Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Гришин, А. Шуиги, Различные виды сходимости последовательностей δ -субгармонических функций, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 6, 27–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3889>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 04:20:02

УДК 517.574

А. Ф. Гришин, А. Шуиги

Различные виды сходимости последовательностей δ -субгармонических функций

Пусть $v_n(z)$ – последовательность δ -субгармонических функций в области G . Изучаются условия, при которых из сходимости $v_n(z)$ как последовательности обобщенных функций следует ее сходимость в пространствах Лебега $L_p(\gamma)$. Л. Хёрмандер изучил случай, когда $v_n(z)$ есть последовательность субгармонических функций, а мера γ есть ограничение меры Лебега на компакт, лежащий в G . В работе рассматривается более общий случай и получаются теоремы двух типов. В теоремах первого типа предполагается, что $\text{supp } \gamma \in G$. В теоремах второго типа предполагается, что носитель меры есть компакт и $\text{supp } \gamma \subset \overline{G}$. Во втором случае считается, что G – полуплоскость.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Теория обобщенных функций является основой для прогресса во многих областях математики и находит широкое применение в физике. Одним из разделов математики, на который теория обобщенных функций оказывает сильное влияние, является теория субгармонических функций. В.С. Азарин [1], используя обобщенные функции, построил теорию предельных множеств субгармонических функций и мер, что является значительным вкладом в теорию субгармонических функций.

Сходимость последовательности функций как последовательности обобщенных функций установить проще, чем сходимость другого типа. Однако это достаточно своеобразный вид сходимости, с которым трудно работать. Поэтому, естественно, возникает вопрос о связи сходимости последовательности субгармонических функций в смысле теории обобщенных функций с другими видами сходимости.

Наиболее известный результат в этой области принадлежит Хёрмандеру [2; предложение 16.1.2]. Он, в частности, доказал, что сходимость последовательности субгармонических функций в области G как последовательности обобщенных функций в G эквивалентна сходимости в пространстве $L_{p,\text{loc}}(G)$.

Сходимость последовательности $v_n(z)$ к $v(z)$ в пространстве $L_{p,\text{loc}}(G)$ означает следующее. Если γ есть ограничение меры Лебега на компакт K , лежащий в G , то

$$\iint |v_n(z) - v(z)|^p d\gamma(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Известно, что в теории субгармонических функций встречаются интегралы по мерам γ , не имеющим указанного выше вида. Это, например, интегралы по окружностям или отрезкам.

В настоящей статье найдены достаточные условия на меру γ с носителем, компактно вложенным в G , которые гарантируют сходимость в пространстве

$L_p(\gamma)$ последовательностей субгармонических функций, сходящихся в смысле теории обобщенных функций (теорема 13). Оказывается, что в утверждениях такого типа условие, что $v_n(z)$ есть субгармоническая функция, можно заменить на условие, что $v_n(z)$ есть δ -субгармоническая функция, если дополнительно потребовать, чтобы последовательность μ_n риссовских мер $v_n(z)$ была бы слабо ограниченной (теорема 14).

В ряде случаев (например, при изучении функций, субгармонических в полуплоскости) требование, чтобы носитель меры γ был компактно вложен в область субгармоничности не выполняется. В настоящей работе рассмотрен специальный случай, когда $G = \mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, а носитель меры γ есть компакт, $\operatorname{supp} \gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_+$.

Если в теореме 13 условие $\operatorname{supp} \gamma \in G$ заменить на условие $\operatorname{supp} \gamma \subset \overline{G}$ (даже когда $G = \mathbb{C}_+$), то она становится неверной. Поэтому, чтобы получить для мер γ с условием $\operatorname{supp} \gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ аналог теоремы 13, нужно изменить ограничения на последовательность $v_n(z)$.

Эти изменения таковы. Каждую функцию $v_n(z)$ из последовательности субгармонических в $\mathbb{C}_+$ функций продолжаем нулем в нижнюю полуплоскость. Полученная последовательность должна сходиться как последовательность обобщенных функций во всей плоскости.

В теории субгармонических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций важную роль играет ядро

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|.$$

Это ядро как функция переменной ζ распространяется по непрерывности на вещественную ось, так что $K(z, \zeta)$ можно считать числовой функцией с областью определения $\operatorname{dom} K(z, \zeta) = \overline{\mathbb{C}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \operatorname{diag}(\overline{\mathbb{C}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+)$. Отметим, что в статье мы рассматриваем ядро $K(z, \zeta)$ еще и как отображение с областью отправления $\overline{\mathbb{C}}_+$ ($\zeta \in \overline{\mathbb{C}}_+$) и областью прибытия $L_p(\gamma)$. В этом случае будем писать

$$K(z, \zeta) : \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow L_p(\gamma).$$

Сформулируем несколько известных результатов, полученных в этой области. Мы уже упоминали предложение Хёрмандера. Хёрмандер рассматривает многомерный случай, мы рассматриваем случай, когда размерность пространства $m = 2$, хотя во многих наших рассуждениях требование $m = 2$ не является существенным.

В [3; теорема 5] доказано следующее. Пусть γ_n – равномерно финитная последовательность борелевских мер, $\operatorname{supp} \gamma_n \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, причем меры γ_n имеют равномерно ограниченную вариацию и слабо сходятся к нулевой мере. Пусть

$$v_n(z) = \iint K(z, \zeta) d\gamma_n(\zeta)$$

при $\operatorname{Im} z > 0$ и $v_n(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Тогда v_n сходится к нулю в пространстве $L_{1, \operatorname{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Можно доказать, что v_n сходится к нулю как последовательность обобщенных функций. Заметим, что сформулированное утверждение следует из результатов настоящей статьи.

Отметим также, что в теории выпуклых поверхностей и теории поверхностей ограниченной кривизны исследуются интегралы

$$\int_{\mathcal{L}} \exp \left(\frac{1}{\pi} \iint_G \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_n(\zeta) \right) |dz|.$$

(См. [4], [5] и ссылки в них.) Наличие экспоненты в этом интеграле не позволяет непосредственно применять излагаемые нами результаты в задачах такого типа. Тем не менее наши и упомянутые выше исследования достаточно близки.

Опишем кратко структуру работы. Она состоит из четырех параграфов. Параграф 1 – введение. Параграф 2 – предварительные результаты. Здесь приведены формулировки тех известных результатов, которые используются в дальнейших доказательствах. В § 3 получены условия на меру γ , обеспечивающие равномерную непрерывность функций

$$K(z, \zeta): \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow L_p(\gamma), \quad \ln|\zeta - z|: \mathbb{C} \rightarrow L_p(\gamma).$$

Равномерная непрерывность этих функций является ограничением на меру γ , которое появляется в теоремах, являющихся главными результатами работы. Основные результаты работы содержатся в § 4. Рассматриваются последовательности $v_n(z)$ субгармонических и δ -субгармонических функций. Находятся условия, при которых из сходимости последовательности v_n как последовательности обобщенных функций следует ее сходимость в пространствах с интегральной метрикой с мерой γ . В заключение работы приводятся примеры конкретных мер γ , которые удовлетворяют условиям доказанных ранее “абстрактных” теорем.

§ 2. Предварительные результаты

Все утверждения этого параграфа, за исключением леммы 1, известны.

Обобщенные функции и меры широко используются в настоящей работе. Напомним, что обобщенная функция – это линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\mathcal{D}(G)$ ($\mathcal{D}$, если $G = \mathbb{C}$), состоящим из финитных бесконечно дифференцируемых функций в G со стандартным определением сходимости. Мы также будем рассматривать пространство Φ , которое состоит из непрерывных финитных функций в $\mathbb{R}^m$. Сходимость $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в пространстве Φ означает, что существует компакт, содержащий носители всех функций $\varphi_n(x)$, и что $\varphi_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Заметим, что обозначение “ Φ ” заимствовано из книги [6], являющейся для нас источником ссылок по вопросам, касающимся теории меры. В статье рассматривается случай $m = 2$. Однако на этом этапе мы не предполагаем, что $m = 2$, поскольку ни формулировки, ни доказательства не зависят от m .

