Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лебедев, О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 2, 49–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:29:53

УДК 517.518.82

В. И. Лебедев

О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения

В статье предложен новый итерационный метод нахождения в $C[-1, 1]$ параметров многочленов наилучшего приближения с весом, основанный на представлении ошибки в тригонометрической форме через фазовую функцию. В основу итерационного метода нахождения поправок к фазовой функции, определяющих совместное движение нулей и ϵ -точек ошибки, положены методы обратного анализа, теории возмущений и асимптотические формулы для экстремальных многочленов.

Библиография: 24 названия.

Введение

Знаменитые статьи П. Л. Чебышёва [1]–[3] о многочленах наилучшего приближения (МНП) открыли новое направление в математике, получившее затем мощное развитие в работах отечественных математиков. В дальнейшем были разработаны (см. [4]–[6]) методы нахождения параметров этих многочленов, основанные на итерационных методах решения системы нелинейных уравнений моментного типа с плохо обусловленной матрицей Вандермонда. В статье содержатся формулировки экстремальных задач для МНП $P_n(x)$ n -й степени и экстремальных многочленов (ЭМ), наименее отклоняющихся от нуля с весом $w(x)$. Исследована гладкость коэффициента в остаточном члене для интерполяционных многочленов Лагранжа $L_n(x, \bar{y})$. Получено представление ошибки в тригонометрической форме через фазовую функцию $\psi_n(\theta)$ (ФФ), легшее в основу итерационного метода. Получена интерполяционная квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта. Эта формула для ЭМ является асимптотической при $n \rightarrow \infty$ для $\psi_n(\theta)$. Она вместе с формулами для нулей и ϵ -точек для ошибки определяет алгоритм совместного движения нулей и ϵ -точек при возмущении весовой функции $w(x)$. Сформулированы итерационные методы нахождения параметров ЭМ и МНП, основанные на использовании методов обратного анализа, теории возмущений и асимптотических формул. Приведенные примеры численных расчетов показали высокую эффективность предлагаемого метода. Краткое содержание работы изложено в [7], [8]. Автор выражает благодарность К. В. Ушакову за помощь при оформлении работы.

Работа выполнена в рамках программы РАН “Теоретические проблемы современной математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00582).

§ 1. Формулировка экстремальных задач

Пусть $f(x), w(x) \in C[-1, 1]$, $w(x) > 0$ на $[-1, 1]$ – вес, а $f(x)$ – приближаемая функция. Пусть Π_n – класс вещественных многочленов $P_n(x)$, $Q_n(x)$ не выше n -й степени. Требуется найти решение следующей задачи.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА. *Найти*

$$\begin{aligned} e_n &= \min_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |(f(x) - Q_n(x))w(x)|, \\ P_n(x) &= \arg \min_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |(f(x) - Q_n(x))w(x)|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Решение этой задачи существует и единственно (см. [9]). Многочлен $P_n(x)$ назовем *многочленом наилучшего приближения на $[-1, 1]$ для $f(x)$ с весом $w(x)$* , или *МНП*. Пусть

$$r_n(x) = (f(x) - P_n(x))w(x), \quad q_n(x) = (f(x) - Q_n(x))w(x). \quad (1.2)$$

Справедлива (см. [5], [6], [9])

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЁВА ОБ АЛЬТЕРНАНСЕ. *Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ наименее отклонялся в равномерной норме от функции $f(x) \in C[-1, 1]$ с весом $w(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали по крайней мере $n + 2$ точки $1 \geq \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_{n+1} \geq -1$, называемые точками альтернанса, в которых с последовательной переменой знака достигался $\max_{x \in [-1, 1]} |r_n(x)|$.*

Назовем точки ξ_i *e-точками*. Из этой теоремы следует, что существуют по крайней мере $n + 1$ точка $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, $\xi_1 > y_1 > \xi_2 > \dots > y_{n+1} > \xi_{n+2}$, в которых

$$r_n(y_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (1.3)$$

Пусть далее

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}), \quad x_i \in [-1, 1], \quad x_i \neq x_k, \quad \omega_{n+1}(x, \bar{x}) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i),$$

$L_n(x, \bar{x})$ – многочлен Лагранжа n -й степени для функции $f(x)$, построенный по ее значениям в точках $\bar{x}$:

$$L_n(x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) l_k(x), \quad l_k(x) = \prod_{i \neq k}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{\omega_{n+1}(x, \bar{x})}{\omega'_{n+1}(x_k, \bar{x})(x - x_k)}.$$

Тогда

$$f(x) - L_n(x, \bar{x}) = l_n(x, \bar{x}) \omega_{n+1}(x, \bar{x}), \quad (1.4)$$

где

$$l_n(x, \bar{x}) = \frac{f(x) - L_n(x, \bar{x})}{\omega_{n+1}(x, \bar{x})}.$$

Известно (см. [5]), что $l_n(x, \bar{x}) = f^{(n+1)}(\xi_x)/(n+1)!$, $\xi_x \in [-1, 1]$, при $f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$. Оценим гладкость $l_n(x, \bar{x})$ в общем случае. Справедлива

ЛЕММА 1. *Если $f(x) \in C^{m+1}[-1, 1]$, $m \geq 0$, то $l_n(x, \bar{x}) \in C^m[-1, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция $l_n(x, \bar{x})$ $m+1$ раз дифференцируема вне точек интерполяции $\bar{x}$. Покажем, что она m раз непрерывно дифференцируема в окрестности каждой точки x_k . Пусть x_k , $1 \leq k \leq n+1$, – фиксированная точка,

$$b_1(x) = \frac{x - x_k}{\omega_{n+1}(x, \bar{x})}, \quad b_2(x) = \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k}, \quad b_3(x) = \frac{L_n(x, \bar{x}) - L_n(x_k, \bar{x})}{x - x_k}.$$

