Общероссийский математический портал

Д. Барриос, Г. Л. Лопес, А. Мартинес-Финкельштейн, Е. Торрано, Конечномерные аппроксимации резольвенты бесконечной ленточной матрицы и непрерывные дроби, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 23–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:31:17

УДК 517.5

Д. Барриос, Г. Лопес, А. Мартинес-Финкельштейн, Э. Торрано

Конечномерные аппроксимации резольвенты бесконечной ленточной матрицы и непрерывные дроби

В работе исследуется вопрос о возможности аппроксимации резольвенты оператора, порожденного ленточной матрицей, посредством резольвент конечномерных срезов этой матрицы. Дается положительный ответ для матриц, допускающих представление в виде суммы самосопряженной и ограниченной ленточных матриц. В этом случае область сходимости последовательности резольвент описывается в терминах матриц, входящих в представление. В применении к комплексным трехдиагональным матрицам этот результат позволяет установить достаточные условия сходимости чебышевских непрерывных дробей на множествах комплексной области. В частном случае компактных возмущений результат уточняется и устанавливается связь между полюсами предельной функции и собственными значениями трехдиагональной матрицы.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение и формулировка основного результата

Хорошо известно, что свойства непрерывной дроби можно исследовать, изучая некоторый оператор, порожденный трехдиагональной (якобиевой) матрицей, построенной по коэффициентам непрерывной дроби. Этот метод широко применялся до сих пор, и краткость доказательства известных результатов является сильным аргументом в пользу такого подхода.

В случае действительной симметричной трехдиагональной матрицы основными инструментами исследования являются классическая проблема моментов, теория ортогональных многочленов и спектральная теория самосопряженных операторов (см., например, [1], [2]).

Если же обратиться к непрерывным дробям с комплексными коэффициентами или же к аппроксимациям Эрмита–Паде (помимо других примеров), то возникают неэрмитовы либо нетрехдиагональные ленточные матрицы. В этом случае, как правило, невозможно использовать спектральную теорему или ортогональные многочлены и приходится применять иную технику.

В настоящей работе, состоящей из четырех параграфов, мы стремимся получить определенное обобщение классической теории, рассматривая ограниченное возмущение неограниченного самосопряженного оператора в случае, когда оба оператора порождаются ленточными матрицами (см. §§ 1 и 2). Мы применяем полученные результаты к классу чебышевских непрерывных дробей с целью получить условия сходимости на множествах комплексной плоскости. В § 4, где рассматривается

частный случай компактных возмущений, этот результат уточняется и устанавливается взаимосвязь между полюсами предельной функции и собственными значениями трехдиагональной матрицы.

Здесь мы в основном интересуемся непрерывными дробями. Некоторые дополнительные применения основного результата (теоремы 1) будут опубликованы позже.

В оставшейся части этого параграфа мы вводим необходимые определения и формулируем результаты о сходимости операторов.

Рассмотрим бесконечную ленточную или $(2p + 1)$ -диагональную матрицу

$$G = (g_{ij})_{i,j=0}^{\infty}, \quad (1)$$

где $g_{ij} = 0$ при $|i - j| > p$. Для любой последовательности комплексных чисел $x = (x_1, x_2, \dots)$ обозначим через Gx последовательность с компонентами $(Gx)_n$, получаемую формальным умножением G на вектор x .

Чтобы перейти от матрицы G к операторам, введем следующие линейные подмножества гильбертова пространства ℓ^2 : D_0 , состоящее из векторов с конечным числом ненулевых компонент, и $D(G) = \{x \in \ell^2 : Gx \in \ell^2\}$; оба множества плотны в ℓ^2 , $D_0 \subset D(G)$ в силу ленточной структуры G (см. [3]). Определим оператор $\mathcal{G}$ на $D(G)$ равенством $\mathcal{G}(x) = Gx$ и обозначим через $\mathcal{G}_0$ ограничение $\mathcal{G}$ на D_0 . Операторы $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{G}$ будем называть соответственно минимальным и максимальным операторами, порожденными матрицей G (несколько иное определение см., например, в [4]). В дальнейшем, там, где это не приведет к недоразумениям, мы будем использовать для матрицы и для максимального оператора $\mathcal{G}$ единое обозначение G .

Ленточная матрица G порождает ограниченный оператор в ℓ^2 тогда и только тогда, когда все ее элементы g_{ij} равномерно ограничены; в этом случае указанное матричное представление оператора имеет смысл для всех элементов $x \in \ell^2$, и такие матрицы мы называем *ограниченными*. В частности, если ограниченная матрица G эрмитова (т.е. $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$), то $\mathcal{G}$ является самосопряженным оператором.

В общем (неограниченном) случае для эрмитовой матрицы G по крайней мере можно утверждать, что $\mathcal{G}_0$ симметричен и имеет замыкание, которое обозначим через $\mathcal{G}'_0$. Нетрудно установить, что оператор $\mathcal{G}$ сопряжен к $\mathcal{G}'_0$: $\mathcal{G} = [\mathcal{G}'_0]^*$. Если $\mathcal{G}$ самосопряжен (другими словами, если $\mathcal{G} = \mathcal{G}'_0$), мы говорим, что матрица G является *самосопряженной*.

Пусть $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, $e_i = (0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^{(i+1)}, 0, \dots)^T$, обозначает стандартный базис в ℓ^2 . Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим оператор $E_n: \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$, определяемый равенством $E_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ для каждого $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, и оператор $\tilde{E}_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \ell^2$, для которого

$$\tilde{E}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \in \ell^2.$$

Очевидно, матричное представление оператора $\tilde{E}_n E_n: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ в базисе $\{e_i\}$ имеет вид блочной матрицы

$$\tilde{E}_n E_n = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\infty \times \infty}, \quad \text{где } I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

причем $E_n \tilde{E}_n = I_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Для бесконечной матрицы $G = (g_{ij})_{i,j=0}^\infty$ определим конечномерные “срезы” $G_n = (g_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$; другими словами, G_n — это матрица размера $n \times n$, составленная из первых n строк и n столбцов G . Каждая матрица $\tilde{E}_n G_n E_n$ порождает ограниченный оператор конечного ранга в ℓ^2 , матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\infty \times \infty}.$$

В дальнейшем мы отождествляем спектр ленточной матрицы G со спектром порожденного ею максимального оператора. Резольвентное множество $\rho(G)$ матрицы G состоит из $z \in \mathbb{C}$, для которых ядро оператора $G - zI$ тривиально, его образ совпадает с ℓ^2 и $(G - zI)^{-1}$ ограничен на ℓ^2 . Далее, $\sigma(G) = \mathbb{C} \setminus \rho(G)$ обозначает спектр, а $\sigma_p(G) \subset \sigma(G)$ — точечный спектр (совокупность собственных значений) G .

