Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Леонтьев, Нижние оценки алгебраической сложности для классических простых алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 5, 27–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:27:17

УДК 512.554.3

А. В. Леонтьев

Нижние оценки алгебраической сложности для классических простых алгебр Ли

Рассматриваются точные алгебраические алгоритмы для классических простых алгебр Ли над полями нулевой характеристики. Сложность алгебры в такой модели вычисления определяется как количество скалярных умножений оптимального алгоритма (вычисляющего произведение двух элементов алгебры). Получены нижние оценки алгебраической сложности для алгебр серий A_l , B_l , C_l , D_l .

Библиография: 3 названия.

Введение

В работе изучаются точные алгебраические алгоритмы для вычислений в простых классических алгебрах Ли над полями нулевой характеристики. Приводятся нижние оценки для мультипликативной сложности таких алгоритмов.

Нижние оценки для класса ассоциативных алгебр исследовались в работе [1]. Для классических простых алгебр Ли некоторые оценки приведены в [2]. В частности, в работе [2] доказано следующее утверждение.

Если L — простая алгебра Ли одного из типов A_l , B_l , C_l , D_l , то ее тензорный ранг оценивается снизу неравенством

$$\mathbf{rk}_{\otimes}(L) \geq \dim(L) - 1 + f,$$

где f равно:

$$\begin{aligned} 2, & \quad \text{если } L = A_1, \\ 2l - 2, & \quad \text{если } L = A_l, \ l \geq 2, \\ 2l - 1, & \quad \text{если } L = B_l, \ l \geq 3, \\ 2, & \quad \text{если } L = B_2, \\ 2l - 4, & \quad \text{если } L = C_l, \ l \geq 3, \\ 2l - 4, & \quad \text{если } L = D_l, \ l \geq 2. \end{aligned}$$

В работе [3] приведены оценки для исключительных простых алгебр Ли.

В настоящей работе приводятся улучшенные результаты (по сравнению с [2]). Так, в два раза улучшено асимптотическое поведение нижних оценок. В выборе формальной вычислительной модели следуем работе [1].

§ 1. Обозначения

Рассмотрим специальные, ортогональные и симплектические алгебры Ли над полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль (алгебры серий A_l , B_l , C_l , D_l). Определим предварительно некоторые подалгебры и введем некоторые обозначения.

Через R_l^α будем обозначать произвольную алгебру из указанных серий, где индекс α пробегает значения a, b, c, d , что означает серии A_l, B_l, C_l, D_l соответственно. Для каждой из алгебр R_l^α напомним ее матричную реализацию и определим подалгебру P_l^α (размерность алгебры P_l^α будем обозначать через ρ_l^α).

Если x – произвольный элемент некоторой алгебры (в матричной форме), то через $\|x\|_{i,j}$ будем обозначать (i, j) -ю компоненту этой матрицы. Если рассматриваемые матрицы являются блочными, т.е. состоят из блоков $\varphi, \psi, \Omega, \dots$, то блоки элемента x будем обозначать через $\varphi(x), \psi(x), \Omega(x), \dots$. Через $\bar{e}_{i,j}$ будем обозначать матричные единицы.

1. *Специальная алгебра Ли* R_l^a (серия A_l) состоит из матриц вида

$$R_l^a = \left\{ x = \sum_{i,j=1}^{l+1} \|x\|_{i,j} \bar{e}_{i,j} \mid \sum_{i=1}^{l+1} \|x\|_{i,i} = 0 \right\}, \quad (1)$$

где x – матрица порядка $(l+1) \times (l+1)$, $\|x\|_{i,j} \in \mathbb{F}$. Определим подалгебру P_l^a как множество матриц со следующим условием:

$$P_l^a = \left\{ x = \sum_{i,j=1}^{l+1} \|x\|_{i,j} \bar{e}_{i,j} \mid (i \neq n) \text{ и } (j = n) \rightarrow (\|x\|_{i,j} = 0) \right\}.$$

Ее размерность обозначим через

$$\rho_l^a = \dim P_l^a = (l+1)^2 - l - 1 = l^2 + l.$$

2. *Ортогональная алгебра Ли* R_l^b (серия B_l) состоит из матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \psi & \varphi \\ -\varphi^T & \Omega & \Phi \\ -\psi^T & \Psi & -\Omega^T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где u, v – матрицы порядка $1 \times l$, Ω, Φ, Ψ – матрицы порядка $l \times l$, $\Psi = -\Psi^T$ и $\Phi = -\Phi^T$. Подалгебра P_l^b определяется как

$$P_l^b = \{x \in R_l^b \mid (i = l+1) \text{ или } (j = 2l+1) \rightarrow (\|x\|_{i,j} = 0)\}.$$