Тогда $l_n(x, \bar{x}) = b_1(x)(b_2(x) + b_3(x))$. Здесь $b_3(x)$ – многочлен степени $n-1$, а $b_1(x)$ – мероморфная ограниченная в окрестности x_k функция. Разлагая числитель $b_2(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_k , получаем

$$b_2(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(x - x_k)^{i-1}}{i!} f^{(i)}(x_k) + \frac{\tilde{b}_2(x)}{m!},$$

где

$$\tilde{b}_2(x) = \frac{-1}{x_k - x} \int_{x_k}^x (f^{(m+1)}(t) - f^{(m+1)}(x_k))(x - t)^m dt, \quad x \neq x_k, \quad \tilde{b}_2(x_k) = 0.$$

Тогда $|\tilde{b}_2(x)| = O(|x_k - x|^m)$ при $x \rightarrow x_k$. При $x \neq x_k$ функция $\tilde{b}_2(x)$ имеет непрерывные производные j -го порядка, $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2^{(j)}(x) = & - \sum_{i=0}^j \left(\frac{m! j!}{(j-i)! (m-j+i)! (x-x_k)^{i+1}} \right. \\ & \times \left. \int_{x_k}^x (f^{(m+1)}(t) - f^{(m+1)}(x_k))(x-t)^{m-j+i} dt \right) \end{aligned}$$

и $|\tilde{b}_2^{(j)}(x)| = O(|x_k - x|^{m-j}) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_k$. Вычисляя $\tilde{b}_2^{(j)}(x_k)$ последовательно, начиная с $j=1$, по формулам

$$\tilde{b}_2^{(j)}(x_k) = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\tilde{b}_2^{(j-1)}(x) - \tilde{b}_2^{(j-1)}(x_k)}{x - x_k} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\tilde{b}_2^{(j-1)}(x)}{x - x_k},$$

получаем, что $\tilde{b}_2^{(j)}(x_k) = 0$, $1 \leq j \leq m$, т.е. $b_2(x) \in C^m[-1, 1]$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$, то $f^{(n+1)}(\xi_x) \in C^n[-1, 1]$.

Из (1.3) имеем $P_n(y_j) = L_n(y_j, \bar{y})$. Следовательно, многочлен $P_n(x)$ можно искать в виде

$$P_n(x) = L_n(x, \bar{y}) = \arg \min_{\bar{x}} \max_{x \in [-1, 1]} |\omega_{n+1}(x, \bar{x}) l_n(x, \bar{x}) w(x)|. \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.5), определяющее один и тот же многочлен Лагранжа, может быть неединственным относительно $\bar{y}$ в случаях, когда $r_n(x)$ имеет на $[-1, 1]$ более $n+1$ нуля. Если $0 < |f^{(n+1)}(x)| < R$ на $[-1, 1]$, то функция $l_n(x, \bar{x})$ не меняет знак и задача (1.5) имеет единственное решение.

Для оценки сверху величины e_n и при определении начального приближения $\bar{y}^0$ для $\bar{y}$ в итерационном методе рассмотрим задачу нахождения МНП на следующем классе функций. Пусть $R > 0$ и

$$F_{n+1} = \{f(x) : f(x) \in C^{n+1}[-1, 1], |f^{(n+1)}(x)| \leq R\}.$$

Требуется найти величину $E_n = \sup_{f \in F_{n+1}} e_n$.

Величина E_n достигается при $f(x) = Rx^{n+1}/(n+1)!$, а многочлен

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{(f(x) - P_n(x))(n+1)!}{R}$$

будет решением задачи

$$\Omega_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - y_i^0) = \arg \min_{\bar{x}} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_{n+1}(x, \bar{x})w(x)|. \quad (1.6)$$

Тогда для функций класса F_{n+1}

$$e_n \leq E_n = R \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|\Omega_{n+1}(x, \bar{x})w(x)|}{(n+1)!}.$$

Многочлены $\Omega_{n+1}(x)$ назовем *экстремальными* (ЭМ). Каждый из них наименее с весом $w(x)$ отклоняется от нуля среди многочленов степени $n+1$, имеющих единичный коэффициент при x^{n+1} .

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. Пусть задан многочлен n -й степени $P_n(x)$. Требуется определить множество функций $f(x) \in C[-1, 1]$, для которых $P_n(x)$ является МНП.

Дадим решение этой задачи.

Для любого $\varepsilon > 0$ это множество функций определяется следующим образом. Построим две образующие коридор функции

$$g^-(x) = P_n(x) - \frac{\varepsilon}{w(x)}, \quad g^+(x) = P_n(x) + \frac{\varepsilon}{w(x)}.$$

Тогда $P_n(x)$ будет МНП для любой непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям $g^-(x) \leq f(x) \leq g^+(x)$ и попеременно принимающей на $[-1, 1]$ значения $g^-(x)$, $g^+(x)$ не менее чем в $(n+2)$ -х точках.

Рассмотрим функцию $q_n(x)$ – приближение к $r_n(x)$. Важной проблемой является разработка алгоритмов коллективного взаимосвязанного движения нулей $q_n(x)$, уменьшающих разброс локальных максимумов $|q_n(x)|$, которые будем называть *ε-точками*. В случае $w(x) = 1$ эта задача исследована в [10]–[12]. Мы получим достаточно эффективный итерационный алгоритм, если найдем формулы для нулей и ε -точек МНП через так называемую фазовую функцию и асимптотические формулы для изменения фазовой функции при заданном изменении весовой функции $w(x)$.