Таким образом, резольвентный оператор

$$\mathcal{R}^{(G)}(z) = (G - zI)^{-1}$$

определен и ограничен на ℓ^2 для $z \in \rho(G)$. Кроме того, если $z \notin \sigma(G_n)$, то $(G_n - zI_n)^{-1}$ биективен на $\mathbb{C}^n$, а оператор

$$\mathcal{R}_n^{(G)}(z) = \tilde{E}_n (G_n - zI_n)^{-1} E_n$$

ограничен на ℓ^2 .

Положим

$$\mathcal{P}(G) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq n} \sigma(G_k)}.$$

Очевидно, $\mathcal{P}(G)$ можно охарактеризовать как множество всех $z \in \mathbb{C}$, для которых существует такая последовательность $\{z_n\}_{n \in \Lambda}$, $z_n \in \sigma(G_n)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, что

$$\lim_{n \in \Lambda} z_n = z.$$

В (классическом) случае действительной якобиевой матрицы G , как известно, $\sigma(G) \subset \mathcal{P}(G) \subset \text{conv } \sigma(G)$ (см., например, [5; гл. II, раздел 4]).

Наконец, под $\text{dist}(z, A)$ мы понимаем евклидово расстояние в $\mathbb{C}$ от точки z до множества A , $\|\cdot\|$ обозначает обычную норму в ℓ^2 , $\|\cdot\|_n$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{C}^n$, а знак “ $\rightarrow$ ” в применении к операторам указывает на сильную (или обычную) сходимость.

Все наши последующие рассуждения относятся к случаю, когда матрица G может быть представлена в виде

$$G = H + C, \tag{2}$$

где ленточные матрицы H и C являются соответственно самосопряженной и ограниченной. Следует обратить внимание на определенную свободу в выборе матриц H и C .

ТЕОРЕМА 1. *Если имеет место (2), то*

$$\mathcal{R}_n^{(G)}(z) \rightarrow \mathcal{R}^{(G)}(z) \quad (3)$$

равномерно на компактах в $\{z : \text{dist}(z, \mathcal{P}(H) \cup \sigma(H)) > \|C\|\}$.

В частности, так как все $\sigma(H_n) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$, можно прийти к следующему заключению.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если имеет место (2), то справедливо (3) равномерно на компактах в $\{z : |\text{Im } z| > \|C\|\}$.*

В дополнение для трехдиагональных матриц можно доказать более точный результат. В этом случае известно, что все $\sigma(H_n)$ принадлежат выпуклой оболочке $\text{conv } \sigma(H)$ множества $\sigma(H)$, откуда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если матрица H трехдиагональна, то при условии (2) имеет место (3) равномерно на любом компакте K , удовлетворяющем неравенству $\text{dist}(K, \text{conv } \sigma(H)) > \|C\|$.*

Обозначим через S правый сдвиг на ℓ^2 , порождаемый бесконечной матрицей

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{\infty \times \infty},$$

и пусть $G^{(k)} = [S^k]^T G S^k$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, матрица $G^{(k)}$ получается отбрасыванием у G первых k строк и k столбцов. Так как при каждом k матрица $G^{(k)}$ сохраняет структуру, указанную в (2), $G^{(k)} = H^{(k)} + C^{(k)}$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *При условии (2) для каждого $k = 1, 2, \dots$*

$$\mathcal{R}_n^{(G^{(k)})}(z) \rightarrow \mathcal{R}^{(G^{(k)})}(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (4)$$

равномерно на компактах в $\{z : \text{dist}(z, \mathcal{P}(H^{(k)}) \cup \sigma(H^{(k)})) > \|C^{(k)}\|\}$.

В случае $H = 0$ имеем

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $\|G\| < \infty$, то (3) имеет место равномерно на компактах в $\{|z| > \|G\|\}$.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Мы разделим доказательство основного результата на несколько лемм, представляющих самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. *Если $\|C\| < \infty$, то $\tilde{E}_n C_n E_n \rightarrow C$, где $C_n = E_n C \tilde{E}_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $\tilde{E}_n E_n$ является проектором из ℓ^2 на $\text{span}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$, а $C_n = E_n C \tilde{E}_n$, то $\tilde{E}_n C_n E_n = \tilde{E}_n E_n C \tilde{E}_n E_n$. Таким образом, $\|\tilde{E}_n C_n E_n\| \leq \|C\|$. С другой стороны,

$$(C - \tilde{E}_n C_n E_n)e_j = (I - \tilde{E}_n E_n) C e_j \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $C e_j$ — j -й столбец матрицы C . Следовательно, величины $\|\tilde{E}_n C_n E_n\|$ равномерно ограничены и имеет место равномерная сходимость на плотном подмножестве в ℓ^2 .

ЛЕММА 2. Если $\text{dist}(z, \sigma(H)) > \|C\|$, то $z \in \rho(G)$. Кроме того,

$$\|\mathcal{R}^{(G)}(z)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(H)) - \|C\|}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии $\|G\| < \infty$ (или, эквивалентно, $\|H\| < \infty$) утверждение является элементарным следствием известной теоремы об обратимости малых возмущений ограниченного обратимого оператора. В общем случае мы используем тождество

$$\mathcal{R}^{(G)}(z) = \mathcal{R}^{(H)}(z) [I + C \mathcal{R}^{(H)}(z)]^{-1}, \quad (6)$$

справедливое везде, где определены входящие в него операторы, а также тот факт, что для самосопряженного оператора H и $z \in \rho(H)$

$$\|\mathcal{R}^{(H)}(z)\| = \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(H))} \quad (7)$$

(см., например, [6; задача III–6.16]). Таким образом, если $\text{dist}(z, \sigma(H)) > \|C\|$, то

$$\|C \mathcal{R}^{(H)}(z)\| \leq \|C\| \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(H))} < 1,$$

а значит, оператор $[I + C \mathcal{R}^{(H)}(z)]^{-1}$ существует и ограничен, т.е. $\mathcal{R}^{(G)}(z)$ является композицией ограниченных операторов.

