соответствующий $\partial^{n-1} E(x)/\partial x_2^{n-1}$ (при этом функция $\Omega E = \partial^{n-2} E(x)/\partial x_2^{n-2}$ ограничена).

Пусть теперь $n \geq 3$, $\min(n_+, n_-) > 0$. Обобщим рассуждения, примененные при доказательстве (3.4).

Пусть $\mathbf{P}_k$ – линейное k -мерное комплексное пространство однородных многочленов $P_{k-1}(x_1, x_2)$ вида $\sum_{m=0}^{k-1} b_m x_1^m x_2^{k-1-m}$ (где $b_m \in \mathbb{C}$), а $\mathbf{P}_k^+$ (соответственно $\mathbf{P}_k^-$) – пространство многочленов $L_+(x_1, x_2)P_{k-1}(x_1, x_2)$ (соответственно $L_-(x_1, x_2)P_{k-1}(x_1, x_2)$). В силу расположения λ_k и того, что степени многочленов $P_{n-1}(x_1, x_2)$ и $P_{n+1}(x_1, x_2)$ меньше степеней соответственно $L_-(x_1, x_2)$ и $L_+(x_1, x_2)$, получим $\mathbf{P}_{n-}^+ \cap \mathbf{P}_{n+}^- = \mathbf{0}$. Так как сумма размерностей указанных пространств равна $n_- + n_+ = n$, то

$$\mathbf{P}_{n-}^+ \oplus \mathbf{P}_{n+}^- = \mathbf{P}_n. \quad (3.6)$$

При этом базис в $\mathbf{P}_n$ образуют следующие n многочленов: $L_+(x_1, x_2)x^\alpha$, где α – любой бииндекс, $|\alpha| = n_- - 1$, и $L_-(x_1, x_2)x^\alpha$, где $|\alpha| = n_+ - 1$.

Рассмотрим пространства $\mathbf{P}_{n-1}^+$ и $\mathbf{P}_{n+1}^-$. Ясно, что $\mathbf{P}_{n-1}^+ \cap \mathbf{P}_{n+1}^- = \mathbf{0}$, а факторпространство $\mathbf{P}_{n-1}/(\mathbf{P}_{n-1}^+ \oplus \mathbf{P}_{n+1}^-)$ одномерно (что по существу использовалось в доказательстве (3.4)).

Пусть $\min(n_+, n_-) \geq 2$, тогда каждое из пространств $\mathbf{P}_{n-1}^+$ и $\mathbf{P}_{n+1}^-$ хотя бы одномерно. Напомним (см. следствие леммы 3.1), что частные производные $(\partial^\alpha L_+)E$ при $|\alpha| = n_- - 2$ и $(\partial^\alpha L_-)E$ при $|\alpha| = n_+ - 2$ ограничены в $\mathbb{R}^2$. В силу (3.6) получена следующая лемма.

ЛЕММА 3.5. Пусть для оператора L выполнено условие $\min(n_+, n_-) \geq 2$. Тогда любая частная производная E порядка $n - 1$ представима в виде линейной комбинации частных производных первого порядка от следующих ограниченных линейно независимых функций: $(\partial^\alpha L_+)E$ при $|\alpha| = n_- - 2$ и $(\partial^\alpha L_-)E$ при $|\alpha| = n_+ - 2$ (с коэффициентами, не превосходящими по модулю постоянной $A = A(L)$).

Рассмотрим примеры, поясняющие лемму 3.5.

Пусть

$$L = \Delta^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2}_{L_-} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2}_{L_+}.$$

Здесь $n = 4$, $n_- = n_+ = 2$; $E(x) = (8\pi)^{-1}(x_1^2 + x_2^2) \log|x|$. Частные производные E второго порядка линейно выражаются через две ограниченные функции: $L_+E = (4\pi)^{-1}\bar{z}/z$ и $L_-E = (4\pi)^{-1}z/\bar{z}$, и одну неограниченную: $\Delta E = (4\pi)^{-1} \log(z\bar{z})$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \log(z\bar{z}) = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(z\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Таким образом, частные производные E третьего порядка линейно выражаются через первые производные от L_+E и L_-E .

При выполнении условия $\min(n_+, n_-) = 1$ аналог леммы 3.5 уже неверен.

Пусть $L = (\partial/\partial \bar{z})\Delta$. Здесь

$$n = 3, \quad n_+ = 1, \quad n_- = 2;$$

$$E = (4\pi)^{-1}\bar{z}(\log(z\bar{z}) - 1); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} E = (4\pi)^{-1} \log(z\bar{z}).$$

Заметим, что функция $(\partial/\partial \bar{z})E = (4\pi)^{-1}\bar{z}/z$ ограничена, но при этом производная $(\partial^2/\partial \bar{z}^2)E = (4\pi)^{-1}1/\bar{z}$, очевидно, не является линейной комбинацией частных производных первого порядка от $(\partial/\partial z)E$.

В силу леммы 3.5, разложив частные производные E порядка $n - 1$ по первым производным от ограниченных функций $(\partial^\alpha L_+)E$, $|\alpha| = n_- - 2$, и $(\partial^\alpha L_-)E$, $|\alpha| = n_+ - 2$, используя точки a_1 и a_2 и асимптотику для указанных функций, аналогичную (3.5), усилим оценку (3.4) и получим вариант леммы о двух точках при $\min(n_+, n_-) \geq 2$.

ЛЕММА 3.4* (о двух точках для $\min(n_+, n_-) \geq 2$). Пусть функция $\tilde{g}$ удовлетворяет тем же условиям, что и g в лемме 3.3.

Тогда существует функция G_2 такая, что $\text{Spt } LG_2 = \{a_1, a_2\}$, $|G_2(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$ и при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$\tilde{g}(x) - G_2(x) = c'_v(\tilde{g}) \left(\frac{\partial^{n_- - 1}}{\partial x_2^{n_- - 1}} L_+ \right) E(x) + c''_v(\tilde{g}) \left(\frac{\partial^{n_+ - 1}}{\partial x_2^{n_+ - 1}} L_- \right) E(x) + O(|x|^{-2}),$$

где $c'_v(\tilde{g})$ и $c''_v(\tilde{g})$ – лорановские коэффициенты функции $\tilde{g}$, соответствующие указанным линейным комбинациям частных производных E порядка $n - 1$. При этом функции

$$\Omega E' = \frac{\partial^{n_- - 2}}{\partial x_2^{n_- - 2}} L_+ E, \quad \Omega E'' = \frac{\partial^{n_+ - 2}}{\partial x_2^{n_+ - 2}} L_- E$$

ограничены.