Как известно, термин “мера” понимается в разных смыслах. В нашей работе мера – это мера Радона или мера в стандартном понимании этого слова. Словосочетание “мера Радона” часто сокращают до слова “мера”. Мере Радона μ в пространстве $\mathbb{R}^m$ можно определить как разность двух локально конечных борелевских мер $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ действует формула $\mu(\varphi) = \mu_1(\varphi) - \mu_2(\varphi)$. Представление $\mu = \mu_1 - \mu_2$ неоднозначное. Однако существует однозначное каноническое представление, в котором μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные меры. В этом случае используются обозначения $\mu_1 = \mu_+$, $\mu_2 = \mu_-$. Мера Радона не всегда является

мерой в стандартном определении, согласно которому мера – это счетноаддитивная функция на некоторой сигма-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств множества X . Известно, что мера обязательно ограничена либо сверху, либо снизу. Мера Радона будет мерой в стандартном определении тогда и только тогда, когда хотя бы одна из мер μ_+ или μ_- будет ограниченной.

Известно (например, [6; теорема 0.2]), что множество мер Радона изоморфно множеству линейных непрерывных функционалов в пространстве Φ .

Для любого компакта K ограничение μ_K меры μ на компакт K определяется по формуле $\mu_K = (\mu_1)_K - (\mu_2)_K$. Полная вариация $|\mu|$ меры μ определяется по формуле $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. Меры μ_K и $|\mu|$ являются мерами в стандартном определении.

Подмножество $\mathfrak{M}_1$ мер Радона называется *слабо ограниченным* если для любой функции $\varphi \in \Phi$ величина $A(\varphi) = \sup\{|\mu(\varphi)| : \mu \in \mathfrak{M}_1\}$ конечна.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы множество $\mathfrak{M}_1$ было слабо ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ величина $B(K) = \sup\{|\mu|(K) : \mu \in \mathfrak{M}_1\}$ была конечной.*

Это известное утверждение. Оно сформулировано в [6] без доказательства. Доказательство можно найти в [7; см. замечание к предложению 15, гл. 3, § 1].

В множестве мер Радона будем рассматривать три типа сходимости. Пусть μ_n – последовательность мер Радона. Меры Радона можно рассматривать как обобщенные функции. Если последовательность обобщенных функций μ_n сходится к обобщенной функции μ , т.е. для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ $(\mu_n, \varphi) \rightarrow (\mu, \varphi)$, то такую сходимость будем называть $\mathcal{T}_1$ -сходимостью и писать

$$\mu = \mathcal{T}_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Если существует мера Радона μ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется соотношение $(\mu_n, \varphi) \rightarrow (\mu, \varphi)$, то будем говорить, что последовательность μ_n $\mathcal{T}$ -сходится к μ и писать

$$\mu = \mathcal{T} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Пусть K – некоторый компакт. Если существует мера μ на компакте K такая, что для любой функции $\varphi \in C(K)$ выполняется соотношение $(\mu_n, \varphi) \rightarrow (\mu, \varphi)$, то будем говорить, что последовательность μ_n *w-сходится* к μ и писать

$$\mu = w \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Когда говорится о w-сходимости, то считается, что компакт K однозначно определяется из текста. Заметим, что w-сходимость совпадает со слабой сходимостью в пространстве $C^*(K)$.

Подмножество $\mathfrak{M}_1$ мер Радона называется $\mathcal{T}$ -компактным, если любая последовательность μ_n из $\mathfrak{M}_1$ содержит $\mathcal{T}$ -сходящуюся подпоследовательность.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы множество $\mathfrak{M}_1$ было $\mathcal{T}$ -компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было слабо ограниченным.*

В случае, когда $\mathfrak{M}_1$ состоит из положительных мер, теорема 2 – это теорема 0.6 из [6]. Из теоремы 1 следует, что множества мер $\{\mu_+ : \mu \in \mathfrak{M}_1\}$, $\{\mu_- : \mu \in \mathfrak{M}_1\}$ также слабо ограничены. Поэтому теорема 2 следует из теоремы 0.6.

Изучим связь между различными видами сходимости последовательностей радоновых мер. Очевидно, что из $\mathcal{T}$ -сходимости следует $\mathcal{T}_1$ -сходимость. Обратное утверждение неверно. Пусть $\mu_n = \sqrt{n}(\delta_{1/n} - \delta_0)$, где δ_{x_0} – мера Дирака на вещественной оси, сосредоточенная в точке x_0 . Имеем $\mathcal{T}_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$. Однако последовательность μ_n является $\mathcal{T}$ -расходящейся.

В следующей теореме вводится дополнительное ограничение на последовательность μ_n , которое обеспечивает $\mathcal{T}$ -сходимость для $\mathcal{T}_1$ -сходящихся последовательностей.

ТЕОРЕМА 3. *Если последовательность μ_n радоновых мер является $\mathcal{T}_1$ -сходящейся и слабо ограниченной, то она $\mathcal{T}$ -сходится.*

Для случая положительных мер это следует из теоремы 0.4 из [6], причем доказательство из [6] распространяется на меры, удовлетворяющие условиям теоремы 3.

Пусть μ – положительная мера, E – борелевское множество. Множество E называется измеримым по Жордану (нормальным по терминологии [6]) относительно меры μ , если $\mu(\partial E) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mu = \mathcal{T} \lim \mu_n$ ($n \rightarrow \infty$) и меры μ_n положительны. Пусть K – компакт, измеримый по Жордану относительно меры μ . Тогда $\mu = w \lim \mu_n$ ($n \rightarrow \infty$) на компакте K .*

Это следствие теоремы 0.5' из [6].

ТЕОРЕМА 5. *Пусть последовательность борелевских мер μ_n на компакте K , рассматриваемая как последовательность элементов пространства $C^*(K)$, слабо сходится к нулю. Пусть M – компактное множество в $C(K)$. Тогда*

$$\sup\{|\mu_n(\varphi)| : \varphi \in M\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из слабой сходимости и принципа равномерной ограниченности следует, что существует число a_1 такое, что для всех n выполняется неравенство $|\mu_n|(K) \leq a_1$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, а $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ – ε -сеть в M . Поскольку μ_n слабо сходится к нулю, то существует N_1 такое, что при $n > N_1$ будут выполняться неравенства $|\mu_n(\varphi_k)| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, N$. Пусть φ – произвольный элемент из M . Существует k такое, что $\|\varphi - \varphi_k\| \leq \varepsilon$. Тогда при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|\mu_n(\varphi)| \leq |\mu_n(\varphi_k)| + a_1 \|\varphi - \varphi_k\| \leq (1 + a_1)\varepsilon.$$

Из этого следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть последовательность гармонических функций $u_n(x)$ в области $G \subset \mathbb{R}^m$, рассматриваемая как последовательность обобщенных функций, сходится к обобщенной функции u . Тогда u – регулярная обобщенная функция, представимая некоторой гармонической функцией $u(x)$ в области G . Кроме того, на любом компакте K в области G последовательность $u_n(x)$ равномерно сходится к $u(x)$.*

Это частный случай теоремы 4.4.2 из [8].

Перечисление необходимых далее свойств обобщенных функций и мер закончено. Перечислим теперь необходимые нам свойства субгармонических функций из класса SK . Класс SK определяется как класс субгармонических в $\mathbb{C}_+$

функций, имеющих в каждой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}_+$ положительную гармоническую мажоранту. Это известный класс. Он был объектом исследования разных авторов (см., например, [9]). Класс SK естественным образом появляется в исследованиях, связанных с представлением субгармонических функций в полуплоскости. Это наиболее широкий класс функций, для которых существуют представления типа Рисса–Мартина–Адамара. Класс $SK-SK$ – это класс функций, представимых в виде разности функций из класса SK .

