Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толченников, О ядре операторов Лапласа–Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированном графе, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 7, 123–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3892>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:42:22

УДК 517.984.68+515.168.5+517.956.227

А. А. Толченников

О ядре операторов Лапласа–Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированном графе

Для ядра оператора Δ^Λ Лапласа с потенциалом $\sum_{j=1}^k c_j \delta_{q_j}(x)$ на многообразии (оператор задается лагранжевой плоскостью $\Lambda \subset \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k$) описан изоморфизм $\Gamma: \ker \Delta^\Lambda \rightarrow \Lambda \cap L$, где L – лагранжева плоскость (вычислен ее явный вид). Аналогичный изоморфизм имеет место и для оператора Лапласа на декорированных графах. Для оператора Лапласа Δ^{Λ_0} на декорированном графе (полученном декорацией связного конечного графа из n ребер и v вершин) с условиями “непрерывности” получено неравенство $1 \leq \dim \ker \Delta^{\Lambda_0} \leq n - v + 2$. Также показано, что величина $n - v + 1 - \dim \ker \Delta^{\Lambda_0}$ не убывает при добавлении новых ребер и многообразий.

Библиография: 12 названий.

§ 1. История вопроса, цель и структура работы

Использование потенциалов нулевого радиуса в квантовой механике имеет более чем 70-летнюю историю. Изучая движение нерелятивистского электрона в жесткой кристаллической решетке, Р. де Л. Крониг и В. Г. Пенни в 1931 г. (см. [1]) одними из первых стали использовать точечные потенциалы. В 1961 г. Ф. А. Березин и Л. Д. Фаддеев (см. [2]), используя теорию самосопряженных расширений, дали строгое математическое обоснование этого метода и предложили использовать резольвентную формулу М. Г. Крейна для получения резольвент возмущений. Предельно подробно все аспекты точечных возмущений лапласиана в евклидовых пространствах (размерности не больше 3) изложены в монографии С. Альбеверии, Ф. Гестези, Р. Хэг-Крона и Х. Хольдена [3]. Там, в частности, был исследован вопрос об обстоятельствах, при которых точечно возмущенный лапласиан может быть получен как предел в равномерном резольвентном смысле лапласиана с зависящим от параметра потенциалом; например, для $\mathbb{R}^3$ изучался потенциал

$$V_{\varepsilon, y}(x) = \lambda(\varepsilon) \varepsilon^{-2} V\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right);$$

была найдена зависимость параметров, при помощи которых задается возмущение (параметров расширения), от λ и V .

Та же техника расширений операторов используется и еще в одном вопросе, касающемся операторов Шрёдингера на декорированных графах, т.е. на топологических пространствах, полученных отождествлением концов ребер графа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00648-а), Программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № РНП 2.1.1.7988) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4578.2006.1).

с точками на замкнутых ориентируемых римановых многообразиях размерности 1, 2 или 3. Актуальность этой темы заключается в том, что подобными операторами возможно моделировать гамильтониан заряженной частицы в массиве фуллеренов.

Среди работ на эту тему можно отметить диссертацию М. Лобанова [4], в которой изучались спектральные свойства операторов Шрёдингера на периодических декорированных графах, а также работу Й. Брюнинга и В. Гейлера [5], в которой изучались свойства операторов на замкнутых многообразиях с прикрепленными полупрямыми. В работе С. Рогановой [6] для специального вида расширений (с так называемыми граничными условиями “локальности”) было найдено выражение для следа квадрата резольвенты оператора Шрёдингера на декорированном двумерными поверхностями графе через классические коэффициенты теплопроводности поверхностей, длины ребер, количество ребер и вершин.

Отдельный интерес представляет частный случай – лапласиан на метрических графах. В работе П. Экснера, О. Поста [7] было показано, что спектр лапласиана на графоподобных поверхностях сходится к спектру оператора на метрическом графе с разными граничными условиями, зависящими от способа перехода к пределу.

Хорошо известно, что размерность ядра оператора Лапласа на замкнутом римановом многообразии равна числу компонент связности этого многообразия. Цель настоящей статьи – дать описание ядра оператора Лапласа–Бельтрами на декорированном графе. Ограничение на размерность многообразий (не больше чем 3), при помощи которых происходит декорация, связано с тем, что применяемая техника использует краевые условия в точках склейки; тем самым, область определения оператора Лапласа $D(\Delta) = H^2(M)$ должна вкладываться в $C(M)$. При работе с операторами на таких пространствах применяются методы теории самосопряженных расширений (см. [4], [5]). Далее, L^2 -пространство на декорированном графе – это прямая сумма L^2 -пространств на ребрах графа и на многообразиях. Оператор Лапласа–Бельтрами определяется из тех соображений, что на функциях, носитель которых лежит в $M \setminus \{q_1, \dots, q_s\}$ (где M – замкнутое многообразие либо отрезок, а $\{q_1, \dots, q_s\}$ – точки склейки), он должен совпадать с обыкновенным оператором Лапласа–Бельтрами. Также от этого оператора надо потребовать, чтобы он был самосопряжен. Таким образом, оператор Лапласа–Бельтрами есть самосопряженное расширение оператора H_0 – прямой суммы обычных операторов Лапласа–Бельтрами, ограниченных на функциях, которые зануляются в точках склейки. Далее, пользуясь тем, что имеется биекция $\Lambda \leftrightarrow H^\Lambda$ между лагранжевыми плоскостями в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ (где n – число ребер графа) и самосопряженными расширениями оператора H_0 , можно получить (теорема 4), что $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где L – фиксированная лагранжева плоскость. Таким образом, размерность ядра может меняться в пределах от 0 до $4n$, причем в случае плоскости общего положения ядро тривиально.

