Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 129–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:04:56

УДК 517.547.2+517.538.2+517.581+517.574

Б. Н. Хабибуллин**Последовательность нулей голоморфных функций,
представление мероморфных функций.****II. Целые функции**

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, f – ненулевая целая функция конечного типа σ при конечном порядке ρ такая, что $f = 0$ на Λ . Получены оценки сверху на тип канонического произведения Вейерштрасса–Адамара порядка ρ , построенного по последовательности Λ . Аналогичные оценки выведены и для мероморфных функций. Эти результаты использованы для оценок радиуса полноты системы экспонент в $\mathbb{C}$.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: целая функция, последовательность нулей, субгармоническая функция, радиус полноты, система экспонент.

Введение. Формулировки основных теорем

В настоящей работе используются обозначения и терминология, близкие к стандартным в теории голоморфных, целых, мероморфных и субгармонических функций, а также широко известные факты из монографий [1]–[4]. Последовательности в области или на плоскости, а также отношения и обозначения, связанные с ними, понимаются так же, как в [5]. Основным результатом настоящей работы, являющейся продолжением [5], являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $q := [\rho]$ – целая часть ρ , а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – подпоследовательность нулей некоторой ненулевой целой функции f , удовлетворяющей оценке

$$|f(z)| \leq A \exp(\sigma|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (0.1)$$

где $A \geq 0$ – некоторая постоянная.

Тогда для некоторой целой функции f_Λ с последовательностью нулей Λ (в частности, для канонического произведения Адамара порядка ρ , построенного по Λ) найдется постоянная B такая, что имеет место ограничение

$$|f_\Lambda(z)| \leq B \exp(\sigma(1 + I_\rho)|z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (0.2)$$

где

$$I_\rho := \rho^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\log \sqrt{1 - 2s \cos \psi + s^2} - \sum_{k=1}^q \frac{s^k}{k} \cos k\psi \right)^+ d\psi \right) \frac{ds}{s^{\rho+1}} \quad (0.3)$$

и принято обозначение $a^+ := \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00067а) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-10052.2006.1).

В частности, если $0 < \rho < 1$ и Γ – гамма-функция Эйлера, то

$$1 + I_\rho = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2)}{2^\rho \sqrt{\pi} \Gamma(1 - \rho/2)} = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \frac{1}{l(\rho)} < \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho}, \quad (0.4)$$

где функция $l(\rho) := \Gamma(1 + \rho)(\Gamma(1 - \rho/2))^2$ строго возрастает на $[0, 1]$ от 1 до π .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho > 0$, $\sigma > 0$ и мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $f = g/h$ представима в виде отношения пары целых функций g, h ($\max\{|g(0)|, |h(0)|\} \neq 0$), удовлетворяющей оценке

$$|g(z)| + |h(z)| \leq A \exp(\sigma |z|^\rho), \quad z \in \mathbb{C},$$

где $A \geq 0$ – некоторая постоянная.

Тогда найдутся пара целых функций g_0, h_0 без общих нулей и постоянная $B \geq 0$, для которых справедливо представление $f = g_0/h_0$ на $\mathbb{C}$ и при всех $z \in \mathbb{C}$

$$|g_0(z)| + |h_0(z)| \leq B \exp(\sigma(1 + I_\rho)|z|^\rho). \quad (0.5)$$

При целых $\rho > 0$ оценки (0.2) и (0.5) не являются содержательными, поскольку в этом случае интеграл в (0.3) расходится, т.е. $I_\rho = +\infty$ при любом натуральном ρ . На простых примерах можно убедиться в том, что в случае целых $\rho > 0$ оценки I_ρ через конечную величину и невозможны (см. примеры 1 и 2 в § 2). Однако при нецелых ρ величины I_ρ всегда конечны. В § 1 даны следствия 1 и 2 из теорем 1 и 2 соответственно. Эти следствия в случае $0 < \rho < 1$ позволяют продемонстрировать преимущества приведенных выше оценок над результатами, получаемыми классическим, или традиционным, методом в § 2, основанным на стандартных оценках бесконечных произведений Вейерштрасса–Адамара (см. замечание в конце § 2).

Теоремы 1 и 2 доказаны в § 3. В §§ 1, 4 эти теоремы применены к исследованию полноты систем экспонент в пространствах функций, голоморфных в круге. В § 5 построен специальный пример системы экспонент. Наконец, в заключительном § 6 намечены пути определенного упрощения громоздкого интеграла I_ρ , идейно близкие подходам, примененным Данжуа для исследования аналитических свойств канонического ядра Вейерштрасса [6] и Гольдбергом для исследования оценок канонических произведений [7].

Автор благодарен рецензентам за полезные замечания и А. Ю. Попову за ценные обсуждения, результаты которого при порядке $\rho < 1$, но для положительных последовательностей Λ (см. [8], а также перечень новых результатов в этой области в работе [9]), в некотором смысле аналогичны результатам настоящей работы.

§ 1. Определения, формулировки некоторых следствий из теорем 1 и 2 и результатов о полноте

Всюду далее $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – не более чем счетная последовательность точек на $\mathbb{C}$ без предельных точек в $\mathbb{C}$. Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Через n_Λ обозначим считающую функцию последовательности Λ , т.е. $n_\Lambda(r)$ – число точек λ_k в замыкании $\overline{D}(r)$ круга $D(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.

Пусть $\rho \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Положим

$$\overline{D}(\Lambda; \rho) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \quad \overline{D}(\Lambda) := \overline{D}(\Lambda; 1) \quad (1.1)$$

– верхняя плотность последовательности Λ при порядке ρ и просто верхняя плотность последовательности Λ соответственно. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \Lambda$, поскольку такое ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. При этом соглашении

$$N_\Lambda(r) := \int_0^r n_\Lambda(t) \frac{dt}{t}, \quad r \geq 0, \quad (1.2)$$

– усредненная или проинтегрированная считающая функция последовательности Λ . Ее верхняя усредненная плотность при порядке ρ определяется как

$$\overline{D}_M(\Lambda; \rho) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} N_\Lambda(r), \quad \overline{D}_M(\Lambda) := \overline{D}_M(\Lambda; 1) \quad (1.3)$$

– просто верхняя усредненная плотность Λ . Легко видеть, что неравенство $\overline{D}_M(\Lambda; \rho) \leq \overline{D}(\Lambda; \rho)/\rho$ справедливо при любых $\rho > 0$ для всех $\Lambda \not\equiv 0$.

Класс всех целых (соответственно мероморфных) функций в $\mathbb{C}$ обозначим через Ent (соответственно Mer). Для $f \in \text{Ent}$ через Zero_f обозначим последовательность всех нулей функции f , перенумерованных с учетом их кратности.

Для $0 < \rho < +\infty$ и $0 < \sigma \leq +\infty$ введем класс (векторное пространство)

$$\text{Ent}[\rho, \sigma] := \left\{ f \in \text{Ent} : \sigma_f := \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{|z|^\rho} < \sigma \right\}$$

всех целых функций f , имеющих тип σ_f меньше чем σ при порядке ρ .

Обозначим через $\sigma(\Lambda, \rho)$ (соответственно через $\sigma^*(\Lambda, \rho)$) точную нижнюю грань¹ чисел $\sigma > 0$, при которых Λ – последовательность (соответственно подпоследовательность) нулей для какой-либо целой функции $f_\sigma \not\equiv 0$, имеющей тип не более σ при порядке ρ . В другой форме

$$\sigma(\Lambda, \rho) := \inf \{ \sigma \in (0, +\infty] : \exists f \in \text{Ent}[\rho, \sigma], \text{Zero}_f = \Lambda \}, \quad (1.4z)$$

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) := \inf \{ \sigma \in (0, +\infty] : \exists f \in \text{Ent}[\rho, \sigma], f \not\equiv 0, \Lambda \subset \text{Zero}_f \}. \quad (1.4s)$$

Очевидно, что по определению выполнено неравенство $\sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \sigma(\Lambda, \rho)$.

ЗАДАЧА 1. Оценить $\sigma(\Lambda, \rho)$ сверху через $\sigma^*(\Lambda, \rho)$.

Для нецелых значений ρ при условии $\overline{D}(\Lambda; \rho) < +\infty$, необходимым и достаточным для конечности $\sigma(\Lambda, \rho)$, каждая целая функция f_Λ класса $\text{Ent}[\rho, +\infty)$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda = \{\lambda_k\}$ допускает представление Вейрштрасса–Адамара рода² $q = [\rho] \neq \rho$

$$f_\Lambda(z) = C \exp(p(z)) \prod_k \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) \exp \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{k} z^k \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.5)$$

¹ По определению $\inf \emptyset = +\infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$ для пустого множества $\emptyset$.

² При $m > q$ по определению $\sum_{k=m}^q \dots := 0 =: \sum_{k \in \emptyset} \dots$ и $\prod_{k=m}^q \dots := 1 =: \prod_{k \in \emptyset} \dots$.

где $C \in \mathbb{C}$ – какая-либо ненулевая постоянная, а p – многочлен степени не больше q . Таким образом, величина $\sigma(\Lambda, \rho)$ из (1.4z) при нецелом ρ равна типу при порядке ρ конкретного канонического произведения Вейрштрасса–Адамара

$$\prod_k \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{k} z^k\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.6)$$

рода $q = [\rho]$.

Как верно отметили рецензенты, может возникнуть впечатление, что имеет место следующая простая оценка: при условии $\lambda \subset \text{Zero}_f$ тип произведения (1.5) не выше типа функции f . Однако из работы Л. А. Рубела [10] видно, что, например, при $\rho = 1/2$ это утверждение для некоторой целой функции неверно. Нам неизвестны подобные результаты для других порядков ρ и этот интересный вопрос требует отдельного исследования.

Ниже мы приводим один из возможных вариантов решения задачи 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < \rho < +\infty$. Тогда справедливы оценки

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \sigma(\Lambda, \rho) \leq (1 + I_\rho) \sigma^*(\Lambda, \rho), \quad (1.7)$$

где при нецелом ρ число I_ρ определено интегралом (0.3), а при целом ρ полагаем $I_\rho = +\infty$. При этом левая оценка точна при любом ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка в (1.7) уже приводилась выше после формулы 1.4s. Теперь отметим, что при целых ρ возможны ситуации, когда значение $\sigma^*(\Lambda, \rho)$ конечно, но $\sigma(\Lambda, \rho) = +\infty$ (см. пример 1 в § 2). Таким образом, при целом ρ мы не можем, вообще говоря, выбрать значение I_ρ конечным для произвольных Λ . Верхняя оценка при нецелом ρ – очевидное следствие теоремы 1. Наконец, равенство в левой части достигается, что указано в предложении 2 из § 2.

Мы предполагаем, что и правая оценка в 1.7 точна, но доказать этого не можем.

Пусть $0 < \rho < +\infty$. Для функции $f \in \text{Mer}$ через $\sigma^*(f; \rho)$ (соответственно $\sigma(f; \rho)$) обозначим точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, при которых найдутся функции $g_\sigma, h_\sigma \in \text{Ent}[\rho, \sigma)$ (соответственно $g_\sigma, h_\sigma \in \text{Ent}[\rho, \sigma)$ без общих нулей), представляющие $f = g_\sigma/h_\sigma$. Очевидно, что по определению всегда $\sigma^*(f; \rho) \leq \sigma(f; \rho)$.

ЗАДАЧА 2. Оценить $\sigma(f; \rho)$ сверху через $\sigma^*(f; \rho)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для функции $f \in \text{Mer}$ справедливы оценки

$$\sigma^*(f; \rho) \leq \sigma(f; \rho) \leq (1 + I_\rho) \sigma^*(f; \rho). \quad (1.8)$$

При этом левая оценка точна при любом ρ .

