Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Ремизов, Особенности коразмерности 2 в трехмерных аффинно-управляемых системах со скалярным управлением, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 4, 143–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 08:49:52

УДК 517.977

А. О. Ремизов

Особенности коразмерности 2 в трехмерных аффинно-управляемых системах со скалярным управлением

Исследуются особенности коразмерности 2 поля вполне особых экстремальных траекторий в трехмерных аффинно-управляемых системах со скалярным управлением. Существуют два типа таких особенностей: первый связан с особенностью самого поля гамильтоновой системы принципа максимума, а второй – с вырождением проектирования поля вполне особых экстремалей на фазовое пространство. Возникающие в этих двух случаях поля экстремальных траекторий имеют совершенно различные нормальные формы и фазовые портреты.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

В геометрической теории управления [1] рассматриваются управляемые системы

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $f_i(x)$ – гладкие (C^∞) отображения $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Множество допустимых управлений состоит из всех кусочно-гладких функций $u(t)$ со значениями в некотором ограниченном множестве $U \subset \mathbb{R}^1$, которое далее будем считать отрезком. В [1] исследуются геометрически оптимальные вполне особые экстремали системы (1), т.е. экстремали, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина с гамильтонианом $H_u(x, p) = h_0(x, p) + uh_1(x, p)$, причем $\max H_u$ достигается не на границе, а внутри U . Введем следующие обозначения: $h_i = \langle f_i(x), p \rangle$ – действие ковектора $p \in (\mathbb{R}^3)^*$ (множителя Лагранжа) на вектор $f_i(x)$; $h_{i_1, \dots, i_k} = \{h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k}\}$ – скобки Пуассона функций; $f_{i_1, \dots, i_k} = [f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}]$ – скобки Ли векторных полей. Очевидно, что $h_{i_1, \dots, i_k} = \langle p, f_{i_1, \dots, i_k} \rangle$. Гамильтонова система, соответствующая (1), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + uf_1(x), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} - u \frac{\partial h_1}{\partial x}. \quad (2)$$

Для геометрически оптимальных вполне особых экстремалей (далее для краткости будем называть их просто экстремалиями) условие максимума из принципа Понтрягина сводится к тождеству $h_1 = 0$. Дважды дифференцируя это тождество по направлению поля (2), получаем тождества $h_{01} = 0$ и $h_{001} - uh_{110} = 0$. Последнее соотношение позволяет выразить управление u через

Работа выполнена при поддержке гранта SFRH/BPD/26138/2005 (Португалия).

переменные (x, p) . Подставляя это выражение в гамильтонову систему (2), получаем векторное поле

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + \frac{h_{001}}{h_{110}} f_1(x), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{h_{001}}{h_{110}} \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (3)$$

определенное во всех точках пространства (x, p) , где $h_{110} \neq 0$. Соотношения $h_1 = 0$, $h_{01} = 0$ задают в пространстве (x, p) многообразие S , содержащее все экстремали. Легко проверить, что S является инвариантным многообразием поля (3), поэтому вместо поля (3) можно рассматривать его ограничение на S . Полученное таким образом поле определено во всех точках S за исключением подмножества K : $h_{110} = 0$, называемого *криминантой*. В точках криминанты, где $h_{001} \neq 0$, управление u принимает бесконечное значение и, таким образом, через эти точки и вблизи них не проходит ни одной допустимой экстремали ($u \notin U$). Остаются точки, в которых $h_{110} = h_{001} = 0$, и значение u не может быть определено из соотношения $h_{001} - uh_{110} = 0$. Такие точки будем называть *особыми точками поля экстремалей*, а их множество обозначим через W .

В [1] рассмотрен случай $h_{110} \neq 0$, а также противоположный случай, когда $h_{110} \equiv h_{001} \equiv 0$, т.е. все многообразие S состоит из особых точек. В этой статье мы рассмотрим особые точки поля экстремалей минимальной коразмерности (два), возникающие в системе (1) общего положения. Умножим (3) на функцию h_{110} и запишем полученное векторное поле в виде

$$\dot{x} = h_{110}f_0(x) + h_{001}f_1(x), \quad \dot{p} = -h_{110}\frac{\partial h_0}{\partial x} - h_{001}\frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (4)$$

где точка над x или p означает дифференцирование по новой переменной τ , связанной с временем t равенством

$$\dot{t} = h_{110}. \quad (5)$$

Поле (4) определено на всем многообразии S и обращается в нуль во всех особых точках поля экстремалей: $h_{110} = h_{001} = 0$. Векторные поля (3) и (4) задают одни и те же направления во всех точках $S \setminus K$ и имеют одни и те же фазовые кривые, но скорость и направление движения по их фазовым кривым отличаются. Точнее, как видно из (5), направления движения совпадают в области $h_{110} > 0$ и противоположны в области $h_{110} < 0$. Кроме того, для геометрической оптимальности должно быть выполнено необходимое условие второго порядка $h_{110} \leq 0$, называемое *обобщенным условием Лежандра* [1]. Это означает, что все искомые экстремали лежат на той части многообразия S , в которой движение по фазовым кривым векторных полей (3) и (4) происходит в противоположных направлениях. Это особенности первого типа.

Следующий этап исследования – построение экстремальных траекторий системы (1), т.е. проектирование экстремалей на пространство X переменных x вдоль подпространства переменных p . Пусть $\pi: S \rightarrow X$ – такое проектирование. Многообразие S задается системой из двух линейных по p уравнений

$$h_1 = \langle f_1, p \rangle = 0, \quad h_{01} = \langle f_{01}, p \rangle = 0. \quad (6)$$

Нерегулярные точки многообразия S (в которых дифференциалы функций h_1, h_{01} зависимы) соответствуют точкам пространства X , образующим множество коразмерности 4. Таким образом, далее везде будем считать S гладким четырехмерным многообразием и проектирование $\pi: S \rightarrow X$ нерегулярно (имеет неполный ранг) в тех точках, где векторы $f_1(x), f_{01}(x)$ линейно зависимы. В общем случае такие точки образуют в пространстве X некоторую кривую ψ . В каждой точке $x \in X \setminus \psi$ проектирование $\pi: S \rightarrow X$ является субмерсией и прообраз $\pi^{-1}(x)$ одномерен. В точках $x \in \psi$ (за исключением тех, где оба вектора $f_1(x), f_{01}(x)$ обращаются в нуль одновременно) размерность $\pi^{-1}(x)$ равна двум. Это особенности второго типа.