Более содержательный результат получается, если фиксировать расширение. Для этого в § 3 вводится специальная лагранжева плоскость Λ_0 , заданная условиями типа “непрерывности”. Центральный результат работы – доказательство неравенства (теорема 5), выполненного для оператора H^{Λ_0} на декорированном графе (полученном декорацией графа Γ):

$$\beta_0 \leq \dim \ker H^{\Lambda_0} \leq \beta_0 + \beta_1,$$

где $\beta_i = \dim H_i(\Gamma, \mathbb{C})$. Приведен пример, в котором указанная оценка достигается, и показано, что сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться равенства $\dim \ker H^{\Lambda_0} = \beta_0$. Также показано, что величина $\beta_1(\Gamma) - \dim \ker H^{\Lambda_0}$ не убывает при добавлении новых ребер и многообразий.

Техника, применяемая при описании операторов на декорированных графах, возникает и в более простой ситуации (представляющей самостоятельный интерес) операторов Лапласа–Бельтрами на многообразиях с потенциалом нулевого радиуса $\Delta + \sum_{j=1}^n c_j \delta_{q_j}(x)$. Это самосопряженное расширение оператора Лапласа–Бельтрами, ограниченного на функции, зануляющиеся в точках q_i . В определении таких операторов есть сходство с определением операторов Лапласа–Бельтрами на декорированных графах. Ядро этого оператора также описывается равенством $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где L – фиксированная лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, которая может быть явно задана.

Работа имеет следующую структуру. В пп. 1.1, 1.2 содержатся необходимые определения. В пп. 1.3, 1.4 описываются самосопряженные расширения оператора Лапласа на отрезке, ограниченного на функциях, зануляющихся в концах отрезка, и расширения оператора Лапласа–Бельтрами на многообразии, ограниченного на функциях, зануляющихся на наборе точек. В п. 2.1 описаны ядра оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса. Из предложений 1 и 2 следует теорема 4 (т.е. $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$), а предложение 3 в случае $\dim M = 2$ дает явный вид плоскости L . Пункт 2.2 позволяет написать параметризацию плоскости L для случая $M = S_a^2$ (это понадобится для построения примера, в котором оценка теоремы 5 достигается). В начале § 3 вводятся необходимые для описания операторов Лапласа–Бельтрами H^Λ на декорированных графах определения, в п. 3.1 имеется аналог теоремы 4. В п. 3.2 приводятся соображения непрерывности, которые позволяют фиксировать расширение (предложение 4). В п. 3.3 приводится доказательство теоремы 5 и дается пример, в котором оценка достигается.

1.1. Необходимые определения. Пусть H – гильбертово пространство, S – линейный оператор, область определения D_S которого всюду плотна в H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *График G_S линейного оператора S* – это множество пар $\{(f, Sf) \in H \oplus H \mid f \in D_S\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $G_{S_1} \subset G_{S_2}$, то оператор S_2 называется *расширением* оператора S_1 (обозначается $S_1 \subset S_2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор S_1 называется *замыканием* оператора S , если $G_{S_1} = \overline{G_S}$ (оператор S_1 обозначается $\bar{S}$). Оператор S называется *замкнутым*, если G_S – замкнутое подмножество в $H \oplus H$.

Пусть $g \in H$ таков, что ему можно поставить в соответствие элемент $g^* \in H$ таким образом, что для всех $f \in D_S$

$$(Sf, g) = (f, g^*).$$

В силу плотности D_S элемент g^* определен однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Соответствие $g^* = S^*g$, при котором равенство $(Sf, g) = (f, S^*g)$ справедливо для всех $f \in D_S$, задает некоторый оператор S^* , называемый *сопряженным к S оператором*.

Отметим очевидное свойство: если $S \subset T$, то $T^* \subset S^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор S называется *симметрическим*, если $(f, Sg) = (Sf, g)$ для всех $f, g \in D_S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор S называется *самосопряженным*, если $S = S^*$, т.е. $D_S = D_{S^*}$, и $Sf = S^*f$ для всех $f \in D_S$.

1.2. Как описывать самосопряженные расширения? Поскольку для любого самосопряженного расширения $S \subset S_1$ выполнено $S_1 \subset S^*$, то надо уметь описывать оператор S^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Дефектное подпространство* N_z оператора S – это ортогональное дополнение в H к образу оператора $S - \bar{z}I$, где $z \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [8; § 14, теоремы 5, 8]). 1) *Подпространства N_z являются собственными подпространствами оператора S^* , отвечающими собственным значениям z ;*

2) $n_+ = \dim N_z$ постоянно при изменении z в верхней полуплоскости и $n_- = \dim N_z$ постоянно при изменении z в нижней полуплоскости (числа n_+ и n_- называются *индексами дефекта*);

3) S обладает самосопряженными расширениями тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$.

ТЕОРЕМА 2 (см. [8; § 14, теорема 4]). *Если S – замкнутый симметрический оператор, то подпространства $D_S, N_z, N_{\bar{z}}$ линейно независимы и*

$$D_{S^*} = D_S \oplus N_z \oplus N_{\bar{z}}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Тройка $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$, где G – евклидово пространство, $\Gamma^{(j)}: D(S^*) \rightarrow G$ – линейные операторы, называется *пространством граничных значений*, если отображение $x \rightarrow (\Gamma^{(1)}x, \Gamma^{(2)}x) \in G \oplus G$ сюръективно и для любых $x, y \in D(S^*)$ выполнено условие

$$(x, S^*y) - (S^*x, y) = (\Gamma^{(1)}x, \Gamma^{(2)}y) - (\Gamma^{(2)}x, \Gamma^{(1)}y). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть G – евклидово пространство. Рассмотрим косоэрмитову форму на $G \oplus G$: $[x, y] = (x_1, y_2) - (x_2, y_1)$. Подпространство $\Lambda \subset G \oplus G$ называется *лагранжевым*, если оно совпадает со своим косоортогональным дополнением.

ТЕОРЕМА 3 (см. [5; § 1]). *Пусть S – симметрический оператор с совпадающими индексами дефекта ($n_- = n_+$), и пусть $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ – пространство граничных значений для S . Для любого лагранжева подпространства $\Lambda \subset G \oplus G$ множество $\{x \in D(S^*) \mid (\Gamma^{(1)}x, \Gamma^{(2)}x) \in \Lambda\}$ является областью определения самосопряженного расширения H^Λ оператора S . Более того, это соответствие $\Lambda \leftrightarrow H^\Lambda$ является биекцией.*

Далее следуют важные примеры нахождения самосопряженных расширений симметрических операторов.