Далее, из тождества

$$\mathcal{R}^{(H)}(z) - \mathcal{R}^{(G)}(z) = \mathcal{R}^{(H)}(z) C \mathcal{R}^{(G)}(z) \quad (8)$$

следует, что если $z \in \rho(H) \cap \rho(G)$, то

$$\|\mathcal{R}^{(G)}(z)\| \leq \|\mathcal{R}^{(H)}(z)\| + \|\mathcal{R}^{(H)}(z)\| \cdot \|C\| \cdot \|\mathcal{R}^{(G)}(z)\|,$$

откуда

$$\|\mathcal{R}^{(G)}(z)\| (1 - \|C\| \cdot \|\mathcal{R}^{(H)}(z)\|) \leq \|\mathcal{R}^{(H)}(z)\|,$$

и остается применить (7).

Следующий шаг состоит в доказательстве равномерной ограниченности норм $\mathcal{R}_n^{(G)}(z)$, а именно имеет место

ЛЕММА 3. Для достаточно больших n величины $\|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)\|$ равномерно ограничены на компактах из $\{z : \text{dist}(z, \mathcal{P}(H)) > \|C\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)\| \leq \|(G_n - zI_n)^{-1}\|_n$, то, следуя схеме доказательства леммы 2, заключаем, что при $\text{dist}(z, \sigma(H_n)) > \|C_n\|_n$

$$\|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(H_n)) - \|C_n\|_n}.$$

В силу леммы 1 $\|C_n\|_n = \|\tilde{E}_n C_n E_n\| \rightarrow \|C\|$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n

$$\text{dist}(z, \sigma(H_n)) \geq \text{dist}(z, \mathcal{P}(H)) - \varepsilon.$$

Следовательно, можно утверждать, что

$$\|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)\| \leq \frac{2}{\text{dist}(z, \mathcal{P}(H)) - \|C\|}, \quad n \geq n_0(z).$$

Кроме того, в силу резольвентного уравнения

$$\mathcal{R}^{(G)}(z) - \mathcal{R}^{(G)}(z_0) = (z - z_0)\mathcal{R}^{(G)}(z)\mathcal{R}^{(G)}(z_0), \quad z, z_0 \in \rho(G), \quad (9)$$

имеет место неравенство

$$\|\mathcal{R}^{(G)}(z)\| \leq \frac{\|\mathcal{R}^{(G)}(z_0)\|}{1 - |z - z_0| \|\mathcal{R}^{(G)}(z_0)\|}, \quad |z - z_0| < \frac{1}{\|\mathcal{R}^{(G)}(z_0)\|}.$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{R}^{(G)}(z)$ равномерно ограничен на дисках

$$\{z : |z - z_0| \leq \delta(z_0)\}, \quad \delta(z_0) < \frac{1}{\|\mathcal{R}^{(G)}(z_0)\|}$$

для любого $z_0 \in \{z : \text{dist}(z, \mathcal{P}(H)) > \|C\|\}$, и стандартные аргументы позволяют установить равномерную ограниченность на указанных выше компактах.

Установим теперь сходимость в самосопряженном случае. Как будет показано ниже, следующая лемма является обобщением классической теоремы Стилтеса о сходимости непрерывных дробей.

ЛЕММА 4. Равномерно на компактных подмножествах в $\rho(H) \setminus \mathcal{P}(H)$

$$\mathcal{R}_n^{(H)}(z) \rightarrow \mathcal{R}^{(H)}(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in \rho(H)$ определим

$$v_j = (H - zI)e_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Так как $z \in \rho(H)$, то

$$\mathcal{R}^{(H)}(z)v_j = e_j.$$

Для доказательства плотности $\text{span}\{v_j, j = 0, 1, \dots\}$ в ℓ^2 достаточно установить, что

$$\langle x, v_j \rangle = 0, \quad x \in \ell^2, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Для любого вектора x справедливо следующее равенство

$$\langle x, (H - zI)e_j \rangle = \langle (H - \bar{z}I)x, e_j \rangle, \quad j = 0, 1, \dots$$

Следовательно, если имеет место (10), то

$$\langle (H - \bar{z}I)x, e_j \rangle = 0, \quad j = 0, 1, \dots,$$

откуда

$$(H - \bar{z}I)x = 0. \quad (11)$$

Заметим, что, вообще говоря, не любой вектор $(H - \bar{z}I)x$ обязан принадлежать ℓ^2 ; однако если верно (11), то $Hx = \bar{z}x$, откуда $Hx \in \ell^2$, а следовательно (вспомним определение $D(H)$), $x \in D(H)$. Но $\mathcal{P}(H) \cup \sigma(H) \subset \mathbb{R}$, а значит, $\bar{z} \notin \sigma_p(H)$, в силу чего $x = 0$.

С другой стороны, имеем

$$E_nv_j = E_n(H - zI)e_j = (H_n - zI_n)E_ne_j \in \mathbb{C}^n \quad \text{при } n \geq n_0(j), \quad j = 0, 1, \dots$$

Следовательно, для любого фиксированного $j = 0, 1, \dots$

$$\mathcal{R}_n^{(H)}(z)v_j = \tilde{E}_n(H_n - zI_n)^{-1}E_nv_j = \tilde{E}_nE_ne_j = e_j = \mathcal{R}^{(H)}(z)v_j$$

при достаточно больших n (точнее, для $n > j + p$ при условии, что матрица H $(2p + 1)$ -диагональна).