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 и следует из примера 2, теоремы 2 и предложения 4.

Приведем в этом параграфе также частный случай основного результата § 4 о радиусе полноты для последовательности точек в $\mathbb{C}$. Обозначим через

$\text{Hol}(\Omega)$ пространство голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек в $\mathbb{C}$. Она порождает систему (кратных) экспонент

$$\text{Exp}_\Lambda := \{z^{p-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq p \leq \Lambda(\lambda), p \in \mathbb{N}\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda(\lambda)$ – число вхождений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательность Λ . Радиус (круга) полноты $R(\Lambda)$ в $\mathbb{C}$ последовательности Λ – это точная верхняя грань радиусов кругов $D(R)$, для которых система экспонент Exp_Λ полна в пространстве $\text{Hol}(D(R))$.

Обзор работ по полноте систем экспонент в основных классических функциональных пространствах, включая оценки радиуса полноты в $\mathbb{C}$, дан в [11]. Оценки радиуса полноты последовательности Λ чаще всего формулируются в терминах различных плотностей распределения точек из Λ . Напомним некоторые из них.

Наряду с верхней и усредненной верхней плотностями $\overline{D}(\Lambda)$ и $\overline{D}_M(\Lambda)$ из (1.1) и (1.3) для последовательности строго положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$ конечной верхней плотности $\overline{D}(\Lambda) < +\infty$ будем рассматривать и верхнюю плотность Пуассона (см. [10], [12])

$$\overline{D}_P(\Lambda) := \frac{1}{\pi} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} \log \left(1 + \frac{y^2}{t^2} \right) dn_\Lambda(t) \quad (1.9W)$$

$$= \frac{2}{\pi} \limsup_{y \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{y^2 + t^2} \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt, \quad (1.9d)$$

где (1.9d) получается из (1.9W) интегрированием по частям. Верхняя плотность Пуассона в (1.9W) порождена (см. [12; п. 8]) каноническим четным произведением Вейерштрасса–Адамара рода 1 по последовательности Λ , определяемым как

$$W(z; \Lambda) := \prod_k \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right), \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

(и без предположения, что $\Lambda \subset (0, +\infty)$), и являющимся при $\overline{D}(\Lambda) < +\infty$ целой функцией экспоненциального типа. Обозначим

$$\sigma_W(\Lambda) := \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |W(z; \Lambda)|}{|z|}.$$

Тогда для типа функции (1.10) при условии $\Lambda \subset (0, +\infty)$ согласно (1.9W) имеет место равенство

$$\sigma_W(\Lambda) = \pi \overline{D}_P(\Lambda). \quad (1.11)$$

В [10], [12] при $\overline{D}(\Lambda) < +\infty$ рассматривается также логарифмическая блок-плотность последовательности $\Lambda \subset (0, +\infty)$, которая задается следующим образом:

$$\overline{D}_L(\Lambda) := \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \sum_{r < \lambda_k \leq ar} \frac{1}{\lambda_k} \quad (1.12s)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{n_\Lambda(t)}{t^2} dt. \quad (1.12i)$$

Другие варианты определения логарифмической блок-плотности вместе с применениями и обобщениями на произвольные последовательности комплексных чисел Λ можно найти в [11; 3.2.1], [13], [14]. Для введенных верхних плотностей известны [10; п. 8] соотношения

$$\overline{D}_L(\Lambda) \leq \overline{D}_P(\Lambda) \leq \overline{D}_M(\Lambda) \leq \overline{D}(\Lambda), \quad \Lambda \subset (0, +\infty), \quad (1.13)$$

где в каждом неравенстве возможен как случай равенства, так и случай строгого неравенства.

Далее в этом параграфе рассматривается последовательность

$$\pm \Lambda := \Lambda \cup (-\Lambda), \quad -\Lambda := \{-\lambda_k\}, \quad \overline{D}(\Lambda) < +\infty. \quad (1.14)$$

В силу известной связи между полнотой и единственностью (см. [1; гл. IV, §§ 6, 7], [2; 3.4], [11; 3.2.1]) с учетом левого неравенства в (1.7) имеем

$$R(\pm\Lambda) = \sigma^*(\pm\Lambda, 1) \leq \sigma(\pm\Lambda, 1) \leq \sigma_W(\Lambda), \quad (1.15)$$

где в случае $\Lambda \subset (0, +\infty)$ вместо последнего неравенства можно даже поставить знак равенства. Для $\Lambda \subset (0, +\infty)$ к элементарным оценкам радиуса полноты $R(\pm\Lambda)$ можно отнести следующие хорошо известные оценки:

$$\frac{2}{\pi e} \pi \overline{D}(\Lambda) = \frac{2}{e} \overline{D}(\Lambda) \leq R(\pm\Lambda) \leq \pi \overline{D}(\Lambda), \quad (1.16D)$$

$$\frac{2}{\pi} \pi \overline{D}_M(\Lambda) = 2 \overline{D}_M(\Lambda) \leq R(\pm\Lambda) \leq \pi \overline{D}_M(\Lambda), \quad (1.16M)$$

$$\pi \overline{D}_L(\Lambda) \leq R(\pm\Lambda), \quad (1.16L)$$

$$R(\pm\Lambda) \leq \pi \overline{D}_P(\Lambda) = \sigma_W(\Lambda), \quad (1.16P)$$

где последнее равенство – это в точности (1.11). Соотношение (1.15) сразу дает верхнюю оценку в (1.16P), откуда в силу (1.13) следуют и верхние оценки из (1.16D) и (1.16M). Все верхние оценки в (1.16) точны. Нижняя оценка в (1.16M) – следствие формулы Йенсена и также точна. Она вместе с точным неравенством $\overline{D}(\Lambda) \leq e \overline{D}_M(\Lambda)$ (см. [15]) дает нижнюю оценку в (1.16D), которая, по-видимому, не точна. Во всяком случае вопрос о точности нижней оценки в (1.16D) открыт. Дополнительная информация по истории оценок (1.16D) изложена в статье [16]. В ней [16; теорема 1] показано, что

[P] в нижней оценке из (1.16D), вообще говоря, нельзя поставить вместо множителя $2/e = 0.73575 \dots$ число 0.8.

Оценка (1.16L) установлена в [12; теорема 9.1] (см. также [11; теорема 3.2.2]), а в ее точности нетрудно убедиться на примере последовательности $\Lambda = \mathbb{N}$. Кроме того, в [12; теорема 8.1] доказано, что при $\Lambda \subset (0, +\infty)$

[M–R] радиус полноты $R(\pm\Lambda)$ равен $\pi \overline{D}_P(\Lambda)$, т.е. типу $\sigma_W(\Lambda)$ при порядке 1 функции (1.10), только тогда, когда $\overline{D}_P(\Lambda) = \overline{D}_L(\Lambda)$.

Поскольку возможно строгое неравенство $\overline{D}_L(\Lambda) < \overline{D}_P(\Lambda)$, то, как не раз отмечалось (см. [10], [12], [16]), возможны и ситуации, когда $R(\pm\Lambda) < \sigma_W(\Lambda) = \pi \overline{D}_P(\Lambda)$. Следующий частный случай основного результата из § 4 (теорема 5 о радиусе полноте) дает неизвестную ранее нижнюю оценку радиуса круга полноты $R(\pm\Lambda)$ через верхнюю плотность Пуассона.

ТЕОРЕМА 3. При $\Lambda \subset (0, +\infty)$ справедливы оценки

$$\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \pi \overline{D}_P(\Lambda) = \sqrt{\pi}(\Gamma(3/4))^2 \overline{D}_P(\Lambda) \leq R(\pm\Lambda) \leq \pi \overline{D}_P(\Lambda), \quad (1.17)$$

где $\pi \overline{D}_P(\Lambda) = \sigma_W(\Lambda)$, а для множителя при $\pi \overline{D}_P(\Lambda)$ в оценке снизу имеем

$$\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = 0.84721 \dots \quad (1.18)$$

Вместе с тем оценку (1.16M) для $R(\pm\Lambda)$ невозможно дополнить оценкой сверху через логарифмическую блок-плотность $\overline{D}_L(\Lambda)$, поскольку для любого числа $R_0 > 0$ найдется последовательность конечной верхней плотности $\Lambda \subset (0, +\infty)$, для которой $R(\pm\Lambda) \geq R_0$, в то время как $\overline{D}_L(\Lambda) = 0$.

Последняя часть теоремы 3 в более общей форме доказана в теореме 6 из § 5, показывающей, что для любого числа $R_0 > 0$ можно построить пример последовательности Λ , для которой система Ehr_Λ не полна в любом пространстве $\text{Hol}(\Omega)$, когда Ω – сколь угодно узкая неограниченная область, содержащая луч, но при этом $R(\pm\Lambda) \geq R_0$.

Неизвестно, точна ли нижняя оценка (1.17), но она вместе с (1.16P) наиболее эффективна в следующем смысле. В качестве меры эффективности определим *относительный зазор* в терминах некоторой плотности распределения точек последовательности Λ из (1.14) для радиуса полноты $R(\pm\Lambda)$ как отношение точной верхней оценки $R(\pm\Lambda)$ через эту плотность к точной нижней через ту же плотность. Чем он меньше, тем информативнее плотность. Преимущества верхней плотности Пуассона в определении границ радиуса полноты $R(\pm\Lambda)$ следуют из того, что

- [D] в терминах верхней плотности $\overline{D}(\Lambda)$ согласно (1.16D) и [P] относительный зазор не может быть меньше, чем $\pi/0.8 = 3.92699 \dots$;
- [M] в терминах усредненной верхней плотности $\overline{D}_M(\Lambda)$ согласно точным оценкам (1.16M) относительный зазор равен $\pi/2 = 1.57079 \dots$;
- [L] в терминах логарифмической блок-плотности $\overline{D}_L(\Lambda)$ по (1.16L) и заключительной части теоремы 3 относительный зазор равен $+\infty$;
- [P] в терминах верхней плотности Пуассона $\overline{D}_P(\Lambda)$ согласно верхней оценке (1.16P) и соотношениям (1.17), (1.18) теоремы 3 относительный зазор не больше, чем $\Gamma(1/4)/(\sqrt{2\pi}\Gamma(3/4)) < 1/0.84721 < 1.180345$.

§ 2. Оценки, получаемые традиционными методами

Е. Целые функции. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ без предельных точек в $\mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [17; теорема 1]). При $\rho > 0$ точны оценки

$$\overline{D}_M(\Lambda; \rho) \leq \sigma^*(\Lambda, \rho) \leq P(\rho) \overline{D}_M(\Lambda; \rho), \quad (2.1)$$

где

$$P(\rho) := \begin{cases} \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} & \text{при } 0 < \rho \leq \frac{1}{2}, \\ \pi\rho & \text{при } \rho \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Вообще говоря, традиционными классическими методами в [17] доказана только левая часть (2.1), а также ее точность, которые по существу только и используются в § 2. Для доказательства правой части (2.1) был использован новый способ, представляющий собой начальную версию метода выметания для исследования (под)последовательностей нулей в весовых классах голоморфных функций. Довольно грубая верхняя оценка для $\sigma^*(\Lambda, \rho)$ через $\overline{D}_M(\Lambda; \rho)$ легко следует из результата А. Ф. Леонтьева [18; гл. III, § 1, лемма 3.1.1], полученного традиционными методами.