1.3. Пример. Оператор Лапласа на отрезке. Определим оператор S как замыкание оператора $-d^2/dx^2$ с областью определения $C_0^\infty([0, 1])$ в пространстве $L^2([0, 1])$. Этот оператор симметрический, но не самосопряженный. Найдем оператор S^* , найдем индексы дефекта и построим пространство граничных значений для S .

По определению 4 $f \in D(S^*)$, если существует функция $h \in L^2([0, 1])$ такая, что $(f, Sg) = (h, g)$ для всех $g \in D(S)$. В нашем случае для всех $g \in C_0^\infty([0, 1])$

$$(f, Sg) = - \int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx = \int_0^1 \overline{h(x)} g(x) dx = (h, g).$$

Это означает, что f имеет вторую обобщенную производную из L^2 , т.е. $D(S^*) = H^2([0, 1])$ и $S^*f = -f''$. Теперь найдем $N_i = \ker(S^* - i)$:

$$-f'' - if = 0, \quad f \in H^2 \quad \implies \quad \ker(S^* - i) = \langle e^{\sqrt{-i}x}, e^{-\sqrt{-i}x} \rangle.$$

Таким образом, $n_- = n_+ = 2$. Теперь покажем, что пространство граничных значений имеет вид $(\mathbb{C}^2, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$, где $\Gamma^{(i)}: D(S^*) \rightarrow \mathbb{C}^2$ определены так:

$$\Gamma^{(1)}f = \begin{pmatrix} -f'(0) \\ f'(1) \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{(2)}f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Действительно, для любых $f, g \in D(S^*)$

$$\begin{aligned} (f, S^*g) - (S^*f, g) &= \overline{f'(x)}g(x) \Big|_0^1 - \overline{f(x)}g'(x) \Big|_0^1 \\ &= \overline{f'(1)}g(1) - \overline{f'(0)}g(0) + \overline{f(0)}g'(0) - \overline{f(1)}g'(1) \\ &= (\Gamma^{(1)}f, \Gamma^{(2)}g) - (\Gamma^{(2)}f, \Gamma^{(1)}g). \end{aligned}$$

Самосопряженные расширения оператора S задаются лагранжевыми плоскостями в $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. Например, плоскости

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

соответствует расширению Неймана, т.е. оператор второй производной с граничными условиями вида $f'(0) = f'(1) = 0$:

$$D(S_N) = \{f \in H^2([0, 1]) \mid f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

1.4. Пример оператора Лапласа–Бельтрами, ограниченного на функциях, которые зануляются на наборе точек. Везде далее считаем, что M – гладкое замкнутое связное риманово многообразие, $\dim M \leq 3$. Пусть Δ – оператор Лапласа–Бельтрами, т.е. замыкание оператора

$$-\sum_{i,j=1}^{\dim M} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \right),$$

определенного на $C^\infty(M)$. Оператор Δ самосопряжен, и его область определения $D(\Delta) = H^2(M)$. А при сделанном предположении на размерность $\dim M \leq 3$ будет выполнено $H^2(M) \subset C(M)$.

Зафиксируем теперь набор точек $\{q_i\}_{i=1}^n$ на M и рассмотрим следующий симметрический оператор:

$$\Delta_0 = \Delta|_{D_q}, \quad \text{где } D_q = \{\varphi \in D(\Delta) \mid \varphi(q_i) = 0, 1 \leq i \leq n\}.$$

Для описания дефектных подпространств оператора Δ_0 и для определения пространства граничных значений нам понадобятся некоторые свойства функции Грина оператора Δ , т.е. интегрального ядра оператора $(\Delta - z)^{-1}$ (z из резольвентного множества):

$$(\Delta - z)^{-1}f(x) = \int_M G(x, y; z)f(y) dw.$$

Имеет место следующая

ЛЕММА 1 (см. [5; § 2]). *Зафиксируем точку q . Тогда в окрестности этой точки функция $G(x, q; z)$ имеет разложение*

$$G(x, q; z) = F_0(x, q) + F_1(x, q; z) + R(x, q; z),$$

где F_0 не зависит от z и имеет следующий вид:

$$F_0(x, q) = \begin{cases} -\frac{1}{2} d(x, q), & \text{если } \dim M = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln d(x, q), & \text{если } \dim M = 2, \\ \frac{1}{4\pi} d(x, q)^{-1}, & \text{если } \dim M = 3. \end{cases}$$

Функция F_1 непрерывна, а функция R имеет следующий вид при $x \rightarrow q$:

$$R(x, q; z) = \begin{cases} o(d(x, q)), & \text{если } \dim M = 1, \\ o(1), & \text{если } \dim M = 2 \text{ или } \dim M = 3. \end{cases}$$

ЛЕММА 2 (см. [9; предложение 2]). Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда функции

$$\{G(\cdot, q_i; z)\}_{i=1}^n$$

образуют базис в дефектном подпространстве $N_z = \ker(\Delta_0^* - z)$. Оператор Δ_0 замкнут.

Из лемм 1, 2 и теоремы 2 следует, что любая функция $f \in D(\Delta_0^*)$ имеет следующее асимптотическое разложение в окрестности точки q_j :

$$f(x) = a_j(f)F_0(x, q_j) + b_j(f) + R(x),$$

где $a_j(f), b_j(f) \in \mathbb{C}$. Коэффициент $a_j(f)$ будем называть коэффициентом при особенности в точке q_j , а $b_j(f)$ – значением регулярной части в точке q_j .

Определим функцию, которая нам понадобится в следующем параграфе:

$$Q(x, y; z) = \begin{cases} G(x, y; z), & \text{если } x \neq y, \\ F_1(x, x; z), & \text{если } x = y. \end{cases}$$

ЛЕММА 3 (см. [5; лемма 5]). Положим $G = \mathbb{C}^n$ (со стандартным скалярным произведением) и определим операторы $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}: D(\Delta_0^*) \rightarrow G$:

$$\Gamma^{(1)} := (a_i(f))_{i=1}^n, \quad \Gamma^{(2)} := (b_i(f))_{i=1}^n.$$

Тогда тройка $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ – пространство граничных значений для оператора Δ_0 .