Особенности обоих типов связаны с особыми точками векторных полей вида

$$\dot{\xi} = v, \quad \dot{\eta} = w, \quad \dot{\zeta}_i = \alpha_i v + \beta_i w, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (7)$$

где v, w, α_i, β_i — гладкие функции переменных $\xi, \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$. Все компоненты ростка поля (7) содержатся в локальном идеале I , порожденном v и w в кольце ростков гладких функций от n переменных и, следовательно, множество особых точек задается двумя уравнениями $v = 0, w = 0$, определяющими в общем случае подмногообразие коразмерности 2 в фазовом пространстве. Спектр поля (7) в каждой особой точке равен $(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$, где число нулей равно $n-2$. В случае, если $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$, множество особых точек является центральным многообразием W^c . Поля вида (7) возникают в различных задачах: например, в системах дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, при описании медленного движения быстро-медленных систем и т.д. [2].

§ 2. Особые точки поля экстремалей

Установим некоторые свойства поля (4), рассматривая его сначала не на инвариантном многообразии S , а во всем объемлющем пространстве переменных (x, p) .

ЛЕММА 1. *Дивергенция поля (4) тождественно равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма проверяется вычислением дивергенции с использованием равенств $h_i = \langle p, f_i \rangle$ и тождества Якоби. Имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial p_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial p_i} h_{001} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial x_i} h_{001} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial h_0}{\partial p_i} \frac{\partial h_{110}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_0}{\partial x_i} \frac{\partial h_{110}}{\partial p_i} \right) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial p_i} \frac{\partial h_{001}}{\partial x_i} - \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \frac{\partial h_{001}}{\partial p_i} \right) \\ &= \{h_{001}, h_1\} + \{h_{110}, h_0\} = \{h_1, \{h_0, h_{10}\}\} + \{h_0, \{h_{10}, h_1\}\} \\ &= -\{h_{10}, \{h_1, h_0\}\} = -\{h_{10}, h_{10}\} = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Многообразие S : $h_1 = 0, h_{01} = 0$ является инвариантным для поля (4), причем h_{01} является первым интегралом этого поля, а h_1 — первым интегралом ограничения поля (4) на гиперповерхность $h_{01} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые вычисления с учетом соотношений $h_i = \langle p, f_i \rangle$ дают

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_{01}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial p_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial p_i} h_{001} \right) - \frac{\partial h_{01}}{\partial p_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial x_i} h_{001} \right) \\ = h_{110} \{h_{01}, h_0\} + h_{001} \{h_{01}, h_1\} = -h_{110} \{h_0, h_{01}\} + h_{001} \{h_1, h_{10}\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial p_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial p_i} h_{001} \right) - \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \left(\frac{\partial h_0}{\partial x_i} h_{110} + \frac{\partial h_1}{\partial x_i} h_{001} \right) \\ = h_{110} \{h_1, h_0\} - h_{001} \{h_1, h_1\} = h_{110} h_{10}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение $h_{110} h_{10}$ в правой части (9) тождественно равно нулю на гиперповерхности $h_{01} = 0$, что и доказывает утверждение леммы.

Нас интересуют такие особые точки поля (4), где обе функции h_{001} , h_{110} обращаются в нуль. При этом мы всегда будем считать, что выполнено следующее

УСЛОВИЕ 1. Векторы $f_0(x)$, $f_1(x)$, а также $f_1(x)$, $f_{01}(x)$ линейно независимы.

В случае общего положения оба предположения из условия 1 выполнены, так как нарушение каждого из них соответствует вырождению коразмерности 4. Из независимости $f_0(x)$, $f_1(x)$ следует, что росток поля (4) имеет вид (7) с $n = 6$, а в качестве ξ , η можно выбрать две переменные из набора $x = (x_1, x_2, x_3)$. Перенумеровав (x_1, x_2, x_3) нужным образом, можно считать, что $\xi = x_1$, $\eta = x_2$ и ζ_i – все остальные переменные из набора (x, p) . Локальный идеал I ростка поля (4) в особой точке порожден образующими h_{001} и h_{110} .

Независимость $f_1(x)$, $f_{01}(x)$ означает, что проектирование $\pi: S \rightarrow X$ является локальной субмерсией, прообраз $\pi^{-1}(x)$ каждой точки $x \in X$ одномерен и состоит из таких пар (x, p) , где ковекторы p пропорциональны $f_1 \times f_{01}(x)$ (знак $\times$ означает векторное произведение). Таким образом, на S можно ввести локальные координаты (x, ω) , где скаляр ω определяется соотношением

$$p = \omega f_1 \times f_{01}(x). \quad (10)$$

При этом $\omega \neq 0$, так как множитель Лагранжа p не обращается в нуль. Это означает, что инвариантное многообразие S не связно и представляет собой объединение двух связных компонент $S_{\pm}$, определенных условиями $\omega > 0$ и $\omega < 0$. Ограничение поля (4) на S имеет вид

$$\dot{x} = \omega e_1(x) f_0(x) + \omega e_0(x) f_1(x), \quad \dot{\omega} = \alpha \omega^2 e_1(x) + \beta \omega^2 e_0(x), \quad (11)$$

где

$$e_1(x) = \langle f_1 \times f_{01}, f_{110} \rangle, \quad e_0(x) = \langle f_1 \times f_{01}, f_{001} \rangle, \quad (12)$$

α , β – некоторые гладкие ростки от x . Действительно, так как локальный идеал I поля (4) порожден образующими h_{001} и h_{110} , то локальный идеал I_S ограничения поля (4) на многообразие S , заданное соотношением (10), порожден

образующими $\omega e_1(x)$ и $\omega e_0(x)$. Отсюда с учетом (10) и линейной зависимости h_{001} и h_{110} от p следует формула (11). Наша цель – получить фазовый портрет экстремальных траекторий с учетом направления движения. Поэтому мы можем умножить поле (11) на функцию $|\omega|^{-1}$, гладкую на каждой компоненте связности $S_{\pm}$, и затем спроектировать поле на X . Проекция получившегося поля с подмногообразий $S_{\pm}$ на X имеет вид

$$\dot{x} = e_1(x)f_0 + e_0(x)f_1, \quad (13)$$

$$\dot{x} = -e_1(x)f_0 - e_0(x)f_1 \quad (14)$$

соответственно.

ЛЕММА 3. Пусть выполнено условие 1. Тогда спектр матрицы линейной части полей (13) и (14) в особой точке равен $(\lambda, -\lambda, 0)$, где $\lambda^2 = \langle f_0 \times f_1, g_0 \times g_1 \rangle$ и $g_i(x)$ – градиент функции $e_i(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии линейной независимости векторов $f_0(x)$, $f_1(x)$ росток поля (4) имеет вид (7) с $n = 6$, а локальный идеал I порожден образующими h_{001} и h_{110} . Следовательно, спектр линейной части поля (4) в особой точке равен $(\lambda'_1, \lambda'_2, 0, \dots, 0)$, где число нулей равно 4. Кроме того, легко видеть, что в особой точке дивергенция поля (7) совпадает со следом матрицы его линейной части, т.е. равна $\lambda'_1 + \lambda'_2$. По лемме 1 дивергенция поля (4) тождественно равна нулю. Следовательно, в любой его особой точке имеет место резонанс $\lambda'_1 + \lambda'_2 = 0$ и спектр линейной части равен $(\lambda', -\lambda', 0, \dots, 0)$, где λ' может быть как вещественным, так и чисто мнимым.