Таким образом, установлено, что

$$[\mathcal{R}^{(H)}(z) - \mathcal{R}_n^{(H)}(z)]x \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для x , принадлежащих плотному подмножеству ℓ^2 . Полагая $C = 0$ в лемме 3, получаем, что $\|\mathcal{R}_n^{(H)}(z)\|$ равномерно ограничены на каждом компакте в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}(H) = \rho(H) \setminus \mathcal{P}(H)$, откуда следует сходимость для $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}(H)$. С учетом этого факта, неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_n^{(H)}(z)x - \mathcal{R}^{(H)}(z)x\| &\leq \|\mathcal{R}_n^{(H)}(z)x - \mathcal{R}_n^{(H)}(z_0)x\| + \|\mathcal{R}_n^{(H)}(z_0)x - \mathcal{R}^{(H)}(z_0)x\| \\ &\quad + \|\mathcal{R}^{(H)}(z_0)x - \mathcal{R}^{(H)}(z)x\| \end{aligned}$$

и резольвентного уравнения (9) (для H и H_n) непосредственно получаем утверждение леммы.

Нам понадобится еще один технический результат: с целью установить сходимость “приближенных” обратных некоторых матриц докажем следующий вариант теоремы Канторовича (см., например, [7; гл. 14]).

ЛЕММА 5. Пусть A – ограниченный обратимый оператор на ℓ^2 ; рассмотрим последовательность обратимых операторов $A_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям

$$\tilde{E}_n A_n E_n \rightarrow A \quad (12)$$

и

$$\|A_n^{-1}\|_n \leq K \quad (13)$$

(константа K не зависит от n). Тогда

$$\tilde{E}_n A_n^{-1} E_n \rightarrow A^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последуем схеме, предложенной в работе [8; теорема 4.1]. Для любого $y \in \ell^2$ положим $x = A^{-1}y$. Так как $E_n \tilde{E}_n = I_n: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, то

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n A_n^{-1} E_n y - A^{-1}y &= \tilde{E}_n A_n^{-1} E_n (Ax - \tilde{E}_n A_n E_n x) + (\tilde{E}_n A_n^{-1} E_n \tilde{E}_n A_n E_n x - x) \\ &= \tilde{E}_n A_n^{-1} E_n (Ax - \tilde{E}_n A_n E_n x) + (\tilde{E}_n E_n x - x). \end{aligned}$$

Очевидно, $(\tilde{E}_n E_n - I)x \rightarrow 0$, а в силу (12) и (13) первое слагаемое также стремится к нулю.

Мы готовы теперь к доказательству основного результата этого параграфа.

Для z , удовлетворяющих условиям теоремы 1, в силу леммы 4

$$\mathcal{R}_n^{(H)}(z) \rightarrow \mathcal{R}^{(H)}(z),$$

откуда, используя лемму 1, получаем

$$\tilde{E}_n C_n E_n \mathcal{R}_n^{(H)}(z) \rightarrow C \mathcal{R}^{(H)}(z). \quad (14)$$

Таким образом, с учетом (7)

$$\|C_n (H_n - z I_n)^{-1}\|_n \leq \|C_n\|_n \|(H_n - z I_n)^{-1}\|_n \rightarrow \frac{\|C\|}{\text{dist}(z, \sigma(H))} < 1,$$

откуда

$$\|C_n (H_n - z I_n)^{-1}\|_n \leq M < 1, \quad n \geq n_0(z).$$

Следовательно, операторы $I_n + C_n (H_n - z I_n)^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ имеют ограниченные обратные и

$$\|[I_n + C_n (H_n - z I_n)^{-1}]^{-1}\|_n \leq \frac{1}{1 - M}.$$

Так как, с другой стороны, в силу (14)

$$\tilde{E}_n [I_n + C_n (H_n - z I_n)^{-1}] E_n = \tilde{E}_n E_n + (\tilde{E}_n C_n E_n) \mathcal{R}_n^{(H)}(z) \rightarrow I + C \mathcal{R}^{(H)}(z),$$

то можно применить лемму 5. Таким образом, получаем

$$\tilde{E}_n [I_n + C_n (H_n - zI_n)^{-1}]^{-1} E_n \rightarrow [I + C \mathcal{R}^{(H)}(z)]^{-1}.$$

Остается воспользоваться тождеством

$$\mathcal{R}_n^{(G)}(z) = \mathcal{R}_n^{(H)}(z) \tilde{E}_n [I_n + C_n (H_n - zI_n)^{-1}]^{-1} E_n. \quad (15)$$

Наконец, так как все резольвенты являются (операторнозначными) аналитическими функциями, равномерно ограниченными на компактных подмножествах в указанной области, получаем равномерную сходимость. Теорема 1 доказана.

В предыдущем параграфе мы сформулировали некоторые следствия из теоремы 1. Следствия 1, 2 и 4 тривиальны; для доказательства следствия 3 достаточно установить следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 6. *Если матрица H самосопряжена, то $H^{(k)}$ также самосопряжена для каждого $k \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать утверждение для $k = 1$. Проверим симметричность максимального оператора $H^{(1)}$, т.е. проверим равенство

$$\langle H^{(1)} u^{(1)}, v^{(1)} \rangle = \langle u^{(1)}, H^{(1)} v^{(1)} \rangle \quad \text{при } u^{(1)}, v^{(1)} \in D(H^{(1)}).$$

Для заданных $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots)$, $v^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots) \in D(H^{(1)})$ векторы $u = (0, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots)$ и $v = (0, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots)$ принадлежат $D(H)$ и имеет место равенство $\langle H^{(1)} u^{(1)}, v^{(1)} \rangle = \langle H u, v \rangle = \langle u, H v \rangle = \langle u^{(1)}, H^{(1)} v^{(1)} \rangle$, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из приведенного доказательства становится очевидным, что аналогичный результат имеет место и для “разреженных” матриц, т.е. имеющих конечное число ненулевых элементов в каждом столбце и каждой строке.

§3. Трехдиагональные матрицы и непрерывные дроби

В этом параграфе мы изучим подробнее трехдиагональные матрицы из-за их связи с непрерывными дробями. Точнее, рассмотрим бесконечную чебышевскую непрерывную дробь (J -дробь)

$$f(z) = \frac{1}{z - b_0 - \frac{a_1^2}{z - b_1 - \frac{a_2^2}{z - b_2 - \dots}}} \quad (16)$$

при естественном условии

$$a_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ через

$$f_n(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{z - b_0 - \frac{a_1^2}{z - b_1 - \dots - \frac{a_{n-1}^2}{z - b_{n-1}}}} \quad (18)$$

обозначим ее n -ю подходящую дробь. При условии (17) $\deg P_n = n$, и можно считать, что старший коэффициент $P_n(z)$ равен единице. Легко проверяется хорошо известный факт, что многочлены P_n и Q_n удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, а именно

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= (z - b_n)P_n(z) - a_n^2 P_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \\ P_0(z) &= 1, \quad P_1(z) = z - b_0, \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) &= (z - b_n)Q_n(z) - a_n^2 Q_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \\ Q_0(z) &= 0, \quad Q_1(z) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Это позволяет нам установить связь непрерывной дроби (16) с трехдиагональной матрицей

$$G = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Точнее, используя (19), легко установить, что $P_n(z) = (-1)^n \det(G_n - zI_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, множество нулей многочленов P_n , удовлетворяющих (19), совпадает со спектром $\sigma(G_n)$.