Пусть далее $x = \cos \theta$, $\operatorname{Re} \theta \in [0, \pi]$, $T_n(x) = \cos n\theta$, $U_n(x) = \sin((n+1)\theta)/\sin \theta$ – многочлены Чебышёва n -й степени первого и второго родов. В основе алгоритмов, описывающих движение нулей и ε -точек МНП при изменении $w(x)$, лежит представление $r_n(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы $P_n(x)$ был МНП, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа E и целое $m \geq n$ и функция

$$\psi_n(\theta) \in C[0, \pi], \quad -\pi < \psi_n(0) \leq 0, \quad 0 \leq \psi_n(\pi) < \pi,$$

такие, что

$$r_n(x) = E \cos((m+1)\theta + \psi_n(\theta)). \quad (1.7)$$

Тогда $e_n = |E|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы при $E \neq 0$. Тогда непрерывная функция $\Phi(\theta) = (m+1)\theta + \psi_n(\theta)$ изменяется на отрезке $[0, \pi]$ от $\Phi(0) \leq 0$ до $\Phi(\pi) \geq (m+1)\pi$. Следовательно, для каждого $j = 0, 1, \dots, m+1$ найдутся такие $\bar{\theta}_j \in [0, \pi]$, $j = 0, 1, \dots, m+1$, что $\Phi(\bar{\theta}_j) = j\pi$. Тогда в $(m+2)$ -х точках $\cos \bar{\theta}_j$ функция $r_n(x)$ принимает с переменной знака свое максимальное по модулю значение $|E|$. Следовательно, многочлен $P_n(x)$ является МНП для $f(x)$. При $|E| = 0$ теорема очевидна.

Необходимость. Пусть многочлен $P_n(x)$ есть МНП для $f(x)$ и $P_n(x) \neq f(x)$, $1 \geq \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_{m+1} \geq -1$ – полный набор e -точек. Тогда $m \geq n$ и $m < \infty$ вследствие равномерной непрерывности $r_n(x)$ на $[0, \pi]$. Положим $E = \text{sign}(r_n(\xi_0))e_n$. Пусть $\xi_j = \cos \bar{\theta}_j$, $\bar{\theta}_j \in [0, \pi]$, $v_n(x) = r_n(x)/E$, $|v_n(x)| \leq 1$, $v_n(\xi_j) = (-1)^j$,

$$\Phi(\theta) = \text{Arccos } v_n(\cos \theta).$$

В многозначной функции Arccos выберем ее ветви так, чтобы функция $\Phi(\theta)$ была непрерывной на $[0, \pi]$, принимая значения $j\pi$ при $\theta = \bar{\theta}_j$, и чтобы $\cos \Phi(\theta) = v_n(\cos \theta)$. Положим $\Phi(\theta) = \arccos v_n(\cos \theta)$ на $[\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1]$. Тогда $\Phi(\bar{\theta}_0) = 0$, $\Phi(\bar{\theta}_1) = \pi$. Если $\bar{\theta}_0 > 0$, то на отрезке $[0, \bar{\theta}_0]$ полагаем $\Phi(\theta) = -\arccos v_n(\cos \theta)$, тогда $-\pi < \Phi(0) \leq 0$. Далее используем следующие равенства:

$$\begin{aligned} t &= 2k\pi + \arccos \cos t, & 2k\pi \leq t \leq (2k+1)\pi, \\ t &= 2(k+1)\pi - \arccos \cos t, & (2k+1)\pi \leq t \leq 2(k+1)\pi. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее отрезки $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$, $[\bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3]$, $\dots$, $[\bar{\theta}_m, \bar{\theta}_{m+1}]$, а при $\bar{\theta}_{m+1} < \pi$ еще и $[\bar{\theta}_{m+1}, \bar{\theta}_{m+2}]$, где $\bar{\theta}_{m+2} = \pi$. Тогда если $\theta \in [\bar{\theta}_{2k}, \bar{\theta}_{2k+1}]$, то полагаем

$$\Phi(\theta) = 2k\pi + \arccos v_n(\cos \theta),$$

а если $\bar{\theta} \in [\bar{\theta}_{2k+1}, \bar{\theta}_{2(k+1)}]$, то полагаем

$$\Phi(\theta) = 2(k+1)\pi - \arccos v_n(\cos \theta).$$

Для определенной таким образом непрерывной функции $\Phi(\theta)$ справедливо

$$\Phi(\bar{\theta}_{m+1}) - \Phi(\bar{\theta}_0) = (m+1)\pi, \quad -\pi < \Phi(0) \leq 0, \quad (m+1)\pi \leq \Phi(\pi) < (m+2)\pi.$$

Тогда функцию $\psi_n(\theta)$ в теореме определим формулой $\psi_n(\theta) = \Phi(\theta) - (m+1)\theta$. Теорема доказана.

Тригонометрические формы представления при $m = n$ были получены для ЭМ и ортогональных многочленов в работах Бернштейна и Сегё [13]–[16]; при $w(x) = 1$, $m = n$, $\psi_n(0) = \psi_n(\pi) = 0$ в [17] Штифелем доказана достаточность условия теоремы. Случай, когда $m = n+1$, может возникнуть, если, например, МНП – только четные или нечетные функции.

Функцию $\psi_n(\theta)$ назовем *фазовой функцией* ($\Phi\Phi$).

ПРИМЕР 1. Пусть $r_n(x) = E \cos F(\theta)$, где $F(\theta) = b\theta(\pi - \theta) - a$, $0 \leq a < \pi$, а величина b такова, что $F(\frac{\pi}{2}) = 2k\pi$, где $k > 0$ целое, т.е. $b = 4(2k\pi + a)/\pi^2$. Функция $\Phi(\theta)$ в теореме примет вид $\Phi(\theta) = F(\theta)$ при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $\Phi(\theta) = 4k\pi - F(\theta)$ при $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Тогда в теореме $m+1 = 4k$.

Из теоремы об альтернансе и теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n < k \leq m$, то для МНП k -й степени справедливо $P_k(x) = P_n(x)$.