ПРИМЕР 1. Покажем, что задача 1 содержательна лишь при нецелых ρ . Для специальной последовательности

$$\Lambda = \{\lambda_k\} \subset (0, +\infty), \quad \lambda_k := \left(\frac{k}{\sigma\rho}\right)^{1/\rho}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

при любом ρ выполнены соотношения

$$(\sigma\rho t^\rho - 1)^+ \leq n_\Lambda(t) = [\sigma\rho t^\rho] \leq \sigma\rho t^\rho, \quad t \geq 0, \quad (2.4n)$$

$$(\sigma r^\rho - 1/\rho)^+ - \log^+ \frac{r}{(\sigma\rho)^{1/\rho}} \leq N_\Lambda(r) \leq \sigma r^\rho, \quad r \geq 0. \quad (2.4N)$$

Из (2.4N) по определению (1.3) имеем $\overline{D}_M(\Lambda; \rho) = \sigma$. По предложению 1 при $\rho \in \mathbb{N}$ для последовательности (2.3) имеем $\sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \pi\rho\sigma < +\infty$. Впрочем, для настоящего примера достаточна и более грубая верхняя оценка Леонтьева, упомянутая выше и также устанавливающая конечность $\sigma^*(\Lambda, \rho)$. В то же время по теореме Линделёфа [1; гл. I, § 11, теорема 15] о типе целой функции при целом порядке ρ имеем $\sigma(\Lambda, \rho) = +\infty$, поскольку не выполнено условие Линделёфа $\sum_{|\lambda_k| \leq r} \lambda_k^{-\rho} = O(1)$, $r \rightarrow +\infty$, и поэтому не существует функции $f \in \text{Ent}[\rho, +\infty)$ с $\text{Zero}_f = \Lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При любом $\rho > 0$ имеют место точные неравенства

$$\overline{D}_M(\Lambda; \rho) \leq \sigma^*(\Lambda, \rho) \leq \sigma(\Lambda, \rho), \quad (2.5)$$

а при $0 < \rho < 1$ справедлива точная оценка

$$\sigma(\Lambda, \rho) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \overline{D}_M(\Lambda; \rho). \quad (2.6)$$

Элементарная оценка (2.6) фактически содержится в несколько схематичной форме в [3; гл. V, § 3, формула (3.31)], но для полноты и независимости изложения приведем здесь ее доказательство, которое достаточно кратко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство в (2.5) – это в точности левое неравенство из (2.1). Правое неравенство в (2.5), как уже отмечалось, есть очевидное следствие определений из § 1. Равенство в нем достигается для любых последовательностей нулей Λ целых функций f вполне регулярного роста при порядке ρ [1; гл. III, § 3, теорема 3] с постоянным индикатором роста $h_f \equiv \sigma$. Это равенство следует из теоремы о сложении индикаторов роста [1; гл. III, § 4, теорема 5] при умножении целых функций, когда одна из них вполне регулярного роста при порядке ρ .

Докажем неравенство (2.6). В предположении $0 < \rho < 1$ и конечности усредненной верхней плотности последовательности считающей функции Λ при порядке ρ , определенной в (1.3), функция

$$f_\Lambda(z) := \prod_k \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda, \quad (2.7)$$

является целой. При $r := |z|$, дважды интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \log |f_\Lambda(z)| &\leq \int_0^\infty \log \left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_\Lambda(t) = \int_0^\infty \frac{r}{r+t} n_\Lambda(t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{r}{r+t} dN_\Lambda(t) \\ &= \int_0^\infty \frac{r}{(r+t)^2} N_\Lambda(t) dt = \int_0^\infty N_\Lambda(rt) \frac{dt}{(1+t)^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

По определению (1.3) для произвольного числа $\sigma > \overline{D}_M(\Lambda; \rho)$ с некоторой постоянной C_σ справедливо неравенство $N_\Lambda(rt) \leq \sigma t^\rho + C_\sigma$ при всех $t > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \log |f_\Lambda(z)| &\leq \sigma r^\rho \int_0^\infty t^\rho \frac{dt}{(1+t)^2} + C_\sigma = \sigma r^\rho \int_0^\infty t^\rho d\left(-\frac{1}{1+t}\right) + C_\sigma \\ &= \sigma r^\rho \rho \int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + C_\sigma = \sigma r^\rho \rho \frac{\pi}{\sin \pi \rho} + C_\sigma, \quad r = |z|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где последний интеграл – это известный интеграл Эйлера [19; п. 74, пример 3]. По определению (1.4z) это дает неравенство (2.6).

Наконец, для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ из (2.3) равенство в (2.6) достигается. Действительно, в этом случае при $z = -r < 0$ в (2.8) неравенство можно заменить на равенство и, кроме того, для функции (2.7) максимум ее модуля всегда достигается на отрицательной полуоси. Повтор цепочки вычислений (2.8), (2.9) с учетом (2.4) дает равенство (2.6), поскольку все другие целые функции f порядка меньше единицы и с $\text{Zero}_f = \Lambda$ могут отличаться от функции f только на постоянный множитель. Это следует из теоремы Адамара [1; гл. I, § 10, теорема 13] о каноническом представлении целой функции порядка ρ .

Из (2.5), (2.6) получаем очевидное

СЛЕДСТВИЕ 3. При $0 < \rho < 1$ справедлива оценка

$$\sigma(\Lambda, \rho) \leq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \sigma^*(\Lambda, \rho). \quad (2.10)$$

М. Мероморфные функции. Всюду в этом пункте для $f \in \text{Mer}$ мы предполагаем без ограничения общности, что $f(0) = 1$.

Далее T_f – классическая характеристика Неванлинны для $f \in \text{Mer}$, которую здесь удобнее определить в виде

$$T_f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_f(re^{i\theta}) d\theta, \quad u_f(z) := \max\{\log |g(z)|, \log |h(z)|\}, \quad (2.11)$$

$z \in \mathbb{C}$, где g, h – любая пара целых функций без общих нулей в $\mathbb{C}$, допускающая представление $f = g/h$, и $h(0) = 1$ (см. [3; гл. I, § 4, формула (4.8)]).

Пусть $\sigma_\rho[f]$ – тип характеристики Неванлинны T_f при порядке ρ , т.е.

$$\sigma_\rho[f] := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_f(r)}{r^\rho}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (см. [17; теорема 2]). При $\rho > 0$ и $P(\rho)$ из (2.2) точны оценки

$$\sigma_\rho[f] \leq \sigma^*(f; \rho) \leq P(\rho)\sigma_\rho[f]. \quad (2.12)$$

ПРИМЕР 2. Покажем, что задача 2 содержательна лишь при нецелых ρ . При условии $\rho \in \mathbb{N}$ пусть $f = g/1$, где g – целая функция, т.е. $f \in \text{Ent}$. Далее, предположим, что $\text{Zero}_f = \Lambda$, где последовательность Λ определена в (2.3). Для функции f из верхней оценки в (2.12) с учетом (2.11) и соотношения (2.4N) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma^*(f; \rho) &\leq \pi\rho\sigma_\rho[f] = \pi\rho \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi r^\rho} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \pi\rho \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\rho} N_\Lambda(r) = \pi\rho \overline{D}_M(\Lambda) = \pi\rho\sigma < +\infty, \end{aligned}$$

где использовано следствие классической формулы Йенсена [1; гл. I, § 5] для $f \in \text{Ent}$ с $f(0) = 1$. Однако $\sigma(f; \rho) = +\infty$. Действительно, в противном случае существуют две функции $g, h \in \text{Ent}[\rho, +\infty)$ без общих нулей, с которыми справедливо представление $f = g/h \in \text{Ent}$. Если отношение двух целых функций из класса $\text{Ent}[\rho, +\infty)$ – целая функция, то она также принадлежит классу $\text{Ent}[\rho, +\infty)$. Это хорошо известное свойство, допускающее многочисленные доказательства, можно получить, например, комбинированием [3; гл. I, § 6, формула (6.5)] и [3; гл. I, § 7, теорема 7.1]. Но если $f \in \text{Ent}[\rho, +\infty)$, то $\sigma(\Lambda, \rho) < +\infty$, поскольку $\text{Zero}_f = \Lambda$. Это противоречит результату примера 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При любом $\rho > 0$ для $f \in \text{Mer}$ точны неравенства

$$\sigma_\rho[f] \leq \sigma^*(f; \rho) \leq \sigma(f; \rho), \quad (2.13)$$

а при $0 < \rho < 1$ справедлива точная оценка

$$\sigma(f; \rho) \leq \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho} \sigma_\rho[f]. \quad (2.14)$$

По поводу неравенства (2.14) можно отметить то же самое, что было сказано для неравенства (2.6) после формулировки предложения 2 (см. [3; гл. V, § 3, формула (3.30)]). Однако по тем же причинам мы все же дадим полное, идейно несколько иное

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство в (2.13) – это в точности левое неравенство из (2.12). Правое неравенство в (2.13), как уже отмечалось, есть очевидное следствие определений из § 1. Равенство в нем достигается, например, в случае, когда функция $f \in \text{Mer}$ является целой функцией вполне регулярного роста при порядке ρ . Рассуждения опускаем, поскольку они близки к рассуждениям соответствующей части доказательства предложения 2, где использовался пример 2.

Докажем (2.14). Допустим, что $\sigma_\rho[f] < \sigma$. По определению типа характеристики Неванлинны для произвольного числа $\sigma > \sigma_\rho[f]$ с некоторой постоянной C_σ неравенство $T_f(rt) \leq \sigma t^\rho + C_\sigma$, где C_σ – постоянная, справедливо при всех $r \geq 0, t \geq 0$. По построению функция u_f из (2.11) субгармоническая, $u_f(0) = 0$. Пусть ν – мера Рисса функции u_f . Тогда из (2.11) по известной формуле Йенсена для субгармонических функций [4; 3.9] имеем

$$N_\nu(rt) = T_f(rt) \leq \sigma t^\rho + C_\sigma, \quad r \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

где усредненная считающая функция N_ν меры ν определена через замену Λ на ν в левой части равенства (1.2) и замену n_Λ на ν – в правой.

Из представления Вейрштрасса–Адамара субгармонических функций конечного порядка [4; 4.2.2]

$$u_f(z) = \int_{\mathbb{C}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) + H(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.16)$$

где H – гармоническая в $\mathbb{C}$ функция. Выкладки (2.8), (2.9), примененные к правой части неравенства

$$\int_{\mathbb{C}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu(\zeta) \leq \int_0^{+\infty} \log \left(1 + \frac{r}{t} \right) d\nu(t), \quad r = |z| \geq 0,$$

с заменами, отмеченными выше, и учетом (2.15), для (2.16) дают

$$u_f(z) \leq \sigma r^\rho \rho \frac{\pi}{\sin \pi \rho} + C_\sigma + H(z), \quad r = |z| \geq 0. \quad (2.17)$$

В силу гармоничности H найдется функция $s \in \text{Ent}$, для которой $H = \text{Re } s$ и ввиду определения (2.11) из (2.17) следует, что

$$\max \{ \log |g(z)e^{-s(z)}|, \log |h(z)e^{-s(z)}| \} \leq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \sigma r^\rho + C_\sigma, \quad r = |z| \geq 0.$$

Это значит, что каждая из пары функций $ge^{-s}, he^{-s} \in \text{Ent}$ без общих нулей, представляющих $f = ge^{-s}/he^{-s}$, имеет тип не выше $\pi \rho \sigma / \sin \pi \rho$ при порядке ρ . Отсюда по определению выполнено (2.14).

Наконец, для функции $f := f_\Lambda/1$, где f_Λ – функция из (2.7) с последовательностью нулей $\Lambda = \{\lambda_k\}$ из (2.3), равенство в (2.6) достигается, в чем легко можно убедиться, повторив почти дословно рассуждения последнего абзаца доказательства предложения 2.