В дальнейшем мы будем использовать аналогичные многочлены, связанные со “сдвинутой” матрицей $G^{(k)}$. Пусть

$$P_n^{(k)}(z) = (-1)^n \det(G_n^{(k)} - zI_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

(в частности, $P_n^{(0)}(z) = P_n(z)$); тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(k)}(z) &= (z - b_{n+k})P_n^{(k)}(z) - a_{n+k}^2 P_{n-1}^{(k)}(z), \quad n \geq 1, \\ P_0^{(k)}(z) &= 1, \quad P_1^{(k)}(z) = z - b_k. \end{aligned} \quad (22)$$

Полезная формула, связывающая многочлены, соответствующие различным сдвигам, получается разложением $\det(G_n^{(k)} - zI_n)$ по первой строке:

$$P_n^{(k)}(z) = (z - b_k)P_{n-1}^{(k+1)}(z) - a_{k+1}^2 P_{n-2}^{(k+2)}(z), \quad k \geq 0, \quad n \geq 1. \quad (23)$$

Некоторые формулы, приводимые ниже, будут выглядеть проще при другой нормировке $P_n^{(k)}(z)$. Положим

$$p_n^{(k)}(z) = \frac{P_n^{(k)}(z)}{a_k a_{k+1} \cdots a_{k+n}} \quad \text{при } n \geq 0, \quad (24)$$

считая $a_0 = 1$. Тогда (22) можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned} a_{n+k+1} p_{n+1}^{(k)}(z) &= (z - b_{n+k}) p_n^{(k)}(z) - a_{n+k} p_{n-1}^{(k)}(z), \quad n \geq 1, \\ p_0^{(k)}(z) &= \frac{1}{a_k}, \quad p_1^{(k)}(z) = \frac{z - b_k}{a_k a_{k+1}}, \end{aligned} \quad (25)$$

а (23) принимает вид

$$a_k p_n^{(k)}(z) = (z - b_k) p_{n-1}^{(k+1)}(z) - a_{k+1} p_{n-2}^{(k+2)}(z). \quad (26)$$

(Другое доказательство этого тождества см., например, в [9].)

Из (22) и (20) очевидно следует, что $Q_n \equiv P_{n-1}^{(1)}$, поэтому (см. (18))

$$f_n(z) = \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \frac{p_{n-1}^{(1)}(z)}{p_n(z)}, \quad (27)$$

где $p_n(z) = p_n^{(0)}(z)$.

Ключевым моментом в исследовании сходимости непрерывной дроби (16) в терминах операторов является следующее хорошо известное представление для подходящих дробей (см., например, [10; теорема 3.7, с. 131]):

$$f_n(z) = -\langle \mathcal{R}_n^{(G)}(z) e_0, e_0 \rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(G_n). \quad (28)$$

Таким образом, даже слабой сходимости резольвент $\mathcal{R}_n^{(G)}(z)$ достаточно для сходимости $f_n(z)$, а значит, теорема 1, установленная в § 2, имеет следующее непосредственное следствие.

ТЕОРЕМА 2. а) Если матрица G , определенная в (21), допускает разложение (2), то последовательность $f_n(z)$ равномерно сходится на компактах из $\{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \text{conv } \sigma(H)) > \|G\|\}$ к аналитической функции

$$f(z) = -\langle \mathcal{R}^{(G)}(z) e_0, e_0 \rangle.$$

б) Для любой непрерывной дроби (16) с равномерно ограниченными коэффициентами

$$f_n(z) \Rightarrow f(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

по крайней мере на компактах из $\{|z| > \|G\|\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в разложении (2)

$$H = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_1 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

то (29) имеет место на компактах K , удовлетворяющих условию

$$\text{dist}(K, [\gamma_-, \gamma_+]) > M,$$

где $\gamma_- = \liminf (\beta_n - |\alpha_n| - |\alpha_{n+1}|)$, $\gamma_+ = \limsup (\beta_n + |\alpha_n| + |\alpha_{n+1}|)$ и $M = \sup(|b_n - \beta_n| + |a_n - \alpha_n| + |a_{n+1} - \alpha_{n+1}|)$. Эти границы непосредственно следуют из теоремы Гершгорина и из оценок операторной нормы матрицы (см., например, [11; с. 71, 72]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно получить некоторое простое обобщение формулы (28). Решая соответствующую линейную систему, получаем

$$p_{i-1}(z) \frac{p_{n-j}^{(j)}(z)}{p_n(z)} = -\langle \mathcal{R}_n^{(G)}(z) e_{j-1}, e_{i-1} \rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(G_n).$$

Таким образом, теорема 1 позволяет установить несколько более сильный вариант теоремы 2, который мы сформулируем в следующем виде:

СЛЕДСТВИЕ 5. В условиях а) теоремы 2

$$p_{i-1}(z) \frac{p_{n-j}^{(j)}(z)}{p_n(z)} \rightrightarrows -\langle \mathcal{R}^{(G)}(z) e_{j-1}, e_{i-1} \rangle, \quad n \rightarrow \infty,$$

на компактах, лежащих в $\{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, \text{conv } \sigma(H)) > \|C\|\}$.

§ 4. Компактные возмущения матриц Якоби

В этом параграфе мы уточним полученные выше результаты о сходимости непрерывных дробей для частного случая, когда матрица $C = (c_{ij})$ трехдиагональна и компактна, что эквивалентно

$$c_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+k, n} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Мы пользуемся введенными выше определениями и обозначениями.