Ее размерность обозначим через

$$\rho_l^b = \dim P_l^b = l + (l-1) + (l^2 - l) + \frac{l(l-1)}{2} + \frac{(l-1)(l-2)}{2} = 2l^2 - l.$$

3. *Симплектическая алгебра Ли* R_l^c (серия C_l) представляется матрицами вида

$$x = \begin{pmatrix} \Omega & \Phi \\ \Psi & -\Omega^T \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где Ω, Φ, Ψ – матрицы порядка $l \times l$, $\Psi = \Psi^T$ и $\Phi = \Phi^T$. Подалгебра P_l^c определяется как

$$P_l^c = \{x \in R_l^c \mid (i = l) \text{ или } (j = 2l) \rightarrow (\|x\|_{i,j} = 0)\}.$$

Ее размерность обозначим через

$$\rho_l^c = \dim P_l^c = l(l-1) + \frac{l(l-1)}{2} + l + \frac{l(l-1)}{2} = 2l^2 - l.$$

4. Ортогональная алгебра Ли R_l^d (серия D_l) состоит из матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} \Omega & \Phi \\ \Psi & -\Omega^T \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где Ω, Φ, Ψ – матрицы порядка $l \times l$, $\Psi = -\Psi^T$ и $\Phi = -\Phi^T$. Подалгебра P_l^d определяется как

$$P_l^d = \{x \in R_l^d \mid (i = l) \text{ или } (j = 2l) \rightarrow (\|x\|_{i,j} = 0)\}.$$

Ее размерность обозначим через

$$\rho_l^d = \dim P_l^d = (l^2 - l) + \frac{l(l-1)}{2} + \frac{(l-1)(l-2)}{2} = 2l^2 - 3l + 1.$$

§ 2. Нижние оценки

Для произвольной алгебры R_l^α запишем ее тензор умножения в общем виде:

$$[a, b] = \sum_{i=1}^r u_i(a, b) v_i(a, b) \bar{w}_i, \quad (5)$$

где r минимальное из возможных, $u_i(a, b), v_i(a, b)$ – линейные функционалы на $\langle R_l^\alpha \times R_l^\alpha \rangle$, $\bar{w}_i \in R_l^\alpha$.

ЛЕММА 1. *Перенумерацией слагаемых в (5) и, возможно, перестановкой u_i с v_i можно добиться, что элементы из множества $\{u_1, \dots, u_{\rho_l^\alpha}\}$ будут линейно независимы на $\langle 0 \times P_l^\alpha \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное; тогда существуют такое $y \in P_l^\alpha$, $0 \neq y$, и такое p , $1 \leq p < \rho_l^\alpha$, что (после перенумерации) выполнены следующие три условия:

- 1) функционалы $\{u_1, \dots, u_p\}$ линейно независимы на $\langle 0 \times P_l^\alpha \rangle$;
- 2) справедливы равенства

$$u_1(0, y) = \dots = u_p(0, y) = 0, \quad (6)$$

$$u_{p+1}(0, y) = \dots = u_r(0, y) = 0, \quad (7)$$

$$v_{p+1}(0, y) = \dots = v_r(0, y) = 0; \quad (8)$$

- 3) для любого $a \in R_l^\alpha$ найдется такое $t(a) \in P_l^\alpha$, что

$$u_i(a, 0) = -u_i(0, t(a)), \quad \text{где } 1 \leq i \leq p, \quad (9)$$

т.е.

$$u_i(a, t(a)) = 0, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Зафиксируем элемент $y \in P_l^\alpha$, удовлетворяющий условиям (6)–(8), и выберем для него элемент $a \in R_l^\alpha$ такой, что

$$0 \neq [ay]. \quad (10)$$

Это может быть сделано следующим образом. Обозначим через $\mathbf{H}$ подалгебру Картана. (Она может быть порождена некоторыми комбинациями диагональных матричных элементов.) Если $0 \neq y \notin \mathbf{H}$, то разложение элемента y по матричным единицам (в базисе $\bar{\mathbf{e}}_{i,j}$) будет иметь ненулевую компоненту при некотором корневом векторе $\bar{\mathbf{e}}_{i_0,j_0}$. Выберем $a \in \mathbf{H}$ такой, для которого собственное значение при действии на $\bar{\mathbf{e}}_{i_0,j_0}$ не равно нулю. Иначе, т.е. при $y \in \mathbf{H}$, в качестве a может быть выбран корневой вектор $\bar{\mathbf{e}}_{i_0,j_0} \in R_l^\alpha$, для которого собственное значение при действии y не равно нулю.