Для любой субгармонической функции v класса SK существует граничная мера ν , определяемая соотношением

$$\nu([a, b]) - \frac{1}{2} \nu(\{a\}) - \frac{1}{2} \nu(\{b\}) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx$$

для любых a и b , $-\infty < a < b < \infty$. Мера ν является мерой Радона на $\mathbb{R}$. Для функции $v \in SK$ вводится понятие полной меры λ . Эта мера определяется формулой

$$\lambda(E) = 2\pi \iint_{E \cap \mathbb{C}_+} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \nu(E \cap (-\infty, \infty))$$

для любого борелевского множества E в $\mathbb{R}^2$, где μ – риссовская мера функции v .

Мера λ обладает следующими характеристическими свойствами:

- 1) это радонова мера в $\mathbb{R}^2$;
- 2) ее ограничение на $\mathbb{C}_+$ есть положительная мера;
- 3) ее ограничение на $\mathbb{C}_-$ есть нулевая мера.

Полная мера определяет субгармоническую функцию класса SK в той же степени, в какой риссовская мера определяет субгармоническую во всей плоскости функцию. Точнее, если субгармонические функции $v_2(z)$ и $v_1(z)$ класса SK имеют одну и ту же полную меру, то существует вещественная целая функция $g(z)$ такая, что выполняется равенство

$$v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Понятие полной меры введено в [10], где оно использовано для изучения непрерывности и асимптотической непрерывности субгармонических в $\mathbb{C}_+$ функций. Важную роль понятие полной меры играет в [3], где получен аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны для функций, мероморфных в верхней полуплоскости. Понятие полной меры позволяет обнаружить глубокую аналогию между свойствами субгармонических функций в плоскости и полуплоскости. Оказывается, что функции класса SK больше напоминают δ -субгармонические, чем субгармонические функции в плоскости.

Используя теорию Рисса–Мартина, можно получить следующее представление.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $v \in SK$, λ – ее полная мера. Тогда для любого $R > 0$ справедливо представление

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B_+(0, R)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + u(z), \quad z \in C_+(0, R),$$

где $u(z)$ – гармоническая функция в $C_+(0, R)$, непрерывно продолжающаяся нулем на интервал $(-R, R)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $a(z)$ – ограниченная финитная измеримая функция, $\text{supp } a(z) \subset \overline{\mathbb{C}}_+$,

$$b(\zeta) = \iint a(z)K(z, \zeta) dx dy, \quad z = x + iy.$$

Тогда $b(\zeta)$ – непрерывная функция в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Сформулированное утверждение для функции $a(z)$ специального вида является промежуточным этапом доказательства теоремы 5 из [3]. Однако если считать, что в указанном доказательстве стоит функция $a(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы, то это доказательство остается справедливым.

В некоторых случаях в интегралах мы не указываем область интегрирования, считая, что этой областью является плоскость или замкнутая верхняя полуплоскость.

ЛЕММА 1. При $\text{Im } z \geq 0, \text{Im } \zeta \geq 0$ справедливо равенство

$$-K(z, \zeta) = K_1(z, \zeta) \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \varphi + \alpha} \ln \frac{2 \sin \varphi + \alpha}{\alpha},$$

где $z = re^{i\varphi}$, $\alpha = |z - \zeta|/r$. Для функции $K_1(z, \zeta)$ выполняются неравенства

$$1 \leq K_1(z, \zeta) \leq \frac{4}{\ln 3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\zeta - z = \alpha re^{i\psi}$, $\zeta = \tau e^{i\theta} = \xi + i\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau(\cos \theta + i \sin \theta) &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi + \alpha \cos \psi + i \alpha \sin \psi), \\ \eta &= \tau \sin \theta = r(\sin \varphi + \alpha \sin \psi), \\ K(z, \zeta) &= \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| = \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{2i\eta - (\zeta - z)} \right| \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \varphi + \alpha \sin \psi} \ln \frac{\alpha}{|- \alpha e^{i\psi} + 2i(\sin \varphi + \alpha \sin \psi)|} \\ &= \frac{1}{2r} \frac{1}{\sin \varphi + \alpha \sin \psi} \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\alpha \sin \varphi \sin \psi + 4 \sin^2 \varphi} \\ &:= \frac{1}{2r} \Gamma(\psi), \\ \frac{d\Gamma(\psi)}{d \sin \psi} &= \frac{-\alpha}{(\sin \varphi + \alpha \sin \psi)^2} \left(\ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\alpha \sin \varphi \sin \psi + 4 \sin^2 \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \sin \varphi (\sin \varphi + \alpha \sin \psi)}{\alpha^2 + 4\alpha \sin \varphi \sin \psi + 4 \sin^2 \varphi} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Действительно, если обозначить через x выражение, стоящее под знаком последнего логарифма, то выражение в скобках приобретает вид $\ln x + 1 - x$. Эта функция отрицательна (т.е. меньше или равна нулю) на полуоси $(0, \infty)$. Поэтому для $\Gamma(\psi)$ справедливы неравенства

$$A(\alpha, \varphi) \leq \Gamma(\psi) \leq \frac{2}{\sin \varphi + \alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha + 2 \sin \varphi},$$

где

$$A(\alpha, \varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\sin \varphi - \alpha} \ln \frac{\alpha}{2 \sin \varphi - \alpha}, & \alpha < \sin \varphi, \\ -\frac{4 \sin \varphi}{\alpha^2}, & \alpha \geq \sin \varphi. \end{cases}$$

Из этого следует, что для доказательства леммы достаточно доказать неравенство

$$J = \frac{A(\alpha, \varphi)(\sin \varphi + \alpha)}{2 \ln \frac{\alpha}{\alpha + 2 \sin \varphi}} \leq \frac{4}{\ln 3}. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha \geq \sin \varphi$. Вводя переменную t при помощи равенства $\sin \varphi = t\alpha$, получаем

$$J(t) = \frac{4t(t+1)}{2 \ln(2t+1)}.$$

Легко видеть, что доказываемое неравенство эквивалентно неравенству

$$2 \ln(1+2t) \geq t(t+1) \ln 3, \quad t \in [0, 1],$$

которое легко получить методами дифференциального исчисления.

Пусть теперь $\alpha < \sin \varphi$. В этом случае неравенство (1) сводится к неравенству

$$\psi(t) := \ln(2t-1) - \frac{4}{\ln 3} \frac{t-1}{t+1} \ln(2t+1) \leq 0, \quad t \in [1, \infty). \quad (2)$$

Имеем

$$\psi'(t) = \frac{2}{2t-1} - \frac{4}{\ln 3} \frac{2}{(t+1)^2} \ln(2t+1) - \frac{4}{\ln 3} \frac{t-1}{t+1} \frac{2}{2t+1}.$$

При $t \in [1, 5]$ справедливо неравенство

$$\psi'(t) \leq \frac{2}{2t-1} - \frac{8}{(t+1)^2} \leq 0.$$

При $t > 5$ справедливы неравенства

$$\psi'(t) < \frac{2}{2t-1} \left(1 - \frac{4}{\ln 3} \frac{t-1}{t+1} \frac{2t-1}{2t+1} \right) < \frac{2}{2t-1} \left(1 - \frac{24}{11 \ln 3} \right) < 0.$$

Таким образом, функция $\psi(t)$ убывает на полуоси $[1, \infty)$. Из этого следует неравенство (2). Лемма доказана.

Отметим также, что далее мы будем использовать неравенство

$$\ln(1+tx) \leq t \ln(1+x), \quad x \geq 0, \quad t \geq 1,$$

без дополнительных ссылок.