§ 2. Потенциалы нулевого радиуса

Пусть M – гладкое замкнутое связное многообразие, $\dim M \leq 3$. Как придать операторный смысл в $L^2(M)$ формальному выражению вида $H = \Delta + \sum_{j=1}^n c_j \delta_{q_j}(x)$, где $\delta_{q_j}(x)$ – дельта-функция, $q_j \in M$? Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим $D_q = \{\varphi \in D(\Delta) \mid \varphi(q_j) = 0 \ \forall j = 1, \dots, n\}$. По определению умножения обобщенной функции на непрерывную для функции $\varphi \in D_q$ имеем $\varphi \delta_{q_j}(x) = 0$. Таким образом, должно быть выполнено $H|_{D_q} = \Delta|_{D_q}$, откуда получаем, что H – самосопряженное расширение оператора $\Delta_0 = \Delta|_{D_q}$. Согласно теореме 3 и лемме 3 любое самосопряженное расширение оператора Δ_0 задается лагранжевой плоскостью $\Lambda \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Это расширение будем обозначать как Δ^Λ .

2.1. Ядро оператора Δ^Λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Функция $f \in \ker(\Delta_0^*)$ однозначно определяется всеми коэффициентами при особенностях и значением регулярной части в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют две таких функции: f и f' . Тогда $f - f' \in \ker(\Delta)$ и $f - f'$ обращается в нуль в одной точке, т.е. $f - f' = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\dim M = 2$. Для существования функции $f_0 \in D(\Delta_0)$ такой, что

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- G(x, q_j; -i) \in \ker(\Delta_0^*),$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_n^+)$, $\alpha^- = (\alpha_1^-, \dots, \alpha_n^-)$ удовлетворяли системе $A^+ \alpha^+ + A^- \alpha^- = 0$, где

$$A^\pm = \begin{pmatrix} (q_1 q_n, q_1)^\pm & (q_1 q_n, q_2)^\pm & \dots & (q_1 q_n, q_n)^\pm \\ (q_2 q_n, q_1)^\pm & (q_2 q_n, q_2)^\pm & \dots & (q_2 q_n, q_n)^\pm \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q_{n-1} q_n, q_1)^\pm & (q_{n-1} q_n, q_2)^\pm & \dots & (q_{n-1} q_n, q_n)^\pm \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$(ab, c)^\pm = \lim_{z \rightarrow 0} (Q(a, c; z) - Q(b, c; z)) - Q(a, c; \pm i) + Q(b, c; \pm i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \ker(\Delta_0^*)$. Тогда

$$\Delta f_0(x) = -i \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + i \sum_{j=1}^n \alpha_j^- G(x, q_j; -i).$$

Поскольку из замкнутости графика и компактности резольвенты оператора Δ (см. [10; § 11, п. 3]) следует, что $\text{Im}(\Delta)$ – замкнутое множество, то критерий существования такой функции $f_0 \in D(\Delta)$ – это ортогональность правой части константам, а именно

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j^+ + \alpha_j^-) = 0$$

(это дает последнюю строчку матриц $A^\pm$). Осталось найти условие на коэффициенты, при котором $f_0 \in D(\Delta_0)$, т.е. $f_0(q_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Достаточно найти условие, при котором $f_0(q_j) = f_0(q_n)$ при $j = 1, \dots, n-1$ (поскольку функция $f_0(x)$ определена с точностью до константы, то потом вычтем из полученной функции $f_0(q_n)$).

Разложим $f_0(x)$ и $G(x, y; z)$ по базису из собственных функций $\{f_s\}$ оператора Δ :

$$f_0(x) = \sum_s c_s f_s(x), \quad G(x, y; \pm i) = \sum_s \frac{f_s(x) \overline{f_s(y)}}{\lambda_s \mp i}.$$

Тогда получим

$$\sum_s \lambda_s c_s f_s(x) = \sum_s f_s(x) \left[-i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^+ \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s - i} + i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^- \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s + i} \right].$$

Приравнявая коэффициенты при базисных функциях, получим при $\lambda_s \neq 0$

$$c_s = -i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^+ \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} + i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^- \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)}.$$

Поскольку $\max_{x \in M} |f_s(x)| < C \lambda_s^{(d-1)/4}$ (см. [11]) и $\lambda_s \sim C(d)(s/\text{Vol}(M))^{2/d}$ (где $d = \dim M$), то при условии $d = 2$ ряд для $f_0(x)$ сходится равномерно, а поэтому

$$\begin{aligned} f_0(x) - f_0(y) &= 0 \iff \\ 0 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ \sum_{s: \lambda_s \neq 0} \frac{-i(f_s(x) - f_s(y)) \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- \sum_{s: \lambda_s \neq 0} \frac{i(f_s(x) - f_s(y)) \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)}. \end{aligned}$$

Найдем для коэффициентов при α_j^+ другое выражение через функцию $Q(x, y; z)$. Поскольку $Q(x, y; z)$ и

$$P(x, y; z) = \sum_s \frac{(z - i) f_s(x) \overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - i)(\lambda_s - z)}$$

суть мероморфные функции от z при каждом фиксированных x, y и поскольку

$$\frac{\partial P(x, y; z)}{\partial z} = \frac{\partial Q(x, y; z)}{\partial z} = \sum_s \frac{f_s(x) \overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - z)^2}$$

и $P(x, y; i) = 0$, то $P(z) = Q(z) - Q(i)$. Отсюда

$$Q(x, y; z) - \frac{z - i}{iz \text{Vol}(M)} - Q(x, y; i) = \sum_{s: \lambda_s \neq 0} \frac{(z - i) f_s(x) \overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - i)(\lambda_s - z)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{s: \lambda_s \neq 0} \frac{-i(f_s(x) - f_s(y)) \overline{f_s(q)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} = \lim_{z \rightarrow 0} (Q(x, q; z) - Q(y, q; z)) - Q(x, q; i) + Q(y, q; i).$$

