Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, О корректности линейных дифференциальных операторов, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 3, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:13:31

УДК 517.9

А. Г. Баскаков

О корректности линейных дифференциальных операторов

По семейству эволюционных операторов строится линейный дифференциальный оператор, определенный в банаховом пространстве векторных функций на полуоси. Получены теоремы о его корректности (равномерной инъективности) и левой обратимости.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X , и $\mathcal{I}$ – один из промежутков: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Через $L_p = L_p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) и суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на $\mathcal{I}$ со значениями в X $\left(\|x\|_p = \left(\int_{\mathcal{I}} \|x(t)\|^p dt \right)^{1/p}, x \in L_p, p \in [1, \infty); \|x\|_{\infty} = \text{vrai sup}_{t \in \mathcal{I}} \|x(t)\|, x \in L_{\infty} \right)$.

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{I}, X)$ обозначим одно из следующих банаховых пространств:

$$L_p(\mathcal{I}, X), \quad p \in [1, \infty], \quad C(\mathcal{I}, X), \quad C_0(\mathcal{I}, X),$$

где $C(\mathcal{I}, X)$ – подпространство непрерывных функций из $L_{\infty}(\mathcal{I}, X)$ и $C_0(\mathcal{I}, X)$ – подпространство функций из $C(\mathcal{I}, X)$, убывающих на бесконечности.

Рассматривается сильно непрерывное семейство эволюционных операторов на промежутке $\mathcal{I}$

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s), \quad s \leq t, \quad s, t \in \mathcal{I}\}$$

из алгебры $\text{End } X$, которые удовлетворяют следующим трем условиям:

- 1) $\mathcal{U}(s, s) = I$ – тождественный оператор при всех $s \in \mathcal{I}$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $s \leq \tau \leq t$, $s, t, \tau \in \mathcal{I}$;
- 3) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| = M < \infty$.

Семейству $\mathcal{U}$ сопоставим линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{I}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{I}, X) = \mathcal{F}$, который определяется следующим образом. Функцию $x \in \mathcal{F}$ отнесем к области определения $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если существует такая функция $f \in \mathcal{F}$, что для всех $s \leq t$ из $\mathcal{I}$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-01035).

При этом полагается $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} x = f$. Единственность такой функции f (и, следовательно, корректность определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$) обеспечивается свойствами семейства $\mathcal{U}$.

Если $\mathcal{F} = \mathbb{R}_+$, то символом $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим линейный оператор с областью определения

$$D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = \left\{ x \in \mathcal{F} : \text{существует } f \in \mathcal{F} \text{ такая, что} \right. \\ \left. x(t) = - \int_0^t \mathcal{U}(t, \tau) f(\tau) d\tau \text{ для всех } t \geq 0 \text{ из } \mathbb{R}_+ \right\}$$

и положим $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x = f$. Следует отметить, что для указанных x и f имеют место равенства (1), и поэтому $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = \{x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) : x(0) = 0\}$.

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ = -\frac{d}{dt} + A(t) : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ – абстрактный параболический оператор (см. [1]), если $\mathcal{U}$ – семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X, t \geq 0$, – семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши [2].

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ следует, что он является инъективным, т.е. его ядро $\text{Ker } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ = \{x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) : \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x = 0\}$ содержит только нулевую функцию.

В данной статье получены условия корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. Следуя В. В. Жикову [3], оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ назовем *корректным* (или *равномерно инъективным*), если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$ имеет место оценка $\|x\| \leq c \|\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x\|$. Таким образом, выполнено условие

$$k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = \inf_{\|x\|=1, x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)} \|\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x\| > 0. \quad (*)$$

Отметим, что свойства абстрактных корректных операторов изучались в статье [4]. Выяснение условий корректности дифференциальных операторов становится важным в связи с работами Э. Мухамадиева [5], В. В. Жикова [3], В. Е. Слюсарчука [6], М. А. Шубина [7], в которых установлена обратимость корректных почти периодических операторов.

Исследования проводятся с существенным использованием полугруппы $\{T_{\mathcal{U}}^+(t), t \geq 0\}$ разностных операторов из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, имеющих вид

$$(T_{\mathcal{U}}^+(t)x)(s) = \begin{cases} \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), & s \geq t, \\ 0, & 0 \leq s < t, \end{cases} \quad (3)$$

и особенно разностного оператора

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ = I - \mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}_+, X), \quad (4)$$

где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел и оператор $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$ определяется соотношениями

$$(\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+ y)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, n-1)y(n-1), & n \geq 1, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Символом $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначается банахово пространство последовательностей векторов из X , суммируемых со степенью p (ограниченных, если $p = \infty$) с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 0} \|x(n)\|^p\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$ ($\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} \|x(n)\|$). Далее символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств (если не делается соответствующая оговорка).

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 6 и 7, в которых установлено, что условия корректности операторов $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ в совокупности с дополняемостью подпространства $X^*(0)$ (введенного после замечания 1) эквивалентны свойствам экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ (см. определение 1). Любое из приведенных в теоремах 6 и 7 условий влечет существование левого обратного к операторам $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ соответственно. Многие из полученных результатов, возможно, представляют интерес даже для дифференциального оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ = -\frac{d}{dt} + A(t)$, $A \in C(\mathbb{R}_+, \text{End } X)$ с ограниченными коэффициентами [8].

В теореме 2 устанавливается эквивалентность условий корректности операторов $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$. Изучение разностного оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ проще благодаря ряду обстоятельств: 1) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ – ограниченный оператор из алгебры $\text{End } l_p$; 2) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ = I - \mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$, где $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$ – оператор взвешенного сдвига, а теория операторов взвешенного сдвига является достаточно продвинутой; 3) оператор действует в пространствах $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, для которых известны сопряженные пространства, что позволяет с большим успехом, чем для $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$, использовать технику сопряженных операторов. Все эти обстоятельства существенно используются в настоящей статье.

§ 2. Об общих спектральных свойствах операторов $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$

В статье [9] был установлен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset L_p \rightarrow L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T_{\mathcal{U}}(t), t \geq 0\}$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если $p \in [1, \infty)$, то $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) = L_p(\mathbb{R}_+, X)$.*

Отметим, что из доказательства теоремы 1, проведенного в [9], следует, что она верна и для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$, действующего в $C_0 = C_0(\mathbb{R}_+, X)$.

Далее используется пара банаховых пространств $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X), \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$, совпадающая с одной из следующих пар

$$(L_p, l_p), \quad p \in [1, \infty], \quad (C, l_\infty), \quad (C_0, c_0),$$

где $c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, X)$ – подпространство убывающих на бесконечности последовательностей из $l_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обладает одним из следующих свойств:

1) корректен; 2) сюръективен; 3) обратим
тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает разностный оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий обратимости рассматриваемых операторов была установлена в статье [9; теоремы 2 и 3]. Поскольку оба оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ инъективны, то сюръективность каждого из них эквивалентна их обратимости.

Таким образом, осталось доказать, что операторы $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ корректны одновременно.

Пусть оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ корректен, т.е. выполнено условие (*). Рассмотрим произвольную последовательность f из образа $\text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$, $\|f\| = 1$, и пусть $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – такая последовательность, что $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ x_0 = f$.

Для оценки нормы последовательности x_0 используем оператор $\mathcal{B} : \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, определенный равенствами

$$(\mathcal{B}y)(s) = -\varphi(s)\mathcal{U}(s, n)y(n), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad s \in [n, n+1], \quad n \geq 0,$$

где $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция периода 1, причем $\varphi(s) = 6s(1-s)$ на отрезке $[0, 1]$. Имеет место оценка $\|\mathcal{B}\| \leq (\max_{s \in [0, 1]} \varphi(s))M = \frac{3}{2}M$, где $M = \sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\|$.