Из (2.13), (2.14) получаем очевидное

СЛЕДСТВИЕ 4. Для $f \in \text{Mer}$ при $0 < \rho < 1$ справедлива оценка

$$\sigma(f; \rho) \leq \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \sigma^*(f; \rho). \quad (2.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $0 < \rho < 1$ следствия 3, 4 дают в (2.10) и (2.18) верхний оценочный множитель $\pi \rho / \sin \pi \rho$, в то время как в следствиях 1 и 2 он равен $1 + I_\rho$. Из заключительной части теоремы 1 в данном случае имеем

$$1 + I_\rho = \frac{\pi \rho}{l(\rho) \sin \pi \rho},$$

где дробь $1/l(\rho)$ строго убывает на $[0, 1]$ от 1 до $1/\pi$. Таким образом, правые оценки в следствиях 1, 2 существенно сильнее оценок из следствий 3 и 4.

§ 3. Доказательства теорем 1, 2

Предварительно сформулируем один из основных результатов статьи [5] о последовательностях нулей для весовых классов голоморфных функций и о представлении мероморфных функций в существенно упрощенной, но все еще достаточно общей форме. На него и будут опираться доказательства теорем 1, 2.

Пусть $\Omega \ni 0$ – односвязная область в $\mathbb{C}$ и M – непрерывная субгармоническая функция на Ω с мерой Рисса $\nu_M =: \nu$. Тогда для M имеет место глобальное представление Рисса [5; предложение 2.1] вида

$$M(z) = \int_{\Omega} k(z, \zeta) d\nu(\zeta) + H(z), \quad z \in \Omega,$$

где H – гармоническая в Ω функция, если k – некоторое субгармоническое ядро, подходящее для меры ν . Здесь мы не будем приводить определений, связанных с общим понятием субгармонического ядра (см. [5; определения 2–4]), а конкретизируем лишь случай $\Omega = \mathbb{C}$. Так, при условии

$$\int_0^1 \frac{\nu(t)}{t^{q+1}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{q+2}} dt < +\infty, \quad \nu(t) := \nu(D(t)), \quad (3.1)$$

для некоторого целого $q \geq 0$ в терминологии [5; § 2, пример 3(E_q)] субгармоническое ядро Вейерштрасса–Адамара рода q на $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$

$$e_q(\zeta, z) := \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{z^k}{\zeta^k}, \quad (\zeta, z) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

является подходящим для меры ν .

По субгармоническому ядру k введем функцию [5; § 1.2, формула (1.9)]

$$Q_k^\nu(z) := \int_{\Omega} (k(\zeta, 0) - k(\zeta, z))^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega. \quad (3.3)$$

Функция M порождает весовой подкласс

$$\operatorname{Hol}(\Omega; M) := \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) : \sup_{z \in \Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}.$$

Имеет место (с учетом [5; § 1.3, замечания 1, 2])

ТЕОРЕМА G (см. [5; теоремы 3, 5]). Пусть при введенных выше условиях и соглашениях некоторая функция $Q \geq Q_k^\nu$ непрерывна на $\Omega \ni 0$. Тогда

- (E) если $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$ – подпоследовательность нулей для некоторой ненулевой функции из $\operatorname{Hol}(\Omega; M)$, $0 \notin \Lambda$, то Λ – последовательность нулей некоторой функции из класса $\operatorname{Hol}(\Omega; M + Q)$;
- (M) если мероморфная в Ω функция $f = g/h$ представлена в виде отношения двух функций $g, h \in \operatorname{Hol}(\Omega; M)$, $\max\{|g(0)|, |h(0)|\} \neq 0$, то найдутся функции g_0 и h_0 из класса $\operatorname{Hol}(\Omega; M + Q)$ без общих нулей такие, что на Ω справедливо также и представление $f = g_0/h_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $0 < \rho, \sigma < +\infty$, $\Omega = \mathbb{C}$. Тогда

$$M_{\rho, \sigma}(z) \equiv \sigma |z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.4)$$

– непрерывная субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция с мерой Рисса

$$d\nu(te^{i\theta}) = \sigma \rho^2 t^{\rho-1} dt \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta, \quad z = te^{i\theta}, \quad t \geq 0.$$

Пусть $q = [\rho]$ – целая часть ρ . Легко видеть, что тогда выполнено (3.1). Из (3.2) для функции (3.3) при всех $z = r^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ с учетом $e_q(\zeta, 0) \equiv 0$ имеем явный вид (использованы замены $s = r/t$, $\psi = \varphi - \theta$):

$$\begin{aligned} Q(z) &:= Q_{e_q}^\nu(z) \equiv \sigma \rho^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-e_q(te^{i\theta}, z))^+ d\theta \right) t^{\rho-1} dt \\ &= \sigma \rho^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\log \sqrt{1 - 2\frac{r}{t} \cos(\varphi - \theta)} + \frac{r^2}{t^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^q \frac{r^k}{k t^k} \cos k(\varphi - \theta) \right)^+ d\theta \right) t^{\rho-1} dt \\ &= \sigma \rho^2 r^\rho \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\log \sqrt{1 - 2s \cos \psi + s^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} s^k \cos k\psi \right)^+ d\psi \right) \frac{ds}{s^{\rho+1}} =: \sigma I_\rho r^\rho \end{aligned} \quad (3.5)$$

– радиальная функция на $\mathbb{C}$, так как $Q(z) = Q(r)$ при всех $r \geq 0$, а I_ρ – постоянная, определенная последним равенством и совпадающая с величиной (0.3). Таким образом, из части (Е) теоремы G, примененной к классу $\text{Hol}(\mathbb{C}; M_{\rho, \sigma})$, сразу следует, что Λ – последовательность нулей для некоторой ненулевой функции f_Λ из класса $\text{Hol}(\mathbb{C}; M_{\rho, \sigma(1+I_\rho)})$ в обозначении (3.4). Но это и означает выполнение требуемой оценки (0.2) для f_Λ теоремы 1.

Осталось провести вычисления (0.4) при $0 < \rho < 1$.

Случай произвольного ρ уже обсужден. Необходимо лишь установить равенства (0.4) при $0 < \rho < 1$ с $q = 0$ для

$$I_\rho = \rho^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\log \sqrt{1 - 2s \cos \psi + s^2} \right)^+ d\psi \right) \frac{ds}{s^{\rho+1}},$$

где внутренний интеграл отличен от нуля лишь при $0 < s < 2 \cos \psi$. Отсюда, переставляя интегралы и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \psi} \frac{1}{2} \log(1 - 2s \cos \psi + s^2) d\frac{1}{s^\rho} \right) d\psi \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \psi} \frac{\cos \psi - s}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} d\frac{s}{s^\rho} \right) d\psi \\ &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^2 \left(\int_0^{\arccos(s/2)} \frac{\cos \psi - s}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} d\psi \right) \frac{ds}{s^\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^2 \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{s+1}{s-1} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) + \psi \right) \Big|_{\psi=0}^{\arccos(s/2)} \frac{ds}{s^{\rho+1}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{s+1}{s-1} \sqrt{\frac{1-s/2}{1+s/2}} \right) + \arccos \frac{s}{2} \right) d \frac{1}{s^\rho}.
\end{aligned}$$

Интегрированием по частям после разбиения последнего интеграла на сумму двух интегралов ввиду разрыва первого рода при $s = 1$ в подынтегральном выражении получаем

$$\begin{aligned}
1 + I_\rho &= 1 + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{1-} + \int_{1+}^2 \right) \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{s+1}{s-1} \sqrt{\frac{1-s/2}{1+s/2}} \right) + \arccos \frac{s}{2} \right) d \frac{1}{s^\rho} \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi} \left(\left(-\frac{2\pi}{3} - 0 \right) + \left(0 - \frac{4\pi}{3} \right) + \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{4-s^2}} \frac{ds}{s^\rho} \right) \\
&= \frac{2}{\pi^{2\rho}} \int_0^1 \frac{x^{-\rho}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2^\rho \pi} \int_0^1 \tau^{(1/2-\rho/2)-1} (1-\tau)^{1/2-1} d\tau \\
&= \frac{1}{2^\rho \pi} B\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2) \Gamma(1/2)}{2^\rho \pi \Gamma((1/2 - \rho/2) + 1/2)} = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2)}{2^\rho \sqrt{\pi} \Gamma(1 - \rho/2)} =: s(\rho),
\end{aligned}$$

где использованы замены $s/2 = x = \sqrt{\tau}$, а также элементарные факты из [20; гл. XIV, 531, п. 4°] о гамма- и бета-функциях Эйлера Γ и B соответственно и соотношение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Получим теперь второе равенство в (0.4).

По классической формуле Лежандра [20; гл. XIV, 531, п. 8°, формула (20)] с постоянной $a = 1/2 - \rho/2 > 0$ имеем $\Gamma(1/2 - \rho/2) \Gamma(1 - \rho/2) = 2^\rho \sqrt{\pi} \Gamma(1 - \rho)$. Отсюда, применяя формулу дополнения Эйлера $\Gamma(\rho) \Gamma(1 - \rho) = \pi / \sin \pi \rho$ при $0 < \rho < 1$ [20; гл. XIV, 531, п. 5°, формула (15)], получаем

$$s(\rho) = \frac{\Gamma(1 - \rho)}{(\Gamma(1 - \rho/2))^2} = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \frac{1}{\rho \Gamma(\rho) (\Gamma(1 - \rho/2))^2} = \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho} \frac{1}{l(\rho)},$$

где $l(\rho) := \Gamma(1 + \rho) (\Gamma(1 - \rho/2))^2$, и второе равенство в (0.4) доказано.

Наконец, легко подсчитать, что $l(0) = 1$ и $l(1) = \pi$. Применение формулы Гаусса [20; гл. XIV, 535, формула (25)]

$$(\log \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t} dt - C, \quad x > 0,$$

где C – постоянная Эйлера, при $x = 1 + \rho$ и $x = 1 - \rho/2$ дает

$$(\log l(\rho))' = \frac{\Gamma'(1 + \rho)}{\Gamma(1 + \rho)} - \frac{\Gamma'(1 - \rho/2)}{\Gamma(1 - \rho/2)} = \int_0^1 \frac{t^{-\rho/2} - t^\rho}{1 - t} dt > 0$$

при $0 < \rho < 2$, что и доказывает строгое возрастание l на $[0, 1]$.

Доказательство теоремы 2 опускаем, поскольку оно сразу следует из части (М) теоремы G, примененной к мероморфным функциям, представимым отношением целых функций класса $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}, M_{\rho, \sigma})$, и из полученных выше выражений и оценок для функции (3.5).

§ 4. Оценки радиуса полноты в $\mathbb{C}$ системы экспонент

Приведенный между (1.5) и (1.6) эквивалентный исходному вариант определения величины $\sigma(\Lambda, \rho)$ при нецелом ρ как типа при порядке ρ канонического произведения Вейерштрасса–Адамара (1.6) рода $q = [\rho]$ позволяет сразу переформулировать следствие 1 в форме следующей теоремы единственности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < \rho < 1$ и $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность комплексных чисел конечной верхней плотности при порядке ρ , а тип при порядке ρ канонического произведения Вейерштрасса–Адамара

$$W_1(z; \Lambda) := \prod_k \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

рода нуль из (2.7), построенного по Λ , не меньше $\sigma > 0$. Если тип при порядке ρ целой функции f , обращающейся в нуль на Λ , меньше величины

$$\frac{2^{\rho} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - \rho/2)}{\Gamma(1/2 - \rho/2)} \sigma, \quad (4.2)$$

то $f \equiv 0$ на $\mathbb{C}$.