Случай 2: $n \geq 3$, $\min(n_+, n_-) = 1$. Пусть $\delta_1 = \max \min_{x \in \mathcal{X}} (|a_1 - x|, |a_2 - x|)$; a'_3 – любая точка $\mathcal{X}$, для которой достигается указанный максимум; a_3 – точка $\mathcal{X}_o$ такая, что $|a_3 - a'_3| \leq 0.01\delta_1$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что $|a_3 - a_1| \leq |a_3 - a_2|$.

Так как L – оператор с условием $\min(n_+, n_-) = 1$, то для некоторого ζ , $\text{Im } \zeta \neq 0$, функция $(\partial/\partial x_1 + \zeta \partial/\partial x_2)E$ однородна. Поэтому ограничены в $\mathbb{R}^2$ следующие $n - 2$ функций: $(\partial/\partial x_1 + \zeta \partial/\partial x_2) \partial^\alpha E$, $|\alpha| = n - 3$. Здесь (в отличие от ситуации, возникающей при $\min(n_+, n_-) \geq 2$) не все частные производные E порядка $n - 1$ можно линейно выразить через производные первого порядка от указанных функций.

Перейдем от дифференциальных операторов к соответствующим многочленам. Построим однородный многочлен

$$\Upsilon(x) = \Upsilon(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{n-1} b_m x_1^m x_2^{n-1-m},$$

зависящий от a_1, a_2, a_3 и такой, что $\max |b_m| \leq A_1$ и для соответствующего многочлена двух комплексных переменных $\Upsilon(z_1, z_2)$ выполнено условие

$$\left| \Upsilon\left(1, -\frac{1}{\zeta}\right) \right| \geq A_2$$

(постоянные A_1 и A_2 определяются в (3.8) и (3.9)).

Тогда каждый многочлен x^α при $|\alpha| = n - 1$ можно будет представить линейной комбинацией $\Upsilon(x)$ и $n - 1$ многочленов $(x_1 + \zeta x_2)x^\beta$, $|\beta| = n - 2$, с коэффициентами, не превосходящими по модулю постоянной, зависящей только от оператора L (в силу компактности подмножества $\mathbb{C}^n$ коэффициентов с условием $\max |b_m| \leq A_1$). Соответствующее представление через ΥE и $[(\partial/\partial x_1 + \zeta \partial/\partial x_2) \partial^\beta] E$, $|\beta| = n - 2$, будет получено для всех $\partial^\alpha E$, $|\alpha| = n - 1$.

Для построения $\Upsilon(x)$ (и оператора Υ) возьмем $\Phi = (\partial^{n-3}/\partial x_1^{n-3})E$. Ясно (в силу $\min(n_+, n_-) = 1$ и следствия леммы 3.1), что функция Φ не является однородной, но $(\partial/\partial x_1 + \zeta\partial/\partial x_2)\Phi(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$G_3(x) = c_1(\Phi(x - a_2) - \Phi(x - a_1)) + \Phi(x - a_3) - \Phi(x - a_1) - c_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Phi(x - a_1), \quad (3.7)$$

где постоянные c_1 и c_2 выбраны так, что при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика $G_3(x) = O(|x|^{-1})$. Пусть $a_2 - a_1 = (\delta_0, 0)$ (где, напомним, $|\delta_0| \geq 1/2$), $a_3 - a_1 = (\delta'_1, \delta''_1)$. В силу требуемой асимптотики получим

$$c_1\delta_0x_1 + \delta'_1x_1 + \delta''_1x_2 = c_2(x_1 + \zeta x_2), \quad (3.8)$$

откуда $c_2 = \delta''_1/\zeta$, $c_1 = (\delta''_1 - \delta'_1\zeta)/(\zeta\delta_0)$. В частности, $\max(|c_1|, |c_2|) \leq A\delta_1$ и $|G_3(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$.

Теперь определим многочлен $\Upsilon(x)$. По формуле Тейлора при $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика

$$G_3(x) = \frac{1}{2}\tilde{\Upsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Phi(x) + O(|x|^{-2}),$$

где в силу (3.7), выразив из (3.8) $c_1\delta_0x_1$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}(x) &= c_1\delta_0^2x_1^2 + (\delta'_1x_1 + \delta''_1x_2)^2 \\ &= c_2(x_1 + \zeta x_2)\delta_0x_1 + (\delta'_1x_1 + \delta''_1x_2)(\delta'_1x_1 + \delta''_1x_2 - \delta_0x_1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ясно, что коэффициенты $\tilde{\Upsilon}(x)$ не превосходят по модулю $A_1\delta_1$. Как нетрудно убедиться, $|\tilde{\Upsilon}(1, -1/\zeta)| \geq A_2\delta_1$ (действительно, $|\delta'_1 - \delta''_1\zeta^{-1} - \delta_0| \geq A_3$ в силу $\text{Im}\zeta \neq 0$ и $|\delta'_1| \leq |\delta_0|/2$). Таким образом, многочлен $\Upsilon(x) = \delta_1^{-1}\tilde{\Upsilon}(x)x_1^{n-3}$ требуемый, а $G_3 = (\delta_1/2)\Upsilon E + O(|x|^{-2})$ при $x \rightarrow \infty$ и $|G_3(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\delta_1 \geq 1/10$; тогда так же, как и в случае 1, используя точки a_1, a_2 и a_3 , функции $G_3(x)$ и $[(\partial/\partial x_1 + \zeta\partial/\partial x_2)\partial^\alpha](E(x - a_2) - E(x - a_1))$, $|\alpha| = n - 3$, всегда можно аналогично (3.5) уравнивать у функции $\tilde{g}$ с соответствующими оценками лорановские коэффициенты при следующих линейно независимых комбинациях частных производных E порядка $n - 1$: при функции ΥE и при всех $[(\partial/\partial x_1 + \zeta\partial/\partial x_2)\partial^\alpha]E$, $|\alpha| = n - 2$, кроме $[(\partial/\partial x_1 + \zeta\partial/\partial x_2)(\partial^{n-2}/\partial x_2^{n-2})]E$.