§ 3. Теоремы о равномерной непрерывности

Ядро $K(z, \zeta)$ играет важную роль в теории функций, субгармонических в верхней полуплоскости. Это видно, например, из теоремы 7. При любом $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}_+$ и некоторых мерах γ ядро $K(z, \zeta)$ как функция переменной z является элементом пространства $L_p(\gamma)$. Для дальнейшего важно, чтобы зависимость $K(z, \zeta)$ от ζ была равномерно непрерывной.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $p \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Пусть γ – положительная конечная финитная борелевская мера, удовлетворяющая условию $\text{supp } \gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, не нагружающая вещественную ось. Пусть, кроме того,

$$\sup \left\{ \iint_{B_+(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) : \zeta \in \overline{\mathbb{C}}_+ \right\} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (3)$$

Тогда функция

$$K(z, \zeta) : \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow L_p(\mathbb{R}^2, \gamma)$$

является равномерно непрерывной в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Обозначим

$$\begin{aligned} \psi(\zeta_2, \zeta_1) &= \left(\iint |K(z, \zeta_2) - K(z, \zeta_1)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p}, \\ F(\zeta) &= \left(\iint |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как ядро $K(z, \zeta)$ как функция из $\overline{\mathbb{C}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+$ в $\mathbb{R}$ не ограничено, то нужно доказать сходимость введенных интегралов. Это мы делаем на первом этапе. Из неравенства Минковского следует, что

$$F(\zeta) \leq \left(\iint_{B(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} + \left(\iint_{CB(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} = J_1 + J_2,$$

где $CB(\zeta, \delta) = \mathbb{C} \setminus B(\zeta, \delta)$. Мы считаем, что $K(z, \zeta) = 0$ при $\text{Im } z < 0$. Поэтому в первом интеграле $B(\zeta, \delta)$ можно заменить на $B_+(\zeta, \delta)$. Так как

$$|K(z, \zeta)| \leq \frac{1}{\eta} \ln \left(1 + \frac{2\eta}{|z - \zeta|} \right) \leq \frac{2}{|z - \zeta|},$$

то $J_2 \leq \frac{2}{\delta} (\gamma(\overline{\mathbb{C}}_+))^{1/p}$. По условию теоремы $J_1 \leq 1$ при достаточно малых δ . Отсюда следует конечность $F(\zeta)$. Доказанное можно формулировать и так: при любом $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ядро $K(z, \zeta)$ есть элемент пространства $L_p(\gamma)$. Из неравенства $\psi(\zeta_2, \zeta_1) \leq F(\zeta_2) + F(\zeta_1)$ следует конечность $\psi(\zeta_2, \zeta_1)$.

2. Теперь найдем множества, на которых величина $\|\nabla_\zeta K(z, \zeta)\|$ ограничена. Точнее, докажем, что при $|z - \zeta| \geq \delta$, $\text{Im } \zeta \geq 0$, $|z| \leq R$, выполняется неравенство

$$\|\nabla_\zeta K(z, \zeta)\| \leq g(\delta) = \frac{2}{\delta^2} \sqrt{1 + 4 \left(1 + \frac{R^2}{\delta^2} \right)^2}. \quad (4)$$

Имеем

$$K'_\xi = \frac{4y(\xi - x)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)},$$

$$K'_\eta = \frac{1}{2\eta^2} \left(\ln \left(1 + \frac{4y\eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) - \frac{4y\eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) + \frac{4y(y + \eta)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)}.$$

Из этих формул и неравенства $\ln(1 + x) > x - \frac{1}{2}x^2$ ($x > 0$) следуют оценки

$$|K'_\xi(z, \zeta)| \leq \frac{2}{|z - \zeta|^2}, \quad -\frac{4y^2}{|z - \zeta|^4} < K'_\eta(z, \zeta) < \frac{4}{|z - \zeta|^2}.$$

Из них легко получается неравенство (4).

3. Это наиболее существенная часть доказательства. Докажем, что

$$\psi(\zeta, \zeta_0) \rightarrow 0 \quad (\zeta \rightarrow \zeta_0, \operatorname{Im} \zeta \geq 0, \operatorname{Im} \zeta_0 \geq 0).$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное число. Будем считать, что выполняется неравенство $|\zeta - \zeta_0| \leq \delta$. Последовательное применение неравенства Минковского и включения $B(\zeta_0, 2\delta) \subset B(\zeta, 3\delta)$ дает

$$\begin{aligned} \psi(\zeta, \zeta_0) &\leq \left(\iint_{CB(\zeta_0, 2\delta)} |K(z, \zeta) - K(z, \zeta_0)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\iint_{B(\zeta_0, 2\delta)} |K(z, \zeta_0)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} + \left(\iint_{B(\zeta, 3\delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Если $z \notin B(\zeta_0, 2\delta)$, $|\zeta - \zeta_0| \leq \delta$, то для любого $w \in [\zeta_0, \zeta]$ будут выполняться неравенства $|w - z| \geq \delta$, $\|\nabla_\zeta K(z, w)\| \leq g(\delta)$, где число R в формуле (4) для $g(\delta)$ определяется равенством

$$R = \sup\{|z| : z \in \operatorname{supp} \gamma\}.$$

Из оценки градиента следует, что

$$|K(z, \zeta) - K(z, \zeta_0)| \leq g(\delta)|\zeta - \zeta_0|, \quad J_1 \leq g(\delta)(\gamma(\mathbb{C}))^{1/p}|\zeta - \zeta_0|.$$

Из условия теоремы получаем $J_2 \rightarrow 0$, $J_3 \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), что доказывает требуемое утверждение.

4. Это заключительный этап доказательства. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательности ζ_{2n}, ζ_{1n} такие, что $\operatorname{Im} \zeta_{1n} \geq 0$, $\operatorname{Im} \zeta_{2n} \geq 0$, $\zeta_{2n} - \zeta_{1n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $\psi(\zeta_{2n}, \zeta_{1n}) \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\zeta_{1n} \rightarrow \zeta_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ($n \rightarrow \infty$). Из очевидного соотношения $\psi(\zeta_{2n}, \zeta_{1n}) \rightarrow 0$ ($\zeta_{2n} - \zeta_{1n} \rightarrow 0$, $\zeta_{1n} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$) следует, что $\zeta_0 \neq \infty$.

Отметим, что $\operatorname{Im} \zeta_0 \geq 0$. Из неравенства Минковского следует, что

$$\psi(\zeta_{2n}, \zeta_{1n}) \leq \psi(\zeta_{2n}, \zeta_0) + \psi(\zeta_{1n}, \zeta_0).$$

Набор полученных нами утверждений в совокупности противоречив. Тем самым теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что функция $F(\zeta)$ ограничена. Из неравенства

$$|F(\zeta_2) - F(\zeta_1)| \leq \psi(\zeta_2, \zeta_1)$$

следует ее непрерывность. Кроме того, $F(\zeta) \rightarrow 0$ ($\zeta \rightarrow \infty$, $\text{Im } \zeta \geq 0$).

ТЕОРЕМА 10. Пусть $p \geq 1$ – произвольное фиксированное число. Пусть γ – положительная конечная финитная борелевская мера такая, что

$$\sup \left\{ \iint_{B(\zeta, \delta)} |\ln|z - \zeta||^p d\gamma(z) : \zeta \in \mathbb{C} \right\} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Тогда функция

$$\ln|z - \zeta| : \mathbb{C} \rightarrow L_p(\gamma)$$

равномерно непрерывна в $\mathbb{C}$.

Заметим, что доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства предыдущей теоремы, но является более простым.