Аналогично,

$$\sum_{s: \lambda_s \neq 0} \frac{i(f_s(x) - f_s(y))\overline{f_s(q)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)} = \lim_{z \rightarrow 0} (Q(x, q; z) - Q(y, q; z)) - Q(x, q; -i) + Q(y, q; -i).$$

Таким образом, условие $f_0(q_k) = f_0(q_n)$ для любого $k = 1, \dots, n-1$ переписывается в виде

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ (q_k q_n, q_j)^+ + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- (q_k q_n, q_j)^-.$$

ТЕОРЕМА 4. $\ker \Delta^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$ – лагранжева плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения отображения Γ следует, что $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$ – изотропная плоскость, т.е. $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in L$. Поскольку из предложения 2 следует, что $\dim \ker \Delta_0^* \geq n$ (это, очевидно, будет верно и для случая $\dim M = 3$), а из предложения 1 следует, что $\Gamma|_{\ker \Delta_0^*}$ – инъекция, то $\dim L \geq n$. Значит, L – лагранжева плоскость. Поскольку $\Delta^\Lambda \subset \Delta_0^*$, то

$$f \in \ker(\Delta^\Lambda) \iff \begin{cases} f \in \ker(\Delta_0^*), \\ (\Gamma^{(1)} f, \Gamma^{(2)} f) \in \Lambda. \end{cases}$$

Таким образом, ограничивая изоморфизм $\Gamma: \ker \Delta_0^* \rightarrow L$ на $\Gamma^{-1}(\Lambda)$, мы получаем изоморфизм $\Gamma: \ker \Delta^\Lambda \rightarrow L \cap \Lambda$.

Заметим, что поскольку множество лагранжевых подпространств, трансверсальных к некоторой фиксированной плоскости L , является открытым всюду плотным подмножеством в множестве всех лагранжевых плоскостей, то в случае общего положения ядро тривиально.

Следующее предложение позволяет по значению коэффициентов при особенностях во всех точках и по значению регулярной части в одной точке функции $f \in \ker(\Delta_0^*)$ определить значения регулярной части во всех остальных точках. При помощи этого предложения можно получить явную параметризацию для плоскости $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\dim M = 2$. Если $f \in \ker(\Delta_0^*)$, то

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \\ \Gamma_2^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \\ \dots \\ \Gamma_{n-1}^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_1 q_n \circ q_1) & (q_1 q_n \circ q_2) & \dots & (q_1 q_n \circ q_n) \\ (q_2 q_n \circ q_1) & (q_2 q_n \circ q_2) & \dots & (q_2 q_n \circ q_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q_{n-1} q_n \circ q_1) & (q_{n-1} q_n \circ q_2) & \dots & (q_{n-1} q_n \circ q_n) \end{pmatrix} \Gamma^{(1)} f,$$

где

$$(ab \circ c) = \lim_{z \rightarrow 0} (Q(a, c; z) - Q(b, c; z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- G(x, q_j; -i),$$

то

$$\Gamma^{(1)} f = \alpha^+ + \alpha^-, \quad \Gamma^{(2)} f = T^+ \alpha^+ + T^- \alpha^-,$$

где

$$T^{\pm} = \begin{pmatrix} Q(q_1, q_1; \pm i) & Q(q_1, q_2; \pm i) & \dots & Q(q_1, q_n; \pm i) \\ Q(q_2, q_1; \pm i) & Q(q_2, q_2; \pm i) & \dots & Q(q_2, q_n; \pm i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q(q_n, q_1; \pm i) & Q(q_n, q_2; \pm i) & \dots & Q(q_n, q_n; \pm i) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\alpha^- + \alpha^+ = \Gamma^{(1)}f$, то $(A^- - A^+)\alpha^+ = A^-\Gamma^{(1)}f$. Заметим, что $A_0^- - A_0^+ = S(T^+ - T^-)$, где $A_0^{\pm}$ есть $(n-1) \times n$ -матрица, полученная из матрицы $A^{\pm}$ отбрасыванием последней строки, а матрица S размера $(n-1) \times n$ имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Gamma^{(2)}f = (T^+ - T^-)\alpha^+ + T^-\Gamma^{(1)}f$, то $S\Gamma^{(2)}f = (A_0^- + ST^-)\Gamma^{(1)}f$. Это и доказывает требуемое равенство.

2.2. Вычисление $(xy \circ y)$ для стандартной сферы S_a^2 . Известно (см. [5; § 5]), что

$$Q(x, y; z) = \frac{1}{4 \cos(\pi t(z))} \mathcal{P}_{-1/2+t(z)}\left(-\cos \frac{r}{a}\right),$$

$$Q(x, x; z) = -\frac{1}{2\pi} \left[\Psi\left(\frac{1}{2} + t(z)\right) - \Psi(1) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}(\pi t(z)) - \ln(2a) \right],$$

где $t(z) = \sqrt{1 + 4a^2 z}/2$, $\Psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции, $\mathcal{P}_a(z)$ – функция Лежандра. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (Q(x, y; z) - Q(y, y; z)) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{-1/2+t(z)}(-\cos(r/a)) - \sin \pi t(z)}{4 \cos \pi t(z)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos \pi u - \mathcal{P}_u(-\cos(r/a))}{\sin \pi u}. \end{aligned}$$

Воспользуемся правилом Лопиталя, для этого найдем производную $\mathcal{P}'_u(z)|_{u=0}$. Зафиксируем $z \in (-1, 1)$ и воспользуемся представлением $\mathcal{P}_u(z)$ в виде следующего ряда (см. [12; § 15.22]):

$$\mathcal{P}_u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+1) \cdots (u+k)(-u) \cdots (k-1-u)}{(k!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k.$$

Поскольку для производной k -го члена $L_k(u)$ этого ряда выполняется неравенство (при $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $|\varepsilon| < 1$)

$$|L'_k(u)| \leq \frac{2k(k+1)!k!}{(k!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k,$$

то ряд из производных сходится равномерно на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Значит,

$$\mathcal{P}'_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} L'_k(0) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \ln\left(\frac{1+z}{2}\right).$$

Окончательно получаем

$$(xy \circ y) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(2a \sin \frac{r(x, y)}{a}\right).$$

3.1. Размерность ядра оператора H . Поскольку $H \subset H_0^*$, то найдем для начала ядро оператора H_0^* . Очевидно, что $H_0^* = \bigoplus_{i=1}^{m+n} \Delta_{0,i}^*$. Ядро $\Delta_{0,i}^*$, $i = 1, \dots, m$, уже описывалось в § 2.