В случае $\delta_1 < 1/10$ уточним рассуждения с помощью повторной локализации. Представим функцию $\tilde{g}$ как $g_1 + g_2$, где $g_1 = E * (\varphi_1 L\tilde{g})$, $g_2 = E * (\varphi_2 L\tilde{g})$, $\text{Spt } \varphi_1 \subset B(a_1, 2\delta_1)$, $\text{Spt } \varphi_2 \subset B(a_2, 2\delta_1)$. Представив g_1 и g_2 в виде локализаций (1.8) и воспользовавшись оценкой (3.4), построим соответствующие функции G_1^1 и G_1^2 такие, что $|g_s(x) - G_1^s(x)| \leq A\omega(\delta_1)\min(1, \delta_1/|x - a_s|)$, $s = 1$ или $s = 2$ (используем для G_1^1 точки a_1 и a_3 , а для $G_1^2 - a_2$ и еще одну точку a_4 из $B(a_2, 2\delta_2) \cup \mathcal{X}_0$, “достаточно удаленную” от a_2). Так как лорановские коэффициенты функции $\tilde{g} - G_1^1 - G_1^2$ при частных производных E порядка $n - 1$ не зависят от центра разложения и не превосходят по модулю $A\omega(\delta_1)\delta_1$ (лемма 1.4), далее уравниваем их так же, как и у функции $\tilde{g}$ при $\delta_1 \geq 1/10$. Таким образом, и для случая 2 установлена следующая лемма, аналогичная лемме 3.4.

ЛЕММА 3.6 (о четырех точках для $\min(n_+, n_-) = 1$). Пусть функция $\tilde{g}$ удовлетворяет тем же условиям, что и g в лемме 3.3.

Тогда существует функция G_2 такая, что $\text{Spt } LG_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (указанные точки принадлежат $\mathcal{X}_o$), $|G_2(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$ и при $x \rightarrow \infty$ для некоторого $\zeta = \zeta(L)$, $\text{Im } \zeta \neq 0$, имеет место асимптотика

$$\tilde{g}(x) - G_2(x) = c_v(\tilde{g}) \left(\frac{\partial^{n-1} E(x)}{\partial x_1 \partial x_2^{n-2}} + \zeta \frac{\partial^{n-1} E(x)}{\partial x_2^{n-1}} \right) + O(|x|^{-2}),$$

где $c_v(\tilde{g})$ – лорановский коэффициент функции $\tilde{g}$ при указанной линейной комбинации частных производных E , а функция

$$\Omega E(x) = \frac{\partial^{n-2} E(x)}{\partial x_1 \partial x_2^{n-3}} + \zeta \frac{\partial^{n-2} E(x)}{\partial x_2^{n-2}}$$

ограничена.

Заметим, что можно было добиться и выполнения условия $\text{Spt } LG_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$; мы этот факт использовать не будем.

В силу лемм 3.4 и 3.6 лемма 3.3 сводится к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.7 (основная). Пусть g – функция из леммы 3.3; $c_v(g)$ – ее лорановский коэффициент, соответствующий $\partial(\Omega E)/\partial x_2$, где ΩE – ограниченная линейная комбинация частных производных E порядка $n - 2$ из леммы 3.4 или леммы 3.6 (для варианта леммы 3.4 при $\min(n_+, n_-) \geq 2$ – любая из функций $\Omega E'$ или $\Omega E''$).

Тогда существует функция G_v такая, что $LG_v = 0$ всюду вне конечного множества точек $\mathcal{X}_o$, $|G_v(x)| \leq A$ в $\mathbb{R}^2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} G_v(x) = 0$ и $c_v(G_v - g) = 0$ (если $\min(n_+, n_-) \geq 2$, то выполнены условия $c'_v(G_v - g) = 0$ и $c''_v(G_v - g) = 0$).

Лемма 3.7 доказывается в § 4. В предположении, что она установлена, докажем лемму 3.2. Сначала, используя лемму 3.7, построим функцию G_v такую, что у разности $\tilde{g} = g - G_v$ коэффициент c_v равен нулю ($c'_v = 0$ и $c''_v = 0$ в случае $\min(n_+, n_-) \geq 2$). После этого с учетом замечания 3.2, применив (в зависимости от частного случая) к функции $\tilde{g}$ лемму 3.4 или 3.6, уравняем с помощью функции G_2 у $\tilde{g}$ все лорановские коэффициенты порядка $n - 1$. Тем самым будет доказана лемма 3.3 и (с учетом замечаний 3.3 и 3.5) лемма 3.2.

§ 4. Доказательство основной леммы

Прежде всего заметим, что лемма 3.7 содержательна только в том случае, когда компакт $\mathcal{X}$ расположен в узкой полосе вокруг прямой (a_1, a_2) (иначе утверждение по существу сводится к элементарной лемме 2.1 о трех точках из [10]).

Будем рассматривать покрытия компакта $\mathcal{X}$ конечными семействами замкнутых двоичных квадратов

$$Q = Q_k^{m_1, m_2} = [m_1 2^{-k}, (m_1 + 1) 2^{-k}] \times [m_2 2^{-k}, (m_2 + 1) 2^{-k}],$$

где k , m_1 и m_2 – целые числа. По индукции строим невозрастающую последовательность покрытий $\mathcal{Q}(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\mathcal{Q}(0) = Q_0$ и каждый квадрат из $\mathcal{Q}(k+1)$ содержится в соответствующем квадрате из $\mathcal{Q}(k)$ (возможно, совпадая с ним). Каждое покрытие состоит из квадратов двух типов: *белых*, которые на следующей итерации делятся, и *красных*, которые в дальнейшем не изменяются (исходный квадрат Q_0 белый).