Рассмотрим последовательность комплексных точек

$$\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}, \quad \overline{D}(\Lambda) < +\infty, \quad (4.3)$$

по которой для $n \in \mathbb{N}$ строится последовательность

$$\Lambda^{\mathbb{Q}} := \bigcup_{m=0}^{n-1} \exp\left(i \frac{2\pi m}{n}\right) \Lambda = \bigcup_{m=0}^{n-1} \left\{ \exp\left(i \frac{2\pi m}{n}\right) \lambda_k \right\}, \quad (4.4)$$

инвариантная относительно поворотов на углы $2\pi m/n$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, вокруг точки нуль. В частности, $\Lambda^{\mathbb{Q}} = \Lambda$, а при $n = 2$ в обозначениях (4.4) и (1.14) имеем $\Lambda^{\mathbb{Q}} = \pm \Lambda$. При $n = 1$ последовательности $\Lambda^{\mathbb{Q}} = \Lambda$ сопоставляем каноническое произведение Вейерштрасса–Адамара рода нуль из (4.1), сходящееся при дополнительном условии $\sum_k 1/|\lambda_k| < +\infty$, выполненном, в частности, при $\overline{D}(\Lambda; \rho) < +\infty$ с $\rho < 1$. При $n \geq 2$ последовательности $\Lambda^{\mathbb{Q}}$ соотносим каноническое произведение Вейерштрасса–Адамара

$$W_n(z; \Lambda) := \prod_k \left(1 - \frac{z^n}{\lambda_k^n}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.5)$$

рода один. При $n = 2$ оно совпадает с $W(z; \Lambda)$ из (1.10). Имеет место оценка

$$|W_n(z; \Lambda)| \leq \prod_k \left(1 + \frac{|z|^n}{|\lambda_k|^n}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.6)$$

где в случае $\Lambda \subset (0, +\infty)$

$$\prod_k \left(1 + \frac{|z|^n}{|\lambda_k|^n}\right) \equiv \left| W_n\left(|z| \exp\left(i\pi \frac{2m+1}{n}\right); \Lambda\right) \right|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что

$$\sigma_{W_n}(\Lambda) \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} \log \left(1 + \frac{r^n}{t^n} \right) dn_\Lambda(t), \quad (4.8)$$

а (4.7) дает равенство

$$\sigma_{W_n}(\Lambda) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} \log \left(1 + \frac{r^n}{t^n} \right) dn_\Lambda(t), \quad \Lambda \subset (0, +\infty), \quad (4.9)$$

для типа $\sigma_{W_n}(\Lambda)$ целой функции из (4.5) при порядке равном единице. Величину

$$\overline{D}_P^{[n]}(\Lambda) := \frac{\sin \pi/n}{\pi} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} \log \left(1 + \frac{r^n}{t^n} \right) dn_\Lambda(t) \quad (4.10I)$$

$$= \frac{\sin \pi/n}{\pi/n} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^n + t^n} \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt \quad (4.10n)$$

$$= \frac{\sin \pi/n}{\pi/n^2} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(rt)^{n-1} N_\Lambda(t)}{(r^n + t^n)^2} dt, \quad (4.10N)$$

где (4.10n), а затем и (4.10N) получены интегрированием по частям интеграла из (4.10I), будем называть *верхней n -плотностью Пуассона последовательности Λ* . При $n = 2$ в случае $\Lambda \subset (0, +\infty)$ это в точности верхняя плотность Пуассона $\overline{D}_P(\Lambda) = \overline{D}_P^{[2]}(\Lambda)$ из (1.9). Кроме того,

$$\overline{D}_P^{[n]}(\Lambda) = \frac{\sin \pi/n}{\pi} \sigma_{W_n}(\Lambda), \quad \Lambda \subset (0, +\infty). \quad (4.11)$$

Из представления (4.10N) получаем

$$\begin{aligned} \overline{D}_P^{[n]}(\Lambda) &\leq \overline{D}_M(\Lambda) \frac{\sin \pi/n}{\pi/n^2} \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1} t^n}{(r^n + t^n)^2} dt \\ &= \overline{D}_M(\Lambda) \frac{\sin \pi/n}{\pi/n^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1 + x^n)^2} dx = \overline{D}_M(\Lambda) \frac{\sin \pi/n}{\pi/n} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} dx \\ &= \overline{D}_M(\Lambda) \frac{\sin \pi/n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y^{1/n-1}}{1 + y} dy = \overline{D}_M(\Lambda) \leq \overline{D}(\Lambda), \end{aligned}$$

где использована замена $x = t/r$, а после интегрирования по частям – замена $y = x^n$, а также значение интеграла Эйлера (см. [19; п. 74, пример 3] и (2.9)).

ТЕОРЕМА 5 (о радиусе полноты). *Для радиуса полноты последовательности $\Lambda^{\mathbb{Q}}$, определенной в (4.3), (4.4), при $n \geq 2$ имеют место оценки*

$$\frac{2^{1/n} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - 1/(2n))}{\Gamma(1/2 - 1/(2n))} \sigma_{W_n}(\Lambda) \leq R(\Lambda^{\mathbb{Q}}) \leq \frac{\pi}{\sin \pi/n} \overline{D}_P^{[n]}(\Lambda). \quad (4.12)$$

Оценка радиуса полноты сверху точна уже в классе всех последовательностей $\Lambda \subset (0, +\infty)$, для которых левую часть можно заменить на выражение

$$\frac{2^{1/n} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - 1/(2n))}{\Gamma(1/2 - 1/(2n))} \frac{\pi}{\sin \pi/n} \overline{D}_P^{[n]}(\Lambda) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right)^2 \overline{D}_P^{[n]}(\Lambda). \quad (4.13)$$

При $n = 2$ правая часть оценки (4.12) совпадает с правой частью (1.16P), а нижняя оценка из (4.12) вместе с совпадением при $\Lambda \subset (0, +\infty)$ левой части (4.12) с (4.13) доказывает нижнюю оценку (1.17) теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известной связи между полнотой и единственностью (см. [1; гл. IV, §§ 6, 7], [2; 3.4], [11; 3.2.1]) из определения (4.10l) верхней n -плотности Пуассона и (4.8) получаем

$$R(\Lambda^{\mathfrak{U}}) = \sigma^*(\Lambda^{\mathfrak{U}}; 1) \leq \sigma(\Lambda^{\mathfrak{U}}; 1) = \sigma_{W_n}(\Lambda) \leq \frac{\pi}{\sin \pi/n} \overline{D}_P^{[n]}(\Lambda), \quad (4.14)$$

что доказывает верхнюю оценку в (4.12). Для доказательства ее точности рассмотрим последовательность $\Lambda \subset (0, +\infty)$ из (2.3) с $\rho = 1$, которая в силу (2.4n) правильно распределена при порядке 1 [1; гл. II, § 1]. Следовательно, она является последовательностью нулей целой функции

$$W_n(z; \Lambda) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^n}{(k/\sigma)^n} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.15)$$

экспоненциального типа и вполне регулярного роста [1; гл. II, § 1, теорема 2]. Кроме того, с помощью (2.4n), а также (4.7) и (4.9) легко показать, что тип этой функции равен σ и для функции (4.15) существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{W_n(r \exp(i\pi \frac{2m+1}{n}); \Lambda)}{r} = \sigma = \sigma_{W_n}(\Lambda), \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из этого следует, что в силу условия $n \geq 2$ при умножении функции (4.15) на какую бы то ни было целую функцию не может быть получена целая функция экспоненциального типа меньшего, чем σ . Таким образом, для последовательности Λ из (2.3) имеем $R(\Lambda^{\mathfrak{U}}) = \sigma$, что вместе с (4.9) и определением равенством из (4.10l) доказывает точность верхней оценки в (4.12).

Для доказательства нижней оценки в (4.12) предположим противное: $R(\Lambda^{\mathfrak{U}})$ меньше, чем левая часть в (4.12). Тогда в силу первого равенства в (4.14) и определения (1.4s) величины $\sigma^*(\Lambda, \rho)$ найдется обращающаяся в нуль на $\Lambda^{\mathfrak{U}}$ целая функция $F \not\equiv 0$ экспоненциального типа

$$\sigma_F < \frac{2^{1/n} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - 1/(2n))}{\Gamma(1/2 - 1/(2n))} \sigma_{W_n}(\Lambda) \quad (4.16)$$

с последовательностью нулей $\text{Zero}_F = \Lambda^{\mathfrak{U}} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma_k\}$ – некоторая последовательность точек в $\mathbb{C}$ конечной верхней плотности, для которой можно считать, что $0 \notin \Gamma$. При этом для F с некоторыми постоянными $a, b \in \mathbb{C}$ имеет место представление Вейерштрасса–Адамара рода один в форме

$$F(z) \equiv \exp(az + b) W_n(z; \Lambda) g(z) \not\equiv 0, \quad g(z) := \prod_k \left(1 - \frac{z}{\gamma_k} \right) \exp\left(\frac{z}{\gamma_k} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.17)$$

$g(z)$ – каноническое произведение Вейерштрасса–Адамара рода один по Γ . Рассмотрим теперь преобразование функции F вида

$$\begin{aligned} F^{\textcircled{b}}(z) &:= \prod_{m=1}^{n-1} F\left(\exp\left(\frac{2\pi mi}{n}\right)z\right) \equiv \exp(nb)W_n(z, \text{Zero}_F) \\ &\equiv \exp(nb)W_n^n(z; \Lambda)W_n(z; \Gamma), \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа меньше или равно σ_F , где последнее тождество, ввиду представления для g из (4.17), получено из тождества $g^{\textcircled{b}}(z) \equiv W_n(z; \Gamma)$, $z \in \mathbb{C}$. При этом по построению n -ая степень $W_n^n(\cdot; \Lambda)$ – целая функция экспоненциального типа, равного $n\sigma_{W_n}(\Lambda)$. Из формулы (4.5) для произведений W_n следует, что возможно введение новой переменной $\zeta := z^n$, в результате которого в обозначении (4.1) получаем целую функцию

$$f(\zeta) = \exp(nb)W_1^n(\zeta; \Lambda^n)W_1(\zeta; \Gamma^n), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

типа меньше или равно $n\sigma_F$ при порядке $\rho = 1/n < 1$, где последовательность $\Lambda^n := \{\lambda_k^n\}$ построена из n -ых степеней членов последовательности Λ ; аналогичное утверждение верно и для Γ^n . При этом последовательности Λ^n и Γ^n – конечной верхней плотности при порядке $\rho = 1/n$, тип целой функции $W_1^n(\cdot; \Lambda^n)$ при порядке $\rho = 1/n$ по ее построению равен $n\sigma_{W_n}(\Lambda)$, а $W_1(\cdot; \Gamma^n)$ – целая функция из класса $\text{Ent}[1/n, +\infty)$. Логарифмирование функции $|f|$ с последующим делением на n дает представление для субгармонической функции

$$\frac{1}{n} \log |f(\zeta)| \equiv \log |W_1(\zeta; \Lambda^n)| + \text{Re } b + \frac{1}{n} \log |W_1(\zeta; \Gamma^n)|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.18)$$

типа меньше или равно σ_F при порядке ρ в виде суммы двух субгармонических функций, а именно, логарифма модуля целой функции $W_1(\cdot; \Lambda^n)$ типа $\sigma_{W_n}(\Lambda)$ при порядке $\rho = 1/n$ и субгармонической функции

$$v(\zeta) = \frac{1}{n} \log |W_1(\zeta; \Gamma^n)| + \text{Re } b \not\equiv -\infty, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.19)$$