§ 4. Основные результаты

Пусть $v_n(z)$ – последовательность субгармонических функций в верхней полуплоскости. Назовем условиями А следующую систему ограничений:

- 1) функции $v_n(z) \in SK$;
- 2) последовательность функций $v_n(z)$, продолженных нулем в нижнюю полуплоскость, сходится как последовательность обобщенных функций в $\mathbb{C}$ к некоторой обобщенной функции w ;
- 3) последовательность λ_n полных мер функций v_n является слабо ограниченной.

Условия А – это основные ограничения на последовательность функций $v_n(z)$, когда рассматривается случай полуплоскости. Прокомментируем условия А.

Класс субгармонических функций в верхней полуплоскости слишком широк. Субгармоническая функция в верхней полуплоскости, продолженная нулем в нижнюю полуплоскость, не является локально интегрируемой. Наши методы не применимы к такому классу функций. Условие 1) обеспечивает достаточную общность рассматриваемого вопроса.

Требование 3) обусловлено следующими соображениями. Если $\lambda = \mathcal{T}_1 \lim \lambda_n$, то это требование является наиболее естественным ограничением, гарантирующим, что обобщенная функция λ будет мерой. Кроме того, это ограничение гарантирует $\mathcal{T}$ -компактность последовательности λ_n .

Ограничение 2) – это наша находка. Именно такой вид сходимости последовательности v_n обеспечивает сходимость в интегральных метриках, как утверждается в доказываемых в работе теоремах. Если в этих теоремах, относящихся к случаю полуплоскости, требование 2) заменить на требование $v_n \rightarrow w$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}_+)$ (а не в $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$), то они становятся неверными. Пусть $f(z)$ – целая вещественная функция со следующей асимптотикой при $z \rightarrow \infty$:

$$f(z) = \begin{cases} e^{e^z} + O(1), & z \in G = \{z : \text{Re } z > 0, |\text{Im } z| < \pi\}, \\ O(1), & z \notin G \end{cases}$$

(см., например, [11; теорема 4.4.1]), $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Функция $v(z)$ – гармоническая в верхней полуплоскости и равна нулю на границе. Последовательность $v_n(z) = v(nz)/n$ сходится к нулю в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}_+)$. Тем не менее, соотношение

$$\iint_{B_+(0,1)} |v_n(z)| dx dy \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

не выполняется. Оно должно было бы выполняться, если бы замена, о которой мы говорили, была бы возможной.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $v_n(z)$ – последовательность субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющих условиям А. Тогда

- 1) предельная функция w является регулярной обобщенной функцией, которая представляется в верхней полуплоскости субгармонической функцией $w(z)$ класса SK ;
- 2) если λ – полная мера $w(z)$, то $\lambda = \mathcal{T} \lim \lambda_n$ ($n \rightarrow \infty$);
- 3) справедлив принцип повышения, т.е. если $z_n \rightarrow z \in \mathbb{C}_+$ ($n \rightarrow \infty$), то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} v_n(z_n) \leq w(z);$$

- 4) множество тех точек $z \in \mathbb{C}_+$, где выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} v_n(z) < w(z),$$

имеет емкость нуль;

- 5) для всех точек $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется равенство

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} v_n(z) \right)^* = w(z),$$

где $u^*(z) = \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z} u(\zeta)$;

- 6) если β – положительная финитная конечная борелевская мера, удовлетворяющая условию $\operatorname{supp} \beta \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, не нагружающая вещественную ось, и такая, что функция

$$b(\zeta) = \iint K(z, \zeta) d\beta(z)$$

непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) d\beta(z) = \iint w(z) d\beta(z);$$

- 7) если γ – положительная финитная конечная борелевская мера, удовлетворяющая условию $\operatorname{supp} \gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, не нагружающая вещественную ось, и такая, что функция

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| : \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow L_p(\gamma)$$

является равномерно непрерывной в $\overline{\mathbb{C}}_+$, то

$$\iint |v_n(z) - w(z)|^p d\gamma(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательности λ_n , $(\lambda_n)_+$, $(\lambda_n)_-$, $|\lambda_n|$ являются $\mathcal{T}$ -компактными, то без ограничения общности при доказательстве утверждения 1) их можно считать $\mathcal{T}$ -сходящимися. Пусть

$$\lambda = \mathcal{T} \lim \lambda_n, \quad \bar{\lambda} = \mathcal{T} \lim |\lambda_n| \quad (n \rightarrow \infty).$$

Пусть $R > 0$ таково, что мера $\bar{\lambda}$ не нагружает окружность $|z| = R$. Тогда из теоремы 4 следует, что

$$\lambda_R = w \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)_R, \quad (5)$$

где индекс R означает, что берется ограничение соответствующей меры на круг $B(0, R)$. По теореме 7 в полукруге $C_+(0, R)$ справедливо представление

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B_+(0, R)} K(z, \zeta) d(\lambda_n)_R(\zeta) + u_n(z), \quad (6)$$

где $u_n(z)$ – гармоническая функция в полукруге $C_+(0, R)$, непрерывно продолжающаяся нулем на интервал $(-R, R)$. Пусть $a(z)$ – финитная в области $C(0, R)$ бесконечно дифференцируемая функция. Умножим равенство (6) на $a(z)$ и проинтегрируем его. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\iint v_n(z) a(z) dx dy = \iint b_1(\zeta) d(\lambda_n)_R(\zeta) + \iint u_n(z) a(z) dx dy, \quad (7)$$

где

$$b_1(\zeta) = \iint K(z, \zeta) a(z) dx dy.$$

По теореме 8 функция $b_1(\zeta)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$. Полагая, например, $b_1(\zeta) = b_1(\bar{\zeta})$ при $\text{Im } \zeta < 0$, можно считать, что функция $b_1(\zeta)$ непрерывна во всей плоскости и, в частности, в круге $B(0, R)$. Теперь из (5) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint b_1(\zeta) d(\lambda_n)_R(\zeta) = \iint b_1(\zeta) d\lambda_R(\zeta).$$

По условию теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) a(z) dx dy = (w, a(z)).$$

Тем самым доказано, что для любой функции $a(z)$ из $\mathcal{D}(C(0, R))$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint u_n(z) a(z) dx dy.$$

Напомним, что определение сходимости последовательностей v_n таково, что в нижней полуплоскости функции следует считать равными нулю. Поэтому и в приведенном выше равенстве считаем, что $u_n(z) = 0$ при $\text{Im } z < 0$. Пусть

$$h_n(z) = \begin{cases} u_n(z), & \text{Im } z > 0, \\ 0, & \text{Im } z = 0, \\ -u_n(\bar{z}), & \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

По теореме о гармоническом продолжении функция $h_n(z)$ является гармонической в круге $C(0, R)$. Пусть $\alpha(z) \in \mathcal{D}(C(0, R))$. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{C(0, R)} h_n(z) \alpha(z) dx dy &= \iint_{C_+(0, R)} u_n(x, y) \alpha(x, y) dx dy \\ &\quad - \iint_{C_-(0, R)} u_n(x, -y) \alpha(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену $y_1 = -y$. Получим

$$\begin{aligned} \iint_{C(0, R)} h_n(z) \alpha(z) dx dy &= \iint_{C_+(0, R)} u_n(z) (\alpha(z) + \alpha(\bar{z})) dx dy \\ &= \iint_{C(0, R)} u_n(z) (\alpha(z) + \alpha(\bar{z})) dx dy. \end{aligned}$$

Так как $\alpha(z) + \alpha(\bar{z}) \in \mathcal{D}(C(0, R))$, то в силу вышесказанного существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C(0, R)} h_n(z) \alpha(z) dx dy.$$

Тем самым доказано, что последовательность $h_n(z)$ сходится как последовательность обобщенных функций в круге $C(0, R)$. По теореме 6 существует гармоническая в круге $C(0, R)$ функция $h(z)$ такая, что последовательность $h_n(z)$ равномерно сходится к $h(z)$ на любом компакте $K \subset C(0, R)$. Поэтому существует гармоническая в полукруге $C_+(0, R)$ функция $u(z)$, непрерывно продолжающаяся нулем на интервал $(-R, R)$, такая, что последовательность $u_n(z)$ равномерно сходится к $u(z)$ на любом компакте $K \subset C(0, R) \cap B_+(0, R)$.