Поле (11) является ограничением (4) на инвариантное многообразие S . Оно имеет вид (7), где $n = 4$ и локальный идеал I порожден ростками, полученными ограничением h_{001} и h_{110} на S , т.е. ωe_0 и ωe_1 . По лемме 2 h_{01} является первым интегралом поля (4). Согласно условию 1 дифференциал h_{01} невырожден, причем отлична от нуля его вертикальная часть $(h_{01})'_p$. Следовательно, спектр линейной части ограничения поля (4) на инвариантную гиперповерхность $h_{01} = 0$ равен $(\lambda', -\lambda', 0, 0, 0)$. По лемме 2 h_1 является первым интегралом ограничения (4) на гиперповерхность $h_{01} = 0$. Согласно условию 1 векторы $f_1(x)$, $f_{01}(x)$ линейно независимы и дифференциал ограничения h_1 на гиперповерхность $h_{01} = 0$ невырожден, причем его вертикальная часть отлична от нуля. Следовательно, спектр линейной части ограничения поля (4) на инвариантное многообразие S : $h_1 = h_{01} = 0$ равен $(\lambda', -\lambda', 0, 0)$.

В особой точке дивергенция поля (11)

$$\omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (e_1(x)f_0^{(i)}(x) + e_0(x)f_1^{(i)}(x)) + 2\omega(\alpha e_1(x) + \beta e_0(x))$$

совпадает с дивергенцией его проекции на пространство X , так как функции $e_0(x)$ и $e_1(x)$ обращаются в нуль и вклад вертикальной компоненты $2\omega(\alpha e_1(x) + \beta e_0(x))$ равен нулю. Поля (13) и (14) получены умножением (11) на $|\omega|^{-1}$ и проектированием на X . Следовательно, в их особых точках дивергенция (т.е. след матрицы линейной части) равна нулю. Остается заметить, что поля (13) и (14) имеют вид (7), где $n = 3$ и локальный идеал I порожден ростками $e_0(x)$ и $e_1(x)$.

Следовательно, спектр линейной части в особой точке равен $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, а так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, то он равен $(\lambda, -\lambda, 0)$. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид $\lambda(\lambda^2 + \varkappa) = 0$, где $\varkappa$ равно сумме трех миноров второго порядка матрицы линейной части поля, расположенных симметрично относительно главной диагонали. Непосредственное вычисление с учетом того, что в особой точке обе функции $e_0(x)$ и $e_1(x)$ обращаются в нуль, дает выражение $\varkappa = -\langle f_0 \times f_1, g_0 \times g_1 \rangle$. Лемма доказана.

Далее мы исключим из рассмотрения случай $\lambda = 0$ и исследуем отдельно вещественный ($\varkappa < 0$) и мнимый ($\varkappa > 0$) случаи, без ограничения общности полагая $\lambda = 1$ и $\lambda = i$ соответственно (здесь i – мнимая единица). В такой особой точке $x \in X$ поля (13) имеет место естественная поляризация касательного пространства, т.е.

$$T_x X = T_x^{+1} \oplus T_x^{-1} \oplus T_x^0, \quad \varkappa < 0, \quad T_x X = T_x^{\pm i} \oplus T_x^0, \quad \varkappa > 0, \quad (15)$$

где T_x^{+1} и T_x^{-1} – собственные направления поля (13), соответствующие $+1$ и -1 , и $T_x^{\pm i}$ – двумерное инвариантное подпространство, отвечающее мнимой паре $\pm i$. Направление T_x^0 соответствует нулевому собственному значению, т.е. касается кривой $e_0 = e_1 = 0$, состоящей из особых точек, которая в вещественном случае является центральным многообразием W^c . В силу предположения $\lambda \neq 0$ ростки $e_0(x)$, $e_1(x)$ имеют независимые дифференциалы и уравнения $e_0(x) = 0$, $e_1(x) = 0$ задают гладкие трансверсально пересекающиеся поверхности в X .

Криминантой системы является поверхность $K \subset X$: $e_1(x) = 0$. С точки зрения оптимального управления ее смысл состоит следующем. Во-первых, допустимые траектории не могут пересекать K в точках, где $e_0(x) \neq 0$, так как в таких точках управление

$$u = \frac{h_{001}(x, p)}{h_{110}(x, p)} = \frac{e_0(x)}{e_1(x)} \quad (16)$$

становится бесконечным, что противоречит условию $u \in U$. Таким образом, допустимые траектории могут пересекать K только в особых точках поля (11). Во-вторых, оптимальные траектории системы (1) должны удовлетворять обобщенному условию Лежандра $h_{110} \leq 0$, т.е. $\omega e_1(x) \leq 0$. Таким образом, если при переходе через особую точку поля (11) функция $e_1(x)$ меняет знак, то и знак ω тоже должен измениться так, чтобы сохранилось неравенство $\omega e_1(x) \leq 0$. Но последнее означает, что ковектор p должен совершить скачок с одной из компонент связности $S_{\pm}$ на противоположную, что противоречит требованию абсолютной непрерывности из принципа максимума Понтрягина. Следовательно, при переходе через особую точку поля (11) функция $e_1(x)$ не может менять знак. Далее будет показано, что при дополнительных условиях общего положения всегда существует переключение оптимального управления, реализующее такую возможность.

УСЛОВИЕ 2. В точке $o \in X$ криминанта трансверсальна обоим подпространствам $T_o^{\pm 1}$ из разложения (15) в вещественном случае и подпространству $T_o^{\pm i}$ в мнимом случае.

В мнимом случае приведенные соображения позволяют увидеть, что в окрестности особой точки o допустимых траекторий системы (1) не существует. Действительно, все фазовые кривые полей (13) и (14) вблизи особой точки o представляют собой спирали, которые совершают витки вокруг линии $e_0(x) = e_1(x) = 0$, пересекая при этом (бесконечное число раз) криминанту K в точках, где $e_0(x) \neq 0$. Это означает, что в сколь угодно малой окрестности точки o управление u принимает бесконечные значения бесконечное число раз. Рассмотрим вещественный случай, используя полученный в [2] результат:

ТЕОРЕМА 1. *Для любого натурального k существует C^k -гладкий диффеоморфизм пространства X , приводящий росток поля (13) к ренормальной форме*

$$\dot{\xi} = \xi(1 + \Phi_1(r, \zeta)), \quad \dot{\eta} = \eta(-1 + \Phi_2(r, \zeta)), \quad \dot{\zeta} = r\Psi(r, \zeta), \quad (17)$$

где $r = \xi\eta$ – резонансный моном, $\Phi_{1,2}(r, \zeta)$ и $\Psi(r, \zeta)$ – полиномы степени $4(k+1)$ по переменной r с коэффициентами, гладко зависящими от ζ . Если $\Psi \neq 0$, то для любого натурального k росток поля (13) C^k -гладко орбитально эквивалентен

$$\dot{\xi} = \xi, \quad \dot{\eta} = -\eta, \quad \dot{\zeta} = \xi\eta. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя теорему 22 из работы [3], можно показать, что в теореме 1 имеет место C^∞ -гладкая эквивалентность. Однако в аналитической ситуации это уже не верно: в нормальной форме (18) появляется модуль [4].