Для выбранного элемента a выберем $t(a)$, удовлетворяющий условию (9). Далее, имеем

$$\begin{aligned} 0 \neq [ay] &= [a, t + y] - [a, t] = \sum_{i=1}^r u_i(a, t + y) v_i(a, t + y) \bar{w}_i - [a, t] \\ &= \sum_{i=1}^r (u_i(a, t) + u_i(0, y)) (v_i(a, t) + v_i(0, y)) \bar{w}_i - [a, t] \\ &= \sum_{i=1}^r (u_i(a, t) v_i(a, t) + u_i(0, y) v_i(a, t) + u_i(a, t) v_i(0, y) + u_i(0, y) v_i(0, y)) \bar{w}_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^r u_i(a, t) v_i(a, t) \bar{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^r (u_i(0, y) v_i(a, t) + u_i(a, t) v_i(0, y) + u_i(0, y) v_i(0, y)) \bar{w}_i. \end{aligned}$$

Обозначая коэффициенты

$$(u_i(0, y) v_i(a, t) + u_i(a, t) v_i(0, y) + u_i(0, y) v_i(0, y))$$

при $\bar{w}_i$ через γ_i , получаем

$$[ay] = \sum_{i=1}^p \gamma_i \bar{w}_i + \sum_{i=p+1}^r \gamma_i \bar{w}_i.$$

Заметим, что первая (в силу (6), (9)) и вторая (в силу (7), (8)) суммы равны нулю. Следовательно, с учетом (10) получаем

$$0 \neq [ay] = \sum_{i=1}^r \gamma_i \bar{w}_i = 0 \quad (11)$$

– противоречие. Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функционалы $\{u_1, \dots, u_{\rho_l^\alpha}\}$ будем считать в дальнейшем фиксированными и удовлетворяющими лемме 1.

Аналогично предыдущей лемме доказывается

ЛЕММА 3. *Перенумерацией слагаемых в (5) и, возможно, перестановкой u_i с v_i можно добиться, что элементы из множества $\{u_1, \dots, u_{2\rho_l^\alpha}\}$ будут линейно независимы на $\langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное; тогда существуют такое p , $\rho_l^\alpha \leq p < 2\rho_l^\alpha$, и такая пара $0 \neq \langle x, y \rangle \in \langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$, что (после перенумерации) выполнены следующие три условия:

- 1) функционалы $\{u_1, \dots, u_p\}$ линейно независимы на $\langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$;
- 2) справедливы равенства

$$u_1(x, y) = \dots = u_p(x, y) = 0, \quad (12)$$

$$u_{p+1}(x, y) = \dots = u_r(x, y) = 0, \quad (13)$$

$$v_{p+1}(x, y) = \dots = v_r(x, y) = 0; \quad (14)$$

- 3) для любого $b \in R_l^\alpha$ найдутся такие $s(b), t(b) \in P_l^\alpha$, что выполнено

$$u_i(0, b) = -u_i(s(b), t(b)), \quad \text{где } 1 \leq i \leq p, \quad (15)$$

т.е.

$$u_i(s(b), b + t(b)) = 0, \quad 1 \leq i \leq p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что в равенствах (12)–(14) $0 \neq x$. Если бы это было не так, то из того, что элементы из множества $\{u_1, \dots, u_{\rho_l^\alpha}\}$ линейно независимы на $\langle 0 \times P_l^\alpha \rangle$ (лемма 1), мы получили бы, что $0 = y$ и, следовательно, $0 = \langle x, y \rangle$ – противоречие.

Зафиксируем пару $0 \neq \langle x, y \rangle \in \langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$, удовлетворяющую равенствам (12)–(14), и выберем для нее пару $0 \neq \langle 0, b \rangle \in \langle R_l^\alpha \times R_l^\alpha \rangle$ (и для пары $\langle 0, b \rangle$ пару $\langle s(b), t(b) \rangle \in \langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$, удовлетворяющую (15)) такую, чтобы элемент

$$z = [x + s(b), y + b + t(b)] - [s(b), b + t(b)] = [x, b] + [x, t(b)] + [x, y] + [s(b), y]$$

был не равен нулю.