Рассмотрим последовательность x из $l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ вида $x(n) = x_0(n) - f(n)$, $n \geq 0$. Функция $\tilde{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, определяемая равенствами

$$\tilde{x}(t) = -\int_0^t \mathcal{U}(t, s)(\mathcal{B}f)(s) ds, \quad t \geq 0,$$

принадлежит банахову пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и удовлетворяет соотношениям (см. равенства (1))

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \mathcal{U}(t, s)\tilde{x}(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)(\mathcal{B}f)(\tau) d\tau, \\ 0 \leq s \leq t < \infty, \quad \tilde{x}(n) &= x(n), \quad n \geq 1, \quad \tilde{x}(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Итак, $\tilde{x} \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ \tilde{x} = \mathcal{B}f$. Отсюда и из условия (*) корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ получаем оценки

$$\|\tilde{x}\| \leq k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} \|\mathcal{B}f\| \leq \frac{3}{2}M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} \|f\|. \tag{7}$$

Пусть вначале $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ является одним из банаховых пространств $L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$, $C(\mathbb{R}_+, X)$, $C_0(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда из (6) и (7) получаем оценку

$$\|x(n)\| \leq \frac{3}{2}M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} \|f\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теперь непосредственно из определения последовательности x получаем, что

$$\|x_0\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2}M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} + 1 \right) \|f\|_\infty = \left(\frac{3}{2}M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} + 1 \right) \|\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ x_0\|_\infty.$$

Таким образом, $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор в $l_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ (в c_0 , если $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_0(\mathbb{R}_+, X)$) и

$$k(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+) \geq \left(\frac{3}{2} M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} + 1 \right)^{-1}.$$

Пусть теперь $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \neq \infty$. Из соотношений (6) получаем

$$\|x(n+1)\| = \|\tilde{x}(n+1)\| \leq M \left(\int_n^{n+1} \|\tilde{x}(s)\| ds + \int_n^{n+1} \|(\mathcal{B}f)(s)\| ds \right), \quad n \geq 0.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера и выпуклость функции $\tau \mapsto \tau^p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, приходим к оценке

$$\|x\|_p^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|x(n+1)\|^p \leq 2^{p-1} M^p (\|\tilde{x}\|_p^p + \|\mathcal{B}f\|_p^p).$$

Учитывая (7), неравенство $\|\mathcal{B}\| \leq 3/2M$ и вид последовательности x , получаем оценку

$$\|x_0\|_p \leq \|f\|_p + \|x\|_p \leq (3M k(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)^{-p} + 1)^{1/p} \|f\|_p.$$

Итак, $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор.

Предположим теперь, что корректным является оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Установим корректность оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$.

Пусть g – произвольная функция из множества значений $\text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$, и пусть функция u из $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$ такова, что $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ u = g$. Тогда из соотношений (1) при $t = n$, $s = n-1$, $n \geq 1$, учитывая, что $u(0) = 0$, получаем равенство

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ u_d = g_d,$$

где $u_d: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, $u_d(n) = u(n)$, $n \geq 1$, $u_d(0) = u(0) = 0$, $g_d(n) = \int_{n-1}^n \mathcal{U}(n, s) g(s) ds$, $n \geq 1$, $g_d(0) = 0$. Из определения следует, что $u_d, g_d \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, а из корректности оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ и вида функции g_d получаем оценки

$$\|u_d\|_p \leq k(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} \|g_d\|_p \leq M k(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^{-1} \|g\|_p, \quad (8)$$

если $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$. При $s = n \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in [n, n+1]$ из равенств (1) следует, что

$$\|u(t)\| \leq M \left(\|u(n)\| + \int_n^{n+1} \|g(s)\| ds \right)$$

и, следовательно,

$$\|u(t)\|^p \leq \frac{1}{2} (2M)^p \left(\|u(n)\|^p + \int_n^{n+1} \|g(s)\|^p ds \right), \quad t \in [n, n+1], \quad n \geq 0.$$

После интегрирования этих неравенств по промежутку $[n, n+1]$ и последующего суммирования получаем, что

$$\|u\|_p^p \leq 2^{p-1} M^p (\|u_d\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Учитывая оценку (8) и оценку $\|g_d\|_p \leq M\|g\|_p$, вытекающую из равенств (1), получаем

$$\|u\|_p \leq 2M(1 + M^{p+1}k(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^{-p})^{1/p}\|g\|_p.$$

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 2 о корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, и разностного оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ : l_p \rightarrow l_p = l_p(\mathbb{Z}, X)$, определенного формулой

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}} x)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in l_p, \quad n \in \mathbb{Z},$$

было доказано в статье [10], а утверждение об обратимости – в статье [11].

Из [9; теоремы 2 и 6] (см. также следствие 3 теоремы 7) следует

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число m , что*

$$\sup_{n \geq m} \|\mathcal{U}(n, n-m)\| < 1.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}^+ = -\frac{d}{dt} + A : D(\mathcal{L}^+) \subset L_p \rightarrow L_p, \quad p \in [1, \infty],$$

где $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T_A(t); t \geq 0\}$ из алгебры $\text{End } X$. Оператор $\mathcal{L}^+$ определяется как оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset L_p \rightarrow L_p$, где $\mathcal{U}(t, s) = T_A(t-s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$. Поэтому из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Оператор $\mathcal{L}^+$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$r(T_A(1)) < 1, \tag{9}$$

где $r(T_A(1))$ – спектральный радиус оператора $T_A(1)$.

В то же время имеет место следующий, вытекающий из теоремы 8 (см. §6) результат.

ТЕОРЕМА 4. *Оператор $\mathcal{L}^+$ корректен, если выполнено условие*

$$\sigma(T_A(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \tag{10}$$

где $\sigma(T_A(1))$ – спектр оператора $T_A(1)$ и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Из (9) и (10) получаем, что условия обратимости и условия корректности значительно разнятся для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

§3. Об операторе $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ и его сопряженном $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$

В силу теоремы 2 корректность оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ сводится к корректности оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ в подходящем пространстве последовательностей. Для изучения корректности оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ используем его сопряженный оператор

$$\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*: l_q \rightarrow l_q = l_q(\mathbb{Z}_+, X^*), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

который имеет вид

$$(\mathcal{A}\xi)(n) = \xi(n) - \mathcal{U}(n+1, n)^* \xi(n+1), \quad \xi \in l_q, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (11)$$

При этом учитывается канонический изоморфизм пространств l_p^* и $l_q = l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$, $1/p + 1/q = 1$.

Отметим, что если $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = l_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = c_0(\mathbb{Z}_+, X)$, то оператор $\mathcal{A}$ рассматривается в качестве элемента пространства операторов $\text{End } l_1(\mathbb{Z}_+, X^*)$, т.е. далее рассматривается сужение оператора $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$ на подпространство $l_1(\mathbb{Z}_+, X^*)$ пространства l_∞^* , сопряженного к l_∞ ($\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$, если $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = c_0$).

Сформулируем используемое далее утверждение, которое является следствием более общего результата, относящегося к произвольным линейным ограниченными операторам (см. [12; гл. VI, §6, теорема 2]).

ЛЕММА 1. Если $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+: l_p \rightarrow l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$ — равномерно инъективный оператор, то его сопряженный оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*: l_q \rightarrow l_q = l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, является сюръективным и

$$\text{Ker } \mathcal{A} = (\text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^{\perp} = \{\xi \in l_q : \xi(y) = 0 \quad \forall y \in \text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+\}. \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $p = \infty$ в условиях леммы 1 в качестве оператора $\mathcal{A}$ рассматривается сужение оператора $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$ на $l_1(\mathbb{Z}_+, X^*) \subset l_\infty^*$, которое является сопряженным к сужению $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ на c_0 ($\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+|_{c_0}$ — корректный оператор).

Введем линейное подпространство из сопряженного к X банахова пространства X^* вида

$$X^*(0) = \{\xi(0) \in X^* : \xi \in \text{Ker } \mathcal{A}\},$$

где $\mathcal{A}$ — оператор из леммы 1 (см. замечание 1). Оно будет использоваться для формулировки многих утверждений.

В условиях следующей леммы (и тесно связанных с ней последующих утверждений) считается выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Для всех $n \geq 0$

$$\overline{\text{Im } \mathcal{U}(n+1, n)} = X. \quad (13)$$

Эти условия, в свою очередь, эквивалентны условиям

$$\text{Ker } \mathcal{U}(n+1, n)^* = \{0\}, \quad n \geq 0. \quad (14)$$

ЛЕММА 2. Пусть $X^*(0)$ – дополняемое замкнутое подпространство из X^* и $\mathcal{Y}$ – какое-нибудь дополнение (т.е. $X^* = X^*(0) \oplus \mathcal{Y}$). Тогда для любой последовательности $f \in l_q = l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$ существует единственная последовательность $\xi \in l_q$ такая, что $\mathcal{A}\xi = f$ и $\xi(0) \in \mathcal{Y}$ (т.е. $\mathcal{A}$ осуществляет изоморфизм замкнутого подпространства $l_q^1 = \{\xi \in l_q : \xi(0) \in \mathcal{Y}\}$ и l_q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует сюръективность оператора $\mathcal{A}$; поэтому для любой последовательности $f \in l_q$ существует последовательность $\xi \in l_q$ такая, что $\mathcal{A}\xi = f$. Из условия леммы и определения подпространства $X^*(0)$ следует, что $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in \text{Ker } \mathcal{A}$, причем $\xi(0) = \xi_1(0) + \xi_2(0)$, $\xi_1(0) \in X^*(0)$ и $\xi_2(0) \in \mathcal{Y}$. Тогда $\mathcal{A}\xi_2 = f$ и $\xi_2 \in l_q^1$. Если $\eta \in l_q^1$ – еще один функционал со свойством $\mathcal{A}\eta = f$, то $\xi_2 - \eta \in \text{Ker } \mathcal{A}$, и поэтому $\xi_2(0) - \eta(0) \in X^*(0) \cap \mathcal{Y} = \{0\}$. Из условий (14) следует, что $\xi_2 = \eta$. Лемма доказана.