При этих условиях тем же диффеоморфизмом поле (14) приводится к форме, отличающейся от (17) и (18) лишь знаком.

Поле (13) имеет очевидный первый интеграл $r = \xi\eta$ и соответствующее инвариантное слоение $\xi\eta = c$. При $c \neq 0$ поверхность $\xi\eta = c$ представляет собой гиперболический цилиндр, а при $c = 0$ – пару ортогональных плоскостей W^{sc} : $\xi = 0$ и W^{uc} : $\eta = 0$. Эти плоскости – устойчиво-центральное и неустойчиво-центральное многообразия поля, их пересечение – центральное многообразие W^c – совпадает с осью ζ . Ограничение (13) на W^{sc} и W^{uc} приводит к линейному уравнению, фазовые кривые которого – прямые, ортогональные оси ζ и приближающиеся к ней с экспоненциальной скоростью при $\tau \rightarrow -\infty$ (для W^{sc}) или $\tau \rightarrow +\infty$ (для W^{uc}). В каждую особую точку оси ζ входит одна такая прямая при $\tau \rightarrow -\infty$ и одна прямая при $\tau \rightarrow +\infty$. Это одномерные инвариантные многообразия W^s и W^u соответственно. Остальные фазовые кривые, лежащие на гиперболических цилиндрах $\xi\eta = c$, являются седловыми. Для поля (14) картина аналогичная, только направление движения по фазовым кривым меняется на противоположное и слова “устойчивое” и “неустойчивое” меняются местами.

Теперь рассмотрим движение системы в соответствии с возрастанием реального времени t , которое связано с τ соотношением (5). Обозначим через γ_1 и γ_2 фазовые кривые поля (13), входящие в точку o при $\tau \rightarrow +\infty$ и $\tau \rightarrow -\infty$ (безразлично, в каком именно порядке). Они же будут фазовыми кривыми поля (14), входящими в точку o (при противоположных знаках τ). Поля (13) и (14) – проекции поля (11) с двух разных компонент связности $S_\pm$, характеризующихся условиями $\omega > 0$ и $\omega < 0$. Поэтому каждой не лежащей на криминанте точке x соответствуют точки $(x, \omega) \in \pi^{-1}(x)$, принадлежащие как одной, так и другой

компоненте $S_{\pm}$, причем для всех точек одной из них $\omega e_1(x) > 0$, а для всех точек другой $\omega e_1(x) < 0$. Из равенства $\dot{t} = \omega e_1(x)$ следует, что при фиксировании компоненты S_+ или S_- (т.е. условия $\omega > 0$ или $\omega < 0$) движение по каждой из кривых $\gamma_{1,2}$ с возрастанием t приводит либо к переходу из области $\omega e_1(x) > 0$ в область $\omega e_1(x) < 0$, либо наоборот. Порядок перехода из одной области в другую для кривых $\gamma_{1,2}$ противоположен; при фиксированной γ_i он противоположен для компонент $S_{\pm}$, так как им соответствуют разные знаки ω .

Для определенности положим, что для компоненты S_+ (поле (13)) движение с возрастанием t по кривой γ_1 происходит по направлению из области $\omega e_1(x) < 0$ в область $\omega e_1(x) > 0$, а по γ_2 – наоборот (если это не так, то можно переименовать кривые γ_1 и γ_2). Тогда для компоненты S_- (поле (14)) имеет место противоположная ситуация. В соответствии с обобщенным условием Лежандра $\omega e_1(x) \leq 0$ экстремальная траектория может войти в точку o либо по кривой γ_1 с $\omega > 0$, либо по кривой γ_2 с $\omega < 0$, а выйти из точки o либо по кривой γ_1 с $\omega < 0$, либо по кривой γ_2 с $\omega > 0$. Для выполнения условия $\omega e_1(x) \leq 0$ требуется либо продолжать движение по той же самой кривой γ_i , но сделать скачок ковектора p с одной из компонент связности $S_{\pm}$ на противоположную, либо, оставив ковектор p на прежней компоненте, произвести переключение управления u таким образом, чтобы выйти из точки o по другой кривой γ_i . Первый вариант противоречит требованию непрерывной зависимости p от времени (принцип максимума Понтрягина). Следовательно, остается только второй вариант: переключение управления со сменой траектории. Значения управления в точке o получаются из формулы (16) предельным переходом $x \rightarrow 0$ по направлениям γ_i с помощью правила раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и с учетом трансверсальности K и $T_o^{\pm 1}$, т.е.

$$u_i^* = \lim_{\gamma_i \rightarrow o} \frac{e_0(x)}{e_1(x)} = \frac{\partial_{\gamma_i^*} e_0}{\partial_{\gamma_i^*} e_1} \Big|_o, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Здесь знак $\partial_{\gamma_i^*}$ означает дифференцирование по направлению кривой γ_i , т.е. по одному из собственных направлений $T_o^{\pm 1}$ в точке o .

Для завершения исследования этого случая остается рассмотреть возможность экстремалей, целиком состоящих из особых точек поля (4). Соответствующие им траектории должны целиком состоять из особых точек полей (13) и (14). Такие экстремали и экстремальные траектории назовем *исключительными*. Покажем, что в случае общего положения исключительных экстремалей не существует.¹ Действительно, для любой экстремали выполнено тождество $h_{001} - uh_{110} = 0$, дифференцируя которое, получаем

$$\begin{aligned} \{H_u, h_{001} - uh_{110}\} &= h_{0001} + \{uh_1, h_{001}\} - \{h_0, uh_{110}\} - \{uh_1, uh_{110}\} \\ &= h_{0001} + u(h_{1001} - h_{0110}) - u^2 h_{1110} - h_{110}(\{h_0, u\} + \{uh_1, u\}) \\ &\quad + h_1(\{u, h_{001}\} - \{u, h_{110}\}). \end{aligned}$$

¹Исключительные экстремали очень похожи на особые решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных (огигающие семейств обычных решений). И в том, и в другом случае имеется поле вида (7) и траектория, целиком состоящая из его особых точек. В обоих случаях это означает выполнение определенных функциональных соотношений, т.е. соответствует вырождению бесконечной коразмерности. Впервые это было установлено Дарбу [5] и казалось парадоксом.