Найдем ядро $\Delta_{0,i}^*$, $i = m+1, \dots, m+n$. Согласно п. 1.4 $D(\Delta_{0,i}^*) = H^2([0, 1])$. Поэтому линейные функции лежат в ядре $\Delta_{0,i}^*$. Но других функций там быть не может, поскольку (см. [8; § 14, теорема 10]) размерность ядра не превосходит индекса дефекта этого оператора (а он равен 2).

Таким образом, $\dim \ker H_0^* = 4n$ и имеет место утверждение, абсолютно аналогичное теореме 4:

$$\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda,$$

где L – лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$.

3.2. Выбор конкретного расширения.

3.2.1. Условия непрерывности. Вот два естественных соображения, которые позволяют фиксировать лагранжеву плоскость Λ , задающую оператор Лапласа–Бельтрами H^Λ на X .

1-е условие. Потребуем, чтобы все непрерывные функции на X из $D(H_0^*)$ (с условиями Неймана на отрезках) лежали в $D(H^\Lambda)$. Это приводит к условию на плоскость Λ : $K \subset \Lambda$, где K есть $2n$ -мерная плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ вида

$$K = \{(x_i^1, x_i^2) \mid x_i^1 = 0 \ \forall i = 1, \dots, 4n, \ x_j^2 = x_{j+2n}^2 \ \forall j = 1, \dots, 2n\}.$$

2-е условие. Потребуем, чтобы все функции из $D(H^\Lambda)$ имели совпадающие значения регулярных частей в точках склейки (но функциям разрешается иметь сингулярности в этих точках), т.е.

$$\begin{aligned} D(H^\Lambda) \subset \{f = (f_1, \dots, f_{m+n}) \in D(H_0^*) \mid f_{i+m}(0) = b_{q_i}(f_{m(i)}), \\ f_{i+m}(l_i) = b_{q'_i}(f_{m'(i)}) \ \forall i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Это условие означает, что $\Lambda \subset S$, где S есть $6n$ -мерная плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ вида

$$S = \{(x_i^1, x_i^2) \mid x_j^2 = x_{j+2n}^2 \ \forall j = 1, \dots, 2n\}.$$

3.2.2. Нахождение плоскости Λ такой, что $K \subset \Lambda \subset S$.

ЛЕММА 4 (см. [5; § 1]). *Всякая лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k$ трансверсальна некоторому координатному подпространству, т.е. линейной оболочке векторов $\{a_j \mid j \in \eta\} \cup \{b_j \mid j \in \{1, \dots, k\} \setminus \eta\}$, где $a_j = (e_j, 0)$, $b_j = (0, e_j)$, $\eta \subset \{1, \dots, k\}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует единственная лагранжева плоскость Λ_0 , удовлетворяющая условию $K \subset \Lambda_0 \subset S$, где K и S – введенные выше плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что существуют $\eta \subset \{1, \dots, 4n\}$ и $\{a_i^j\}_{i,j=1}^{4n}$ такие, что плоскость Λ_0 можно записать в координатах следующим образом (α_i – произвольные параметры):

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = \left\{ (x_i^1, x_i^2) \left| \begin{array}{l} \text{если } i \in \eta, \text{ то } x_i^1 = \alpha_i, \ x_i^2 = \sum_{j=1}^{4n} \alpha_j a_i^j; \\ \text{если } i \notin \eta, \text{ то } x_i^1 = \sum_{j=1}^{4n} \alpha_j a_i^j, \ x_i^2 = \alpha_i \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $|\eta| = 2n$. Допустим, что $|\eta| > 2n$. Это значит, что количество параметров α_i плоскости Λ_0 в левой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ больше чем $2n$. Для того чтобы найти пересечение Λ_0 с K , нужно все эти параметры положить равными нулю (поскольку для любого вектора, принадлежащего K , выполнено $x_i^1 = 0$ для любого $i = 1, \dots, 4n$), поэтому $\dim(\Lambda_0 \cap K) < 2n$. А так как $\dim K = 2n$, то K не может содержаться в Λ_0 . Теперь допустим, что $|\eta| < 2n$. Это значит, что количество параметров плоскости Λ_0 в правой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ больше чем $2n$. Но для векторов плоскости S (а значит, и для Λ_0) выполнено $x_j^2 = x_{j+2n}^2$ для всех $j = 1, \dots, 2n$, а значит, параметров плоскости Λ_0 в правой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ не может быть больше чем $2n$.

Далее, поскольку для координат векторов плоскости Λ_0 выполнено $x_j^2 = x_{j+2n}^2$ для всех $j = 1, \dots, 2n$, то набор $\{1, \dots, 4n\} \setminus \eta$ для любого $i \in \{1, \dots, 2n\}$ должен содержать только один из индексов: i или $i + 2n$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ в себя $\Sigma_\eta: (x_i^1, x_i^2) \rightarrow (x_{\sigma(i)}^1, x_{\sigma(i)}^2)$, где σ – перестановка, которая меняет местами i и $i + 2n$, если $i \in \eta \cap \{1, \dots, 2n\}$. При отображении Σ_η плоскости S и K не изменятся, и лагранжевы плоскости перейдут в лагранжевы. Плоскость $\Sigma_\eta \Lambda_0$ имеет вид

$$\Sigma_\eta \Lambda_0 = \left\{ \begin{pmatrix} TX + UY \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ QX + WY \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n} \mid X, Y \in \mathbb{C}^{2n} \right\},$$