Ключевой факт состоит в соотношении

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C^{(k)}\| = 0, \quad (31)$$

вытекающем из (30). С его помощью мы можем “приблизиться” к действительной оси и установить более точные результаты даже вблизи выпуклой оболочки

$\sigma(H)$. Связь между резольвентными операторами для G и $G^{(k)}$ доказывается с помощью следующей леммы, которую мы формулируем без доказательства в силу ее простоты.

ЛЕММА 7. Пусть матрица

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \quad (32)$$

является обратимой конечной матрицей, где A, C – обратимые матрицы, $A = A^T, C = C^T$. Тогда матрицы $A - BC^{-1}B^T$ и $C - B^TA^{-1}B$ обратимы и

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BC^{-1}B^T)^{-1} & -A^{-1}B(C - B^TA^{-1}B)^{-1} \\ -CB^T(A - BC^{-1}B^T)^{-1} & (C - B^TA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Дополнительно нам необходимо более точное описание множества $\mathcal{P}(G)$ для случая компактного возмущения, полученное в [12; теорема 2].

ЛЕММА 8. Имеем

$$\mathcal{P}(G) \subset \sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)}).$$

Теперь мы готовы к формулировке и доказательству основного результата настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 3. Если имеет место (2) и матрица C компактна и трешдиагональна, то $\mathcal{R}_n^{(G)}(z) \rightarrow \mathcal{R}^{(G)}(z)$ равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{C} \setminus [\sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим в первую очередь ограниченность последовательности $\{\|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)\|, n \geq n_0(z)\}$ для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus [\sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})]$. Для упрощения обозначений в дальнейшем будем отождествлять конечномерные операторы с их матричным представлением.

Для данного $z \notin \sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})$ можно найти $k_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{dist}(z, \mathcal{P}(H^{(k)}) \cup \sigma(H^{(k)})) \geq \operatorname{dist}(z, \operatorname{conv} \sigma(H^{(k_1)}))$$

для любого $k \geq k_1$ (заметим, что $\operatorname{conv} \sigma(H^{(k)}) \subset \operatorname{conv} \sigma(H^{(k_1)}), k \geq k_1$). Так как

$$\operatorname{dist}(z, \operatorname{conv} \sigma(H^{(k_1)})) > 0,$$

то таким же образом находим $\tilde{k}_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{dist}(z, \operatorname{conv} \sigma(H^{(k_1)})) > \|C^{(k)}\|$$

для любого $k \geq \tilde{k}_1$. Следовательно, существует $k_0 = \max\{k_1, \tilde{k}_1\}$ такое, что

$$\text{dist}(z, \mathcal{P}(H^{(k)}) \cup \text{conv } \sigma(H^{(k)})) > \|C^{(k)}\|$$

для любого $k \geq k_0$. Но тогда в силу следствия 3 существует такое $n_0 = n_0(z, k) \in \mathbb{N}$, что как $G^{(k)} - zI$, так и $G_n^{(k)} - zI_n$ являются обратимыми для каждого $n \geq n_0$. Кроме того, для таких k последовательность $\{(G_n^{(k)} - zI_n)^{-1}\}_{n \geq n_0}$ ограничена по норме.

С другой стороны, лемма 8 утверждает, что существует $n_1 = n_1(z)$ такое, что $G_n - zI_n$ обратим при $n \geq n_1$. Фиксируем $k \geq \max\{k_0, n_1\}$ и пусть $n \geq k + n_0$; тогда матрицы $G_k - zI_k$, $G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}$, $G_n - zI_n$ также обратимы. Применяя лемму 7 к матрице $M = G_n - zI_n$, получаем

$$(G_n - zI_n)^{-1} = \begin{pmatrix} D_{n,k}^{-1} & -(G_k - zI_k)^{-1} B_k F_{n,k}^{-1} \\ -(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} B_k^T D_{n,k}^{-1} & F_{n,k}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где $D_{n,k} = (G_k - zI_k) - B_k(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} B_k^T$ и $F_{n,k} = (G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}) - B_k^T(G_k - zI_k)^{-1} B_k$ — обратимые матрицы порядка $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно, а

$$B_k = a_k \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

является конечной матрицей порядка $k \times (n-k)$. Так как операторная норма $\|B_k\| = |a_k|$ для всех n , достаточно показать равномерную ограниченность норм блоков $D_{n,k}^{-1}$ и $F_{n,k}^{-1}$. Докажем это в два шага.

а) Для оценки $D_{n,k}^{-1}$ заметим, что для

$$(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-k,1} & \cdots & \alpha_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \quad (36)$$

непосредственно проверяется равенство

$$B_k(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} B_k^T = a_k^2 \alpha_{1,1} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $\alpha_{1,1} = \langle \mathcal{R}_{n-k}^{(k)}(z) e_0, e_0 \rangle = -f_{n-k}^{(k)}(z)$ (см. (36) и (28)). Следовательно, $D_{n,k}$ является трехдиагональной матрицей, все элементы которой совпадают с элементами $G_k - zI_k$, кроме последнего элемента на главной диагонали. Другими словами,

$$D_{n,k} = \begin{pmatrix} b_0 - z & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - z & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{k-2} - z & a_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & b_{k-1} - z + a_k^2 f_{n-k}^{(k)}(z) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Значит, операторы $D_{n,k}: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ сходятся к $D_k: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$, определяемому формулой

$$D_k = \begin{pmatrix} b_0 - z & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - z & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-2} - z & a_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1} & b_{k-1} - z + a_k^2 f^{(k)}(z) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Так как мы имеем дело с ограниченными операторами в $\mathbb{C}^k$ (k фиксировано), мы получим равномерную ограниченность, просто установив обратимость D_k , т.е. невырожденность его матрицы. Но, принимая во внимание (19), так же как в [12; теорема 3] приходим к соотношению

$$\det(D_k) = (-1)^k [P_k(z) - a_k^2 P_{k-1} f^{(k)}(z)] \neq 0. \quad (40)$$

б) Для оценки $F_{n,k}^{-1}$ запишем

$$(G_k - zI_k)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \dots & \gamma_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k,1} & \dots & \gamma_{k,k} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

тогда непосредственно проверяется, что

$$B_k^T (G_k - zI_k)^{-1} B_k = a_k^2 \gamma_{k,k} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

является диагональной матрицей порядка $n - k$.