ЛЕММА 1 (см. [21; предложение 9.2]). Пусть $M: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная, а u, v – субгармонические в $\mathbb{C}$ функции, $v \not\equiv -\infty$ на $\mathbb{C}$. Если $u(z) + v(z) \leq M(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то найдется такая целая функция $h \not\equiv 0$, что

$$u(\zeta) + \log |h(\zeta)| \leq \sup_{|w-\zeta| \leq 1} M(w), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Применим лемму при v из (4.19) и

$$u = \log |W_1(\cdot; \Lambda^n)|. \quad (4.20)$$

Так как тип функции (4.18), равной $u + v$, при порядке $\rho = 1/n$ не больше σ_F , то согласно предположению (4.16) найдется число

$$\sigma' < \frac{2^{1/n} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - 1/(2n))}{\Gamma(1/2 - 1/(2n))} \sigma_{W_n}(\Lambda) \quad (4.21)$$

такое, что для некоторой постоянной C выполнено неравенство

$$u(\zeta) + v(\zeta) \leq \sigma' |\zeta|^{1/n} + C =: M(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Тогда по лемме можно подобрать целую функцию $h \not\equiv 0$ такую, что

$$u(\zeta) + \log |h(\zeta)| \leq \sup_{|w-\zeta| \leq 1} (\sigma' |w|^{1/n} + C) \leq \sigma' |\zeta|^{1/n} + \sigma' + C, \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Это значит, что тип субгармонической функции $u + \log |h| \not\equiv -\infty$ не больше σ' при порядке $\rho = 1/n$. Если вернуться к определению (4.20) функции u , то последнее утверждение означает, что тип целой функции-произведения $W_1(\cdot; \Lambda^n)h$, обращающейся в нуль на Λ^n , при порядке $\rho = 1/n$ не больше чем σ' . Тогда из (4.21) тип этой функции при порядке $1/n$ меньше правой части (4.21) или (4.16), в то время как тип канонического произведения $W_1(\cdot; \Lambda^n)$ рода нуль равен $\sigma_{W_n}(\Lambda)$ при порядке $1/n$. Тогда по теореме 5 о радиусе полноты имеем $W_1(\cdot; \Lambda^n)h \equiv 0$ на $\mathbb{C}$, откуда следует, что $W_1(\cdot; \Lambda^n) \equiv 0$, так как $h \not\equiv 0$ на $\mathbb{C}$. Отсюда по определениям (4.5) и (4.1) имеем $W_n(z; \Lambda) \equiv W_1(z^n; \Lambda^n) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, по представлению (4.17) заключаем, что $F \equiv 0$ на $\mathbb{C}$. Получено противоречие.

Наконец, возможность замены левой части на (4.13) при $\Lambda \subset (0, +\infty)$ следует из (4.11) и второго равенства в (0.4).

§ 5. Конструкция специальной последовательности точек

В этом параграфе для любого числа $R_0 > 0$ будет построен пример последовательности строго положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}$, для которой $R_0 \leq \overline{D}(\Lambda) < +\infty$, а ее логарифмическая блок-плотность $\overline{D}_L(\Lambda) = 0$. Это доказывает заключительную часть теоремы 3 о плотности $\overline{D}_L$.

Пусть J – замкнутый отрезок на комплексной плоскости. Через $\text{Hol}(J)$ обозначим пространство ростков голоморфных функций на J с естественной топологией индуктивного предела [11; 0.1.6]. Точнее, представим отрезок J как пересечение $J = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \Omega_j$ убывающей последовательности областей $\Omega_{j+1} \Subset \Omega_j \Subset \mathbb{C}^n$. Пусть B_j – открытый единичный шар в нормированном пространстве функций, непрерывных на замыкании области Ω_j и одновременно голоморфных в Ω_j , с обычной суп-нормой. Базой окрестностей нуля в $H(J)$ служат абсолютно выпуклые оболочки всевозможных объединений $\bigcup_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j B_j$, где $\varepsilon_j > 0$ – произвольные числа. Если система функций неполна в пространстве $\text{Hol}(J)$, то для любой области $\Omega \supset J$ эта система неполна и в пространстве $\text{Hol}(\Omega)$.

Функции интервалов (см. [14; введение] или [11; 3.2.1])

$$l_{\Lambda}^{-}(r, R) = \sum_{\substack{r \leq |\lambda_n| < R \\ \text{Re } \lambda_n < 0}} \text{Re} \left(-\frac{1}{\lambda_n} \right), \quad l_{\Lambda}^{+}(r, R) = \sum_{\substack{r \leq |\lambda_n| < R \\ \text{Re } \lambda_n > 0}} \text{Re} \frac{1}{\lambda_n} \quad (5.1)$$

положительной полуоси порождают логарифмическую меру

$$l_{\Lambda}(r, R) = \max\{l_{\Lambda}^{-}(r, R), l_{\Lambda}^{+}(r, R)\}, \quad 0 \leq r < R < +\infty, \quad (5.2)$$

последовательности Λ . При этом логарифмическая блок-плотность обобщается на произвольные последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ по следующему правилу:

$$\overline{D}_L(\Lambda) := \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} l_\Lambda(r, ar) = \inf_{a > 1} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} l_\Lambda(r, ar) = \inf b, \quad (5.3)$$

где последний инфимум берется по всем таким $b > 0$, для которых найдется постоянная M_b такая, что неравенства $l_\Lambda(r, R) \leq b \log(R/r) + M_b$ выполнены при всех $0 < r < R < +\infty$. (О совпадении всех этих определений см. [13] и [22].)

ТЕОРЕМА 6. *Для любого $R_0 \geq 1$ можно построить последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset (0, +\infty)$ конечной верхней плотности, удовлетворяющую условию разделенности $\inf_{k \neq k'} |\lambda_k - \lambda_{k'}| > 0$ и обладающую следующими двумя свойствами:*

[D] *для поворота последовательности Λ на угол $\theta \in \mathbb{R}$ при любом значении $\theta \in (-\pi, \pi]$ выполнены соотношения*

$$l_{\pm e^{i\theta}\Lambda}(r, R) \leq \frac{8R_0}{\sqrt{\log R}} \log \frac{R}{r} + 24R_0, \quad 1 \leq r < R < +\infty, \quad (5.4)$$

и $\overline{D}_L(\pm e^{i\theta}\Lambda) = 0$, но $\overline{D}(\Lambda) \geq R_0$ (здесь по определению $e^{i\theta}\Lambda := \{e^{i\theta}\lambda_k\}$);
 [C] *для любого $\theta \in (-\pi, \pi]$ найдется $d_\theta > 0$, для которого система $\text{Ехр}_{\pm\Lambda}$ неполна в каждом пространстве $\text{Hol}(J)$, где J – отрезок длины больше или равной d_θ , параллельный отрезку $[0, e^{i\theta}]$, а также в каждом пространстве $\text{Hol}(\Omega)$, где область Ω включает в себя такой отрезок, но в то же время даже ее часть Ехр_Λ полна в пространстве $\text{Hol}(D(R_0))$, т.е. $R(\pm\Lambda) \geq R(\Lambda) \geq R_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при фиксированном R_0 $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность рациональных чисел, представимых в виде дроби m/N с фиксированным знаменателем $N \in \mathbb{N}$ и попавших в интервалы I_p , где

$$I_p := [r_p, 2r_p], \quad p = 1, 2, \dots, \quad r_p = \exp p^2,$$

а выбор $N \in \mathbb{N}$ укажем ниже. Очевидно, $\overline{D}(\Lambda) \leq N$. По построению

$$n_\Lambda(2r_p) \geq \frac{2r_p - r_p}{1/N} = Nr_p,$$

откуда для верхней плотности последовательности Λ получаем $\overline{D}(\Lambda) \geq N/2$. Если выбрать изначально

$$N := [2eR_0] + 1 \geq 2eR_0, \quad (5.5)$$

то $R(\Lambda) \geq (1/e)\overline{D}(\Lambda) \geq R_0$. Перейдем теперь к доказательству оценки (5.4).

При $\theta = \pm\pi/2$ по определениям (5.1), (5.2) левая часть в (5.4) равна нулю и $\overline{D}_L(e^{\pm i\pi/2}\Lambda) = 0$ по (5.3). По построению последовательности Λ имеем

$$\sum_{\lambda_k \in I_p} \frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{1}{r_p} \left(\frac{2r_p - r_p}{1/N} + 1 \right) \leq N + 1.$$

Отсюда при $\theta \neq \pm\pi/2$ по определениям (5.1), (5.2) и выбору (5.5) получаем

$$\begin{aligned} l_{\pm e^{i\theta}\Lambda}(r, R) &= l_{e^{i\theta}\Lambda}(r, R) = \sum_{r \leq \lambda_k < R} \frac{|\cos \theta|}{\lambda_k} \\ &\leq |\cos \theta| \sum_{r/2 \leq r_p \leq R} \left(\sum_{\lambda_k \in I_p} \frac{1}{\lambda_k} \right) \leq (N+1) |\cos \theta| \sum_{\log(r/2) \leq p^2 \leq \log R} 1 \\ &\leq (N+1) |\cos \theta| \left(\sqrt{\log R} - \sqrt{\log(r/2)} + 1 \right) \\ &\leq \frac{(N+1) |\cos \theta|}{\sqrt{\log R}} \log \frac{R}{r} + 3(N+1) \leq \frac{8R_0}{\sqrt{\log R}} \log \frac{R}{r} + 24R_0, \end{aligned}$$

что доказывает (5.4). Кроме того, из (5.4) по определению (5.3)

$$\begin{aligned} \overline{D}_L(e^{i\theta}\Lambda) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} l_{e^{i\theta}\Lambda}(r, ar) \\ &\leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{8R_0}{\sqrt{\log ar}} \log \frac{ar}{r} + 24R_0 \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log a} 24R_0 = 0 \end{aligned}$$

и часть [D] теоремы 6 доказана. К тому же установлено, что $R(\Lambda) \geq R_0$. Для завершения доказательства пункта [C] потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (см. [14; следствие 4.1]). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\} \not\equiv 0$ – последовательность комплексных чисел без предельных точек в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая при некотором $\varepsilon > 0$ условию $|\operatorname{Re} \lambda_k| \geq \varepsilon |\lambda_k|$, $k = 1, 2, \dots$. Для существования целой функции $f \not\equiv 0$ экспоненциального типа, удовлетворяющей условиям $f(\Lambda) = 0$ и $h_f(\pm\pi/2) \leq \pi b$, где $b \geq 0$, h_f – индикатор роста f , необходимо и достаточно, чтобы существовали функция $\delta(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ и постоянная C такие, что для всех $1 \leq r < R < +\infty$ выполнено неравенство

$$l_\Lambda(r, R) \leq (b + \delta(R)) \log \frac{R}{r} + C. \quad (5.6)$$

Отметим, что в [14; следствие 4.1] требовалась проверка неравенств (5.6) в предложении 5 при всех $0 \leq r < R < +\infty$, но достаточно рассматривать только $r \geq 1$, поскольку при $0 \leq r < 1$ из (5.6) следует, что

$$\begin{aligned} l_\Lambda(r, R) &\leq l_\Lambda(r, 1) + l_\Lambda(1, R) \leq (b + \delta(R)) \log \frac{R}{1} + (C + l_\Lambda(r, 1)) \\ &\leq (b + \delta(R)) \log \frac{R}{r} + (C + l_\Lambda(0, 1)), \end{aligned}$$

т.е. (5.6) выполнено при всех $0 \leq r < R < +\infty$ с константой $C + l_\Lambda(0, 1)$ вместо C .