Для исключительной экстремали $h_{110} \equiv h_1 \equiv 0$ и, следовательно, значение u является корнем квадратного уравнения

$$u^2 h_{1110} + u(h_{0110} - h_{1001}) - h_{0001} = 0, \quad (20)$$

коэффициенты которого зависят от (x, p) . Можно заменить ковектор p выражением (10) и, сократив общий множитель ω , получить зависимость только от x . В случае общего положения число вещественных корней уравнения (20) равно 0 или 2. Очевидно, в первом случае исключительной экстремали не существует. Пусть теперь u_* – любой вещественный корень (20) и v_* – вектор скорости гамильтоновой системы (2) в особой точке, полученный при подстановке значения $u = u_*$. В случае общего положения вектор v_* не касается состоящего из особых точек многообразия W , что противоречит определению исключительной экстремали (она должна содержаться в W).

§ 3. Особенности проектирования

Особенности второго типа – это точки кривой $\psi \subset X$, в которых векторные поля $f_1(x)$, $f_{01}(x)$ линейно зависимы, поле $f_1(x) \times f_{01}(x)$ обращается в нуль и проектирование $\pi: S \rightarrow X$ нерегулярно. Рассмотрим точку o кривой ψ для системы (1) общего положения. В этом случае в окрестности o поля $f_0(x)$ и $f_1(x)$ не обращаются в нуль. Поэтому мы можем выбрать в пространстве X локальные координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$, выпрямляющие поле $f_1(x)$, и далее считать, что

$$f_1(x) = \partial_1, \quad f_0(x) = \sum_{i=1}^3 a_i(x) \partial_i, \quad \text{где } \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (21)$$

Тогда

$$f_{10}(x) = \sum_{i=1}^3 (a_i)'_{x_1} \partial_i, \quad f_1 \times f_{01}(x) = (a_3)'_{x_1} \partial_2 - (a_2)'_{x_1} \partial_3 \quad (22)$$

и кривая ψ задается уравнениями $(a_2)'_{x_1} = 0$, $(a_3)'_{x_1} = 0$. Далее будем считать, что в новых координатах в точке o выполнено следующее условие общего положения:

УСЛОВИЕ 3. Число $\varkappa = -\langle f_0 \times f_1, g_0 \times g_1 \rangle$ не равно нулю, и среди компонент поля $f_1(x) \times f_{01}(x)$ две имеют независимые дифференциалы.

ЛЕММА 4. Если выполнено условие 3, то в области $p \neq 0$ многообразия S и кривая ψ регулярны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию 3 функции $(a_2)'_{x_1}$ и $(a_3)'_{x_1}$ имеют независимые дифференциалы, что и означает регулярность кривой ψ . Докажем регулярность S . Пусть ковектор $p = (p_0, p_1, p_2)$, тогда для полей $f_0(x)$ и $f_1(x)$ вида (21) уравнение $h_1 = 0$ принимает вид $p_0 = 0$. Ограничение функции h_{01} на гиперповерхность $h_1 = 0$ имеет вид $p_1(a_2)'_{x_1} + p_2(a_3)'_{x_1}$. Следовательно, условие регулярности S в точке o , где $(a_2)'_{x_1} = (a_3)'_{x_1} = 0$, состоит в том, что производная функции $p_1(a_2)'_{x_1} + p_2(a_3)'_{x_1}$ по одной из переменных x_i отлична от нуля.

Отрицание этого утверждения дает равенства

$$p_1(a_2)''_{x_1x_i} + p_2(a_3)''_{x_1x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Рассматривая (23) как линейную систему с неизвестными p_1, p_2 , мы видим, что она имеет ненулевое решение (p_1, p_2) , только если дифференциалы функций $(a_2)'_{x_1}$ и $(a_3)'_{x_1}$ линейно зависимы, что противоречит условию 3. Лемма доказана.

В окрестности рассматриваемой точки o кривой ψ многообразие S представимо в виде объединения трех стратов:

$$S = S_\psi \cup S_+ \cup S_-,$$

определяемых следующим образом. Страт $S_\psi = \pi^{-1}(\psi)$ размерности 3 называется *вертикальным* и состоит из пар (x, p) , где $x \in \psi$ и ковектор p удовлетворяет системе линейных уравнений (6) ранга 1. Из леммы 4 следует, что S_ψ — гладкая гиперповерхность в S . Дополнение $S \setminus S_\psi$ состоит из пар (x, p) , где $x \in X \setminus \psi$ и ковектор p удовлетворяет системе (6) ранга 2. Как и в предыдущем параграфе, в $S \setminus S_\psi$ можно ввести координаты (x, ω) с помощью соотношения (10), однако гладкое продолжение этих координат с $S_\pm$ на все многообразие S теперь невозможно, так как при приближении (x, p) к S_ψ значение ω стремится к бесконечности. Условия $\omega > 0$ и $\omega < 0$ задают представление множества $S \setminus S_\psi$ в виде $S \setminus S_\psi = S_+ \cup S_-$, число компонент связности которого равно четырем. Страты $S_\pm$ (каждый из которых имеет две компоненты связности, разделенные гиперповерхностью S_ψ) будем называть *горизонтальными*. Ограничение π на $S_\pm$ является локальной субмерсией. Ограничение π на S_ψ имеет постоянный ранг 1, так как образом $\pi(S_\psi)$ является сама кривая ψ . Размерность прообраза $\pi^{-1}(x)$ для точки $x \in \psi$ равна 2, а для точки $x \in X \setminus \psi$ она равна 1.

На многообразии S кроме криванты $K: h_{110} = 0$ также играет большую роль гиперповерхность $L: h_{001} = 0$.² В предыдущем параграфе мы рассматривали точки, принадлежащие пересечению $K \cap L$. Сейчас, как следует из леммы 5, ситуация противоположная: $K \cap L = \emptyset$.

ЛЕММА 5. *Если выполнено условие 3, то в области $p \neq 0$ множества K и L — гладкие непересекающиеся гиперповерхности в S , трансверсальные S_ψ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (21) следует, что

$$f_{110}(x) = \sum_{i=1}^3 (a_i)''_{x_1x_1} \partial_i, \quad f_{001}(x) = \sum_{i=1}^3 A_i \partial_i, \quad (24)$$

где $A_i = \langle f_{10}, \nabla a_i \rangle - \langle f_0, \nabla (a_i)'_{x_1} \rangle$,

²Имеется прямая аналогия с дифференциальными уравнениями, не разрешенными относительно производной. Дифференцирование уравнения $F(t, x, p) = 0$, $p = \frac{dx}{dt}$, приводит к линейному уравнению $uF'_p + F'_t + pF'_x = 0$ для второй производной $u = \frac{dp}{dt}$, аналогичному уравнению $uh_{110} - h_{001} = 0$ для управления. В обоих случаях важную роль играют два множества: криванты K , на которой обращается в нуль коэффициент при u , и множество L , на котором обращается в нуль свободный член: в точках множества $K \setminus L$ величина $u = \infty$, а в точках множества $L \setminus K$ величина $u = 0$. Для уравнения $F(t, x, p) = 0$, $p = \frac{dx}{dt}$, множество L называется *линией перегиба*, так как $L \setminus K$ — это множество точек распрямления (и почти всегда — перегиба) его интегральных кривых [6], [7].