ПРИМЕР 2. В [14], [16], [18]–[20] изучены экстремальные на $[-1, 1]$ многочлены Чебышёва–Маркова–Бернштейна–Сегё n -й степени $C_n(x)$ с весовыми функциями $w(x) = 1/\sqrt{S_l(x)}$, где $S_l(x)$ – положительный на $[-1, 1]$ многочлен степени l , $n \geq \frac{l}{2}$. Дана явная тригонометрическая формула их представления:

$$C_n(x)w(x) = E_n \cos(n\theta + \psi(\theta)).$$

Пусть $Q_M(x)$ – многочлен M -й степени, $M \leq n \leq m$, а $f(x) = Q_M(x) + AC_{m+1}(x)$, $A > 0$. Тогда $P_n(x) = Q_M(x)$ и в (1.7) $E = A$, $\psi_n(\theta) = \psi(\theta)$.

Корнями $r_n(x)$ будут

$$y_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = \frac{(j - \frac{1}{2})\pi - \psi_n(\theta_j)}{m+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m+1, \quad (1.8)$$

а ε -точки будут удовлетворять уравнениям

$$\xi_j = \cos \bar{\theta}_j, \quad \bar{\theta}_j = \frac{j\pi - \psi_n(\bar{\theta}_j)}{m+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1. \quad (1.9)$$

Если $\xi_0 = 1$, то $\psi_n(0) = 0$, если $\xi_{m+1} = -1$, то $\psi_n(\pi) = 0$.

Если функция $\psi_n(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\psi_n(\theta) - \psi_n(\theta')| \leq L|\theta - \theta'|, \quad \frac{L}{m+1} < 1, \quad (1.10)$$

то решение каждого уравнения в (1.8), (1.9) существует и единственно и оно может быть найдено методом простой итерации (см. [20]).

Для простоты изложения здесь и далее будем предполагать функцию $\psi_n(\theta)$ в (1.8), (1.9) такой, что для каждого j уравнения в (1.8), (1.9) имеют единственные решения. Формулы (1.8), (1.9) определяют движение y_j , ξ_j при изменении функции $\psi_n(\theta)$, в частности, из них следует очевидная

ЛЕММА 2. Знаки поправок к y_j , ξ_j МНП совпадают со знаком для поправки к функции $\psi_n(\theta)$ в соответствующей точке.

В § 3 будут предложены асимптотические формулы для поправок к $\psi_n(\theta)$ для задачи (1.6) через поправки к функции $w(x)$, которая в § 4 будет использована при решении задачи (1.7). Для этого будут использованы следующие свойства многочленов Чебышёва второго рода. Рассмотрим корни многочлена степени $2m+3$ вида

$$(1 - x^2)U_{2(m+1)-1}(x) = 2(1 - x^2)U_m(x)T_{m+1}(x), \quad (1.11)$$

ими будут

$$u_k = \cos \varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{k\pi}{2(m+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2(m+1). \quad (1.12)$$

Если при $n \rightarrow \infty$ последовательность

$$\max_{\theta \in [0, \pi]} \left| \frac{\psi_n(\theta)}{m+1} \right| \rightarrow 0,$$

то y_j , ξ_j будут асимптотически близки к корням $(1-x^2)U_{2(m+1)-1}(x)$, корни $r_n(x)$ будут асимптотически близки к корням $T_{m+1}(x)$ – корням $\cos \varphi_k$ с нечетными номерами, а e -точки $r_n(x)$ будут асимптотически близки к корням $(1-x^2)U_m(x)$ – корням $\cos \varphi_k$ с четными номерами. Пусть

$$M = 2^d(m+1), \quad l \geq 1, \quad (1.13)$$

$$(1-x^2)U_{2M-1}(x) = 2(1-x^2)U_{M-1}(x)T_M(x). \quad (1.14)$$

Тогда все корни (1.12) будут корнями многочлена (1.14).

§ 2. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта, определенный на достаточно гладком классе функций $\tilde{g}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$:

$$H\tilde{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \right) \tilde{g}(\varphi) d\varphi = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{g}(\varphi) d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad (2.1)$$

и сопряженный к H оператор H^* :

$$H^*\tilde{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \right) \tilde{g}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \tilde{g}(\varphi) d\varphi}{\cos \theta - \cos \varphi}, \quad (2.2)$$

здесь интегралы понимаются в смысле главного значения. Если $x = \cos \theta$, $y = \cos \varphi$, $g(y) = \tilde{g}(\varphi)$, то оператор H примет вид

$$Hg = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(y) dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}.$$

Для этих операторов справедливы равенства (см. [21])

$$HC = 0, \quad H \cos n\varphi = \sin n\theta, \quad H^* \sin n\varphi = \cos n\theta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

здесь и далее C – произвольные постоянные. Следовательно, константа принадлежит ядру оператора H и

$$H^*H \cos n\varphi = \cos n\theta, \quad HH^* \sin n\varphi = \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$H\tilde{g} = \frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\tilde{g}(\varphi) - \tilde{g}(\theta)) d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta}, \quad H^{-1}\tilde{g} = H^*\tilde{g} + C.$$

Определим действие операторов H и H^* на функции из пространства $L_2(0, \pi)$ следующими формулами: если $\tilde{g}(\theta) \in L_2(0, \pi)$ и

$$\tilde{g}(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta,$$

то

$$H\tilde{g}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta, \quad \|H\tilde{g}(\theta)\|_{L_2(0,\pi)} \leq \|\tilde{g}(\theta)\|_{L_2(0,\pi)}.$$

Интерполяционную квадратурную формулу $H_M\tilde{g}$ для $H\tilde{g}$, точную для всех $\cos$ -многочленов до M -й степени включительно, построим по узлам