Следующее понятие систематически используется при формулировке основных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s), s \leq t, s, t \in \mathcal{J}\}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве Ω из промежутка $\mathcal{J}$ с показателем $\gamma > 0$ и постоянной $M > 0$, если существует сильно непрерывная проекторнозначная функция $P: \Omega \rightarrow \text{End } X$ такая, что имеют место следующие свойства:

- 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$ при $s \leq t$ из Ω ;
- 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M \exp(-\gamma(t-s))$, $s \leq t, s, t \in \Omega$;
- 3) при $s \leq t$ из Ω сужение $\mathcal{U}_{t,s}: X_+(s) \rightarrow X_+(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на образ $X_+(s) = \text{Im } Q(s)$ дополнительного проектора $Q(s) = I - P(s)$ является изоморфизмом подпространств $X_+(s)$ и $X_+(t)$ (определим оператор $\mathcal{U}(s, t) \in \text{End } X$ как оператор, совпадающий с $\mathcal{U}_{s,t}^{-1}$ на $X_+(t)$ и равный нулю на подпространстве $X_-(t) = \text{Im } P(t)$);
- 4) $\|\mathcal{U}(s, t)\| \leq M \exp(\gamma(s-t))$ при всех $t \geq s$ из Ω .

В дальнейшем в качестве Ω берется одно из множеств: $\mathbb{Z} \cap \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичное определение экспоненциальной дихотомии дается для сильно непрерывного семейства эволюционных операторов “назад” $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(t, s), s \geq t, s, t \in \mathcal{J}\}$, т.е. семейства операторов из алгебры $\text{End } X$, для которого вместо условия 2) в определении семейства эволюционных операторов выполнено условие

$$2^*) \mathcal{V}(s, t)\mathcal{V}(t, \tau) = \mathcal{V}(s, \tau) \text{ при всех } s \leq t \leq \tau.$$

По семейству $\mathcal{V}$ с помощью равенств (1) определяется оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

§ 4. Некоторые вспомогательные результаты

Символом $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, обозначим изометрический оператор из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ вида

$$(V(\gamma)x)(n) = \gamma^n x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

где $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – одно из банаховых пространств последовательностей $l_p = l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, $c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, X)$.

Для любой операторнозначной последовательности $f \in l_\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } X)$ через $\overline{V}(f)$ обозначим оператор из алгебры $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ умножения на f , т.е. оператор вида

$$(\overline{V}(f)x)(n) = f(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

Таким образом, $\overline{V}(f) = V(\gamma)$, если $f(n) = \gamma^n I$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{T}$.

Последовательность (f_n) из $l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$ назовем *ограниченной аппроксимативной единицей* (короче – о.а.е.), если выполнены следующие условия:

- 1) множество $\text{supp } f_n = \{k \in \mathbb{Z}_+ : f_n(k) \neq 0\}$ конечно при любом $n \in \mathbb{Z}_+$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = 1$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 0} |f_n(k+1) - f_n(k)| = 0$.

Примером о.а.е. может служить последовательность (f_n) вида

$$f_n(k) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{n}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k \geq n+1. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. Пусть оператор $A \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ – одно из пространств l_p , $p \in [1, \infty)$, c_0 ;
- 2) $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) = l_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\overline{V}(f_n) - \overline{V}(f_n)A\| = 0$ для некоторой о.а.е. (f_n) .

Тогда существует ограниченная операторнозначная функция $F: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ такая, что оператор A представим в виде

$$(Ay)(n) = F(n)y(n), \quad n \geq 0, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Определим оператор $F(n) \in \text{End } X$, положив $F(n)x = (Ay)(n)$, $x \in X$, где $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ определяется равенствами: $y(n) = x$, $y(k) = 0$ при $k \neq n$. Ясно, что $\|F(n)\| \leq \|A\|$, и поэтому $F \in l_\infty(\mathbb{Z}_+, \text{End } X)$. Рассмотрим линейный оператор $A_0 \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ вида $A_0 = \overline{V}(F)$, т.е.

$$(A_0y)(n) = F(n)y(n), \quad n \geq 0, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X).$$

Докажем, что $A = A_0$. Из перестановочности A с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, следует, что A коммутирует со всеми операторами $\overline{V}(f)$, где f – любая почти периодическая последовательность. При выполнении условия 1) множество последовательностей из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, имеющих конечный носитель, плотно в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, и поэтому достаточно проверить, что $Ax = A_0x$ для любой последовательности x , имеющей конечный носитель.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in X$, $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет вид $y(n) = x$, $y(k) = 0$ при $k \neq n$. Непосредственно из определения последовательности F следует, что

$$(Ay)(n) = F(n)y(n) = (A_0y)(n).$$

Чтобы доказать равенство $Ay = A_0y$, достаточно установить, что $(Ay)(k) = 0$ при $k \neq n$. Для этого достаточно заметить, что для любой периодической последовательности $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ со свойствами $\varphi(n) = 1$ и $\varphi(k) = 0$ имеют место равенства

$$(\overline{V}(\varphi)Ay)(k) = (A\overline{V}(\varphi)y)(k) = (Ay)(k).$$

Из доказанного следует, что $(Ay)(n) = F(n)y(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для любой последовательности y , имеющей конечный носитель.

Пусть теперь $p = \infty$. Рассмотрим такую о.а.е. (f_k) , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\overline{V}(f_k)A - A\overline{V}(f_k)\| = 0.$$

Операторы $A\overline{V}(f_k)$, $k \geq 1$, перестановочны с операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и к каждому из них применимы проведенные выше рассуждения (учитывается, что f_k имеет конечный носитель). Поэтому имеют место равенства

$$(A\overline{V}(f_k)y)(n) = f_k(n)F(n)y(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in l_\infty, \quad k \geq 1.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\overline{V}(f_k)A - A\overline{V}(f_k)\| = 0$, то $A = \overline{V}(F) = A_0$. Лемма доказана.

Отметим, что утверждение леммы 3 при $p = \infty$ неверно, если не выполнено условие 2). Соответствующий пример приведен В. Г. Курбатовым [13; замечание 2.1.9].

ЛЕММА 4. *Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s); 0 \leq s \leq t < \infty\} \subset \text{End } X$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, то оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ обратим слева в алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и один из левых обратных $\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет вид*

$$(\mathcal{B}x)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m)x(m), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X),$$

где функция $G: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ определена формулой

$$G(m, n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m)P(m), & 0 \leq m \leq n, \\ -\mathcal{U}(n, m)Q(m), & 0 \leq n < m. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $P, Q: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ — проекторнозначные функции из определения 1. Оператор $\mathcal{P} = \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \mathcal{B}$ является оператором проектирования на множество значений $\text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ разностного оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ и допускает представление вида

$$(\mathcal{P}x)(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1, \\ x(0) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)x(m), & n = 0. \end{cases} \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения и ограниченность оператора $\mathcal{B}$ следуют из приводимых в определении 1 оценок.

Для любой последовательности $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ x)(n) &= \mathcal{U}(n, 0)P(0)x(0) \\
&\quad + \sum_{m=1}^n \mathcal{U}(n, m)P(m)(x(m) - \mathcal{U}(m, m-1)x(m-1)) \\
&\quad - \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(n, m)Q(m)(x(m) - \mathcal{U}(m, m-1)x(m-1)) \\
&= \mathcal{U}(n, 0)P(0)x(0) + \sum_{m=1}^n \mathcal{U}(n, m)P(m)x(m) \\
&\quad - \sum_{m=1}^n \mathcal{U}(n, m-1)P(m-1)x(m-1) \\
&\quad - \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(n, m)Q(m)x(m) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(n, m-1)Q(m-1)x(m-1) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{B}$ — левый обратный для $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$. Тогда $\text{Im } \mathcal{B} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ и оператор $\mathcal{P} = \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \mathcal{B}$ является проектором с $\text{Im } \mathcal{P} = \text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$.