где T, U, Q, W – некоторые матрицы $2n \times 2n$. Из условия $\Lambda_0 \subset S$ получаем, что $Q = I, W = 0$. А из условия $K \subset \Lambda_0$ получаем, что $T = 0$. При каком условии на U эта плоскость будет лагранжевой? Возьмем два вектора $V_1, V_2 \in \Lambda_0$, которые заданы параметрами X_1, Y_1 и X_2, Y_2 :

$$V_i = \begin{pmatrix} UY_i \\ Y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix}.$$

Если плоскость Λ_0 лагранжева, то для любых $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathbb{C}^{2n}$ должно быть выполнено

$$\begin{aligned} 0 &= [V_1, V_2] = (UY_1, X_2) + (Y_1, X_2) - (X_1, UY_2) - (X_1, Y_2) \\ &= ((U + I)Y_1, X_2) - (X_1, (U + I)Y_2). \end{aligned}$$

Отсюда $U = -I$. Полученная плоскость инвариантна относительно преобразования Σ_η^{-1} , т.е. лагранжева плоскость, удовлетворяющая условию $K \subset \Lambda_0 \subset S$, единственна:

$$\Lambda_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -Y \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \mid X, Y \in \mathbb{C}^{2n} \right\}.$$

3.3. Ядро оператора H^{Λ_0} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для $f \in \ker H^{\Lambda_0}$ и $i = 1, \dots, n$ выполнено:

- А) $a_{q_i}(f_{m(i)}) = -a_{q'_i}(f_{m'(i)});$
- В) $b_{q'_i}(f_{m'(i)}) = b_{q_i}(f_{m(i)}) + a_{q_i}(f_{m(i)}) \cdot l_i.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на i -м ребре $f_{i+m}(x) = Ax + B$ (см. п. 3.1). Поскольку $\Gamma(f) \in \Lambda_0$, то

$$\begin{aligned} a_{q_i}(f_{m(i)}) &= f'_{m+i}(0) = A, & a_{q'_i}(f_{m'(i)}) &= -f'_{m+i}(l_i) = -A, \\ b_{q_i}(f_{m(i)}) &= f_{m+i}(0) = B, & b_{q'_i}(f_{m'(i)}) &= f_{m+i}(l_i) = Al_i + B. \end{aligned}$$

Отсюда получаются требуемые равенства.

ТЕОРЕМА 5. 1) Для оператора H^{Λ_0} на декорированном графе (полученном декорацией конечного графа Γ) выполнено неравенство

$$\beta_0 \leq \dim \ker H^{\Lambda_0} \leq \beta_0 + \beta_1,$$

где $\beta_i = \dim H_i(\Gamma, \mathbb{C})$.

2) Сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться того, чтобы $\dim \ker H^{\Lambda_0} = \beta_0$.

3) Если связный декорированный граф $\tilde{X}$ получен приклеиванием к связному декорированному графу X новых ребер и многообразий, $\tilde{\Gamma}$ и Γ – их соответствующие графы, $\tilde{d}$ и d – размерности ядер операторов Лапласа с условиями “непрерывности” на $\tilde{X}$ и X , то выполнено следующее неравенство:

$$\beta_1(\Gamma) - d \leq \beta_1(\tilde{\Gamma}) - \tilde{d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) достаточно доказать для случая связного графа Γ . Нижняя оценка выполняется в силу того, что константы лежат в ядре оператора H^{Λ_0} . Докажем верхнюю оценку. Переобозначим точки: $p_1 = q_1$, $p_2 = q'_1, \dots, p_{2n-1} = q_n$, $p_{2n} = q'_n$. Рассмотрим отображение $\varphi: \ker H^{\Lambda_0} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ такое, что

$$\varphi(f) = (a_{p_1}(f_{m(1)}), a_{p_2}(f_{m'(1)}), \dots, a_{p_{2n-1}}(f_{m(n)}), a_{p_{2n}}(f_{m'(n)})).$$

Образ $\text{Im } \varphi$ лежит в P , где P – подпространство в $\mathbb{C}^{2n} = (x_1, \dots, x_{2n})$, удовлетворяющее следующим условиям: а) если точки p_i и p_j соединены ребром, то $x_i = -x_j$ (по предложению 5, А)); б) если точки $\{p_i\}_{i \in \eta}$ лежат на одном многообразии, то $\sum_{i \in \eta} x_i = 0$ (по предложению 2). Покажем, что $\dim P = \beta_1$. Действительно, рассмотрим отображение из пространства одномерных цепей (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) в $\mathbb{C}^{2n}$, сопоставляющее ребру с началом в точке p_i и с концом в p_j вектор с координатами $x_k = 0$ при k , не равном i или j , $x_i = 1$, $x_j = -1$. Поскольку образ пространства замкнутых цепей при этом отображении – это в точности пространство P , то $\dim P = \beta_1$.

Покажем, что функция $f \in \ker H^{\Lambda_0}$ однозначно определяется по вектору $\varphi(f)$ и по одному значению регулярной части $b_{p_1}(f_{m(1)})$. Выделим в графе Γ максимальное дерево Γ' . Рассмотрим многообразие M_1 , соответствующее корню этого дерева. Тогда в силу предложения 1 однозначно определяется f_1 . Далее, по предложению 5, В) определяются значения регулярных частей в точках многообразий, соединенных ребрами с M_1 , а значит, определены и функции f_i на этих многообразиях. Двигаясь дальше по ребрам Γ' , мы определим функцию f на всем декорированном графе. Таким образом, верхняя оценка установлена.

Однако вектор $\varphi(f)$ не может быть произвольным, для компонент этого вектора должна выполняться система уравнений, каждое из которых – это условие (из предложения 5, В)) согласования значений регулярных частей в точках, соединенных не входящими в Γ' ребрами. Уравнений будет $n - (v - 1) = \beta_1$, где v – количество вершин графа Γ . Таким образом, мы имеем $n - v + 1$ уравнений для $n - v + 2$ неизвестных. Рассмотрим не входящие в Γ' ребра (соответствующие им циклы обозначим $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-v+1}$) и зададим на них произвольным образом ориентацию. В качестве неизвестных выберем коэффициенты при особенностях в точках, соединенных этими ребрами; причем если началу ребра соответствует коэффициент a , то концу ребра будет соответствовать коэффициент $-a$.