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (2.4)$$

следующим образом:

$$H_M\tilde{g} = C_0(\theta)(\tilde{g}(\varphi_0) - \tilde{g}(\theta)) + C_M(\theta)(\tilde{g}(\varphi_M) - \tilde{g}(\theta)) + \sum_{k=1}^{M-1} C_k(\theta)(\tilde{g}(\varphi_k) - \tilde{g}(\theta)). \quad (2.5)$$

Для $\cos$ -многочленов справедливо представление в виде

$$J_M(\cos \theta) = \frac{\sin \theta \sin M\theta}{M} \sum_{k=0}^M (-1)^k p_k \frac{\tilde{g}(\varphi_k)}{\cos \varphi_k - \cos \theta}, \quad (2.6)$$

где $p_0 = p_M = \frac{1}{2}$, $p_k = 1$, $k = 1, \dots, M-1$. Тогда

$$C_k(\theta) = \frac{\sin \theta (1 - (-1)^k \cos M\theta)}{M(\cos \varphi_k - \cos \theta)}, \quad k = 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.7)$$

$$C_0(\theta) = \frac{\sin \theta (1 - \cos M\theta)}{2M(1 - \cos \theta)}, \quad C_M(\theta) = -\frac{\sin \theta (1 - (-1)^M \cos M\theta)}{2M(1 + \cos \theta)}. \quad (2.8)$$

Для вычисления весовых коэффициентов квадратурной формулы положим

$$u_k = \cos \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (2.9)$$

и при $x = \cos \theta$ многочлен $J_M(x)$ представим в виде

$$J_M(x) = \frac{2}{M} \sum_{j=0}^M p_j \left(\sum_{k=0}^M p_k g(u_k) T_j(u_k) \right) T_j(x). \quad (2.10)$$

Тогда, используя (2.3), получаем

$$HJ_M(x) = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M p_j \left(\sum_{k=0}^M p_k g(u_k) \cos j\varphi_k \right) \sin j\theta.$$

При $1 \leq k \leq M-1$

$$\begin{aligned} C_k(\theta) &= \frac{2}{M} \left(\sum_{j=1}^M p_j \cos j\varphi_k \sin j\theta - \frac{1}{2} (-1)^k \sin M\theta \right) \\ &= \frac{1}{M} (D_M(\theta + \varphi_k) + D_M(\theta - \varphi_k)) = \frac{\sin \theta (1 - (-1)^k \cos M\theta)}{M(\cos \varphi_k - \cos \theta)}, \end{aligned}$$

где

$$D_M(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^M \cos j\theta.$$

Аналогично выводятся формулы для $C_0(\theta)$, $C_M(\theta)$. Из формул (2.7), (2.8) вытекают следующие свойства весовых коэффициентов, которые в §§ 3, 4 лягут в основу алгоритма коллективного взаимосвязанного движения нулей $q_n(x)$, уменьшающего разброс локальных максимумов $|q_n(x)|$ в $\tilde{e}$ -точках.

ЛЕММА 3. Для каждого $k = 0, 1, \dots, M$ коэффициент $C_k(\theta)$ как функция от θ таков, что

1) имеет однократный корень $C_k(\varphi_k) = 0$ и двукратные корни $C_k(\varphi_i) = 0$, если $|k - i|$ чётно;

2) $C_k(\theta) \leq 0$ при $\theta < \varphi_k$, $C_k(\theta) \geq 0$ при $\theta > \varphi_k$ и значения локальных максимумов $|C_k(\theta)|$ убывают с увеличением $|\varphi_k - \theta|$.

При $\theta = \tilde{\theta}_k = (2k-1)\pi/(2M)$, $k = 1, 2, \dots, M-1$, квадратурная формула (2.3) становится квадратурной формулой типа Маркова с алгебраической степенью точности $2M$. В самом деле, так как $\cos M\tilde{\theta}_k = 0$, то квадратурная формула (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) превращается в квадратурную формулу типа Маркова (см. [20]). А если учесть, что при $\theta = \varphi_k$ около половины весовых коэффициентов $C_i(\varphi_k)$ обращаются в нуль, то квадратурная формула превращается в формулу такого же типа и при $\theta = \varphi_k$.

Имеем

$$H_M C = 0, \quad H_M \cos k\varphi = \sin k\theta, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Интерполяционную квадратурную формулу $H_M^* \tilde{g}$ для $H^* \tilde{g}$, точную для всех $\sin$ -многочленов $(M-1)$ -го порядка вида

$$\sum_{k=1}^{M-1} a_k \sin k\theta, \quad (2.11)$$

построим по узлам (2.4) следующим образом. Так как

$$H^* \tilde{g} = -\frac{H(\sin \varphi \tilde{g})}{\sin \theta}, \quad (2.12)$$

то положим

$$H_M^* \tilde{g} = -\frac{H_M(\sin \varphi \tilde{g})}{\sin \theta} = \sum_{k=1}^{M-1} C_k^*(\theta) \tilde{g}(\varphi_k), \quad (2.13)$$

$$C_k^*(\theta) = -\frac{\sin \varphi_k (1 - (-1)^k \cos M\theta)}{M(\cos \varphi_k - \cos \theta)}. \quad (2.14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_M^* \sin n\varphi &= \cos n\theta, \\ H_M^* H_M \cos n\varphi &= \cos n\theta, \quad H_M H_M^* \sin n\varphi = \sin n\theta, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $n = 1, 2, \dots, M-1$, и на множестве функций (2.11)

$$H_M^{-1} \tilde{g} = H_M^* \tilde{g} + C.$$

В §§ 3, 4 полученная квадратурная формула (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) для $H\tilde{g}$ будет использована при

$$M = 2^d(m+1), \quad d \geq 1, \quad (2.16)$$

при целом d . Тогда среди узлов (2.4) будут узлы (1.12).