Заметим предварительно, что так как $x, t(b), y, s(b) \in P_l^\alpha$, то элементы $[x, t(b)]$, $[x, y]$, $[s(b), y]$ также принадлежат подалгебре P_l^α . Следовательно, если для произвольного элемента $x \in P_l^\alpha$, $x \neq 0$, существует такой элемент $b \in R_l^\alpha$, что $[x, b] \neq 0$ и $[x, b] \notin P_l^\alpha$, то и z не будет равным нулю. Существование такого элемента b покажем для каждой серии отдельно. При доказательстве мы исходим из представления элементов алгебр в виде матриц (1)–(4).

- 1) *Специальная алгебра Ли R_l^a (серия A_l).* Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{l+1} \sum_{j=1}^l (\|x\|_{i,j} \bar{\mathbf{e}}_{i,j}) + \|x\|_{l+1, l+1} \bar{\mathbf{e}}_{l+1, l+1} \neq 0.$$

Рассмотрим два случая.

(а) $\|x\|_{l+1, l+1} = 0$. Тогда существуют такие $1 \leq i_0 \leq l+1$ и $1 \leq j_0 \leq l$, что $\|x\|_{i_0, j_0} \neq 0$. Полагая $\|b\|_{j_0, l+1} = 1$, а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$[xb] = \sum_{i=1}^l \|x\|_{i, j_0} \bar{\mathbf{e}}_{i, l+1} + h, \quad h \in P_l^a.$$

Поскольку

$$0 \neq \sum_{i=1}^l \|x\|_{i,j_0} \bar{\mathbf{e}}_{i,l+1} \notin P_l^a,$$

то и $0 \neq [xb] \notin P_l^a$.

(b) $\|x\|_{l+1,l+1} \neq 0$. Тогда для некоторого i_0 получаем

$$\|x\|_{i_0,i_0} \neq \|x\|_{l+1,l+1}.$$

Полагая $\|b\|_{i_0,l+1} = 1$, а остальные компоненты матрицы b равными нулю, имеем

$$\|[xb]\|_{i_0,l+1} = \|x\|_{i_0,j_0} - \|x\|_{l+1,l+1} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

2. *Ортогональная алгебра Ли R_l^b (серия B_l).* Для удобства будем писать не абсолютные матричные индексы, а индексы для матричных блоков, т.е. для подматриц $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\Omega(x)$, $\dots$.

Рассмотрим несколько случаев.

(a) $\|\psi(x)\|_{1,i_0} \neq 0$ для некоторого $1 \leq i_0 \leq l$. Полагая $\|\varphi(b)\|_{1,l} = 1$, а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|-\Omega^T([xb])\|_{i_0,l} = \|\psi(x)\|_{1,i_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(b) $\|\varphi(x)\|_{1,i_0} \neq 0$ для некоторого $1 \leq i_0 < l$. Полагая $\|\varphi(b)\|_{1,l} = 1$, а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|\Phi([xb])\|_{i_0,l} = \|\varphi(x)\|_{1,i_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(c) $\|\Omega(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0 < l$, $1 \leq j_0 \leq l$. Полагая

$$\|\Phi(b)\|_{j_0,l} = -\|\Phi(b)\|_{l,j_0} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|\Phi([xb])\|_{i_0,l} = \|\Omega(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(d) $\|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0, j_0 < l$. Полагая

$$\|-\Omega^T(b)\|_{j_0,l} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|\Phi([xb])\|_{i_0,l} = \|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(e) $\|\Psi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0, j_0 \leq l$. Полагая

$$\|\Phi(b)\|_{j_0,l} = -\|\Phi(b)\|_{l,j_0} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|-\Omega^T([xb])\|_{i_0,l} = \|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

3. Симплектическая алгебра Ли R_l^c (серия C_l). Здесь рассматриваются следующие случаи для элемента x .