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{B}$ при $n \geq 1$ получаем равенства

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}x)(n) &= (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \mathcal{B}x)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m)x(m) - \mathcal{U}(n, n-1) \sum_{m=0}^{\infty} G(n-1, m)x(m) \\
&= \sum_{m=0}^n \mathcal{U}(n, m)P(m)x(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(n, m)Q(m)x(m) \\
&\quad - \mathcal{U}(n, n-1) \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{U}(n-1, m)P(m)x(m) \\
&\quad + \mathcal{U}(n, n-1) \sum_{m=n}^{\infty} \mathcal{U}(n-1, m)Q(m)x(m) \\
&= P(n)x(n) + Q(n)x(n) = x(n), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

При $n = 0$ вектор $(\mathcal{P}x)(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}x)(0) &= \sum_{m=0}^{\infty} G(0, m)x(m) = P(0)x(0) - \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)x(m) \\
&= x(0) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q(m)x(m).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество значений $\text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ состоит из последовательностей вида

$$\left\{ \left(x(0) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m) Q(m) x(m), x(1), x(2), \dots \right); x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливо равенство $\text{Im } \mathcal{P} = \text{Ker } \mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, то оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^* \in \text{End } l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$, $q \in [1, \infty]$ (сопряженный к оператору $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$; см. замечание 1), сюръективен, обратим справа и одним из правых обратных к нему является оператор $\mathcal{B}^* \in \text{End } l_q$, имеющий вид

$$(\mathcal{B}^* \xi)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(m, n)^* \xi(m), \quad \xi \in l_q, \quad n \geq 0.$$

Оператор $\mathcal{P}_* = I - \mathcal{B}^* \mathcal{A} \in \text{End } l_q$ является оператором проектирования на ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ и определяется формулой

$$(\mathcal{P}_* \xi)(n) = \mathcal{U}(0, n)^* Q(0)^* \xi(0), \quad n \geq 0, \quad \xi \in l_q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка показывает, что $I - \mathcal{B}^* \mathcal{A} = \mathcal{P}_*$ и оператор $\mathcal{P}_*$ имеет указанное представление. Равенство $\mathcal{A} \mathcal{B}^* = I$ следует из равенства $\mathcal{B} \mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ = I$, если применить операцию сопряжения к обеим его частям (при этом используется замечание 1). Следствие доказано.

ЛЕММА 5. Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$, то оператор $I - T_{\mathcal{U}}^+(1) \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ обратим слева в алгебре $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и один из левых обратных $\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}x)(t) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{U}(t, t+k-n) P(t+k-n) x(t+k-n) \\ &\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{U}(t, t+k-n) Q(t+k-n) x(t+k-n) \end{aligned} \quad (17)$$

для $t \in [n, n+1)$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$. Оператор $\mathcal{P} = (I - T_{\mathcal{U}}^+(1)) \mathcal{B}$ является проектором на $\text{Im}(I - T_{\mathcal{U}}^+(1))$, и он представим в виде

$$(\mathcal{P}x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 1, \\ x(t) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(t, t+m) Q(t+m) x(t+m), & 0 \leq t < 1, \end{cases} \quad (18)$$

где $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы практически дублирует доказательство леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используемое в леммах 4 и 5 определение левого обратного к элементу алгебры является общепринятым. Однако определение левого обратного к линейному неограниченному оператору можно давать различными способами. Если воспользоваться определением из [14], то условие корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ влечет существование левого обратного $\mathcal{B}_l : \text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ \rightarrow D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$, определенного на области значений оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. В данной статье под левым обратным для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ понимается такой оператор $\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{F}$, что $\mathcal{B}\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x = x$ при всех $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$. При таком подходе к определению левого обратного условие корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$, вообще говоря, не влечет существование левого обратного для $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$.

ТЕОРЕМА 5. Если семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$, то оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обратим слева и левым обратным является оператор $\mathcal{B}_0 \in \text{End } \mathcal{F}$ вида

$$(\mathcal{B}_0 x)(t) = \int_0^\infty G(t, s)x(s) ds, \quad (19)$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t, s)P(s), & 0 \leq s \leq t < \infty, \\ \mathcal{U}(t, s)Q(s), & 0 \leq t < s < \infty. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\mathcal{F}$ совпадает с одним из пространств $L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_0(\mathbb{R}_+, X)$, на каждом из которых полугруппа $\{T_{\mathcal{U}}^+(t), t \geq 0\}$ сильно непрерывна. Имеют место равенства (см. [15])

$$(I - T_{\mathcal{U}}^+(1))x = -\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ \int_0^1 T_{\mathcal{U}}^+(s)x ds, \quad x \in \mathcal{F}, \quad (20)$$

$$(I - T_{\mathcal{U}}^+(1))x = -\int_0^1 T_{\mathcal{U}}^+(s)\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x ds, \quad x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+). \quad (21)$$

Из условий теоремы и леммы 5 следует, что оператор $I - T_{\mathcal{U}}(1)$ обратим слева и один из левых обратных $\mathcal{B}$ имеет вид (17). Тогда из равенства (20) следует обратимость слева оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$, причем один из левых обратных имеет вид

$$\mathcal{B}_0 x = -\mathcal{B} \int_0^1 T_{\mathcal{U}}^+(s)x ds.$$

Отсюда и из формулы

$$\left(\int_0^1 T_{\mathcal{U}}^+(s)x ds \right)(t) = \begin{cases} \int_0^t \mathcal{U}(t, s)x(s) ds, & 0 \leq t \leq 1, \\ \int_{t-1}^t \mathcal{U}(t, s)x(s) ds, & t \geq 1, \end{cases}$$

следует формула (19). Итак, теорема доказана для пространств L_p , $p \in [1, \infty)$, и C_0 .

Пусть теперь $\mathcal{F} = L_\infty$ или $\mathcal{F} = C$ и $f = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x$, $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей компактный носитель, функция φx принадлежит $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+)$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+(\varphi x) = \varphi f - \dot{\varphi} x$. По доказанному

$\varphi x = \mathcal{B}_0 \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+(\varphi x) = \mathcal{B}_0(\varphi f - \dot{\varphi} x)$. Непосредственно из вида интегрального оператора $\mathcal{B}_0$ и ввиду произвольности функции φ с указанными свойствами получаем, что $\mathcal{B}_0 \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x = x$. Теорема доказана.

Из теоремы 5 вытекают следующие утверждения, описывающие область значений оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если выполнены условия теоремы 5, то для любой функции f из $\text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ функция*

$$y(t) = \int_0^\infty \mathcal{U}(t, s) Q(s) f(s) ds$$

нулевая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x$, где $x \in \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. Тогда

$$(\mathcal{B}_0 \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ x)(t) = x(t) + \int_0^\infty \mathcal{U}(t, s) Q(s) f(s) ds = x(t), \quad t \geq 0,$$

т.е. $y = 0$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функции из $\mathcal{F}$ вида*

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \geq 1, \\ y(t) - \sum_{k \geq 0} \mathcal{U}(t, t+k) Q(t+k) y(t+k), & 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где y – любая функция из $\mathcal{F}$, принадлежат множеству $\text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в равенстве (20) положить $x = (I - T_{\mathcal{U}}^+(1))y$, где $y \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ – одно из пространств L_p , $p \in [1, \infty)$, C_0 , то утверждение получается из леммы 5 (см. формулу (18)). Если $\mathcal{F}$ – другое рассматриваемое здесь пространство, то следует использовать локальную замкнутость области значений оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ (см. [1]). Следствие доказано.

§ 5. Свойства корректных операторов

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, – корректный оператор и $X^*(0)$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* . Тогда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ и оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ имеет левый обратный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из корректности оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ следует (см. лемму 1), что сопряженный оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^* \in \text{End } l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$, $1/p + 1/q = 1$, сюръективен. Напомним (см. замечание 1), что если $p = \infty$, то полагается $q = 1$, т.е. рассматриваются сужение оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ на подпространство c_0 из l_∞ и оператор, сопряженный к этому сужению.

Оператор $\mathcal{A}$ представим (см. формулу (11)) в виде

$$\mathcal{A} = I - \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K} \in \text{End } l_q$ является сопряженным к оператору $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$ (см. формулу (5)) и имеет вид

$$(\mathcal{K}\xi)(n) = \mathcal{U}(n+1, n)^* \xi(n+1), \quad n \geq 0. \quad (22)$$

Далее рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ в качестве замкнутого линейного оператора (и сохраним обозначения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$)

$$\mathcal{A} = I - \mathcal{K} : l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$$

с областью определения $l_q^1 = \{\xi \in l_q : \xi(0) \in \mathcal{Y}\}$, где $\mathcal{Y}$ – замкнутое подпространство из X^* такое, что $X^* = X^*(0) \oplus \mathcal{Y}$ (см. лемму 2). Поскольку оператор $\mathcal{A}$ ограничен на l_q^1 , то он замкнут. Поэтому могут быть использованы элементы спектральной теории замкнутых линейных операторов (см. [12; гл. VII, §9]). При этом важно отметить, что при рассмотрении общих вопросов спектральной теории линейных операторов не требуется плотность области определения изучаемых операторов (в нашем случае $l_q^1 \neq l_q$, если $X^*(0) \neq \{0\}$). Таким образом, можно рассмотреть спектр $\sigma(\mathcal{A})$ и резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A} : l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$. Под *резольвентным множеством* оператора $\mathcal{A}$ понимается множество $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda I : D(\mathcal{A}) = l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$ непрерывно обратим, т.е. инъективен и сюръективен. Тогда определен ограниченный обратный оператор $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} : l_q \rightarrow l_q^1 \subset l_q$, который рассматривается как элемент пространства $\text{End } l_q$.