Пусть на $[0, \pi]$ задана система точек интерполяции $\bar{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_l)$, где $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_l = \pi$, и задана функция $g(\theta) \in C^1[0, \pi]$. Интерполянт $\text{Int}_l(\theta, g, \bar{\gamma})$ (т.е. интерполяционную формулу для $g(\theta)$ по узлам $\bar{\gamma}$) построим, используя локальные кубические сплайны в следующем виде: если $\theta \in [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, то

$$\begin{aligned} \text{Int}_l(\theta, g, \bar{\gamma}) = & \left(g'_i(\theta - \gamma_i) + \left(1 + 2 \frac{\theta - \gamma_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) g_i \right) \left(\frac{\theta - \gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right)^2 \\ & + \left(g'_{i+1}(\theta - \gamma_{i+1}) + \left(1 + 2 \frac{\theta - \gamma_i}{\gamma_i - \gamma_{i+1}} \right) g_{i+1} \right) \left(\frac{\theta - \gamma_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где g_k, g'_k – значения функции $g(\theta)$ и ее односторонних производных в точках γ_k . Так как в §§ 3, 4 эта формула будет использована для достаточно гладких функций в случаях, когда точки γ_k являются точками экстремума $g(\theta)$ ($\tilde{e}$ -точками), то в (2.17) будем считать, что

$$g'_0 = \frac{g_1 - g_0}{\gamma_1 - \gamma_0}, \quad g'_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l-1, \quad g'_l = \frac{g_l - g_{l-1}}{\gamma_l - \gamma_{l-1}}. \quad (2.18)$$

Далее будем считать, что $l = m+1$, $\bar{\gamma}$ – координаты $\tilde{e}$ -точек, а M в (2.4), (2.16) выбрано столь большим, чтобы все значения g_k таблицы интерполяции были использованы при интерполировании с узлов $\bar{\gamma}$ на узлы (2.4) квадратурной формулы.

§ 3. Асимптотические формулы для фазовой функции и итерационный метод для экстремальных многочленов

Пусть $f(x) = x^{n+1}$, тогда

$$r_n(x) = \Omega_{n+1}(x)w(x), \quad (3.1)$$

где $\Omega_{n+1}(x)$ – ЭМ степени $n+1$ (см. (1.6)). Для него $m = n$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_n(0) \leq 0$, $0 \leq \psi_n(\pi) < \frac{\pi}{2}$ в представлении (1.7):

$$\Omega_{n+1}(x)w(x) = E \cos((n+1)\theta + \psi_n(\theta)). \quad (3.2)$$

Корни $\Omega_{n+1}(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$y_j = \cos \theta_j, \quad \theta_j = \frac{(j - \frac{1}{2})\pi - \psi_n(\theta_j)}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (3.3)$$

а e -точки удовлетворяют уравнениям

$$\xi_j = \cos \bar{\theta}_j, \quad \bar{\theta}_j = \frac{j\pi - \psi_n(\bar{\theta}_j)}{n+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (3.4)$$

Существует класс функций $w(x)$, всюду плотный в конусе непрерывных положительных функций, для которых $\Phi\Phi$ при достаточно большом n не зависит от n . В [20] изучены такие экстремальные на $[-1, 1]$ многочлены Чебышёва–Маркова–Бернштейна–Сегё $C_n(x)$ с весовыми функциями

$$w(x) = \frac{(1+x)^\alpha(1-x)^\beta}{\sqrt{S_l(x)}},$$

где $\alpha, \beta = 0, \frac{1}{2}$, $S_l(x) > 0$ на $[-1, 1]$ – многочлен l -й степени, $n \geq \frac{l}{2}$.

Пусть далее

$$w(x) = \exp g(x), \quad g(x) = \ln w(x), \quad \tilde{g}(\theta) = g(\cos \theta). \quad (3.5)$$

Если $w(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица

$$|w(x+h) - w(x)| |\ln h|^{1+a} \rightarrow 0, \quad a > 0, \quad h \rightarrow 0,$$

то Бернштейном и Сегё в [14], [16] получена асимптотическая формула для $\Phi\Phi$ $\psi_n(\theta): \psi_n(\theta) \rightarrow \psi(\theta)$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$\psi(\theta, w) = \psi(\theta) = H(\tilde{g}), \quad \psi(0) = \psi(\pi) = 0. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) содержит интеграл. В явном виде функция $\psi(\theta)$ вычисляется, если функция $w(x)$ является на $[-1, 1]$ экспонентой от кусочно-постоянной функции, многочлена Лагранжа, линейного или кубического сплайна (см. [22], [23]).

Приведем новую асимптотическую формулу, которую можно использовать для реальных вычислений. Для этого в квадратурной формуле (2.4), (2.5) положим $M = 2^d(n+1)$ (см. (2.16) при $m = n$):

$$\psi(\theta, w) = \psi(\theta) = H_M \tilde{g}. \quad (3.7)$$

В этой формуле узлы имеют вид

$$\varphi_i = \frac{i\pi}{M}, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (3.8)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ точки $\bar{\theta}_j$ будут асимптотически близки узлам (3.8) вида $j\pi/(n+1)$, а θ_j будут асимптотически близки узлам (3.8) вида $(j - \frac{1}{2})\pi/(n+1)$. Представление (3.7), (3.8) (асимптотическая формула для фазовой функции в (3.6)), а также формулы (3.3) для корней являются основой итерационного метода нахождения экстремальных многочленов, эффективно работающих при больших значениях n . Из (3.5)–(3.7) следуют важные свойства асимптотической фазовой функции $\psi(\theta, w)$:

$$\psi(\theta, w_1 w_2) = \psi(\theta, w_1) + \psi(\theta, w_2), \quad \psi\left(\theta, \frac{w_1}{w_2}\right) = \psi(\theta, w_1) - \psi(\theta, w_2), \quad (3.9)$$

$$\psi(\theta, w^\lambda) = \lambda \psi(\theta, w), \quad \psi\left(\theta, \frac{1}{w}\right) = -\psi(\theta, w). \quad (3.10)$$