Пользуясь описанным выше правилом составления уравнений и способом нахождения значений регулярных частей (предложение 3), несложно понять, что (i, j) -й элемент матрицы системы линейных уравнений для этих неизвестных находится следующим образом: это сумма длин ребер, по которым пересекаются циклы γ_i и γ_j , плюс сумма по всем вершинам P , по которым пересекаются эти циклы, выражений w^P , определенных ниже. Зададим ориентацию на Γ' таким образом, чтобы ребра были направлены “от корня”. Пусть степень вершины P равна k ; тогда концы всех ребер, сходящихся в P , мы занумеруем так, чтобы номер k получило входящее ребро максимального дерева, а в случае, если P – корень Γ' , занумеруем их так, чтобы номер k получило одно из исходящих ребер Γ' . Обозначим через $q_1^P, \dots, q_k^P$ соответствующие точки на многообразии. Пусть цикл γ_i имеет в вершине P ребра с номерами s и t , а цикл γ_j – ребра с номерами r и l . Тогда

$$w^P = \sum_{u=s,t; v=r,l} w_{u,v}^P \varepsilon_{u,v},$$

где $w_{u,v}^P = (q_u^P q_k^P \circ q_v^P) - (q_u^P q_k^P \circ q_k^P)$, и $\varepsilon_{u,v} = 0$, если один из индексов равен k ; если же $u \neq k, v \neq k$, то $\varepsilon_{u,v} = 1$ в случае, если оба ребра с индексами u и v являются либо входящими, либо выходящими, и $\varepsilon_{u,v} = -1$ в противном случае. Заметим, что мы получили самосопряженную матрицу, поскольку $\overline{Q(y, x; \bar{z})} = Q(x, y; z)$, а значит, $w_{u,v}^P = \overline{w_{v,u}^P}$.

Понятно, что длины не входящих в Γ' ребер будут присутствовать только в диагональных элементах получившейся матрицы системы. А это означает, что сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться невырожденности этой системы, т.е. пункт 2) доказан.

Чтобы доказать пункт 3), выберем максимальное дерево в Γ и дополним его до максимального дерева в $\tilde{\Gamma}$. Тогда матрица пересечений для декорированного графа X будет выделяться блоком в матрице пересечений для декорированного графа $\tilde{X}$. Оценка пункта 3) следует из того, что ранг блока не превосходит ранга всей матрицы.

Рассмотрим пример, в котором оценка достигается. Пусть декорированный граф получен декорацией цикла Γ (с длинами ребер $l_1, \dots, l_n$) многообразиями $\{M_i\}_{i=1}^n$. Тогда, пользуясь предложением 3, легко показать, что критерий двумерности ядра оператора H^{Λ_0} – это выполнение следующего равенства:

$$\sum_{j=1}^n ((y_j x_j \circ x_j) - (y_j x_j \circ y_j)) = \sum_{j=1}^n l_j,$$

где $x_i, y_i \in M_i$. Например, если $M_i = S_{a_i}^2$, то получается равенство

$$\sum_{j=1}^n -\frac{1}{\pi} \ln \left(2a_j \sin \frac{r_j}{a_j} \right) = \sum_{j=1}^n l_j,$$

где $r_j = r(x_j, y_j)$. Таким образом, подобрав соответствующие длины ребер, можно построить декорированный цикл, для которого $\dim \ker H^{\Lambda_0} = 2$.

Еще один пример, в котором приведенная выше оценка будет достигаться, можно построить следующим образом: возьмем дерево и к некоторым вершинам степени 1 прикрепим только что построенные циклы (для которых $\dim \ker H^{\Lambda_0} = 2$), получим граф Γ . Продолжая заданную на цикле функцию из

$\ker H^{\Lambda_0}$ на весь декорированный граф константой, равной значению этой функции в точке прикрепления цикла, мы получим функцию из ядра оператора Лапласа на всем декорированном графе. Такие функции будут образовывать пространство размерности $\beta_0(\Gamma) + \beta_1(\Gamma)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Шафаревичу за постановку задачи, внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

- [1] R. de L. Kronig, W. G. Penney, “Quantum mechanics of electrons in crystal lattices”, *Proc. Roy. Soc. A*, **130**:814 (1931), 499–513.
- [2] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **137** (1961), 1011–1014; англ. пер.: F. A. Berezin, L. D. Faddeev, “A remark on Schrödinger’s equation with a singular potential”, *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 372–375.
- [3] С. Альбеверию, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991; пер. с англ.: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] И. С. Лобанов, *Спектральные свойства гамильтонианов явнорешаемых моделей мезоскопических структур: декорированные квантовые графы и квантовые точки*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Мордовский гос. ун-т, Саранск, 2005.
- [5] J. Brüning, V. A. Geyler, “Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns”, *J. Math. Phys.*, **44**:2 (2003), 371–405.
- [6] S. Roganova, *Direct and inverse spectral problems for hybrid manifolds*, Dissertation, Humboldt Universität zu Berlin, 2007.
- [7] P. Exner, O. Post, “Convergence of spectra of graph-like thin manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **54**:1 (2005), 77–115.
- [8] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, 2-е изд., Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
- [9] В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, И. И. Чучаев, “Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:4 (1995), 828–841; англ. пер.: V. A. Geiler, V. A. Margulis, I. I. Chuchaev, “Potentials of zero radius and Carleman operators”, *Siberian Math. J.*, **36**:4 (1995), 714–726.
- [10] Х. Цикон, Р. Фрёзе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [11] H. Donnelly, “Eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds”, *Asian J. Math.*, **10**:1 (2006), 115–125.
- [12] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, ч. 2, Физматлит, М., 1963; пер. с англ. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

А. А. Толченников (A. A. Tolchennikov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: tox2tox@mail.ru

Поступила в редакцию
 31.05.2007 и 01.04.2008