Из леммы 2 следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$, т.е. оператор $\mathcal{A}$ обратим, причем обратный $\mathcal{A}^{-1}$ рассматривается в качестве элемента алгебры $\text{End } l_q$. Рассмотрим группу изометрических операторов

$$\{V(\gamma), \gamma \in \mathbb{T}\} \subset \text{End } l_q,$$

имеющих вид

$$(V(\gamma)\xi)(n) = \gamma^n \xi(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in l_q.$$

Ясно, что $V(\gamma)l_q^1 \subset l_q^1$ для всех $\gamma \in \mathbb{T}$ и имеют место равенства (см. формулу (22))

$$V(\gamma^{-1})\mathcal{K}V(\gamma) = \gamma\mathcal{K}, \quad \gamma \in \mathbb{T}. \quad (23)$$

Следовательно, оператор $\mathcal{K} : l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$ подобен операторам $\gamma\mathcal{K}$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и поэтому из обратимости оператора $\mathcal{A} : l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$ получаем обратимость всех операторов вида $\lambda I - \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{T}$. Это означает, что выполнено условие

$$\sigma(\mathcal{K}) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (24)$$

из которого вытекает следующее представление спектра оператора $\mathcal{K}$

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma_- \cup \sigma_+,$$

где $\sigma_- = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}) : |\lambda| > 1\}$.

Пусть $P_- = P(\sigma_-, \mathcal{K})$, $P_+ = P(\sigma_+, \mathcal{K})$ – проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам σ_- и σ_+ соответственно (см. [12; гл. VII]). Тогда $P_- + P_+ = I$ и $l_q = l_q^- \oplus l_q^+$, где $l_q^\pm = \text{Im } P_\pm$, причем имеет место включение

$$l_q^- \subset l_q^1, \quad (25)$$

т.е. подпространство l_q^- (образ проектора P_-) лежит в области определения l_q^1 операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$. Оператор $\mathcal{K}$ является прямой суммой

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^- \oplus \mathcal{K}^+$$

своих частей (сужений на l_q^- и l_q^+), $\mathcal{K}^\pm = \mathcal{K}|_{l_q^\pm}$. При этом $\mathcal{K}^- \in \text{End } l_q^-$ (т.е. $\mathcal{K}^-$ определен и ограничен на всем замкнутом подпространстве l_q^-), $\sigma(\mathcal{K}^\pm) = \sigma_\pm$ и обратный оператор $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } l_q$ допускает разложение

$$\mathcal{A}^{-1} = (I_- - \mathcal{K}^-)^{-1} \oplus (I_+ - \mathcal{K}^+)^{-1}, \quad (26)$$

где $I^\pm$ – тождественный оператор в $l_q^\pm$. Из вида спектра операторов $\mathcal{K}^-$ и $\mathcal{K}^+$ следует, что $r(\mathcal{K}^-) < 1$, $r((\mathcal{K}^+)^{-1}) < 1$ для спектральных радиусов операторов $\mathcal{K}^- \in \text{End } l_q^-$ и $(\mathcal{K}^+)^{-1} \in \text{End } l_q^+$. Поэтому из формулы (26) следует, что

$$\mathcal{A}^{-1} = \sum_{j \geq 0} (\mathcal{K}^-)^j \oplus \left(- \sum_{j \leq -1} (\mathcal{K}^+)^j \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_j, \quad (27)$$

где операторы $\mathcal{K}_j \in \text{End } L_q$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j &= (\mathcal{K}^-)^j \oplus 0 = \mathcal{K}^j P_-, \quad j \geq 0, \\ \mathcal{K}_j &= 0 \oplus -(\mathcal{K}^+)^j, \quad j \leq -1. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда получаем следующие соотношения

$$\mathcal{K}_0 = P_-, \quad \mathcal{K}_j = \mathcal{K}^j P_- = P_- \mathcal{K}^j = (\mathcal{K} P_-)^j, \quad j \geq 1, \quad (29)$$

$$\mathcal{K}_j \mathcal{K}^{-j} = \mathcal{K}^{-j} \mathcal{K}_j = -P_+, \quad (30)$$

$$\mathcal{K}_j P_- = P_- \mathcal{K}_j = 0, \quad j \leq -1. \quad (31)$$

Используя свойства функционального исчисления для замкнутых линейных операторов (см. [12; гл. VII, § 9]) и учитывая, что резольвента оператора $\mathcal{K} : l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$ является в некоторой окрестности окружности $\mathbb{T}$ аналитической функцией (см. формулы (29)–(31)), операторы $\mathcal{K}_j \in \text{End } l_q$, $j \in \mathbb{Z}$, можно представить в виде контурных интегралов

$$\mathcal{K}_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j (\lambda I - \mathcal{K})^{-1} d\lambda, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Из следующих равенств

$$\begin{aligned} V(\gamma^{-1}) \mathcal{K}_j V(\gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j V(\gamma^{-1}) (\lambda I - \mathcal{K})^{-1} V(\gamma) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \lambda^j \gamma^{-1} (\lambda \gamma^{-1} - \mathcal{K})^{-1} d\lambda = \gamma^j \mathcal{K}_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (33)$$

получаем (имея в виду вытекающее из (32) равенство $P_- = \mathcal{K}_0$), что проектор $P_- \in \text{End } l_q$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Поэтому при

$p \neq 1$ (т.е. при $q \neq \infty$) из леммы 3 следует существование ограниченной проекторнозначной функции $P_*: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X^*$ такой, что

$$(P_- x)(n) = P_*(n)x(n), \quad n \geq 0, \quad x \in l_q. \quad (34)$$

Докажем, что при $q = \infty$ выполнено условие 2) леммы 3. Если $\varphi \in l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$, то оператор $[\bar{V}(\varphi), \mathcal{A}] = \bar{V}(\varphi)\mathcal{A} - \mathcal{A}\bar{V}(\varphi): l_\infty^1 \subset l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} ([\bar{V}(\varphi), \mathcal{A}]\xi)(n) &= (\varphi(n) - \varphi(n+1))\mathcal{U}(n, n+1)^*\xi(n+1) \\ &= (\varphi(n) - \varphi(n+1))(\mathcal{K}\xi)(n), \quad \xi \in l_\infty(\mathbb{Z}_+, X^*). \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|[\bar{V}(f_k), \mathcal{A}]\| = 0$ для любой о.а.е. (f_k) , и поэтому после умножения последовательности $[\bar{V}(f_k), \mathcal{A}]$, $k \geq 1$, слева и справа на оператор $\mathcal{A}^{-1}$ получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|[\bar{V}(f_k), \mathcal{A}^{-1}]\| = 0$, где операторы $[\bar{V}(f_k), \mathcal{A}^{-1}]$, $k \geq 1$, рассматриваются как элементы из банаховой алгебры $\text{End } l_q$. Аналогичное соотношение выполнено (равномерно по $\gamma \in \mathbb{T}$) для операторов $\mathcal{A}(\gamma)^{-1}$, $\gamma \in \mathbb{T}$, где $\mathcal{A}(\gamma) = V(\gamma^{-1})\mathcal{A}V(\gamma): l_q^1 \subset l_q \rightarrow l_q$. Поэтому из равенств (32) при $j = 0$ следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|[\bar{V}(f_k), P_-]\| = 0$, т.е. для проектора P_- выполнено условие 2) леммы 3. Следовательно, имеет место представление (34).

Расшифровка равенств (27)–(31) означает, что семейство эволюционных операторов “назад” $\mathcal{U}^* = \{\mathcal{U}(t, s)^*, 0 \leq s \leq t < \infty\}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ (см. замечание 2).