При $b = 0$ из известных соображений двойственности (см. [23; теорема 15.1.5], [11; следствие 3.2.1]) существование целой функции $f \not\equiv 0$ экспоненциального типа, описанной в предложении 5, эквивалентно тому, что система $\operatorname{Exr}_\Lambda$ неполна в пространстве $\operatorname{Hol}(J)$, где J – отрезок достаточно большой длины, параллельный вещественной оси. Поэтому при каждом $\theta \in (-\pi, \pi] \setminus \{\pm\pi/2\}$ последовательность $\pm e^{i\theta}\Lambda$, построенная по последовательности Λ из пункта [D], порождает систему $\operatorname{Exr}_{\pm e^{i\theta}\Lambda}$, которая по ее свойству (5.4) и предложению 5

неполна в пространстве $\text{Hol}(J)$, где J – отрезок длины больше или равной d'_θ , параллельный вещественной оси. После поворота плоскости $\mathbb{C}$ на угол $-\theta$ это означает, что система $\text{Exp}_{\pm\Lambda}$ неполна в $\text{Hol}(J)$, где J – отрезок, параллельный отрезку $[0, e^{i(-\theta)}]$, длины больше или равной $d_{-\theta} := d'_\theta$. Таким образом, пункт [С] теоремы 6 доказан для отрезков J , не параллельных мнимой оси.

Если же $\theta = \pm\pi/2$, то по построению Λ для числа N из (5.5) целая функция экспоненциального типа $z \mapsto \sin i\pi Nz$, ограниченная на мнимой оси, обращается в нуль на $\pm i\Lambda$. Это означает, что система $\text{Exp}_{\pm\Lambda}$ неполна в пространстве $\text{Hol}(J)$, где J – отрезок длины больше или равной $2\pi N$, параллельный мнимой оси. Утверждение [С] теоремы 6 для отрезков J доказано, а из определения топологии индуктивного предела в $\text{Hol}(J)$ следует и утверждение для областей $\Omega \supset J$.

§ 6. Форма величины I_ρ при $\rho > 1$

В форме, менее явной, чем (0.4) при $0 < \rho < 1$, но более конкретной, чем (0.3) и (0.5), и при нецелых $\rho > 1$ можно дать важный для теорем 1 и 2 способ вычисления определенной в (3.5) величины

$$I_\rho := \rho^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-e_q(1, se^{i\psi}))^+ d\psi \frac{ds}{s^{\rho+1}}, \quad q = [\rho] \geq 1, \quad (6.1)$$

где использовано согласованное с (3.2) и (0.3) обозначение

$$\log \sqrt{1 - 2s \cos \psi + s^2} + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} s^k \cos k\psi \quad (6.2r)$$

$$= \text{Re} \left(\log(1 - se^{i\psi}) + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} (se^{i\psi})^k \right) = e_q(1, se^{i\psi}), \quad (6.2c)$$

а для функции “логарифм” от комплексной переменной в (6.2c) можно рассматривать ее любую аналитическую ветвь. Для этого могут быть использованы некоторые свойства субгармонических ядер Вейерштрасса–Адамара произвольного рода q , определенных в (3.2). Некоторые из этих свойств в неявном виде имеются в работе [6; гл. I, пп. 1–5], но в явном виде извлечь их из этой работы нам не удалось. Аналогичное высказывание относится и к некоторой части работы А. А. Гольдберга [7; § 2, 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Порожденная правой частью (6.2c) функция

$$(s, \psi) \mapsto -e_q(1, se^{i\psi}), \quad s \in [0, +\infty), \quad \psi \in [-\pi, \pi], \quad (6.3)$$

четная по переменной ψ (см. (6.2r)), обладает следующими свойствами:

1) при $\psi = 0$ функция (6.3), стремясь к $+\infty$ при $s \rightarrow 1$ с логарифмической особенностью при $s = 1$, имеет, кроме точки $s = 0$, еще один нуль $v_q(0) > 1$, а также строго положительна на объединении интервалов $(0, 1) \cup (1, v_q(0))$ и строго отрицательна на луче $(v_q(0), +\infty)$;

2) при $\psi \in (0, \pi]$ для всех $s \geq 0$ справедливо представление

$$-e_q(1, se^{i\psi}) = \int_0^s \frac{\cos(q+1)\psi - t \cos q\psi}{t^2 - 2t \cos \psi + 1} t^q dt \quad (6.4s)$$

$$= s^{q+1} \int_0^\psi \frac{s \sin q\theta - \sin(q+1)\theta}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} d\theta - \log |1-s| - \sum_{k=1}^q \frac{s^k}{k}; \quad (6.4\psi)$$

3) при любом фиксированном значении $\psi \in (0, \pi]$ непрерывная функция (6.3) от $s \geq 0$, наряду с очевидным нулем при $s = 0$, имеет еще не более одного нуля, который является положительным и обозначается далее через $v_q(\psi)$; при отсутствии дополнительного нуля при $s > 0$ полагаем соответственно $v_q(\psi) := 0$ или $v_q(\psi) := +\infty$, если значения функции (6.3) строго отрицательны или положительны при всех $s > 0$ соответственно;

4) на комплексной плоскости $\{se^{i\psi} : s \geq 0, \psi \in [-\pi, \pi]\}$ с выколотым нулем область положительности функции (6.3) состоит из $q+1$ связной компоненты, только одна из которых (вокруг единицы) ограничена;

5) при значениях $\psi \in [0, \pi]$, принадлежащих одному из следующих четырех непересекающихся конечных объединений интервалов:

$$I_+^+ := \{\psi \in [0, \pi] : \cos(q+1)\psi > 0, \cos q\psi > 0\} \quad (6.5_+^+)$$

$$= \{0\} \cup \bigcup_{m=0}^{[q/2]} \left(\frac{(4m-1)^+\pi}{2q}, \frac{(4m+1)\pi}{2(q+1)} \right),$$

$$I_-^+ := \{\psi \in [0, \pi] : \cos(q+1)\psi \geq 0, \cos q\psi \leq 0\} \quad (6.5_-^+)$$

$$= \bigcup_{m=0}^{[(q-1)/2]} \left[\frac{(4m+3)\pi}{2(q+1)}, \min \left\{ \frac{(4m+3)\pi}{2q}, \pi \right\} \right], \quad (6.5_-^+e)$$

$$I_+^- := \{\psi \in [0, \pi] : \cos(q+1)\psi \leq 0, \cos q\psi \geq 0\} \quad (6.5_+^-)$$

$$= \bigcup_{m=0}^{[q/2]} \left[\frac{(4m+1)\pi}{2(q+1)}, \min \left\{ \frac{(4m+1)\pi}{2q}, \pi \right\} \right],$$

$$I_-^- := \{\psi \in [0, \pi] : \cos(q+1)\psi < 0, \cos q\psi < 0\} \quad (6.5_-^-)$$

$$= \bigcup_{m=0}^{[(q-1)/2]} \left(\frac{(4m+1)\pi}{2q}, \frac{(4m+3)\pi}{2(q+1)} \right)$$

и покрывающих в точности отрезок $[0, \pi]$, выполнены условия

$$0 < v_q(\psi) < +\infty \text{ и } -e_q(1, se^{i\psi}) > 0 \text{ лишь при } s \in (0, v_q(\psi)), \quad (6.6_+^+)$$

$$v_q(\psi) = +\infty, \text{ т.е. } -e_q(1, se^{i\psi}) > 0 \text{ при всех } s \in (0, +\infty), \quad (6.6_-^+)$$

$$v_q(\psi) = 0, \text{ т.е. } -e_q(1, se^{i\psi}) < 0 \text{ при всех } s \in (0, +\infty), \quad (6.6_+^-)$$

$$0 < v_q(\psi) < +\infty \text{ и } -e_q(1, se^{i\psi}) > 0 \text{ лишь при } s \in (v_q(\psi), +\infty) \quad (6.6_-^-)$$

соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По п. 1) при $\psi = 0$ функция (6.3) и ее производная по s имеют вид

$$-\log |1-s| - \sum_{k=1}^q \frac{s^k}{k} \quad \text{и} \quad \frac{s^q}{1-s}$$

соответственно. Из положительности производной на $(0, 1)$ и ее отрицательности на $(1, +\infty)$ следует, что рассматриваемая функция от s возрастает от нуля до $+\infty$ на $(0, 1)$ и убывает на $(1, +\infty)$ от $+\infty$ до $-\infty$.

При $\psi \in (0, \pi]$ функция (6.3) равна нулю при $s = 0$. Из представления (6.2с) получаем, что ее производная равна

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{1 - se^{i\psi}} - \sum_{k=1}^q s^{k-1} e^{ik\psi} \right) &= \operatorname{Re} \left(e^{i\psi} \frac{1 - (1 - se^{i\psi}) \sum_{k=1}^q (se^{i\psi})^{k-1}}{1 - se^{i\psi}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i\psi} \frac{1 - (1 - (se^{i\psi})^q)}{1 - se^{i\psi}} \right) = \operatorname{Re} \frac{s^q e^{i(q+1)\psi}}{1 - se^{i\psi}} = \operatorname{Re} \frac{s^q e^{i(q+1)\psi} (1 - se^{-i\psi})}{|1 - se^{i\psi}|^2} \\ &= \frac{s^q \cos(q+1)\psi - s^{q+1} \cos q\psi}{|1 - se^{i\psi}|^2} = s^q \frac{\cos(q+1)\psi - s \cos q\psi}{s^2 - 2s \cos \psi + 1}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

что и доказывает представление (6.4s) п. 2).

Аналогично дифференцированием по ψ получаем и (6.4ψ).

Пункт 3) следует из представления (6.4s) и следующего простого факта: если функция $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет N нулей на интервале $(0, +\infty)$, то функция $\int_0^x f(t) dt$ имеет на том же интервале не более N нулей [24; отдел 5, гл. I, § 1, задача 20]. В нашем случае подынтегральная функция в правой части (6.4s) имеет не более одного нуля по s на интервале $(0, +\infty)$, что и доказывает п. 3).

Доказательство п. 4) опускаем. Отметим лишь, что оно может быть выведено, например, из представления (6.4ψ). Случаи $q = 1, 2, 6, 7$ из п. 4) проиллюстрированы на рис. 1–4, а при $q = 3$ соответствующий рисунок разобран Данжуа в [6; гл. I, п. 1].

Рис. 1. Случай $q = 1$. Область положительности в круге $D(2)$ — светло-серая

При доказательстве п. 5) прежде всего отметим, что не могут одновременно выполняются равенства $\cos(q+1)\psi = 0$ и $\cos q\psi = 0$. Действительно, в противном случае из очевидного равенства $\cos(q+1)\psi = \cos q\psi \cos \psi - \sin q\psi \sin \psi$ будет

следовать, что $\sin q\psi \sin \psi = 0$, т.е. $\psi = 0$ или $\psi = \pi$. Но тогда $\cos q\psi = \pm 1$. Получаем противоречие. Отсюда, в частности, следует что объединения отрезков из (6.5 $_{+}^{+}$) и (6.5 $_{+}^{-}$) соответственно не пересекаются.

Разберем теперь каждый из случаев (6.5 $_{+}^{+}$) – (6.5 $_{-}^{-}$) отдельно.

Рис. 2. Случай $q = 2$. Область положительности в круге $D(2)$ — светло-серая

Случай (6.5 $_{+}^{+}$). При $\psi \in I_{+}^{+}$ производная (6.7) функции $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ имеет один строго положительный нуль

$$s = \frac{\cos(q+1)\psi}{\cos q\psi}, \quad (6.8)$$

она положительна до этого нуля и отрицательна после него. Сама же функция обращается в нуль в точке $s = 0$ и стремится к $-\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $\psi \in I_{+}^{+}$ функция $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ имеет единственный строго положительный максимум (глобальный) на $[0, +\infty)$. Отсюда следует (6.6 $_{+}^{+}$).