Переходя к пределу в равенстве (7), получаем

$$\begin{aligned} (w, a(z)) &= \iint b_1(\zeta) d\lambda_R(\zeta) + \iint u(z) a(z) dx dy \\ &= \iint_{C_+(0, R)} \left(\iint K(z, \zeta) d\lambda_R(\zeta) + u(z) \right) a(z) dx dy \\ &= \iint_{C_+(0, R)} \left(\iint_{B(0, R)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + u(z) \right) a(z) dx dy. \end{aligned}$$

В качестве R можно брать любое строго положительное число такое, что мера $\bar{\lambda}$ не нагружает окружность $|z| = R$. Из этого следует, что w есть регулярная обобщенная функция, которая в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ представляется нулем, а в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ — субгармонической функцией $w(z)$ класса SK , причем полная мера $w(z)$ есть λ . Утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем теперь, что

$$\mathcal{T} \lim \lambda_n = \lambda \quad (n \rightarrow \infty).$$

Если это не так, то существует функция $\varphi \in \Phi$ такая, что (λ_n, φ) не сходится к (λ, φ) . Из этого следует, что существуют число $a_1 \neq (\lambda, \varphi)$ и последовательность n_k такие, что $(\lambda_{n_k}, \varphi) \rightarrow a_1$ ($k \rightarrow \infty$). Применим к последовательности $v_{n_k}(z)$ утверждение 1) теоремы. Эта последовательность сходится

к тому же пределу, что и последовательность $v_n(z)$. Как видно из доказательства утверждения 1), полная мера λ предельной функции $w(z)$ является $\mathcal{T}$ -пределом некоторой подпоследовательности $\lambda_{n_{k_m}}$ последовательности λ_{n_k} . Тогда

$$(\lambda, \varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{n_{k_m}}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k}(\varphi) = a_1.$$

Мы получили противоречие, и тем самым утверждение 2) теоремы доказано.

Пусть μ_n – риссовская мера v_n . В полуплоскости $\mathbb{C}_+$ риссовская и полная мера связаны соотношением

$$d\mu_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi \operatorname{Im} \zeta} d\lambda_n(\zeta).$$

Поэтому последовательность μ_n $\mathcal{T}$ -сходится к риссовской мере μ функции $w(z)$ в $\mathbb{C}_+$.

Пусть круг $B(z_0, R) \subset \mathbb{C}_+$ такой, что мера μ не нагружает его границы. По теореме 4 в круге $B(z_0, R)$ выполняется равенство $\mu = w \lim \mu_n$ ($n \rightarrow \infty$). В круге $C(z_0, R)$ справедливо представление

$$v_n(z) = \iint_{B(z_0, R)} \ln|z - \zeta| d\mu_n(\zeta) + u_n(z),$$

где $u_n(z)$ – гармоническая функция в $C(z_0, R)$. С помощью теоремы 6 можно получить, что существует гармоническая функция $u(z)$ в круге $C(z_0, R)$ такая, что последовательность $u_n(z)$ равномерно сходится к $u(z)$ на любом компакте $K \subset C(z_0, R)$. Теперь утверждения 3)–5) теоремы следуют из хорошо известных фактов теории потенциала. Так, утверждение 3) есть следствие теоремы 1.3 из [6]. Утверждение 4) есть следствие теоремы 3.8 из [6], утверждение 5) следует из замечания 2 к теореме 3.8 из [6].

Докажем утверждение 6). Пусть в равенстве (6) число R таково, что

$$\operatorname{supp} \beta \subset B_+(0, R_1), \quad R_1 < R.$$

Интегрируя равенство (6) по мере β , получаем

$$\iint v_n(z) d\beta(z) = \frac{1}{2\pi} \iint b(\zeta) d(\lambda_n)_R(\zeta) + \iint u_n(z) d\beta(z),$$

где

$$b(\zeta) = \iint K(z, \zeta) d\beta(z).$$

Проведенное изменение порядка интегрирования законно, потому что ядро $K(z, \zeta)$ знакопостоянно и теорему Фубини можно отдельно применить к мерам $((\lambda_n)_R)_+$ и $((\lambda_n)_R)_-$. Так как $b(\zeta)$ – непрерывная функция, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) d\beta(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint b(\zeta) d\lambda_R(\zeta) + \iint u(z) d\beta(z) \\ &= \iint \left(\iint_{B_+(0, R)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + u(z) \right) d\beta(z) = \iint w(z) d\beta(z). \end{aligned}$$

Утверждение 6) доказано.

Докажем теперь утверждение 7). Пусть

$$J_n = \left(\iint |v_n(z) - w(z)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p},$$

и пусть n_k — такая последовательность, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{k \rightarrow \infty} J_{n_k}.$$

Кроме того, можно считать, что последовательности $(\lambda_{n_k})_+$ и $(\lambda_{n_k})_-$ $\mathcal{T}$ -сходятся. Пусть число R таково, что $\text{supp } \gamma \subset C(0, R)$ и что $\bar{\lambda}(\partial B(0, R)) = 0$. Тогда, применяя неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} J_{n_k} &\leq \left(\iint \left| \iint K(z, \zeta) d((\lambda_{n_k})_R - \lambda_R)(\zeta) \right|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\iint |u_{n_k}(z) - u(z)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} = J_{1k} + J_{2k}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $J_{2k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Пусть $p > 1$. Для J_{1k} справедлива формула

$$J_{1k} = \sup_{\|s\|_q \leq 1} \left| \iint s(z) \iint K(z, \zeta) d((\lambda_{n_k})_R - \lambda_R)(\zeta) d\gamma(z) \right|,$$

где q определяется из равенства $1/p + 1/q = 1$, а норма вычисляется в пространстве $L_q(\gamma)$. Как будет видно из дальнейшего,

$$s(z)K(z, \zeta) \in L_1(\mathbb{R}^4, (|(\lambda_{n_k})_R| + |\lambda_R|) \times \gamma). \quad (8)$$

Поэтому в последнем интеграле возможна перестановка порядка интегрирования. После перестановки получаем

$$J_{1k} = \sup_{\|s\|_q \leq 1} \left| \iint \left(\iint s(z)K(z, \zeta) d\gamma(z) \right) d((\lambda_{n_k})_R - \lambda_R)(\zeta) \right|.$$

Из неравенства Гёльдера и замечания к теореме 9 следует, что

$$\left| \iint s(z)K(z, \zeta) d\gamma(z) \right| \leq \left(\iint |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \right)^{1/p} \leq M_1.$$

Заметим, что сформулированное ранее утверждение (8) теперь очевидно. Далее покажем, что семейство функций

$$F_s(\zeta) = \iint s(z)K(z, \zeta) d\gamma(z), \quad \|s\|_q \leq 1,$$

является компактным в пространстве $C(B_+(0, R))$. Мы уже доказали равномерную ограниченность этого семейства. Неравенство Гёльдера дает

$$|F_s(\zeta_2) - F_s(\zeta_1)| \leq \psi(\zeta_2, \zeta_1).$$

Теперь из ограничений п. 7) теоремы следует, что семейство функций $F_s(\zeta)$ равномерно непрерывно. По теореме Арцела семейство $F_s(\zeta)$ компактно. Далее теорема 5 дает $J_{1k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Мы рассмотрели случай $p > 1$. Пусть теперь $p = 1$. Тогда

$$J_{1k} = \iint \left(\iint s_k(z) K(z, \zeta) d\gamma(z) \right) d((\lambda_{n_k})_R - \lambda_R)(\zeta),$$

где

$$s_k(z) = \text{sign} \iint K(z, \zeta) d((\lambda_{n_k})_R - \lambda_R)(\zeta).$$

Последовательность

$$F_k(\zeta) = \iint s_k(z) K(z, \zeta) d\gamma(z)$$

является компактной в $C(B_+(0, R))$. Так же как и ранее, получаем, что $J_{1k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Поэтому $J_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Утверждение 7) и, следовательно, вся теорема доказаны.