Например, из соотношений (29) следует, что операторы $\mathcal{K}_j$, $j \geq 0$, имеют вид

$$(\mathcal{K}_j x)(n) = \mathcal{U}(n+j, n)^* P_*(n+j)x(n+j), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_q. \quad (35)$$

Перестановочность оператора $\mathcal{K} \in \text{End } l_q$ с проектором P_- эквивалентна выполнению следующих равенств

$$P_*(m)\mathcal{U}(n, m)^* = \mathcal{U}(n, m)^* P_*(n), \quad 0 \leq m \leq n < \infty. \quad (36)$$

Поскольку $\mathcal{K}_j = (\mathcal{K}P_-)^j$, $j \geq 1$, $r(\mathcal{K}P_-) < 1$ и

$$\|\mathcal{K}_j\| = \sup_{n \geq 0} \|\mathcal{U}(n+j, n)^* P_*(n+j)\|,$$

то существуют постоянные $M_1, \gamma_1 > 0$ такие, что для $0 \leq m \leq n < \infty$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{U}(n, m)^* P_*(n)\| \leq M_1 \exp(-\gamma_1(n-m)). \quad (37)$$

Опишем структуру операторов $\mathcal{K}_j$, $j \leq -1$. Для этого используем равенства (33) и соотношения (30) и (31). Если фиксировано $n \in \mathbb{Z}_+$, $\xi_0 \in X^*$, то для последовательности $\xi \in l_q(\mathbb{Z}_+, X^*)$ такой, что $\xi(n) = \xi_0$ и $\xi(k) = 0$ при $k \neq n$, из (33) получаем равенства

$$(V(\gamma^{-1})\mathcal{K}_j V(\gamma)\xi)(k) = \gamma^{n-k}(\mathcal{K}_j \xi)(k) = \gamma^j(\mathcal{K}_j \xi)(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Следовательно, $(\mathcal{K}_j \xi)(k) = 0$ при $k \neq n-j$. Определим линейный оператор $\mathcal{U}_*(n, m) \in \text{End } X^*$, $m > n$, положив

$$\mathcal{U}_*(n, m)\xi_0 = (\mathcal{K}_j \xi)(m), \quad j = n-m.$$

Таким образом, операторы $\mathcal{K}_j$, $j \leq -1$, представимы в виде

$$(\mathcal{K}_j \xi)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}_*(n+j, n)\xi(n+j), & n \geq |j|, \\ 0, & 0 \leq n < |j|. \end{cases} \quad (38)$$

Если для $q \neq \infty$ такое представление очевидно (в силу плотности финитных последовательностей в l_q), то при $q = \infty$ из формулы (32) следует, что $\|[\overline{V}(f_k), \mathcal{K}_j]\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для любой о.а.е. (f_k) (см. аналогичные рассуждения для $P_- = \mathcal{K}_0$), и поэтому операторы $\mathcal{K}_j$, $j \leq -1$, вполне определяются своими значениями на подпространстве финитных последовательностей.

Из представления (38) и соотношений (30), (31) получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_*(m, n)\mathcal{U}(n, m)^* &= -Q_*(n) = -(I - P_*(n)), \\ \mathcal{U}(n, m)^*\mathcal{U}_*(m, n) &= -Q_*(m), \\ \mathcal{U}_*(m, n)P_*(m) &= P_*(n)\mathcal{U}_*(m, n) = 0, \\ \mathcal{U}_*(n, m)Q_*(n) &= \mathcal{U}_*(n, m), \quad 0 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что оператор $\mathcal{U}(n, m)^*$, $m < n$, осуществляет изоморфизм подпространств $\text{Im } Q_*(n)$ и $\text{Im } Q_*(m)$, а оператор $-\mathcal{U}_*(m, n)$ (нулевой на $\text{Im } P_*(m)$) на подпространстве $\text{Im } Q_*(m)$ совпадает с обратным $(\mathcal{U}_{n,m}^*)^{-1}$ к сужению $\mathcal{U}_{n,m}^*: \text{Im } Q_*(n) \rightarrow \text{Im } Q_*(m)$ оператора $\mathcal{U}(n, m)^* \in \text{End } X^*$ на подпространство $\text{Im } Q_*(n)$.

Из представления (38) операторов $\mathcal{K}_j$, $j \leq -1$, получаем, что

$$\|\mathcal{K}_j\| = \sup_{n \geq |j|} \|\mathcal{U}_*(n, n+j)\|.$$

Поскольку $r(\mathcal{K}_{-1}) < 1$, то существуют постоянные $M_2, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{U}_*(m, n)\| \leq M_2 \exp(-\gamma_2(n-m)), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (39)$$

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \in \text{End } l_q$ следует, что он является правым обратным к оператору $\mathcal{A}$, причем из формул (27), (35) и (38) получаем представление

$$(\mathcal{B}x)(n) = (\mathcal{A}^{-1}x)(n) = \sum_{m \geq 0} G_*(n, m)x(m), \quad x \in l_q, \quad (40)$$

где функция $G_*: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X^*$ определяется равенствами

$$G_*(n, m) = \begin{cases} -\mathcal{U}_*(m, n) = -\mathcal{U}_*(m, n)Q_*(m), & 0 \leq m < n, \\ \mathcal{U}(m, n)^*P_*(m), & 0 \leq n \leq m < \infty. \end{cases} \quad (41)$$

Из полученного равенства $\mathcal{A}\mathcal{B} = I$ следует, что $\mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = I$, т.е. оператор $\mathcal{B}^*$ является левым обратным ко второму сопряженному $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^{**} = \mathcal{A}^*$ (рассматриваемому как элемент алгебры $\text{End } l_q^*$) для оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$. Учитывая канонические вложения $l_p \subset l_p^{**} = l_q^* = l_p(\mathbb{Z}_+, X^{**})$ при $p \neq \infty$ и $l_\infty \subset l_1^* = l_\infty(\mathbb{Z}_+, X^{**})$ при $p = \infty$, $c_0 = c_0(\mathbb{Z}_+, X) \subset l_\infty(\mathbb{Z}_+, X^{**})$, достаточно доказать, что оператор

$\mathcal{B}^* \in \text{End } l_q^*$ является вторым сопряженным к некоторому оператору $\mathcal{B}_0$ из алгебры $\text{End } l_p$. В свою очередь, для этого достаточно установить (имея в виду формулы (40) и (41)), что существует такая проекторнозначная функция $P: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$, что

$$P(n)^* = P_*(n), \quad n \geq 0. \quad (42)$$

В этом случае из доказанного (см. формулы (35)–(41)) будет следовать, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ и левый обратный $\mathcal{B}_0 \in \text{End } l_p$ к оператору $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ имеет вид

$$(\mathcal{B}_0 x)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n, m) x(m), \quad x \in l_p(\mathbb{Z}_+, X),$$

где функция G определена формулой (15).

Докажем существование функции $P: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$, для которой верны равенства (42). Вначале отметим, что из определения оператора $\mathcal{B}$ следует, что оператор

$$Q'_* = I - \mathcal{B}(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^* = I - \mathcal{B}\mathcal{A}$$

является проектором на ядро $\text{Ker } \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$. Непосредственный подсчет показывает, что он имеет вид

$$(Q'_* \xi)(n) = \mathcal{U}(0, n)^* Q_*(0) \xi(0), \quad n \geq 0, \quad \xi \in l_q. \quad (43)$$

Поскольку ядро каждого оператора, являющегося сопряженным к некоторому линейному ограниченному оператору, является слабо *-замкнутым (замкнутым в $\sigma(X^*, X)$ -топологии [16; гл. 8]) подпространством, то $\text{Im } Q'_* = \text{Ker } \mathcal{A}$ – слабо *-замкнутое подпространство из l_q (напомним, что $q = 1$ при $p = \infty$). Так как пространство l_q , наделенное слабой *-топологией, является рефлексивным локально выпуклым топологическим пространством (см. [16; теорема 8.1.1]), то проектор Q'_* представим в виде $Q'_* = (Q')^*$, где Q' – проектор из алгебры $\text{End } l_p$.

Определим оператор $Q(0) \in \text{End } X$ из следующих равенств

$$Q'x = (Q(0)x_0, y_1, y_2, \dots), \quad x = (x_0, x_1, \dots) \in l_p.$$

Тогда для любых $\xi_0 \in X^*$, $x_0 \in X$ имеют место равенства

$$(Q(0)^* \xi_0)(x_0) = \xi_0(Q(0)x_0) = \xi(Q'x) = ((Q')^* \xi)(x) = (Q_*(0) \xi_0)(x_0),$$

где $\xi = (\xi_0, 0, 0, \dots) \in l_q$, $x = (x_0, 0, 0, \dots) \in l_p$. Итак, оператор $Q_*(0)$ является сопряженным к оператору $Q(0)$ и, следовательно, оператор $P_*(0) = I - Q_*(0)$ является сопряженным к оператору $P(0)$.

Из равенств

$$P(0)^* \mathcal{U}(n, 0)^* = \mathcal{U}(n, 0)^* P_*(n) = (\mathcal{U}(n, 0) P(0))^*, \quad n \geq 0,$$

следует, что существует проекторнозначная функция $P: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ такая, что $P(n)^* = P_*(n)$, $P(n) \mathcal{U}(n, 0) = \mathcal{U}(n, 0) P(0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и имеют место равенства (37). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, то $X^*(0)$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* .

ТЕОРЕМА 7. Для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор и $X^*(0)$ – дополняемое замкнутое подпространство в X^* ;
- 2) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$;
- 3) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}_+$.

При выполнении одного из этих условий оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ обратим слева и один из левых обратных определяется формулой (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что если $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор, то корректным является также оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Поэтому импликация 1) $\implies$ 2) следует из теоремы 6.