Для определения локальных моментов остановки центральным является следующее понятие. Два квадрата $Q_k^{m_1, m_2}$ и $Q_k^{n_1, n_2}$ (одного размера, $s = 2^{-k}$) назовем *согласованными* (*согласованной парой*), если $|m_1 - n_1| \leq 1$ и $2 \leq |m_2 - n_2| \leq 3$. Множество квадратов $\{Q_k^{m_1, m_2}\}$, где k и m_1 фиксированы, назовем *вертикальным рядом* (в частности, согласованные квадраты расположены в одном вертикальном ряду или в соседних).

Индукционный переход: построение $\mathcal{Q}(k)$. Разделим каждый белый квадрат Q покрытия $\mathcal{Q}(k-1)$ на четыре квадрата со стороной $s(Q)/2$. Из полученных квадратов включим в $\mathcal{Q}(k)$ только те, которые пересекают $\mathcal{X}$, назовем их *квадратами поколения k* ; покрытие $\mathcal{Q}(k)$ состоит из квадратов поколения k и всех красных квадратов предыдущих поколений. Определим цвет квадратов поколения k следующим образом. Если среди них найдется согласованная пара (Q_1, Q_2) , то назовем *красными* Q_1 и Q_2 , а также каждый квадрат из $\mathcal{Q}(k)$, находящийся с Q_1 или Q_2 в одном вертикальном ряду; затем в множестве квадратов, цвет которых еще не определен, продолжим поиск согласованных пар (определяя красные квадраты тем же способом, что и выше). Когда все согласованные пары будут исчерпаны, оставшиеся квадраты поколения k назовем *белыми*, и тем самым покрытие $\mathcal{Q}(k)$ будет построено.

Каждое покрытие $\mathcal{Q}(k)$ обладает *следующими свойствами* (см. [13; лемма 2.1]), вытекающими из построения.

- (1) Разложим все квадраты покрытия $\mathcal{Q}(k)$ на группы так, чтобы каждая группа располагалась в своем вертикальном ряду. Тогда проекции групп на ось x_1 не имеют общих внутренних точек, а цвет квадратов в каждой группе одинаков. Если группа состоит из белых квадратов, то их не более двух, причем соседних, а если из красных, то не более четырех $Q_k^{m_1, m_2}$, причем индекс m_2 отличается не более, чем на 3. Длина стороны белого квадрата равна 2^{-k} , а красного – не меньше 2^{-k} .
- (2) Пусть $Q_k^{m_1, m_2}$ и $Q_k^{m_1+1, n_2}$ – квадраты поколения k в соседних вертикальных рядах. Тогда $|m_2 - n_2| \leq 3$, а если оба квадрата белые, то $|m_2 - n_2| \leq 1$.
- (3) Если в вертикальном ряду есть красный квадрат, то существует согласованная пара красных квадратов, один из которых находится в том же вертикальном ряду, а другой – в том же вертикальном ряду или в соседнем.
- (4) Пусть Q и Q' – квадраты из $\mathcal{Q}(k)$ с центрами соответственно (x_1, x_2) и (x'_1, x'_2) , находящиеся в различных вертикальных рядах. Тогда $|x'_2 - x_2|/|x'_1 - x_1| < 7$.

Напомним доказательство свойств (1)–(4) (см. [13; § 3]).

Рассмотрим свойство (1). Если красный квадрат Q включен в $\mathcal{Q}(k)$, то вместе с ним в $\mathcal{Q}(k)$ включены и все квадраты, пересекающие $\mathcal{X}$, из того же вертикального ряда, причем все они красные. Белые квадраты в $\mathcal{Q}(k)$ имеют минимально возможный размер как квадраты поколения k ; их не может быть более двух в вертикальном ряду (причем соседних), так как они появляются только после исчерпания множества согласованных пар. Красные квадраты в вертикальном ряду являются следующим поколением не более чем двух соседних белых квадратов (и m_2 отличается не более, чем на 3).

Свойство (2) по индукции следует из того, что белые квадраты в покрытиях $\mathcal{Q}(k)$ и $\mathcal{Q}(k-1)$ не образуют согласованных пар.

Свойство (3) очевидно из построения.

Для доказательства свойства (4) возьмем максимальный номер $k_1 \leq k$ такой, что в покрытии $\mathcal{Q}(k_1)$ два квадрата Q_1 и Q'_1 поколения k_1 , содержащие соответственно Q и Q' , находятся в соседних вертикальных рядах. Возможны два случая:

- 1) $Q = Q_1$ или $Q' = Q'_1$;
- 2) Q_1 и Q'_1 белые в $\mathcal{Q}(k_1)$, а квадраты поколения $k_1 + 1$, содержащие Q и Q' , уже не находятся в соседних вертикальных рядах.

В каждом из случаев, как нетрудно проверить, воспользовавшись свойством (2), получаем $|x'_2 - x_2|/|x'_1 - x_1| < 7$. Свойства (1)–(4) установлены.

Теперь определим “глобальный момент остановки”. Зафиксируем k_0 – минимальный номер k , для которого выполнено условие

$$\omega(2^{-k_0}) < \sum_{\text{согл}} s(Q), \quad (4.1)$$

где $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности функции g в $\mathbb{R}^2$, а правая часть неравенства понимается так: по всем согласованным парам красных квадратов (Q, Q') суммируется длина стороны $s(Q)$ (ясно, что сумма $s(Q)$ по всем красным квадратам Q не превосходит $8 \sum_{\text{согл}} s(Q)$). Так как компакт $\mathcal{X}$ – замыкание непустого открытого множества (и в силу свойства (1) не может быть для всех k покрыт только белыми квадратами), то требуемый номер k_0 существует.