Если в условиях А предположение $v_n(z) \in SK$ заменить на предположение $v_n(z) \in SK-SK$, то получим новый набор условий, называемый далее условиями A' .

Если проанализировать доказательство теоремы 11, то можно увидеть, что при доказательстве утверждений 1), 2), 6), 7) предположение $v_n(z) \in SK$ можно заменить на более слабое предположение $v_n(z) \in SK-SK$. Поэтому справедлива следующая

ТЕОРЕМА 12. Пусть $v_n(z)$ – последовательность δ -субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющая условиям A' . Тогда

- 1) предельная функция w является регулярной обобщенной функцией, которая представляется в верхней полуплоскости функцией $w(z)$ класса $SK-SK$;
- 2) если λ – полная мера $w(z)$, то $\lambda = \mathcal{T} \lim \lambda_n$ ($n \rightarrow \infty$);
- 3) если β – положительная финитная конечная борелевская мера, удовлетворяющая условию $\text{supp } \beta \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, не нагружающая вещественную ось, такая, что функция

$$b(\zeta) = \iint K(z, \zeta) d\beta(z)$$

непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) d\beta(z) = \iint w(z) d\beta(z);$$

- 4) если γ – положительная финитная конечная борелевская мера, удовлетворяющая условию $\text{supp } \gamma \subset \overline{\mathbb{C}}_+$, не нагружающая вещественную ось, такая, что функция

$$K(z, \zeta): \overline{\mathbb{C}}_+ \rightarrow L_p(\gamma)$$

является равномерно непрерывной в $\overline{\mathbb{C}}_+$, то

$$\iint |v_n(z) - w(z)|^p d\gamma(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ТЕОРЕМА 13. Пусть $v_n(z)$ – последовательность субгармонических функций в области G , которая сходится как последовательность обобщенных функций к обобщенной функции w . Тогда

- 1) обобщенная функция w является регулярной обобщенной функцией, которая представляется субгармонической функцией $w(z)$ в области G ;

2) если μ – риссовская мера w , а μ_n – риссовская мера v_n , то $\mu = \mathcal{T} \lim \mu_n$ ($n \rightarrow \infty$);

3) справедлив принцип повышения: т.е. если $z_n \rightarrow z \in G$ ($n \rightarrow \infty$), то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} v_n(z_n) \leq w(z);$$

4) множество точек $z \in G$, для которых выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) < w(z),$$

имеет емкость нуль;

5) для любой точки $z \in G$ выполняется равенство

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} v_n(z) \right)^* = w(z);$$

6) если β – положительная конечная финитная борелевская мера в G такая, что функция

$$b(\zeta) = \iint \ln|z - \zeta| d\beta(z)$$

непрерывна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) d\beta(z) = \iint w(z) d\beta(z);$$

7) если γ – положительная конечная финитная борелевская мера в G такая, что функция

$$\ln|z - \zeta|: \mathbb{C} \rightarrow L_p(\gamma)$$

является равномерно непрерывной, то

$$\iint |v_n(z) - w(z)|^p d\gamma(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Легко видеть, что рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 11, можно адаптировать к рассматриваемому более простому случаю. Справедлива также следующая

ТЕОРЕМА 14. Пусть $v_n(z)$ – последовательность δ -субгармонических функций в области G , которая сходится как последовательность обобщенных функций к обобщенной функции w , причем последовательность риссовских мер μ_n функций v_n слабо ограничена. Тогда

1) обобщенная функция w является регулярной обобщенной функцией, которая представляется δ -субгармонической функцией $w(z)$ в области G ;

2) если μ – риссовская мера $w(z)$, то

$$\mu = \mathcal{T} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n;$$

3) если β – положительная конечная финитная борелевская мера в G такая, что функция

$$b(\zeta) = \iint \ln|z - \zeta| d\beta(z)$$

является непрерывной, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint v_n(z) d\beta(z) = \iint w(z) d\beta(z);$$

4) если γ – положительная конечная финитная борелевская мера в G такая, что функция

$$\ln|z - \zeta|: \mathbb{C} \rightarrow L_p(\gamma)$$

является равномерно непрерывной, то

$$\iint |v_n(z) - w(z)|^p d\gamma(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

В теоремах 11–14 наиболее важными являются последние утверждения. Далее приведем примеры конкретных мер γ , для которых справедливы эти утверждения.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $v_n(z)$ – последовательность функций класса $SK-SK$, продолженных нулем в нижнюю полуплоскость, которая как последовательность обобщенных функций в плоскости сходится к обобщенной функции w . Пусть последовательность λ_n полных мер функций v_n слабо ограничена. Тогда w есть регулярная обобщенная функция, которая в верхней полуплоскости представляется функцией $w(z)$ класса $SK-SK$. Кроме того, для любого $p \in [1, 2)$ и любого $R > 0$ справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_+(0, R)} |v_n(z) - w(z)|^p dx dy = 0, \quad z = x + iy, \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi |v_n(Re^{i\varphi}) - w(Re^{i\varphi})|^p \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^R |v_n(re^{i\varphi}) - w(re^{i\varphi})|^p r dr = 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теорем 12 и 9, для доказательства равенства (9) достаточно проверить, что для меры γ , являющейся ограничением меры Лебега на полукруг $B_+(0, R)$, выполняется условие (3). Очевидно, что в силу неравенства

$$\iint_{B(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \leq 2^p \iint_{B(\zeta, \delta)} \frac{dx dy}{|z - \zeta|^p}$$

это условие выполняется.

Для доказательства равенства (10) нужно проверить справедливость условия (3) для меры γ , которая определяется следующим образом. Вне полуокружности $T_+(R) = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ она равна нулю, а если $E \subset T_+(R)$ и $E_1 = \{\varphi \in [0, \pi] : Re^{i\varphi} \in E\}$, то

$$\gamma(E) = \int_{E_1} \sin \varphi d\varphi.$$

Пусть $\delta > 0$, $\zeta = \xi + i\eta = \tau e^{i\theta}$. Случаи, когда $\theta \in [0, \pi/2]$ и $\theta \in [\pi/2, \pi]$, рассматриваются аналогично. Поэтому будем считать, что $\theta \in [0, \pi/2]$. Если $|\tau - R| \geq \delta$, то

$$\iint_{B(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) = 0.$$

Поэтому далее считаем, что выполняется неравенство $|\tau - R| < \delta$. В этом случае круг $B(\zeta, \delta)$ пересекается с окружностью $T(R)$ по дуге, для которой

параметр φ изменяется на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$, концы которого удовлетворяют уравнению

$$R^2 - 2R\tau \cos(\varphi - \theta) + \tau^2 = \delta^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\varphi - \theta}{2} &= \frac{\delta^2 - (R - \tau)^2}{4R\tau}, \\ \varphi_1 &= \theta - 2 \arcsin \sqrt{\frac{\delta^2 - (R - \tau)^2}{4R\tau}}, \\ \varphi_2 &= \theta + 2 \arcsin \sqrt{\frac{\delta^2 - (R - \tau)^2}{4R\tau}}. \end{aligned}$$

Будем считать, что $\delta < R/2$. Тогда $\tau > R/2$ и $[\varphi_1, \varphi_2] \subset [\psi_1, \psi_2]$, где

$$\psi_1 = \theta - 2\alpha, \quad \psi_2 = \theta + 2\alpha, \quad \alpha = \arcsin \frac{\delta}{R\sqrt{2}}.$$