Докажем 2) $\implies$ 3). Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$ с показателем $\gamma > 0$ и постоянной $M > 0$. Пусть $P, Q : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ – соответствующие проекторнозначные функции и $X_+(n) = \text{Im } Q(n)$, $X_-(n) = \text{Im } P(n)$, $n \geq 0$. Расширим функции P, Q на $\mathbb{R}_+$ следующим образом. Для любого числа $t > 0$ рассмотрим два линейных подпространства

$$X_{\pm}(t) = \mathcal{U}(t, 0)^{-1} X_{\pm}(0) = \{x \in X : \mathcal{U}(t, 0)x \in X_{\pm}(0)\}.$$

Они замкнуты (как прообразы замкнутых подпространств $X_{\pm}$) и, кроме того, из условия $X = X_-(0) \oplus X_+(0)$ следует, что $X = X_-(t) \oplus X_+(t)$ (см. равенства (13) и (14)). Пусть $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ – проекторнозначная функция, осуществляющая эти разложения, и $Q(t) = I - P(t)$, $t > 0$. Из сильной непрерывности семейства $\mathcal{U}$ следует сильная непрерывность функций P и Q , а из условия 3) семейства $\mathcal{U}$ следует их ограниченность. Все остальные свойства экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}_+$ следуют из соответствующих свойств семейства $\mathcal{U}$ на $\mathbb{Z}_+$ и из определения функций P и Q .

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Так как $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$, то из следствия 3 леммы 4 получаем, что $X^*(0) = \text{Im } Q(0)^*$. Следовательно, $X^*(0)$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* . Из леммы 4 следует, что оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$ обратим слева и поэтому он корректен. Еще раз используя теорему 2, получаем корректность оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Непосредственно из определения проектора $\mathcal{P}_*$ (см. следствие 3 леммы 4) следует, что любая последовательность $\xi \in \text{Ker}(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^*$ допускает оценку $\|\xi(n)\| \leq M\gamma^n \|\xi(0)\|$, $n \geq 1$, где $M > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$. Поэтому, если выполнено одно из условий теоремы 7, то подпространство $X^*(0)$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* , которое не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ (соответственно $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$).

Учитывая дополняемость замкнутых подпространств в гильбертовых пространствах, замкнутость подпространств из конечномерных пространств и замечание 4, из теоремы 7 получаем три следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – гильбертово или конечномерное пространство. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор, причем $X^*(0)$ – замкнутое подпространство из X^* , если X – гильбертово пространство;
- 2) семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset L_p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+, X)$ выполнено первое условие теоремы 7 при некотором $p_0 \in [1, \infty]$, то оно выполнено для всех остальных $p \in [1, \infty]$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место утверждение теоремы 3.

§ 6. Об операторах с периодическими и постоянными коэффициентами

В этом параграфе рассматривается периодическое (периода 1) семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$, т.е. выполняются равенства

$$\mathcal{U}(t+1, s+1) = \mathcal{U}(t, s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty.$$

В частности, периодическим является семейство эволюционных операторов для дифференциального уравнения (2) с периодической (периода 1) функцией A .

Символом U обозначим оператор $\mathcal{U}(1, 0) \in \text{End } X$, и тогда верны соотношения

$$\mathcal{U}(n, m) = U^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n < \infty.$$

Поэтому оператор $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ имеет вид

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ x)(n) = \begin{cases} x(n) - Ux(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0. \end{cases}$$

В этом случае условия (13) эквивалентны условию

$$\overline{\text{Im } U} = X, \tag{44}$$

которое далее считается выполненным. Подпространство $X^*(0)$ имеет вид

$$X^*(0) = \{ \xi_0 \in X^* : \text{существует последовательность } \xi \in l_q(\mathbb{Z}_+, X^*) \\ \text{такая, что } \xi_0 = (U^*)^n \xi(n) \text{ для всех } n \geq 0 \},$$

где оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+)^* \in \text{End } l_q$ определяется равенствами

$$(A\xi)(n) = \xi(n) - U^* \xi(n+1), \quad n \geq 0, \quad \xi \in l_q.$$

ЛЕММА 6. Если оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ корректен, то все операторы $\gamma I - U \in \text{End } X$, $\gamma \in \mathbb{T}$, корректны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует корректность оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$. Вначале докажем корректность оператора $I - U$. Допустим, что это не так. Тогда существует нормированная последовательность (x_k) векторов из X , для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(I - U)x_k\| = 0$. Рассмотрим последовательность (φ_n) элементов из $l_\infty(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R})$ вида

$$\varphi_n(l) = \begin{cases} \frac{l}{n}, & 0 \leq l \leq n, \\ -\frac{l}{n} + 2, & n < l < 2n, \\ 0, & l \geq 2n. \end{cases}$$

По этим двум последовательностям построим новую последовательность $(\tilde{\varphi}_n)$ элементов из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, где $\tilde{\varphi}_n(k) = \varphi_n(k)x_n$, $k \geq 0$, $n \geq 1$. Из равенств

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \tilde{\varphi}_n)(k) = \varphi_n(k)(I - U)x_n + (\varphi_n(k) - \varphi_n(k-1))Ux_n, \quad k \geq 0, \quad n \geq 1,$$

получаем оценки

$$\|\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+ \tilde{\varphi}_n\| \leq \|(I - U)x_n\|_X \|\tilde{\varphi}_n\| + \|U\| \|\tilde{\varphi}_n - S(-1)\tilde{\varphi}_n\| \leq \alpha_n \|\tilde{\varphi}_n\|, \quad n \geq 1,$$

где $S(-1)$ — оператор сдвига на -1 в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$, $(S(-1)\tilde{\varphi}_n)(0) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Эти оценки противоречат условию корректности оператора $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^+$. Таким образом, $(I - U)$ — корректный оператор.

Из равенств

$$V(\gamma)\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+V(\gamma^{-1}) = \gamma\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+, \quad \gamma \in \mathbb{T},$$

где операторы $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, были определены в начале § 4, а оператор $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$ — формулой (5), следует, что оператор $\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$ подобен операторам $\gamma\mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Отсюда получаем корректность операторов $\lambda I - \mathcal{K}_{\mathcal{U}}^+$, $\lambda \in \mathbb{T}$, и, следовательно, всех операторов $\gamma I - U$, $\gamma \in \mathbb{T}$.

ЛЕММА 7. *Подпространство $X^*(0)$ является замкнутым дополняемым подпространством в X^* , если выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $r(U) = r(U^*) < 1$;
- 2) $\rho(U) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ — корректный оператор;
- 3) U — компактный оператор;
- 4) $\sigma(U) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие 1). Из формулы Гельфанда для спектрального радиуса линейного оператора [12; гл. VII] следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|(U^*)^n\|} = r(U) = r(U^*) < 1.$$

Поэтому, если $\xi \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X^*)$ и $\xi(0) \in X^*(0)$, то

$$\|\xi(0)\| = \|(U^*)^n \xi(n)\| \leq \|(U^*)^n\| \sup_{k \geq 0} \|\xi(k)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $X^*(0) = \{0\}$.

Предположим, что выполнено условие 2). Тогда из леммы 6 следует корректность операторов $\gamma I - U$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Поскольку $\rho(U) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, $\mathbb{T}$ – связное множество из $\mathbb{C}$ и так как корректный оператор, являющийся пределом обратимых операторов, обратим, то $\mathbb{T} \subset \rho(U)$. Таким образом, $\sigma(U) = \sigma(U^*) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(U^*) : |\lambda| < 1\}$ и $\sigma_2 = \sigma(U) \setminus \sigma_1$. Тогда $X^* = X_1^* \oplus X_2^*$, где $X_k^* = \text{Im } P(\sigma_k, U^*)$, $k = 1, 2$, и $X^*(0) = X_1^*(0) \cap X_2^*(0)$, $X_k^*(0) = X^*(0) \cap X_k^*$, $k = 1, 2$. Из доказанного следует, что $X_1^*(0) = \{0\}$, а из определения подпространства X_2^* получаем, что сужение $U^*|_{X_2^*}$ – обратимый оператор и $r(U^*|_{X_2})^{-1} < 1$. Следовательно, $X^*(0) = X_2^*(0) = X_2^*$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* .

Пусть теперь U – компактный оператор. Его спектр представим в виде $\sigma(U) = \Delta_1 \cup \Delta_2 = \sigma(U^*)$, где Δ_2 – конечное множество, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ и $r_1 = \max_{\lambda \in \sigma_1} |\lambda| < 1$. Тогда $X^* = X_1^* \oplus X_2^*$, $X_k^* = \text{Im } P(\Delta_k, U^*)$, $k = 1, 2$. Ясно, что $r(U^*|_{X_1^*}) = r_1 < 1$ и X_2^* – конечномерное подпространство. Поскольку $X^*(0) \subset X_2^*$, то $X^*(0)$ – конечномерное (и, следовательно, замкнутое дополняемое) подпространство.

Если выполнено условие 4), то следует воспользоваться второй частью доказательства этой леммы при выполнении условия 2), из которой следует, что $X^*(0) = X_2^*$. Лемма доказана.