Случай (6.5 $_{+}^{-}$). При $\psi \in I_{+}^{-}$ производная (6.7) функции $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ положительна при всех $s \in (0, +\infty)$, поскольку невозможны одновременно равенства $\cos(q+1)\psi = \cos q\psi = 0$, а сама функция равна нулю в точке $s = 0$. Отсюда сразу следует (6.6 $_{+}^{-}$).

Случай (6.5 $_{-}^{+}$). При $\psi \in I_{-}^{+}$ производная (6.7) функции $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ отрицательна при всех $s \in (0, +\infty)$ также ввиду невозможности одновременного выполнения равенств $\cos(q+1)\psi = \cos q\psi = 0$ и равенства нулю самой функции в точке $s = 0$. Это сразу дает (6.6 $_{-}^{+}$).

Случай (6.5 $_{-}^{-}$). При $\psi \in I_{-}^{-}$ производная (6.7) функции $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ имеет один положительный нуль (6.8), отрицательна до этого нуля и положительна после него. Сама же функция обращается в нуль в точке $s = 0$ и стремится к $+\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $\psi \in I_{-}^{+}$ функция $s \mapsto -e_q(1, se^{i\psi})$ имеет единственный строго отрицательный минимум (глобальный) на $[0, +\infty)$, что и дает (6.6 $_{-}^{-}$).

Явные выражения для объединений интервалов $I_{\pm}^{\pm}$ из (6.5) выписываются с помощью элементарной тригонометрии именно как однопараметрические

семейства, но как двухпараметрические они в неявном виде возникали еще у Данжуа в [6; гл. I, п. 1].

Рис. 3. Случай $q = 6$. Область положительности в круге $D(3/2)$ — светло-серая

Теперь при любых нецелых значениях $\rho > 1$ с $q = [\rho] \in \mathbb{N}$ можно дать и более удобную для вычислений запись для величины I_ρ из (6.1) и для оценок (0.2) и (0.5) теорем 1 и 2 соответственно. В следующем утверждении фактически только величины $v_q(\psi)$, определенные в п. 3) предложения 6, задаются неявно. По-видимому, они могут быть или найдены с любой наперед заданной точностью численными методами, или выражены через какие-либо специальные функции, которые нам выявить не удалось.

Рис. 4. Случай $q = 7$. Область положительности в круге $D(6/5)$ — светло-серая

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $1 \leq q = [\rho] \neq \rho$. Тогда для величины I_ρ из (6.1) в обозначениях пп. 3), 5) предложения 6 справедливо представление

$$I_\rho = \frac{\rho}{\pi} \left(\int_{I_+^+} \int_0^{v_q(\psi)} + \int_{I_-^-} \int_{v_q(\psi)}^{+\infty} \right) \frac{\cos(q+1)\psi - s \cos q\psi}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} \frac{ds}{s^{\rho-q}} d\psi \quad (6.9i)$$

$$+ \frac{1}{2 \cos \pi \rho / 2} \left(\frac{\sin \pi \rho (q-1)/(2q)}{\sin \pi \rho / q} - \frac{\sin \pi \rho q/(2(q+1))}{\sin \pi \rho / (q+1)} \right). \quad (6.9t)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После перестановки интегралов в (6.1) из четности по ψ подынтегральной функции в (6.1) и из п. 5) предложения 6 следует, что

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{\rho^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} (-e_q(1, se^{i\psi}))^+ \frac{ds}{s^{\rho+1}} d\psi \\ &= \frac{\rho^2}{\pi} \left(\int_{I_+^+} \int_0^{v_q(\psi)} + \int_{I_-^+} \int_0^{+\infty} + \int_{I_-^-} \int_{v_q(\psi)}^{+\infty} \right) (-e_q(1, se^{i\psi})) \frac{ds}{s^{\rho+1}} d\psi, \end{aligned}$$

т.е. можно избавиться от верхнего индекса “+” в подынтегральном выражении. Теперь, используя представление (6.4s), можем продолжить преобразование выражения для I_ρ :

$$I_\rho = \frac{\rho}{\pi} \int_{I_+^+} \int_0^{v_q(\psi)} \left(\int_0^s \frac{\cos(q+1)\psi - t \cos q\psi}{t^2 - 2t \cos \psi + 1} t^q dt \right) d\left(-\frac{1}{s^\rho}\right) d\psi \quad (6.10_+^+)$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \int_{I_-^+} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \frac{\cos(q+1)\psi - t \cos q\psi}{t^2 - 2t \cos \psi + 1} t^q dt \right) d\left(-\frac{1}{s^\rho}\right) d\psi \quad (6.10_+^-)$$

$$+ \frac{\rho}{\pi} \int_{I_-^-} \int_{v_q(\psi)}^{+\infty} \left(\int_0^s \frac{\cos(q+1)\psi - t \cos q\psi}{t^2 - 2t \cos \psi + 1} t^q dt \right) d\left(-\frac{1}{s^\rho}\right) d\psi. \quad (6.10_-^-)$$

Из асимптотических свойств подынтегральных выражений при $s \rightarrow +\infty$ и того, что выражение (6.4s) обращается в нуль при $s = v_q(\psi)$, после интегрирования по частям из интегралов (6.10_+^+) и (6.10_-^-) получаем два двойных (повторных) интеграла из правой части (6.9i).

Осталось упростить тройной (повторный) интеграл (6.10_+^+).

Дадим набросок соответствующих выкладок. Известно [25; 2.2.9, пример 24], что

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^a}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} ds = \frac{\pi \sin a(\pi - \psi)}{\sin \pi a \cdot \sin \psi}, \quad -1 < a < 1, \quad a \neq 0$$

(это также можно вычислить с помощью вычетов, используя [26; § 1.3, пример 5]). Из этого равенства для двух внутренних последовательных интегралов из (6.10_+^+) при нецелом $\rho > 1$ и $q = [\rho]$ после интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} J_\pm(\psi; \rho) &:= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s \frac{\cos(q+1)\psi - t \cos q\psi}{t^2 - 2t \cos \psi + 1} t^q dt \right) d\left(-\frac{1}{s^\rho}\right) \\ &= \cos(q+1)\psi \int_0^{+\infty} \frac{s^{q-\rho}}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} ds - \cos q\psi \int_0^{+\infty} \frac{s^{1+q-\rho}}{s^2 - 2s \cos \psi + 1} ds \\ &= \cos(q+1)\psi \frac{\pi \sin((q-\rho)(\pi - \psi))}{\sin \pi(q-\rho) \cdot \sin \psi} - \cos q\psi \frac{\pi \sin((1+q-\rho)(\pi - \psi))}{\sin \pi(1+q-\rho) \cdot \sin \psi}. \end{aligned}$$

Отсюда простые, но довольно трудоемкие вычисления дают

$$J_{\pm}(\psi; \rho) = -\frac{\pi}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\pi - \psi).$$

Таким образом, тройной (повторный) интеграл из (6.10 $^{\pm}$) с множителем ρ/π согласно явному представлению (6.5 $^{\pm}$ e) объединения отрезков $I_{-}^{\pm}$ равен

$$\begin{aligned} \frac{-\rho}{\sin \pi \rho} \int_{I_{-}^{\pm}} \cos \rho(\pi - \psi) d\psi &= \frac{1}{\sin \pi \rho} \int_{I_{-}^{\pm}} \cos \rho(\pi - \psi) d\rho(\pi - \psi) \\ &= \frac{1}{\sin \pi \rho} \sum_{m=0}^{[(q-1)/2]} \left(\sin \rho \left(\pi - \min \left\{ \frac{(4m+3)\pi}{2q}, \pi \right\} \right) - \sin \rho \left(\pi - \frac{(4m+3)\pi}{2(q+1)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin \pi \rho} \left(\sum_{m=0}^{[(q-1)/2]} \sin \pi \rho \frac{(2q-4m-3)^+}{2q} - \sum_{m=0}^{[(q-1)/2]} \sin \pi \rho \frac{2q-4m-1}{2(q+1)} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \pi \rho} \left(\frac{\sin \pi \rho / 2}{\sin \pi \rho / q} \sin \frac{\pi \rho (q-1)}{2q} - \frac{\sin \pi \rho / 2}{\sin \pi \rho / (q+1)} \sin \frac{\pi \rho q}{2(q+1)} \right), \end{aligned}$$

где итоговое выражение совпадает с (6.9t) и может быть получено либо вычислением двух предшествующих сумм синусов элементарным вещественным или комплексным способом, либо из таблиц [25; 4.4.1, пример 5].

Список литературы

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [2] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [3] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [4] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, т. 1, Мир, М., 1980; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, vol. 1, London Math. Soc. Monogr. Ser., **9**, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1976.
- [5] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 121–160; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “Zero sequences of holomorphic functions, representation of meromorphic functions, and harmonic minorants”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 261–298.
- [6] A. Denjoy, “Sur les produits canoniques d’ordre infini”, *J. Math. Pures Appl.*, **6**:6 (1910), 1–136.
- [7] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I”, *Матем. сб.*, **58(100)**:3 (1962), 289–334.
- [8] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, №1, 31–36; англ. пер.: A. Yu. Popov, “The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ -density”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 32–36.

- [9] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Об оценках типа и нижнего типа канонических произведений порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы Восьмой международной школы-конференции (Казань, 2007), Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского, **35**, 2007, 42–44.
- [10] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, т. 14: Обзор, РИЦ БашГУ, Уфа, 2006.
- [11] L. A. Rubel, “Necessary and sufficient conditions for Carlson’s theorem on entire functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1956), 417–429.
- [12] P. Malliavin, L. A. Rubel, “On small entire functions of exponential type with given zeros”, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 175–206.
- [13] Б. Н. Хабибуллин, “О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси”, *Матем. сб.*, **180**:5 (1989), 706–719; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “On the growth of entire functions of exponential type along the imaginary axis”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:1 (1990), 261–298.
- [14] Б. Н. Хабибуллин, “О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями”, *Anal. Math.*, **17**:3 (1991), 239–256.
- [15] С. Мандельбройт, *Ряды Дирихле. Принципы и методы*, Мир, М., 1973; пер. с фр.: S. Mandelbrojt, *Séries de Dirichlet. Principes et méthodes*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [16] А. Ю. Попов, “О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **5** (1999), 48–52; англ. пер.: A. Yu. Popov, “Completeness of exponential systems with real exponents of a prescribed under density in spaces of analytic functions”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **54**:5 (1999), 47–51.
- [17] Б. Н. Хабибуллин, “О типе целых и мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **183**:11 (1992), 35–44; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “On the type of entire and meromorphic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:2 (1994), 293–301.
- [18] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.
- [19] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 5-е изд., Наука, М., 1987; нем. пер. 3-го изд.: M. A. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, VEB, Berlin, 1967.
- [20] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Наука, М., 1962; нем. пер.: G. M. Fikhtengol’ts, *Differential- und Integralrechnung*, II, Hochschulbücher für Math., **62**, VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1986.
- [21] Б. Н. Хабибуллин, “Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “Dual representation of superlinear functionals and its applications in function theory. II”, *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 1017–1039.
- [22] М. Р. Каримов, Б. Н. Хабибуллин, “Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций”, *Труды международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. III. Анализ и дифференциальные уравнения*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2000, 29–34.
- [23] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients*, Grundlehren Math. Wiss., **257**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983.
- [24] Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, Часть 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел, Наука, М.,

- 1978; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band II: Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.
- [25] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. Т. I. *Элементарные функции*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series*. Vol. 1. *Elementary functions*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [26] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, М., 1979; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Evgrafov, *Asymptotic estimates and entire functions*, Gordon and Breach, New York, 1961.

Б. Н. Хабибуллин (B. N. Khabibullin)

Математический факультет

Башкирского государственного университета, г. Уфа;

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступила в редакцию

22.05.2007 и 12.08.2008