а ∇ означает градиент. Так как в точках кривой ψ обе функции $(a_2)'_{x_1}$ и $(a_3)'_{x_1}$ равны нулю, то в этих точках из (24) следуют равенства

$$A_2 = - \sum_{i=1}^3 a_i (a_2)''_{x_1 x_i}, \quad A_3 = - \sum_{i=1}^3 a_i (a_3)''_{x_1 x_i}. \quad (25)$$

Вычислим число $\varkappa$. Из формулы (12) с учетом (22) и (24) получаем

$$e_0 = A_2 (a_3)'_{x_1} - A_3 (a_2)'_{x_1}, \quad e_1 = (a_2)''_{x_1 x_1} (a_3)'_{x_1} - (a_3)''_{x_1 x_1} (a_2)'_{x_1}. \quad (26)$$

Так как в точках кривой ψ имеем $(a_2)'_{x_1} = (a_3)'_{x_1} = 0$, то из (26) вытекает равенство $(e_1)'_{x_1} = 0$. Из этих равенств и выражения $\varkappa = -\langle f_0 \times f_1, g_0 \times g_1 \rangle$ в точках кривой ψ получаем

$$(e_0)'_{x_1} = a_2 (e_1)'_{x_2} + a_3 (e_1)'_{x_3} = \sum_{i=2}^3 a_i \begin{vmatrix} (a_2)''_{x_1 x_i} & (a_2)''_{x_1 x_i} \\ (a_3)''_{x_1 x_i} & (a_3)''_{x_1 x_i} \end{vmatrix}, \quad (27)$$

$$\varkappa = (e_0)'_{x_1} (a_2 (e_1)'_{x_2} + a_3 (e_1)'_{x_3}) = (a_2 (e_1)'_{x_2} + a_3 (e_1)'_{x_3})^2 \geq 0.$$

Так как $\varkappa \neq 0$, то отсюда следует, что $\varkappa > 0$ и $|(a_2)''_{x_1 x_1}| + |(a_3)''_{x_1 x_1}| \neq 0$.

Многообразие S задается уравнениями $h_1 = 0$ и $h_{01} = 0$. Ограничение функций h_{01} , h_{110} и h_{110} на гиперповерхность $h_1 = 0$ имеет вид $p_1 (a_2)'_{x_1} + p_2 (a_3)'_{x_1}$, $p_1 (a_2)''_{x_1 x_1} + p_2 (a_3)''_{x_1 x_1}$ и $p_1 A_2 + p_2 A_3$ соответственно. Для доказательства того, что в области $p \neq 0$ пересечение $K \cap L = \emptyset$, достаточно заметить, что определитель линейной системы

$$p_1 (a_2)''_{x_1 x_1} + p_2 (a_3)''_{x_1 x_1} = 0, \quad p_1 A_2 + p_2 A_3 = 0$$

относительно неизвестных p_1, p_2 в точке кривой ψ равен значению $(e_0)'_{x_1}$ (см. равенства (25)) и в силу условия $\varkappa \neq 0$ и равенств (27) отличен от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение $p_1 = p_2 = 0$.

Введем функции $\varphi = p_1 (a_2)'_{x_1} + p_2 (a_3)'_{x_1}$ и $\Phi = p_1 A_2 + p_2 A_3$ от переменных x, p_1, p_2 . Тогда кривая K задается уравнениями $\varphi = 0$ и $\varphi'_{x_1} = 0$, а гиперповерхность L – уравнениями $\varphi'_{x_1} = 0$ и $\Phi = 0$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} & \varphi'_{x_3} & 0 & 0 \\ \varphi''_{x_1 x_1} & \varphi''_{x_1 x_2} & \varphi''_{x_1 x_3} & (a_2)''_{x_1 x_1} & (a_3)''_{x_1 x_1} \\ \Phi'_{x_1} & \Phi'_{x_2} & \Phi'_{x_3} & A_2 & A_3 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Отрицание условия, что кривая K регулярна, означает линейную зависимость двух первых строк матрицы (28). С учетом $|(a_2)''_{x_1 x_1}| + |(a_3)''_{x_1 x_1}| \neq 0$ это условие дает систему (23). Выше было показано, что при условии 3 система (23) имеет единственное решение $p_1 = p_2 = 0$. Отрицание условия, что кривая L регулярна, означает линейную зависимость двух последних строк матрицы (28). Это условие дает систему (23) в случае, если хотя бы одно из $A_{2,3}$ отлично от нуля. Следовательно, остается рассмотреть только случай $A_2 = A_3 = 0$. Умножив уравнения $A_2 = 0$ и $A_3 = 0$ на $(a_3)''_{x_1 x_1}$ и $(a_2)''_{x_1 x_1}$ соответственно и вычитая из второго первое, получаем

$$a_2 \begin{vmatrix} (a_2)''_{x_1 x_1} & (a_2)''_{x_1 x_2} \\ (a_3)''_{x_1 x_1} & (a_3)''_{x_1 x_2} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} (a_2)''_{x_1 x_1} & (a_2)''_{x_1 x_3} \\ (a_3)''_{x_1 x_1} & (a_3)''_{x_1 x_3} \end{vmatrix} = 0, \quad (29)$$

откуда в силу (27) следует $\varkappa = 0$, что противоречит условию 3.

Для доказательства трансверсальности K и S_ψ нужно показать, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi''_{x_1x_1} & \varphi''_{x_1x_2} & \varphi''_{x_1x_3} & (a_2)''_{x_1x_1} & (a_3)''_{x_1x_1} \\ (a_2)''_{x_1x_1} & (a_2)''_{x_1x_2} & (a_2)''_{x_1x_3} & 0 & 0 \\ (a_3)''_{x_1x_1} & (a_3)''_{x_1x_2} & (a_3)''_{x_1x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

равен 3. Из условия $\varkappa \neq 0$ и равенств (27) следует, что отличен от нуля по крайней мере один из миноров

$$\begin{vmatrix} (a_2)''_{x_1x_1} & (a_2)''_{x_1x_i} \\ (a_3)''_{x_1x_1} & (a_3)''_{x_1x_i} \end{vmatrix}, \quad i = 2, 3.$$

С учетом $|(a_2)''_{x_1x_1}| + |(a_3)''_{x_1x_1}| \neq 0$ это и означает, что ранг матрицы (30) равен 3. Аналогично доказывается трансверсальность L и S_ψ : нужно лишь заменить первую строку матрицы (30), которая соответствует градиенту функции φ'_{x_1} , на третью строку матрицы (28), соответствующую градиенту Φ . Выше было доказано, что A_2 и A_3 не могут обращаться в нуль одновременно, поэтому ранг такой матрицы также будет равен 3. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если выполнено условие 3, то в области $p \neq 0$ поле (4) не обращается в нуль и трансверсально S_ψ , а его проекция на пространство X не обращается в нуль и не касается кривой ψ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о том, что поле (4) и его проекция на пространство X не обращаются в нуль, тривиально следует из условия 3 и леммы 5. Действительно, так как в силу условия 3 векторы f_0, f_1 линейно независимы, то обращение горизонтальной части поля (4) в нуль возможно лишь когда $h_{110} = h_{001} = 0$. Но согласно лемме 5 в области $p \neq 0$ гиперповерхности $K, L \subset S$ не пересекаются и, следовательно, равенства $h_{110} = h_{001} = 0$ одновременно невозможны.