(а) $\|\Omega(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0 < l$, $1 \leq j_0 \leq l$. Полагая

$$\|\Phi(b)\|_{j_0,l} = \|\Phi(b)\|_{l,j_0} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|\Phi([xb])\|_{i_0,l} = \|\Omega(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(б) $\|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0, j_0 < l$. Полагая

$$\|-\Omega^T(b)\|_{j_0,l} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|\Phi([xb])\|_{i_0,l} = \|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

(с) $\|\Psi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0$ для некоторых $1 \leq i_0, j_0 \leq l$. Полагая

$$\|\Phi(b)\|_{j_0,l} = \|\Phi(b)\|_{l,j_0} = 1,$$

а остальные компоненты матрицы b равными нулю, получаем

$$\|-\Omega^T([xb])\|_{i_0,l} = \|\Phi(x)\|_{i_0,j_0} \neq 0.$$

Следовательно, $0 \neq [xb] \notin P_l^c$.

4. Ортогональная алгебра Ли R_l^d (серия D_l). Доказательство для этой серии аналогично доказательству пунктов (с)–(е) для алгебр серии B_l .

Таким образом, элемент b найден, следовательно, определены и требуемые пары $\langle 0, b \rangle \in \langle R_l^\alpha \times R_l^\alpha \rangle$ и $\langle s(b), t(b) \rangle \in \langle P_l^\alpha \times P_l^\alpha \rangle$.

Запишем элемент z в виде (5):

$$\begin{aligned} 0 \neq z &= [x + s(b), y + b + t(s)] - [s(b), b + t(b)] \\ &= \sum_{i=1}^r u_i(x + s(b), y + b + t(s)) v_i(x + s(b), y + b + t(s)) \bar{w}_i \\ &\quad - [s(b), b + t(b)] \\ &= \sum_{i=1}^r (u_i(s(b), b + t(b)) + u_i(x, y)) (v_i(s(b), b + t(b)) + v_i(x, y)) \bar{w}_i \\ &\quad - [s(b), b + t(b)] \\ &= \sum_{i=1}^r (u_i(x, y) v_i(s(b), b + t(b)) + u_i(s(b), b + t(b)) v_i(x, y) \\ &\quad + u_i(x, y) v_i(x, y)) \bar{w}_i. \end{aligned}$$

Обозначая коэффициенты

$$(u_i(x, y)v_i(s(b), b + t(b)) + u_i(s(b), b + t(b))v_i(x, y) + u_i(x, y)v_i(x, y))$$

при $\bar{w}_i$ через γ_i , получаем

$$z = \sum_{i=1}^p \gamma_i \bar{w}_i + \sum_{i=p+1}^r \gamma_i \bar{w}_i.$$

Заметим, что первая (в силу (12), (15)) и вторая (в силу (13), (14)) суммы равны нулю. Следовательно,

$$0 \neq z = \sum_{i=1}^r \gamma_i \bar{w}_i = 0. \quad (16)$$

Полученное противоречие (16) и доказывает лемму.

Из леммы 3 следует

ТЕОРЕМА 5. *Тензорный ранг (мультипликативная сложность) алгебры R_l^α над полем характеристики нуль не менее чем $2\rho_l^\alpha$, т.е.:*

- 1) $\mathbf{rk}_\otimes(A_l) \geq 2l^2 + 2l$ (для алгебр серии A_l);
- 2) $\mathbf{rk}_\otimes(B_l) \geq 4l^2 - 2l$ (для алгебр серии B_l);
- 3) $\mathbf{rk}_\otimes(C_l) \geq 4l^2 - 2l$ (для алгебр серии C_l);
- 4) $\mathbf{rk}_\otimes(D_l) \geq 4l^2 - 6l + 2$ (для алгебр серии D_l).

Автор благодарит В. Н. Латышева за полезные обсуждения и внимание к работе и Д. А. Кормалева за консультации по системе L^AT_EX.

Список литературы

- [1] A. Alder, V. Strassen, “On the algorithmic complexity of associative algebras”, *Theoret. Comput. Sci.*, **15**:2 (1981), 201–211.
- [2] С. А. Жошина, “О мультипликативной сложности алгебр Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 75–77, № 4; англ. пер.: S. A. Zhoshina, “On the multiplicative complexity of Lie algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 45–46, № 4.
- [3] С. А. Жошина, “О мультипликативной сложности простых алгебр Ли G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 и полупростых алгебр Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1993, № 4, 35–37; англ. пер.: S. A. Zhoshina, “On the multiplicative complexity of simple the Lie algebras G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 and of semisimple Lie algebras”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 34–36, № 4.

А. В. Леонтьев (A. V. Leont'ev)
Институт программных систем РАН,
г. Переславль-Залесский
E-mail: alex@leont.botik.ru

Поступила в редакцию
25.05.2007