Зафиксировав k_0 , определим следующую ломаную. Выберем в каждом вертикальном ряду покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ по одному квадрату. Проведем через центры выбранных квадратов ломаную, обозначим ее Γ ; пусть $x_2 = \Psi(x_1)$ – уравнение Γ . Ясно (в силу свойств (1) и (4) покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$), что имеют место следующие свойства ломаной Γ :

$$|\Psi'(x_1)| < 7 \text{ и для всех } Q \text{ из } \mathcal{Q}(k_0) \text{ выполнено условие } \text{dist}(Q, \Gamma) \leq 2.5s(Q).$$

С помощью покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ количественно уточним формулировку леммы 3.7. Пусть $Q' = Q_k^{n_1, n_2}$ и $Q'' = Q_k^{m_1, m_2}$ – согласованная пара красных квадратов, для которой будем считать, что $m_2 > n_2$ (иначе говоря, Q'' расположен “выше” Q'), $t' = (x'_1, x'_2) \in 1.01Q'$ и $t'' = (x''_1, x''_2) \in 1.01Q''$ – соответствующая пара точек из $\mathcal{X}_o$, ΩE – ограниченная линейная комбинация частных производных E порядка $n - 2$ из леммы 3.7. Рассмотрим функции следующего вида:

$$r_v(x) = \sum_j \lambda_j (\Omega E(x - t''_j) - \Omega E(x - t'_j)), \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad (4.2)$$

где суммирование проводится по всем согласованным парам красных квадратов покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$.

Ясно, что $r_v(x) = O(|x|^{-1})$ при $x \rightarrow \infty$, и при разложении r_v в ряд Лорана могут быть отличны от нуля только два коэффициента порядка $n - 1$: при $\partial(\Omega E)/\partial x_1$ и $\partial(\Omega E)/\partial x_2$ (последний обозначен в лемме 3.7 как c_v). Заметим, что в силу определения согласованной пары

$$c_v(\Omega E(x - t'') - \Omega E(x - t')) = x'_2 - x_2 > 0.98s(Q'),$$

и если $\lambda_j = 1$ при всех j , то $c_v(r_v) > 0.98 \sum_{\text{согл}} s(Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Случай $\min(n_+, n_-) \geq 2$ требует некоторых пояснений. Здесь (см. лемму 3.5) частные производные первого порядка функций

$$\left(\frac{\partial^{n_- - 2}}{\partial x_2^{n_- - 2}} \right) L_+ E, \quad \left(\frac{\partial^{n_+ - 2}}{\partial x_2^{n_+ - 2}} \right) L_- E$$

по x_1 и x_2 линейно независимы и включены в набор базисных функций для разложения частных производных E порядка $n - 1$. Поэтому для

$$\Omega E' = \left(\frac{\partial^{n_- - 2}}{\partial x_2^{n_- - 2}} \right) L_+ E$$

выполнено условие $c_v''(r_v) = 0$, а для

$$\Omega E'' = \left(\frac{\partial^{n_+ - 2}}{\partial x_2^{n_+ - 2}} \right) L_- E$$

выполнено $c_v'(r_v) = 0$ (в обозначениях леммы 3.4 при $\min(n_+, n_-) \geq 2$ и леммы 3.7), следовательно, для уравнивания коэффициентов c_v' и c_v'' указанные функции ΩE (и соответствующие им r_v) можно использовать независимо друг от друга.

Для доказательства леммы 3.7 функции r_v недостаточно, так как $|c_v(g)|$ может значительно превышать $\sum_{\text{согл}} s(Q)$. Недостаточно, оказывается, и покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$, нам понадобятся его вариации $\mathcal{Q}'(k_0)$.

Каждое покрытие $\mathcal{Q}'(k_0)$ состоит из двух частей:

- 1) некоторое подмножество квадратов покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$;
- 2) множество *новых красных квадратов* $\tilde{Q}$ со следующими свойствами:
 - (i) $s(\tilde{Q}) > 2^{-k_0}$ и сумма $s(\tilde{Q})$ по всем $\tilde{Q}$ меньше $\sum_{\text{согл}} s(Q)$;
 - (ii) для каждого $\tilde{Q}$ выполнено условие $\text{dist}(\tilde{Q}, \Gamma) \leq 2.5s(\tilde{Q})$;
 - (iii) каждая прямая, параллельная оси x_2 , может проходить через внутренние точки не более семи квадратов $\tilde{Q}$, причем обязательно одного размера.

Получим оценки, имеющие место для любого покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$ (нужное покрытие определим ниже). Пусть $\{Q_j\} = \{Q_j(a_j, s_j)\}$ – множество всех квадратов покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$, φ_j – разбиение единицы из леммы 1.1, подчиненное этому покрытию. В силу леммы 1.3, формул (1.2), (1.3) и (1.8) функция g представима в следующем виде:

$$g = \sum_j V_{\varphi_j^{s_j}} g + \tilde{E}_1(g), \quad (4.3)$$

где $\tilde{E}_1(g)$ – многочлен степени не выше $n - 2$. В силу оценки (3.4) для каждого квадрата Q_j найдутся точки $a_{1,j}$ и $a_{2,j}$ из $2Q_j \cap \mathcal{X}_o$ и функция $G_{1,j}$, $\text{Spt } LG_{1,j} = \{a_{1,j}, a_{2,j}\}$, такие, что для разности $r_j = V_{\varphi_j^{s_j}} g - G_{1,j}$ имеет место оценка

$$|r_j(x)| \leq A\omega(s_j) \min\left(1, \frac{s_j}{|x - a_j|}\right). \quad (4.4)$$

Отсюда в силу леммы 1.4, свойства (1) покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$, свойства (i) покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$ и условия (4.1) следует, что для всех α , $|\alpha| = n - 1$,

$$|c_\alpha(r_j)| \leq A\omega(s_j)s_j, \quad \sum_j |c_\alpha(r_j)| < A \sum_{\text{согл}} s(Q), \quad (4.5)$$

причем указанные коэффициенты (как старшие) не зависят от центра разложения функции в ряд Лорана.

Если бы в случае произвольного компакта $\mathcal{X}$ для покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ в $\mathbb{R}^2$ выполнялись оценки $|r_v(x)| \leq A$, где $\lambda_j = 1$ при всех j , и $|\sum_j r_j(x)| \leq A$, то в силу (4.5) доказательство леммы 3.7 было бы завершено; к сожалению, равномерной ограниченности может и не быть.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Каждая из функций $\partial^\alpha E$ при $|\alpha| = n - 1$ представляет собой ядро Кальдерона–Зигмунда, вещественно аналитическое в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, однородное степени -1 и антисимметричное (ее преобразование Фурье – однородная рациональная функция степени -1). Так как пары точек t'_j и t''_j из (4.2) расположены “вблизи” липшицевой кривой Γ , то конструктивный выбор функции r_v такой, что $|r_v(x)| \leq 1$ и $c_v(r_v) > A \sum_{\text{согл}} s(Q)$, представляет собой дискретный аналог известной нерешенной задачи (см., например, [23]): построить непостоянную ограниченную функцию, аналитическую вне множества положительной длины, заданного на липшицевой кривой. Конструктивно выбрать пары точек $a_{1,j}$ и $a_{2,j}$ так, чтобы выполнялась оценка $|\sum_j r_j(x)| \leq A$, представляется еще более сложным, так как структура функции не задана явно, а зависит от покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$.