Предположим, что поле (4) касается гиперповерхности S_ψ . Тогда его проекция на X касается кривой ψ , задаваемой уравнениями $(a_2)'_{x_1} = 0, (a_3)'_{x_1} = 0$. Из (21) получаем равенства

$$(a_2)''_{x_1x_1} h_{001} + \sum_{i=1}^3 a_i (a_2)''_{x_1x_i} h_{110} = 0, \quad (a_3)''_{x_1x_1} h_{001} + \sum_{i=1}^3 a_i (a_3)''_{x_1x_i} h_{110} = 0.$$

Подставляя в них $h_{001} = \langle p, f_{001} \rangle$ и $h_{110} = \langle p, f_{110} \rangle$, где на многообразии S ковектор $p = (0, p_1, p_2)$, с учетом (24) получаем линейную систему

$$\begin{aligned} p_1 \left((a_2)''_{x_1x_1} \sum_{i=1}^3 a_i (a_3)''_{x_1x_i} + (a_3)''_{x_1x_1} A_2 \right) &= 0, \\ p_2 \left((a_3)''_{x_1x_1} \sum_{i=1}^3 a_i (a_2)''_{x_1x_i} + (a_2)''_{x_1x_1} A_3 \right) &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных p_1, p_2 . Подставляя в эту систему выражения (25) для $A_{2,3}$, получаем, что коэффициенты при p_1, p_2 равны $\pm\lambda$, т.е. оба отличны от нуля. Следовательно, она имеет единственное решение $p_1 = p_2 = 0$. Лемма доказана.

Из леммы 6 следует, что в окрестности точки o все экстремали трансверсально пересекают гиперповерхность S_ψ и, следовательно, за исключением единственной точки пересечения с S_ψ они целиком содержатся в горизонтальных стратах $S_\pm$. Ограничение поля (4) на $S_\pm$ имеет вид (11), а его проекция на X имеет вид (13), (14) и определена на множестве $X \setminus \psi$, являющемся образом горизонтальной части многообразия S при проектировании π . Очевидно, что поля (13), (14) можно продолжить по непрерывности на все пространство X . При этом кривая ψ становится множеством особых точек продолженного поля, так как из формулы (12) следует, что образующие $e_0(x)$, $e_1(x)$ локального идеала продолженного поля обращаются в нуль на кривой ψ .

ЛЕММА 7. *Если выполнено условие 3, то в любой точке кривой ψ нормальная жорданова форма линейной части полей, полученных непрерывным продолжением (13), (14) на все пространство X , равна $\pm \text{diag}(\lambda, \lambda, 0)$, где $\lambda^2 = \langle f_1 \times f_0, g_0 \times g_1 \rangle > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как поле (13) имеет вид (7), то спектр его линейной части в особой точке равен $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, где числа $\lambda_{1,2}$ – корни уравнения $\lambda^2 - \varkappa_0 \lambda + \varkappa = 0$, $\varkappa_0$ – след матрицы линейной части, число $\varkappa$ определено в (27). Так как $\varkappa_0$ и $\varkappa$ – инварианты линейной части поля, то можно воспользоваться теми же локальными координатами, что и прежде, со всеми доказанными ранее равенствами. С учетом $(a_2)'_{x_1} = 0$, $(a_3)'_{x_1} = 0$ и $(e_1)'_{x_1} = 0$ в точках кривой ψ получаем выражение

$$\varkappa_0 = \text{div}(e_0 f_1 + e_1 f_0) = (e_0)'_{x_1} + a_2(e_1)'_{x_2} + a_3(e_1)'_{x_3},$$

из которого с учетом (27) следует, что квадратное уравнение $\lambda^2 - \varkappa_0 \lambda + \varkappa = 0$ имеет единственный двукратный корень $\lambda = (e_0)'_{x_1} = a_2(e_1)'_{x_2} + a_3(e_1)'_{x_3}$. Остается доказать, что этому корню соответствуют две жордановых клетки первого порядка. Пусть Λ – матрица линейной части поля (13) в особой точке. Тогда

$$\Lambda - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & a_1(e_1)'_{x_2} + (e_0)'_{x_2} & a_1(e_1)'_{x_3} + (e_0)'_{x_3} \\ 0 & -a_3(e_1)'_{x_3} & a_2(e_1)'_{x_3} \\ 0 & a_3(e_1)'_{x_2} & -a_2(e_1)'_{x_2} \end{pmatrix}$$

и нужно доказать, что ранг матрицы $\Lambda - \lambda E$ меньше 2. Для этого достаточно проверить равенство нулю выражения

$$a_2(a_1(e_1)'_{x_2} + (e_0)'_{x_2}) + a_3(a_1(e_1)'_{x_3} + (e_0)'_{x_3}).$$

Это легко делается с помощью полученных ранее равенств. Лемма доказана.

Из леммы 7 и доказанных в [2] теорем вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнено условие 3, то для любого натурального числа k ростки полей (13) и (14), продолженных на все пространство X , C^k -гладко орбитально эквивалентны*

$$\dot{\xi} = \pm \xi, \quad \dot{\eta} = \pm \eta, \quad \dot{\zeta} = 0. \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 20 работы [3] следует, что в теореме 2 имеет место C^∞ -гладкая эквивалентность, а в аналитическом случае – аналитическая (см. [4]).