Таким образом, как и раньше, $F_{n,k}$ является трехдиагональной матрицей, совпадающей с $G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}$ всюду, за исключением первого элемента, но теперь размер каждого блока меняется вместе с n . В этом случае необходимы более тонкие вычисления.

Так как $(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}) - F_{n,k} = B_k^T (G_k - zI_k)^{-1} B_k$, получаем

$$F_{n,k}^{-1} - (G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} = (G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} B_k^T (G_k - zI_k)^{-1} B_k F_{n,k}^{-1}. \quad (43)$$

Значит,

$$\|F_{n,k}^{-1}\| \leq \|(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1}\| [1 + \|B_k^T (G_k - zI_k)^{-1} B_k F_{n,k}^{-1}\|].$$

В силу того что $\{\|(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1}\|, n \geq k + n_0\}$ является ограниченной последовательностью, мы приходим к заключению, что достаточно установить ограниченность последовательности $\{\|B_k^T(G_k - zI_k)^{-1}B_k F_{n,k}^{-1}\|, n \geq k + n_0\}$.

С другой стороны, записывая

$$(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1} = \frac{1}{\det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})} \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n-k} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-k,1} & g_{n-k,2} & \cdots & g_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$$

$(g_{i,j} = \alpha_{i,j} \det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}), i, j = 1, \dots, n-k)$ и принимая во внимание структуру $F_{n,k}$, получаем

$$F_{n,k}^{-1} = \frac{1}{\det(F_{n,k})} \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n-k} \\ g_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n-k,1} & f_{n-k,2} & \cdots & f_{n-k,n-k} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$f_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 2, \dots, n-k.$$

Далее, из (42) следует, что

$$\begin{aligned} & B_k^T(G_k - zI_k)^{-1}B_k F_{n,k}^{-1} \\ &= \frac{a_k^2 \gamma_{k,k}}{\det(F_{n,k})} \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})}{\det(F_{n,k})} B_k^T(G_k - zI_k)^{-1}B_k (G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})^{-1}. \quad (45) \end{aligned}$$

Следовательно, для доказательства равномерной ограниченности блоков $F_{n,k}^{-1}$ достаточно установить это для последовательности

$$\left\{ \frac{\det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})}{\det(F_{n,k})} \right\}_{n \geq k+n_0}. \quad (46)$$

Разлагая $\det(F_{n,k})$ по первой строке и принимая во внимание трехдиагональную структуру матрицы, получим

$$\begin{aligned} \det(F_{n,k}) &= \det \begin{pmatrix} b_k - z - a_k^2 \gamma_{k,k} & a_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ a_{k+1} & b_{k+1} - z & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} - z & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} - z \end{pmatrix} \\ &= \det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k}) - a_k^2 \gamma_{k,k} \det(G_{n-k-1}^{(k+1)} - zI_{n-k-1}) \\ &= (-1)^{n-k} P_{n-k}^{(k)}(z) - a_k^2 \gamma_{k,k} (-1)^{n-k-1} P_{n-k-1}^{(k+1)}(z), \end{aligned}$$

где $\gamma_{k,k} = -P_{k-1}(z)/P_k(z)$. Значит, последовательность

$$\begin{aligned} \frac{\det(G_{n-k}^{(k)} - zI_{n-k})}{\det(F_{n,k})} &= \frac{P_{n-k}^{(k)}(z)}{P_{n-k}^{(k)}(z) - a_k^2 \frac{P_{k-1}(z)}{P_k(z)} P_{n-k-1}^{(k+1)}(z)} \\ &= \frac{P_k(z)}{P_k(z) - a_k^2 P_{k-1}(z) f_{n-k}^{(k)}(z)} \end{aligned}$$

стремится при $n \rightarrow \infty$ к

$$\frac{P_k(z)}{P_k(z) - a_k^2 P_{k-1}(z) f^{(k)}(z)} \neq \infty$$

(см. (40)).

Таким образом, мы установили ограниченность норм конечномерных резольвент для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C} \setminus [\sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \text{conp } \sigma(H^{(k)})]$. Для завершения доказательства остается установить сходимость на плотном подмножестве ℓ^2 . Мы следуем схеме, аналогичной уже использованной нами при доказательстве леммы 4.

Пусть $v_j = (G - zI)e_j$, $j = 0, 1, \dots$; необходимо установить плотность $\text{span}\{v_j, j = 0, 1, \dots\}$ в ℓ^2 . Несмотря на то что теперь, вообще говоря, G несамосопряжен, имеет место соотношение $g_{ij} = g_{ji}$ (см. (1)), откуда следует, что $x = 0$ — это единственный вектор из $D(G)$, ортогональный к $\text{span}\{v_j, j = 0, 1, \dots\}$.

Поточечная сходимость на векторах v_i проверяется непосредственно, а равномерная сходимость получается как в доказательстве леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предыдущий результат может иметь самостоятельный интерес, так как дает нам матричное представление для $\mathcal{R}^{(G)}(z)$. Достаточно лишь воспользоваться поблочной сходимостью матрицы в (34).

СЛЕДСТВИЕ 6. *Имеем*

$$f_n(z) \rightrightarrows f(z) = -\langle \mathcal{R}^{(G)}(z)e_0, e_0 \rangle \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (47)$$

на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C} \setminus [\sigma_p(G) \cup \bigcap_{k=0}^{\infty} \text{conp } \sigma(H^{(k)})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно учесть, что

$$|f_n(z) - f(z)| = |\langle \mathcal{R}_n^{(G)}(z)e_0 - \mathcal{R}^{(G)}(z)e_0, e_0 \rangle| \leq \|\mathcal{R}_n^{(G)}(z)e_0 - \mathcal{R}^{(G)}(z)e_0\|.$$

В заключение мы установим связь между полюсами $f(z)$, полюсами ее подходящих дробей и собственными значениями G . Воспользуемся следующим результатом (см. [12; лемма 4]):

ЛЕММА 9. *В условиях теоремы 3*

$$(\sigma_p(G^{(m)}) \cap \sigma_p(G^{(m+1)})) \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)}) = \emptyset$$

для любых $m \geq 0$.