Поэтому лемма 3.7 доказывается по той же схеме, что и теорема 2, с использованием леммы 2.1. Подготовим формулировку леммы 4.1, в которой устанавливается оценка, аналогичная (2.3).

Пусть $\mathbf{D} = 3Q_0$, $\nu \in L_1(\mathbf{D}, dm)$ – произвольная неотрицательная функция такая, что

$$\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm(x) = 0.01 \sum_{\text{согл}} s(Q).$$

Для леммы 4.1 нам понадобятся специальное покрытие $\mathcal{Q}'(k_0)$ и функция r_v из (4.2), зависящие от ν . Преобразование $\mathcal{Q}(k_0)$ в $\mathcal{Q}'(k_0)$ состоит из трех этапов и аналогично построению покрытия $\{Q_j\}$ для теоремы 2 (но несколько сложнее).

1-й этап. Применим к $\mathbf{D}$, ν и $M = 1$ двоичное разложение Кальдерона–Зигмунда.

Первое поколение квадратов – девять равных двоичных квадратов со стороной 1, составляющих $\mathbf{D}$.

Пусть D – квадрат какого-либо поколения и $s(D) > 2^{-k_0}$. Если

$$\int_D \nu(x) dm(x) > s(D),$$

то D объявляется плохим (D^b) и фиксируется, иначе он делится на четыре двоичных квадрата следующего поколения со стороной $s(D)/2$.

Квадраты со стороной 2^{-k_0} объявляются хорошими (D^g) и фиксируются.

2-й этап. Для всех D^b возьмем по девять равных двоичных квадратов, составляющих $3D^b$, из полученного семейства исключим все квадраты, не являющиеся максимальными по включению, а оставшиеся квадраты назовем *отмеченными*.

Из построения вытекают следующие свойства D^g , D^b и отмеченных квадратов:

- (1) для любого двоичного квадрата D , содержащего хотя бы один квадрат D^g или D^b , выполнено неравенство

$$\int_D \nu(x) dm(x) \leq 4s(D);$$

(2) сумма $s(D)$ по всем квадратам D^b не превышает

$$\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm(x) = 0.01 \sum_{\text{согл}} s(Q)$$

(а по всем отмеченным квадратам соответственно $0.09 \sum_{\text{согл}} s(Q)$).

Теперь определим нужную функцию $r_v(x) = r_v(x, \nu)$. В обозначениях (4.2)

$$r_v(x) = \sum_j' (\Omega E(x - t_j'') - \Omega E(x - t_j')), \quad (4.6)$$

где суммирование ведется только по таким согласованным парам, в которых ни один квадрат не является собственной частью какого-либо отмеченного квадрата. Ясно, что $c_v(r_v) > 0.8 \sum_{\text{согл}} s(Q)$.

3-й этап. Задача состоит в таком увеличении некоторых квадратов $\mathcal{Q}(k_0)$, чтобы ни один из квадратов полученного покрытия не был собственной частью отмеченного квадрата, увеличенные квадраты располагались “достаточно регулярно” и их было “не слишком много”.

Для этого рассмотрим множество всех двоичных отрезков оси x_1 , являющихся проекциями квадратов $\mathcal{Q}(k_0)$ или отмеченных квадратов; исключим из этого множества все отрезки, не являющиеся максимальными по включению. Ясно, что для оставшихся отрезков сумма длин проекций отмеченных квадратов не превосходит $0.03 \sum_{\text{согл}} s(Q)$. Составим покрытие $\mathcal{Q}'(k_0)$ так: для каждого из оставшихся отрезков включим в $\mathcal{Q}'(k_0)$ все квадраты соответствующего вертикального ряда, пересекающие $\mathcal{X}$; квадраты $\mathcal{Q}'(k_0)$, не включенные ранее в $\mathcal{Q}(k_0)$, назовем новыми красными.

Напомним, что для каждого квадрата Q покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ выполнено условие $\text{dist}(Q, \Gamma) \leq 2.5s(Q)$; очевидно, оно выполняется и для увеличенных квадратов покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$; в частности, в каждом вертикальном ряду $\mathcal{Q}'(k_0)$ не более семи квадратов.

Таким образом, для новых красных квадратов выполняются свойства (i)–(iii). Построение покрытия $\mathcal{Q}'(k_0) = \mathcal{Q}'(k_0, \nu)$ завершено.

ЛЕММА 4.1. Для построенного покрытия $\mathcal{Q}'(k_0, \nu)$ и функции r_v из (4.6) выполнена оценка

$$\int_{\mathbf{D}} \left(\left| \sum_j r_j(x) \right| + |r_v(x)| \right) \nu(x) dm(x) < A \sum_{\text{согл}} s(Q).$$

Из леммы 4.1 и леммы 2.1 следует лемма 3.7. Действительно, в силу леммы 2.1 аналогично (2.2) установим, что найдутся функция r_v вида (4.2) и функция Ψ , где $L\Psi = 0$ вне конечного множества точек $\mathcal{X}_o$, такие, что:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} r_v(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (\Psi(x) - g(x)) = 0$;
- 2) $\max(|r_v(x)|, |\Psi(x) - g(x)|) \leq A$ на $\mathbf{D}$ (в силу леммы 1.4 аналогичная оценка верна и в $\mathbb{R}^2$);
- 3) $c_v(r_v) > 0.8 \sum_{\text{согл}} s(Q)$ и при $|\alpha| = n - 1$ (в силу (4.5)) $|c_\alpha(\Psi - g)| < A_1 \sum_{\text{согл}} s(Q)$.