Изложим идею итерационного метода для нахождения ФФ в (3.1), основанную на применении методов обратного анализа, теории возмущений и асимптотических формул (см. [22], [23]). Пусть задана функция $\psi(\theta)$. Для нее, решая уравнения (3.3), находим $\bar{y}$ – нули $\omega_{n+1}(x, \bar{y})$. Затем находим разделенные нулями точки $\xi_i = \cos \gamma_i$ – $\tilde{e}$ -точки локальных максимумов $|\omega_{n+1}(x, \bar{y})w(x)| = r_i$, $i = 0, 1, \dots, n+1$. Построим по значениям r_i в точках ξ_i достаточно гладкий положительный между $\tilde{e}$ -точками интерполянт $\delta w(x)$. Тогда $\omega_{n+1}(x, \bar{y})w(x)/\delta w(x)$ будет иметь на $[-1, 1]$ чебышёвский альтернанс, принимая в $\tilde{e}$ -точках значения ± 1 . Поэтому функция $\psi(\theta)$ обеспечивает решение возмущенной задачи с весом $w(x)/\delta w(x)$. Вычисляя для $\delta w(x)$ по формулам (3.5), (3.7), (3.8) ФФ $\delta\psi(\theta)$, берем, учитывая свойства (3.9), (3.10), за новое приближение для ФФ функцию $\psi(\theta) + \delta\psi(\theta)$. Этим определяется алгоритм коллективного движения в (1.8), (1.9) и лемме 2 нулей $\bar{y}$ и $\tilde{e}$ -точек при возмущении весовой функции.

Рассмотрим подробнее алгоритм вычисления $\delta\psi(\theta)$. Пусть

$$\delta g(\theta) = \ln \delta w(\cos \theta), \quad \delta g_k = \delta g(\varphi_k), \quad \delta\psi_k(\theta) = C_k(\theta)\delta g_k, \quad (3.11)$$

тогда согласно (2.5)

$$\delta\psi(\theta) = H_M \delta g, \quad \delta\psi(\theta) = \sum_{k=0}^M \delta\psi_k(\theta). \quad (3.12)$$

Не уменьшая общности, можно считать в этой формуле, что $\sum_{k=0}^M \delta g_k = 0$. Таким образом, знак поправки $\delta\psi(\theta)$ определяется суммой слагаемых $\delta\psi_k(\theta)$. Влияние каждого отдельного слагаемого на движение нулей и $\tilde{e}$ -точек вытекает из лемм 2, 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\delta g_k \geq 0$ при $k = 0, 1, \dots, M$, то $\delta\psi_k(\theta) \geq 0$ при $\theta \geq \varphi_k$ и $\delta\psi_k(\theta) \leq 0$ при $\theta \leq \varphi_k$; если $\delta g_k \leq 0$, то $\delta\psi_k(\theta) \leq 0$ при $\theta \geq \varphi_k$ и $\delta\psi_k(\theta) \geq 0$ при $\theta \leq \varphi_k$.

Этот метод был предложен в [22], [23], реализован в программе KLM и показал высокую скорость сходимости. Для простоты изложения будем предполагать, что концы отрезка $[-1, 1]$ всегда принадлежат e - и $\tilde{e}$ -точкам. За итерируемую функцию возьмем функцию $\tilde{G}(\theta)$. Переход от $\tilde{G}^k(\theta)$ к $\tilde{G}^{k+1}(\theta)$ и вычисление $\psi^{k+1}(\theta)$ – приближений для $\psi_n(\theta)$ выполняем следующим образом. Полагаем $\tilde{G}^0(\theta) = \tilde{g}(\theta)$, где функция $\tilde{g}(\theta)$ определена в (3.5). Затем для произвольного k выполняем следующее.

Алгоритм 1. По заданному $\tilde{G}^k(\theta)$ определяем по формуле (3.7)

$$\psi^{k+1}(\theta) = H_{2^d(n+1)}(\tilde{G}^k) = H_{2^d(n+1)}(\tilde{G}^k(\varphi) - \tilde{G}^k(\theta)). \quad (3.13)$$

Для проведения итераций достаточно определить $\tilde{G}^k$ лишь в точках φ_i в (3.8).

Алгоритм 2. Решая уравнения (3.3), находим θ_j^{k+1} и вычисляем $\bar{y}^{k+1}$. Находим $\tilde{e}$ -точки $\xi_i^{k+1} = \cos \gamma_i^{k+1}$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, для $\omega_{n+1}(x, \bar{y}^{k+1})w(x)$. Вычисляем

$$r_i^{k+1} = |\omega_{n+1}(\xi_i^{k+1}, \bar{y}^{k+1})w(\xi_i^{k+1})|, \quad s_i^{k+1} = \ln r_i^{k+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Рис. 1

Алгоритм 3. По формулам (2.17), (2.18) определяем $\delta G^{k+1}(\varphi_j)$:

$$\delta G^{k+1}(\varphi_j) = \text{Int}_{n+1}(\varphi_j, s^{k+1}, \bar{\gamma}^{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, 2^d(n+1), \quad (3.14)$$

и полагаем при $0 < \tau_k \leq 1$

$$G^{k+1}(\varphi_j) = G^k(\varphi_j) + \tau_k \delta G^{k+1}(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2^d(n+1). \quad (3.15)$$

Тогда

$$\Omega_{n+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{n+1}(x, \bar{y}^k).$$

Используя программу KLM (см. [22], [23]), испытаем предложенный метод в случае, когда весовая функция $w(x)$ разрывна. Пусть функция $w(x)$ равна 4 при $\frac{1}{3} < x \leq 1$, 2 при $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ и 1 при $-1 \leq x < \frac{1}{3}$. Метод показал хорошую сходимость; на рис. 1 показан график нормированного ЭМ $\Omega_{40}(x)$.