Всюду в дальнейшем для произвольного множества $U \subset \mathbb{C}$ через $\varkappa(P_n, U)$ обозначим число нулей (с учетом кратностей) P_n в U .

ТЕОРЕМА 4. *Функция f мероморфна в $\mathbb{C} \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})$, при этом каждая точка $\sigma_p(G) \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})$ является полюсом f . Кроме того,*

$$\varkappa(\zeta) = m(\zeta, G) \quad (48)$$

для всех $\zeta \in \sigma_p(G)$, где $\varkappa(\zeta)$ обозначает порядок ζ как полюса f , а $m(\zeta, G)$ обозначает алгебраическую кратность ζ как собственного значения G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\zeta \in \sigma_p(G) \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)})$. Как известно, ζ должна быть изолированной точкой $\sigma_p(G)$, а следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$U(\zeta, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{z : 0 < |z - \zeta| \leq \delta\} \subset \rho(G) \setminus \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{conv} \sigma(H^{(k)}).$$

Кроме того, из леммы 9 известно, что $\zeta \notin \sigma_p(G^{(1)})$, поэтому можно считать, что δ достаточно мало и удовлетворяет условию $\overline{U(\zeta, \delta)} \cap \sigma(G^{(1)}) = \emptyset$. Таким образом, $P_{n-1}^{(1)}(z) \neq 0$ при $z \in U(\zeta, \delta)$ и $n \geq n_1(U(\zeta, \delta))$ (в противном случае должна существовать предельная точка нулей $\{P_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ в $\overline{U(\zeta, \delta)}$, что противоречит лемме 8).

Если положить $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{z : |z - \zeta| = \delta\}$, то из равномерной сходимости f_n на Γ (следствие 6) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Используя принцип аргумента и принимая во внимание, что интегралы в левой части целочисленны, приходим к заключению, что

$$\varkappa(P_n, U(\zeta, \delta)) = \varkappa(\zeta) \quad \text{при } n \geq n_2(U(\zeta, \delta)). \quad (49)$$

С другой стороны, с помощью леммы 8 находим такое $n_2 = n_2(\Gamma)$, что $\Gamma \subset \rho(G_n)$ при $n \geq n_2$. Таким образом, можно определить линейные операторы на ℓ^2

$$P(\zeta, \Gamma) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{R}^{(G)}(z) dz, \quad P_n(\zeta, \Gamma) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_n^{(G)}(z) dz, \quad n \geq n_2.$$

Предварительно была установлена равномерная сходимость $\mathcal{R}_n^{(G)}(z)$ к $\mathcal{R}^{(G)}(z)$ на компактах, откуда

$$P_n(\zeta, \Gamma) \rightarrow P(\zeta, \Gamma). \quad (50)$$

Известно (см. [6; теорема 6.17 и следствия]), что при наших условиях

$$\dim P(\zeta, \Gamma)(\ell^2) = m(\zeta, G) \quad \text{и} \quad \dim P_n(\zeta, \Gamma)(\ell^2) = \kappa(P_n, U(\zeta, \delta)) = \kappa(\zeta). \quad (51)$$

Более того, ζ является возможным полюсом $\mathcal{R}^{(G)}(z)$, порядок которого не превышает $m(\zeta, G)$. Следовательно,

$$\mathcal{R}^{(G)}(z) = \sum_{\nu=-m(\zeta, G)}^{\infty} (z - \zeta)^{\nu} B_{\nu},$$

B_{ν} — ограниченные операторы, причем некоторые B_{ν} могут быть равны нулю для $\nu \geq -m(\zeta, G)$ (см. также [13; теорема 1.3, с. 26, и теорема 2.2, с. 326]). Отсюда и из (47) в силу следствия 6 получаем

$$f(z) = - \sum_{\nu=-m(\zeta, G)}^{\infty} (z - \zeta)^{\nu} \langle B_{\nu} e_0, e_0 \rangle.$$

Но порядок ζ как полюса f равен $\kappa(\zeta)$, откуда $\kappa(\zeta) \leq m(\zeta, G)$. Осталось лишь воспользоваться следующей леммой, которую мы приводим для полноты изложения:

ЛЕММА 10 [6; с. 438]. Пусть $\{P_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, является последовательностью проекций в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, удовлетворяющей условию: $P_n \rightarrow P$, где P — линейный ограниченный оператор на $\mathbb{X}$. Тогда P также является проекцией. Допустим в дополнение, что $\dim P_n \leq \dim P < \infty$ для всех n . Тогда

$$\dim P_n = \dim P$$

для всех достаточно больших n .

Принимая во внимание (50) и (51), получаем теперь (48). Теорема доказана.

Список литературы

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
3. *Dombrowski J.* Orthogonal polynomials and functional analysis // Orthogonal polynomials: theory and practice. Proc. NATO ASI, Columbus/OH (USA) 1989, NATO ASI Ser., Ser. C. V. 294, 1990. P. 147-161.
4. *Аллахвердиев Б. П., Гусейнов Г. Ш.* К спектральной теории диссипативных разностных операторов второго порядка // Матем. сб. 1989. Т. 180. №1. С. 101-118.
5. *Chihara T. S.* An introduction to orthogonal polynomials. New York: Gordon and Breach, 1978.
6. *Kato T.* Perturbation theory of linear operators. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
7. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional analysis in normed spaces. Oxford: Pergamon Press, 1964.
8. *Magnus A. P.* Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants // J. Comput. Appl. Math. 1987. V. 19. P. 23-38.
9. *Van Assche W.* Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind // J. Comput. Appl. Math. 1991. V. 37. P. 237-249.
10. *Brezinski C.* Padé-type approximation and general orthogonal polynomials. Basel: Birkhäuser, 1980.
11. *Wilkinson J. H.* The algebraic eigenvalue problem. Oxford: Oxford University Press, 1965.
12. *Barrios D., López G., Martínez A., Torrano E.* On the domain of convergence and poles of J -fractions // J. Approx. Theory. 1998. V. 93. №2. P. 177-200.
13. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. V. 5. Basel: Birkhäuser, 1990.

Мадридский Политехнический Университет, Испания;
 Университет Carlos III, Мадрид, Испания;
 Университет Альмерии, Испания;
 Мадридский Политехнический Университет, Испания

Поступила в редакцию
 25.12.1995 и 15.06.1998