Затем с помощью функции r_v уравнием коэффициент c_v у разности $\Psi - g$ (в случае $\min(n_+, n_-) \geq 2$ нужно воспользоваться замечанием 4.1 и уравнивать c_v' и c_v''), после чего лемма 3.7 будет установлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Лемма доказывается во многом аналогично оценке (2.3); для $|\sum_j r_j|$ и $|r_v|$ применяются одни и те же аргументы и оценки,

только для $|r_v|$ нужно использовать часть множества красных квадратов (согласованные пары), а не все покрытие.

Для каждого квадрата D из $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ рассмотрим (как и в лемме 2.3) функцию

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{\chi_D(x)}{m(D)} \int_D \nu(y) dm(y).$$

В силу свойства (1) семейства $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ для любого двоичного квадрата Q выполнено неравенство

$$\int_Q \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq 4s(Q).$$

Повторением (почти дословным) доказательства леммы 2.3 получается следующая оценка:

$$\left| \int_D \left(\left| \sum_j r_j(x) \right| + |r_v(x)| \right) (\nu(x) - \tilde{\nu}(x)) dm(x) \right| < A_1 \sum_{\text{согл}} s(Q) \quad (4.7)$$

(в силу свойства (1) покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ и свойства (iii) новых красных квадратов это фактически частный случай леммы 2.3 при $d = 1$ и $M = 1$, также в (4.7)

другая нормировка: интеграл $\int_D \nu(x) dm(x)$ равен $0.01 \sum_{\text{согл}} s(Q)$, а не 1, как в лемме 2.3).

Теперь (следуя схеме доказательства (2.3)) получим аналог леммы 2.4. Пусть $Q_j = Q_k^{m_1, m_2}$ – произвольный квадрат покрытия $\mathcal{Q}'(k_0)$, $\gamma(Q_j)$ – часть ломаной Γ при $x_1 \in [m_1 2^{-k}, (m_1 + 1) 2^{-k}]$. Будет удобно в технических целях заменить каждую ломаную $\gamma(Q_j)$ (возможно, содержащую много звеньев) отрезком, соединяющим ее концы. “Подправленную” таким способом ломаную Γ обозначим Γ_1 , и пусть $x_2 = \tilde{\Psi}(x_1)$ – ее уравнение. Ясно (в силу свойств Γ), что $|\tilde{\Psi}'(x_1)| < 7$ и $\text{dist}(Q_j, \Gamma_1) \leq 2.5s(Q_j)$.

Пусть $\Delta = [m_1 2^{-k}, (m_1 + 1) 2^{-k}]$ – проекция $Q_j = Q_k^{m_1, m_2}$ из $\mathcal{Q}'(k_0)$ на ось x_1 . В силу свойств $\partial^\alpha E$ при $|\alpha| = n - 1$ (замечание 4.2) найдется функция $\psi \in C_{0,n}^\infty(\Delta)$ такая, что $\int_\Delta \psi(x_1) dx_1 = 2^{-k} = s_j$ и $|\text{T}^\alpha \psi(x)| < A$ в $\mathbb{R}^2$, где (аналогично (2.9))

$$\text{T}^\alpha \psi(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x_1 - y_1| > \varepsilon} \partial^\alpha E(x_1 - y_1, x_2 - \tilde{\Psi}(y_1)) \psi(y_1) dy_1. \quad (4.8)$$

Аналогично (2.10) для каждой функции r_j из (4.4), соответствующей Q_j , определим видоизмененную функцию $\tilde{r}_j$ (где ψ_j – функция со свойствами ψ из (4.8)):

$$\tilde{r}_j = \sum_{|\alpha|=n-1} (s_j)^{-1} c_\alpha(r_j) \text{T}^\alpha \psi_j. \quad (4.9)$$

Из $\text{dist}(Q_j, \Gamma_1) \leq 2.5s(Q_j)$ и (4.5) следует, что

$$|r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \leq A\omega(s_j) \min\left(1, \frac{(s_j)^2}{|x - a_j|^2}\right). \quad (4.10)$$

Так как $\int_Q \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq 4s(Q)$ для любого двоичного квадрата Q , то

$$\int_D |r_j(x) - \tilde{r}_j(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq A_1 \omega(s_j) s_j. \quad (4.11)$$

Так же, как и для r_j , для каждой функции $\Omega E(x - t_j'') - \Omega E(x - t_j')$ построим видоизмененную функцию $\tilde{r}_{v,j}$ вида (4.9), где $\text{Spt } \psi_j$ – проекция какого-либо квадрата $Q_j' = Q_k^{m_1, m_2}$ согласованной пары на ось x_1 , $|\psi_j(x)| \leq A$ и

$$|E(x - t_j'') - \Omega E(x - t_j') - \tilde{r}_{v,j}(x)| \leq A \min\left(1, \frac{s(Q_j')^2}{|x - t_j'|^2}\right).$$

Обозначим $\sum_{\text{согл}} s(Q)$ через C . Напомним, что в силу (4.1), свойств покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ и новых красных квадратов имеют место следующие оценки: $\omega(2^{-k_0}) < C$ (где 2^{-k_0} – длина стороны белого квадрата) и сумма $s(Q)$ по всем красным квадратам покрытия $\mathcal{Q}(k_0)$ меньше $9C$. Поэтому из (4.11) и аналогичной оценки для $\tilde{r}_{v,j}$ получим

$$\int_{\mathbf{D}} \left(\left| \sum_j r_j(x) - \sum_j \tilde{r}_j(x) \right| + \left| r_v(x) - \sum_j' \tilde{r}_{v,j}(x) \right| \right) \tilde{\nu}(x) dm(x) < A_1 C.$$

Окончательно с учетом структуры функций $\tilde{r}_j$ и $\tilde{r}_{v,j}$ для доказательства леммы 4.1 достаточно установить следующую оценку (4.12). Пусть для $x_1 \in [0, 1]$ $\Phi(x_1)$ – функция (имеющая смысл суммы всех $(s_j)^{-1} c_\alpha(r_j) \psi_j$ из (4.9) для произвольного α , $|\alpha| = n - 1$) такая, что

$$|\Phi(x_1)| < A, \quad \int_0^1 |\Phi(x_1)| dx_1 < AC;$$

T^α – оператор из (4.8). Тогда

$$\int_{\mathbf{D}} |T^\alpha \Phi(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) < A_2 C, \quad (4.12)$$

где, напомним,

$$\tilde{\nu}(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) = 0.01C, \quad \int_B \tilde{\nu}(x) dm(x) \leq Ar(B)$$

для любого круга B ; $T^\alpha \Phi$ – оператор Кальдерона–Зигмунда с антисимметричным ядром $\partial^\alpha E$, однородным степени -1 .