Дальнейшее исследование условий на оператор U , при которых подпространство $X^*(0)$ является замкнутым дополняемым, требует привлечения результатов из спектральной теории разложимых (по Фойашу) линейных операторов [17]. В частности, можно доказать замкнутость и дополняемость подпространства $X^*(0)$, если U – нормальный (например, самосопряженный) оператор, действующий в гильбертовом пространстве X .

ТЕОРЕМА 8. *Для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+ : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ – корректный оператор и $X^*(0)$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* ;
- 2) $\sigma(U) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие 1). Тогда из теоремы 7 следует, что семейство $\mathcal{U}(n, m) = U^{n-m}$, $0 \leq m \leq n < \infty$, допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$. Из определения 1 получаем, что $X = X_-(k) \oplus X_+(k)$, $k \geq 0$, где $X_-(k) = \text{Im } P(k)$, $X_+(k) = \text{Im } Q(k)$, $k \geq 0$, и из вида операторов $\mathcal{U}(m, n)$, $0 \leq m \leq n < \infty$, следуют оценки

$$\begin{aligned} \|U^n x\| &\leq M q^n \|x\|, & x \in X_-(k), \\ \|U^n x\| &\geq M q^{-n} \|x\|, & x \in X_+(k), \quad k, n \geq 0, \end{aligned}$$

где $M > 0$, $0 < q < 1$. Отсюда получаем, что $X_{\pm}(k) = X_{\pm}(0)$ для всех $k \geq 1$, подпространства $X_{\pm}(0)$ инвариантны относительно U и $r(U|_{X_+(0)}) > 1$, $r(U|_{X_-(0)}) < 1$. Следовательно, $\sigma(U) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

Предположим, что выполнено условие 2). Тогда $\sigma(U) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(U) : |\lambda| < 1\}$. Положим $P = P(\sigma_1, U)$ и $Q = I - P$. В этом случае для семейства $\mathcal{U}$ имеет место экспоненциальная дихотомия на $\mathbb{Z}_+$, причем $P(n) = P$

для всех $n \geq 0$. Из леммы 7 следует, что $X^*(0) = \text{Im } Q^*$ – замкнутое дополняемое подпространство из X^* . Теорема доказана.

ПРИМЕР. Пусть X – гильбертово пространство, $U_1 \in \text{End } X$ – любая необратимая изометрия, $\alpha > 2$ и $U = U_\alpha = \alpha U_1$. Рассмотрим разностный оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l_\infty(\mathbb{Z}_+, X)$ вида

$$(\mathcal{D}x)(n) = \begin{cases} x(n) - Ux(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0 \end{cases} \quad (x \in l_\infty).$$

Пусть $x_0 \in l_\infty$, $\mathcal{D}x_0 = f$ и $n_0 \in \mathbb{Z}$ – такое число, что $\|x_0(n_0)\| \geq \frac{1}{2}\|x_0\|_\infty$. Поскольку $Ux_0(n_0) = x_0(n_0 + 1) + f(n_0 + 1)$, то

$$\frac{\alpha}{2}\|x_0\|_\infty \leq \|Ux_0(n_0)\| \leq \|x_0\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Итак, $\|f\|_\infty = \|\mathcal{D}x_0\|_\infty \geq (\alpha/2 - 1)\|x_0\|$, т.е. $\mathcal{D}$ – корректный оператор. Однако $\rho(U) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, так как $\sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \alpha\}$.

§ 7. Обсуждение полученных результатов

Полученные результаты позволяют использовать теорию разностных операторов при исследовании линейных параболических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и, следовательно, для дифференциальных операторов с частными производными. Например, к рассматриваемым операторам относится дифференциальный оператор (см. §1)

$$\mathcal{L}^+ = -\frac{d}{dt} + A(t): D(\mathcal{L}^+) \subset L_p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+, X),$$

где $X = L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathbb{C})$, Ω – ограниченная гладкая область из $\mathbb{R}^n$. Семейство линейных дифференциальных операторов

$$A(t): H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad t \geq 0$$

$(H_0^m(\Omega), H^{2m}(\Omega))$ – пространства Соболева [18]), определяется семейством дифференциальных выражений

$$(l_t y)(u) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, u) (D^\alpha y)(u), \quad u \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

и краевыми условиями Дирихле на границе $\partial\Omega$ области Ω . Функции $a_\alpha: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 2m$, принадлежат пространству $C(\mathbb{R}, C^k(\Omega))$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ и удовлетворяют условию Липшица, если их рассматривать как функции от первого аргумента со значениями в $C^k(\Omega)$. Кроме того, предполагается, что семейство дифференциальных выражений l_t , $t \in \mathbb{R}_+$, равномерно эллиплично.

Из перечисленных условий следует, что эллиптические операторы $A(t)$, $t \geq 0$, являются производящими операторами аналитических полугрупп линейных ограниченных операторов, причем выполнены условия теоремы Соболевского–Танабе [19], которая гарантирует корректность задачи Коши на $\mathbb{R}_+$ (существование

семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$). Поскольку $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство, то для оператора $\mathcal{L}^+$ имеет место следствие 1 теоремы 7.

Полученные в этой статье результаты для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$ могут быть использованы для изучения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \subset L_p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, где $\mathcal{V}$ – семейство эволюционных операторов “назад” на $\mathbb{R}_+$ (см. замечание 2).

Отметим несколько важных случаев, когда возникает потребность в исследовании оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$.

1. При изучении ограниченных на $\mathbb{R}$ решений дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad f \in L_p(\mathbb{R}, X),$$

в предположении, что семейство замкнутых операторов $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порождает корректную задачу на $\mathbb{R}$.

2. При изучении асимптотической факторизации дифференциального оператора второго порядка

$$\mathcal{L} = \varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2} + Q(t): D(\mathcal{L}) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X), \quad \varepsilon > 0,$$

возникает необходимость изучения линейных дифференциальных операторов первого порядка $\varepsilon \frac{d}{dt} \pm \sqrt{Q(t)}$ (более подробно в [20]), один из которых есть оператор вида $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$.

3. Для семейства эволюционных операторов “вперед” $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}_-$ рассмотрим линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^- = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset L_p(\mathbb{R}_-, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_-, X)$. Если линейный изометрический оператор $T: L_p(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_-, X)$ определен формулой $(Tf)(t) = f(-t)$, $f \in L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $t \geq 0$, то имеет место равенство $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} = T\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^-T^{-1}$, где $\{\mathcal{V}(s, t) = \mathcal{U}(-s, -t); 0 \leq s \leq t < \infty\}$ – семейство эволюционных операторов “назад”. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^-$, и поэтому изучение спектральных свойств оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ сводится к изучению соответствующих свойств оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$.

Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) = C_0(\mathbb{R}_+, X)$, то $D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{F}$, и поэтому можно рассмотреть сопряженный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}^*: D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}^*) \subset \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$. Условие сюръективности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ (т.е. разрешимости уравнения $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}x = f$ при любой $f \in \mathcal{F}$) эквивалентно условию корректности оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}^*$.

При выяснении конкретной структуры оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}^*$ возникают определенные проблемы. Однако если X – рефлексивное банахово пространство, $\mathcal{F} = L_p$, $p \in [1, \infty)$, и $\{\mathcal{U}(s, t) = \mathcal{V}(t, s)^*, t \geq s \geq 0\} \subset \text{End } X^*$ – сильно непрерывное семейство, то $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}^* = \mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. В этом случае можно сформулировать для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ ряд результатов, полученных здесь для $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^+$. Так, аналогом теоремы 7 является

ТЕОРЕМА 9. *Для оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \subset L_p \rightarrow L_p$, $p \in [1, \infty)$, следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ – сюръективный оператор и подпространство

$$X(0) = \{x(0) \in X : x \in \text{Ker } \mathcal{L}_{\mathcal{V}}\}$$

замкнуто и дополняемо в X ;

- 2) *семейство $\mathcal{V}$ допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_+$.*

Список литературы

1. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
3. Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
4. Gindler H. A., Taylor A. E. The minimum modules of a linear operator and its use in spectral theory // Studia Math. 1962/63. V. 22. P. 15–41.
5. Мухамадиев Э. М. Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 269–274.
6. Слюсарчук В. Е. Обратимость почти периодических s -непрерывных функциональных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 4. С. 483–501.
7. Шубин М. А. Теория Фавара–Мухамадиева и псевдодифференциальные операторы // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 6. С. 46–48.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
9. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 811–820.
10. Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 3. С. 160–165.
11. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 3. С. 1–11.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
13. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные операторы. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990.
14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Наука, 1977.
15. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангелент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
16. Эдвардс Э. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
17. Colojoara I., Foias C. Theory of generalized spectral operators. New York: Gordon and Breach, 1968.
18. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
19. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
20. Эдельштейн С. Асимптотическое расщепление краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 49. № 6. С. 1401–1420.

Воронежский государственный университет
E-mail: main@amm.vsu.ru

Поступила в редакцию
21.01.1997 и 13.02.1998