Отметим, что при $\theta \neq 0$

$$|K(z, \zeta)| = \frac{1}{2\tau \sin \theta} \ln \left(1 + \frac{4r\tau \sin \theta \sin \varphi}{|z - \zeta|^2} \right) \leq \frac{1}{2\tau \sin \theta} \ln \left(1 + \frac{\sin \theta |\sin \varphi|}{\sin^2((\varphi - \theta)/2)} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \iint_{B(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \\ &\leq \frac{1}{R^p} \int_{\theta-2\alpha}^{\theta+2\alpha} \left(\frac{1}{\sin \theta} \ln \left(1 + \frac{\sin \theta |\sin \varphi|}{\sin^2((\varphi - \theta)/2)} \right) \right)^p |\sin \varphi| d\varphi. \end{aligned}$$

После замены $\varphi = \theta + 2x$ получим

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{2}{R^p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \int_0^\alpha \left(\frac{1}{\sin \theta} \ln \left(1 + \frac{\sin \theta (\sin \theta + 2x)}{x^2} \right) \right)^p (\sin \theta + 2x) dx \\ &= \frac{2}{R^p} \left(\frac{\pi}{2} \right)^p \sin^{2-p} \theta \int_0^{\alpha/\sin \theta} \ln^p \left(1 + \frac{1+2y}{y^2} \right) (1+2y) dy. \end{aligned}$$

Из полученной оценки легко следует, что $J \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$). Нужно только отдельно рассматривать случай $\alpha \leq \sin \theta$ и $\alpha > \sin \theta$. Случай $\theta = 0$ исследуется проще. Тем самым равенство (10) доказано.

Осталось доказать равенство (11). Для этого нужно проверить условие (3) для меры γ , которая определяется следующим образом. Пусть E – произвольное борелевское множество, φ – то значение, которое встречается в равенстве (11),

$$E_1 = \{r > 0 : re^{i\varphi} \in E\}.$$

Тогда

$$\gamma(E) = \int_{E_1 \cap [0, R]} r dr.$$

Оцениваем сначала интеграл

$$J(0, \delta) = \iint_{B(0, \delta)} |K(z, 0)|^p d\gamma(z) = \int_0^\delta \left(\frac{\sin \varphi}{r} \right)^p r dr \leq \frac{\delta^{2-p}}{2-p}.$$

Имеем $J(0, \delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$).

Пусть $\zeta \neq 0$. Круг $B(\zeta, \delta)$ не пересекает прямую, содержащую луч $\arg z = \varphi$, если $\tau|\sin(\varphi - \theta)| > \delta$. В противном случае он пересекает эту прямую по отрезку $[r_1 e^{i\varphi}, r_2 e^{i\varphi}]$, где

$$\begin{aligned} r_1 &= \tau \cos(\varphi - \theta) - \sqrt{\delta^2 - \tau^2 \sin^2(\varphi - \theta)}, \\ r_2 &= \tau \cos(\varphi - \theta) + \sqrt{\delta^2 - \tau^2 \sin^2(\varphi - \theta)}. \end{aligned}$$

В данном случае $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in [0, \pi]$. Число r_1 может быть отрицательным. Заметим, что

$$[r_1 e^{i\varphi}, r_2 e^{i\varphi}] \subset [(\tau - \delta)e^{i\varphi}, (\tau + \delta)e^{i\varphi}].$$

Обозначим

$$M(\varphi) = \left(\frac{8}{\ln 3} \frac{1}{\sin \varphi} \right)^p.$$

Из леммы 1 следует, что при $p \in (1, 2)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |K(z, \zeta)|^p r &\leq M(\varphi) \ln^p \left(1 + \frac{r}{|r - \tau|} \right) r^{1-p} \\ &= M(\varphi) \left(\frac{|r - \tau|}{r} \right)^{p-1} \ln^p \left(1 + \frac{r}{|r - \tau|} \right) |r - \tau|^{1-p} \leq M |r - \tau|^{1-p}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$J = \iint_{B(\zeta, \delta)} |K(z, \zeta)|^p d\gamma(z) \leq 2M \int_{\tau}^{\tau+\delta} (r - \tau)^{p-1} dr = \frac{2M}{2-p} \delta^{2-p}.$$

Пусть $p = 1$. Считаем, что $\delta \in (0, 1)$. Тогда можно предполагать, что $\tau < R + 1$, иначе круг $B(\zeta, \delta)$ не будет пересекаться с носителем меры γ . В этом случае

$$J \leq \frac{16}{\ln 3} \frac{1}{\sin \varphi} \int_{\tau}^{\tau+\delta} \ln \left(1 + \frac{R+2}{r - \tau} \right) dr.$$

Из доказанного следует, что для рассматриваемой меры γ условие (3) выполняется. Равенство (11) и, следовательно, теорема 15 доказаны.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $v_n(z)$ – последовательность δ -субгармонических функций в области G , которая как последовательность обобщенных функций сходится к обобщенной функции w . Пусть последовательность μ_n мер Рисса функций $v_n(z)$ слабо ограничена. Тогда w – регулярная обобщенная функция, которая представляется δ -субгармонической функцией $w(z)$ в области G . Пусть $p \geq 1$ – произвольное число, а круг $B(z_0, R)$ и отрезок $[R_1 e^{i\varphi}, R_2 e^{i\varphi}]$ входят в G .

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B(z_0, R)} |v_n(z) - w(z)|^p dx dy &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |v_n(z_0 + R e^{i\varphi}) - w(z_0 + R e^{i\varphi})|^p d\varphi &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_1}^{R_2} |v_n(t e^{i\varphi}) - w(t e^{i\varphi})|^p dt &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей, но значительно проще.

Список литературы

- [1] В. С. Азарин, “Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка”, *Матем. сб.*, **108(150)**:2 (1979), 147–167; англ. пер.: V. S. Azarin, “On the asymptotic behavior of subharmonic functions of finite order”, *Math. USSR-Sb.*, **36**:2 (1980), 135–154.
- [2] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients*, Grundlehren Math. Wiss., **257**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983.
- [3] М. А. Федоров, А. Ф. Гришин, “Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **1**:3 (1998), 223–271.
- [4] А. Huber, “On subharmonic functions and differential geometry in the large”, *Comment. Math. Helv.*, **32**:1 (1958), 13–72.
- [5] Ю. Г. Решетняк, “Двумерные многообразия ограниченной кривизны”, *Геометрия-4. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, **70**, ВИНТИ, М., 1989, 7–189; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, “Two-dimensional manifolds of bounded curvature”, *Geometry IV. Non-regular Riemannian geometry*, Encyclopaedia Math. Sci., **70**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 3–163.
- [6] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [7] Н. Бурбаки, *Элементы математики. Интегрирование*, Наука, М., 1977; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XIII. Livre VI: Intégration. Chapitres 1, 2, 3 et 4*, Hermann, Paris, 1965; *Éléments de mathématique. Fasc. XXI. Livre VI: Intégration. Chapitre 5*, Hermann, Paris, 1967; *Éléments de mathématique. Fasc. XXXV. Livre VI: Intégration. Chapitre 9*, Hermann, Paris, 1969.
- [8] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [9] J.-I. Itô, “Subharmonic functions in the half-plane”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **129**:3 (1967), 479–499.
- [10] А. Ф. Гришин, “Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I”, *Матем. физика, анализ, геом.*, **1**:2 (1994), 193–215.
- [11] М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е изд., Наука, М., 1979; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Evgrafov, *Asymptotic estimates and entire functions*, Gordon and Breach, New York, 1961.

А. Ф. Гришин (A. F. Grishin)

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: grishin@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию

29.05.2007

А. Шуиги (A. Chouigui)

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина, Украина
E-mail: a_chouigui@yahoo.fr