Но в силу неравенства Коши–Буняковского, L_2 -ограниченности оператора T^α на липшицевой кривой Γ_1 , т.е. оценки

$$\int_{\Gamma_1} |T^\alpha \Phi(x(s))|^2 ds(\Gamma_1) \leq A \int_0^1 |\Phi(x_1)|^2 dx_1,$$

и карлесоновости меры $\tilde{\nu} dm$ (см., например, [24; ч. 3, лемма 2.5 и теорема 4.2]) получим (рассуждая так же, как в конце § 2)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}} |T^\alpha \Phi(x)| \tilde{\nu}(x) dm(x) &\leq \left(\int_{\mathbf{D}} \tilde{\nu}(x) dm(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{D}} |T^\alpha \Phi(x)|^2 \tilde{\nu}(x) dm(x) \right)^{1/2} \\ &< A_3 C^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} |T^\alpha \Phi(x(s))|^2 ds(\Gamma_1) \right)^{1/2} \\ &< A_4 C^{1/2} \left(\int_0^1 |\Phi(x_1)|^2 dx_1 \right)^{1/2} < A_5 C. \end{aligned}$$

Оценка (4.12) установлена, а вместе с ней доказана лемма 4.1.

Список литературы

- [1] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [2] Е. П. Долженко, “О приближении на замкнутых областях и о нуль-множествах”, *Докл. АН СССР*, **143**:4 (1962), 771–774; англ. пер.: E. P. Dolženko, “Approximation on closed regions and zero-sets”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 472–475.
- [3] Н. Н. Тарханов, *Ряд Лорана для решений эллиптических систем*, Наука, Новосибирск, 1991; англ. пер.: N. N. Tarkhanov, *The analysis of solutions of elliptic equations*, Math. Appl., **406**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [4] L. I. Hedberg, “Two approximation problems in function spaces”, *Ark. Mat.*, **16**:1 (1978), 51–81.
- [5] А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений”, *УМН*, **22**:6(138) (1967), 141–199; англ. пер.: A. G. Vitushkin, “The analytic capacity of sets in problems of approximation theory”, *Russian Math. Surveys*, **22**:6, 139–200.
- [6] М. В. Келдыш, “О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле”, *УМН*, 1941, №8, 171–231; англ. пер.: M. V. Keldych, “On the solvability and stability of the Dirichlet problem”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **51** (1966), 1–73.
- [7] J. Deny, “Systèmes totaux de fonctions harmoniques”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **1** (1949), 103–113.
- [8] J. Mateu, Y. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, “BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46**:4 (1996), 1057–1081.
- [9] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 123–144; англ. пер.: P. V. Paramonov, K. Yu. Fedorovskii, “Uniform and C^1 -approximability of functions on compact subsets of $\mathbb{R}^2$ by solutions of second-order elliptic equations”, *Sb. Math.*, **190**:2 (1999), 285–307.
- [10] J. Verdera, “On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator”, *Pacific J. Math.*, **159**:2 (1993), 379–396.
- [11] J. Verdera, “The uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator”, *Linear and complex analysis. Problem book 3*, Lecture Notes in Math., **1574**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994, 122–123.
- [12] М. Я. Мазалов, “Равномерное приближение функций, непрерывных на произвольном компакте в $\mathbb{C}$ и аналитических внутри компакта, функциями, бианалитическими в его замыкании”, *Матем. заметки*, **69**:2 (2001), 245–261; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “Uniform approximation of functions continuous on a compact subset of $\mathbb{C}$ and analytic in its interior by functions bianalytic in its neighborhoods”, *Math. Notes*, **69**:1–2 (2001), 216–231.
- [13] М. Я. Мазалов, “О равномерных приближениях бианалитическими функциями на произвольных компактах в $\mathbb{C}$ ”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 79–102; англ. пер.: M. Ya. Mazalov, “Uniform approximations by bianalytic functions on arbitrary compact subsets of $\mathbb{C}$ ”, *Sb. Math.*, **195**:5–6 (2004), 687–709.
- [14] R. Harvey, J. Polking, “Removable singularities of solutions of linear partial differential equations”, *Acta Math.*, **125**:1 (1970), 39–56.
- [15] J. Verdera, “ C^m approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators”, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 157–187.

- [16] П. В. Парамонов, “О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме”, *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1341–1365; англ. пер.: P. V. Paramonov, “On harmonic approximation in the C^1 -norm”, *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 183–207.
- [17] П. В. Парамонов, “Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями”, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 97–112; англ. пер.: P. V. Paramonov, “Some new criteria for uniform approximability of functions by rational fractions”, *Sb. Math.*, **186**:9 (1995), 1325–1340.
- [18] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [19] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [20] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [21] С. В. Колесников, “Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости последовательности полиномов”, *Матем. сб.*, **124(166)**:4(8) (1984), 568–570; англ. пер.: S. V. Kolesnikov, “On a theorem of M. V. Keldysh concerning pointwise convergence of a sequence of polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **52**:2 (1985), 553–555.
- [22] Г. Е. Шиллов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, М., 1965; англ. пер.: G. E. Shilov, *Mathematical analysis. A special course*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris, 1965.
- [23] P. W. Jones, “Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure”, *Harmonic analysis and partial differential equations* (El Escorial, Spain, 1987), Lecture Notes in Math., **1384**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1989, 24–68.
- [24] G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Math., **1465**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

М. Я. Мазалов (M. Ya. Mazalov)

Военная академия войсковой противовоздушной обороны
Вооруженных Сил Российской Федерации
им. Маршала Советского Союза А. М. Василевского,
г. Смоленск
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступила в редакцию

22.05.2007