Координаты, в которых поля (13) и (14) приводятся к нормальной форме (31), будем называть *нормальными*. Из теоремы 2 следует, что пространство X имеет двумерное слоение, инвариантное для полей (13) и (14). В нормальных координатах это – семейство плоскостей $\zeta = c$. Ограничения полей (13) и (14) на инвариантный слой Σ дает дикритический узел (устойчивый для одного из них и неустойчивый для другого) и с точностью до орбитальной эквивалентности фазовые портреты на всех слоях одинаковы. Касательное пространство T_oX представимо в виде прямой суммы $T_oX = T_o\psi \oplus T_o\Sigma$ подпространств, инвариантных относительно матриц линейной части полей (13) и (14). Здесь $T_o\psi$ соответствует нулевому собственному значению, а $T_o\Sigma$ – двукратному собственному значению λ . Рассмотрим слой Σ , пересекающийся с кривой ψ в точке o и заполненный траекториями полей (13) и (14), входящими в o при $\tau \rightarrow +\infty$ для одного из них и при $\tau \rightarrow -\infty$ для другого. В нормальных координатах Σ – это плоскость $\zeta = 0$, а траектории – пучок прямых, проходящих через o . Подставляя (21) в (4), получаем, что в тех координатах, где поля $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют вид (21), касательное пространство $T_o\Sigma$ имеет уравнение $a_3 dx_2 - a_2 dx_3 = 0$. Семейство траекторий полей (13) и (14) можно параметризовать, поставив в соответствие каждой траектории γ ее касательное направление в точке o , задаваемое однородными координатами

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 = \alpha : \beta a_2 : \beta a_3, \quad (32)$$

где $(\alpha : \beta)$ – произвольная пара чисел, не равных нулю одновременно. Таким образом, пучок траекторий γ находится во взаимно однозначном соответствии с проективной прямой $\mathbb{RP}^1$. Любая соответствующая траектории γ экстремаль удовлетворяет тождеству $h_{10} = 0$, которое во всех точках, за исключением самой точки o , дает невырожденное однородное уравнение

$$p_1(a_2)'_{x_1} + p_2(a_3)'_{x_1} = 0.$$

Из этого уравнения получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = - \lim_{\gamma \rightarrow o} \frac{(a_3)'_{x_1}}{(a_2)'_{x_1}} = - \lim_{\gamma \rightarrow o} \frac{\alpha(a_3)'_{x_1 x_1} + \beta(a_2(a_3)'_{x_1 x_2} + a_3(a_3)'_{x_1 x_3})}{\alpha(a_2)'_{x_1 x_1} + \beta(a_2(a_2)'_{x_1 x_2} + a_3(a_2)'_{x_1 x_3})}. \quad (33)$$

Из формулы (27) следует, что определитель дробно-линейного преобразования (с переменными α, β) в правой части (33) совпадает с λ , т.е. отличен от нуля. Следовательно, соответствие $(\alpha : \beta) \mapsto (p_1 : p_2)$ задает проективное преобразование $\mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$. Таким образом, каждой траектории γ соответствует единственный (с точностью до пропорциональности) ковектор $p = (0, p_1, p_2)$ в точке o и это соответствие является взаимно однозначным. Отсюда следует, что найдется ковектор $p = (0, p_1, p_2)$, для которого $p_1(a_2)''_{x_1 x_1} + p_2(a_3)''_{x_1 x_1} = 0$, т.е. в момент прохождения γ через o соответствующая экстремаль пересекает кривинанту. В силу леммы 5 выполнено $K \cap L = \emptyset$, т.е. в такой точке $h_{110} = 0$, $h_{001} \neq 0$ и управление u принимает бесконечное значение.

Для того, чтобы для каждой траектории γ найти значение управления в точке o (обозначим его $u^*(\gamma)$) и выделить траектории с допустимыми управлениями, заметим, что в $S_{\pm}$ управление u однозначно определяется формулой (16), так как h_{110} , h_{001} не обращаются в нуль одновременно ($K \cap L = \emptyset$). При стремлении точки (x, p) к страту S_{ψ} формула (16) дает неопределенность вида $0/0$, и предельное значение $u^*(\gamma)$ определяется отношением, получающимся при раскрытии этой неопределенности с учетом (25), (26) и (32), т.е.

$$u^*(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow o} \frac{e_0(x)}{e_1(x)} = \lim_{\gamma \rightarrow o} \frac{A_2(a_3)'_{x_1} - A_3(a_2)'_{x_1}}{(a_2)''_{x_1 x_1} (a_3)'_{x_1} - (a_3)''_{x_1 x_1} (a_2)'_{x_1}} = \frac{\alpha}{\beta} - a_1. \quad (34)$$

Из (34) видно, что $u^*(\gamma) = \infty$ на единственной траектории γ с касательным направлением $\alpha : \beta = 1 : 0$; для всех остальных траекторий $u^*(\gamma)$ пробегает всевозможные значения вещественной прямой. Ограничение $u^*(\gamma) \in U$ задает на слое Σ криволинейный (в нормальных координатах – прямолинейный) двусторонний сектор Ω с вершиной в точке o , содержащий внутри себя все траектории γ , для которых $u^*(\gamma) \in U$. Для завершения исследования остается изучить движение по экстремальным траекториям γ , лежащим в секторе Ω , в соответствии с реальным временем t и выполнением обобщенного условия Лежандра. Так как для всех таких траекторий выполнено условие $h_{110}(x, p) \neq 0$, то можно рассматривать для них поле (3), отнесенное к реальному времени t , а не вспомогательному τ . Вследствие того, что поле (4) не обращается в нуль (лемма 6), поле (3) также не обращается в нуль и движение по экстремальям происходит все время в одном и том же направлении. Горизонтальная часть поля (3) в двусвязных областях $S_{\pm}$ имеет одинаковое направление, но функция $h_{110} = \langle p, f_{110} \rangle$ имеет противоположные знаки. Таким образом, для выполнения условия $h_{110} \leq 0$ нужно выбрать ковектор p принадлежащим одной из областей $S_{\pm}$, а именно, той, в которой $\langle p, f_{110} \rangle \leq 0$. Тогда при движении экстремалей по этой области соответствующие им траектории за конечное время пройдут через точку o из одной половины сектора Ω в другую с допустимым управлением и выполнением обобщенного условия Лежандра.

Автор глубоко благодарен проф. А. А. Аграчеву за постановку задачи, внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004.
- [2] А. О. Ремизов, “Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений”, *СМФН*, **19** (2006), 131–170.
- [3] R. Roussarie, *Modèles locaux de champs et de formes*, Astérisque, **30**, Soc. Math. de France, Paris, 1975.
- [4] С. М. Воронин, “Аналитическая классификация ростков голоморфных отображений с изолированными неподвижными точками и постоянными мультипликаторами и ее приложения”, *Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. Матем., мех.*, **2** (1999), 12–30.
- [5] G. Darboux, “Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre”, *Darboux Bull.*, **4** (1873), 158–176.

- [6] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, 2-е изд., Изд-во УГУ, Ижевск, 2000; [англ. пер. 1-го изд.: V.I. Arnol'd, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., **250**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1988.](#)
- [7] А. В. Пхакадзе, А. А. Шестаков, “О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной”, *Матем. сб.*, **49**:1 (1959), 3–12.

А. О. Ремизов (А. О. Remizov)

University of Porto, Portugal

E-mail: remizov@caravan.ru

Поступила в редакцию

23.05.2007