§ 4. Формулировка алгоритма нахождения параметров многочленов наилучшего с весом приближения

В предлагаемом итерационном методе определяются нули $\bar{y}$ функции $r_n(x)$ (см. (1.2)), представленной с одной стороны в виде (1.5) через многочлен Лагранжа $L_n(x, \bar{y})$ и в виде тригонометрической формы (1.7), содержащей фазовую функцию $\psi_n(\theta)$, с другой. В основе алгоритма лежит итерационный метод для нахождения $\psi_n(\theta)$, итерационные поправки к которой с помощью асимптотической формулы (3.7) определяют движение всего множества нулей и ϵ -точек в уравнениях (1.8), (1.9). Строгое доказательство сходимости предложенного алгоритма и оценки при больших n его скорости сходимости заслуживают отдельного непростого исследования, важной частью которого должно быть изучение асимптотических формул для ФФ $\psi_n(\theta)$ в (1.7) как функционала от $f(x)$, $w(x)$. Здесь мы приведем лишь схему рассуждений, правильность которых подтвердим при численном решении задач в примерах 3–9.

Пусть известно, что в (1.7) $m = n$, $\xi_0 = 1$, $\xi_{m+1} = -1$, а $0 < f^{(n+1)}(x) < R$, $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$, $|z_i|, |x_i|, |v_i|, |y_i| \leq 1$,

$$\bar{e}_n = \min_{\bar{z}} \min_{\bar{x}} \max_{x \in [-1, 1]} |w(x) l_n(x, \bar{z}) \omega_{n+1}(x, \bar{x})|, \quad (4.1)$$

где

$$l_n(x, \bar{z}) = \frac{f(x) - L_n(x, \bar{z})}{\omega_{n+1}(x, \bar{z})}. \quad (4.2)$$

Пусть (4.1) реализуется при $\bar{z} = \bar{v}$, $\bar{x} = \bar{y}$, тогда $0 < l_n(x, \bar{z}), l_n(x, \bar{v}) < R$, $x \in [-1, 1]$, $0 < \bar{e}_n \leq e_n$. Нас интересует решение задачи (4.1) при дополнительном условии, когда двойной минимум в (4.1) достигается при одинаковых значениях аргументов: $\bar{v} = \bar{y}$. Поэтому рассмотрим решение задачи (4.1) с условием на “диагонали”

$$\bar{z} = \bar{x}. \quad (4.3)$$

Для нахождения решения задачи (4.1), (4.3) с двойным минимумом рассмотрим следующий итерационный алгоритм построения “диагональной” последовательности приближений, при сходимости которого $\bar{e}_n = e_n$. По заданному на k -м шаге $\bar{z} = \bar{z}^k$ решаем задачу внутренней минимизации:

$$\min_{\bar{x}} \max_{x \in [-1, 1]} |w(x) l_n(x, \bar{z}^k) \omega_{n+1}(x, \bar{x})|. \quad (4.4)$$

Для этого находим $\bar{x} = \bar{x}^k$ изложенным в §3 итерационным методом, содержащим J внутренних итераций с начальным приближением $\bar{z}^k$, и полагаем далее $\bar{z}^{k+1} = \bar{x}^k$. Многочлен $\omega_{n+1}(x, \bar{x}^k)$, реализующий точное решение задачи (4.4), будет иметь на $[-1, 1]$ чебышёвский с весом $|w(x) l_n(x, \bar{z}^k)|$ альтернанс и тригонометрическое представление (1.7).

Таким образом, мы формально свели экстремальную задачу (1.5) для МНП к экстремальной задаче (1.6) для ЭМ с зависящим от $\bar{z}^k$ весом $W(x, \bar{z}^k) = |w(x) l_n(x, \bar{z}^k)|$. Гладкость этой функции оценивается в лемме 1. И наконец, полагаем $J = 1$, считая достаточной эффективность даже одной итерации по формулам (3.13)–(3.15). При этом $\tilde{e}$ -точки для этой итерации, по которым в §3 вычисляется поправка, определяются функцией $(f(x) - L_n(x, \bar{z}^k))w(x)$, а движение нулей и $\tilde{e}$ -точек определяется формулами (3.11), (3.12) и следствием 3.

В таком методе за итерируемую функцию берем функцию $\tilde{G}(\theta)$. Переход от $\tilde{G}^k(\theta)$ к $\tilde{G}^{k+1}(\theta)$ и вычисление $\psi^{k+1}(\theta)$ – приближений для $\psi_n(\theta)$ – выполняем следующим образом. Пусть функция $a(x) = \cos((m+1)\theta + \bar{\psi}(\theta))$, а $\bar{x}^0$ – ее корни (здесь $\bar{\psi}(\theta) = \psi(\tilde{g}(\theta), \theta)$, а $\tilde{g}(\theta)$ определена в (3.5)), $b(x) = (f(x) - L_m(x, \bar{x}^0))w(x)$. Тогда полагаем

$$\tilde{G}^0(\theta) = \ln \left| \frac{b(\cos \theta)}{a(\cos \theta)} \right| + \tilde{g}(\theta). \quad (4.5)$$

Затем для произвольного k выполняем следующее.

Алгоритм 1. По заданному $\tilde{G}^k(\theta)$ определяем по формуле (3.7)

$$\psi^{k+1}(\theta) = H_{2^d(m+1)}(\tilde{G}^k) = H_{2^d(m+1)}(\tilde{G}^k(\varphi) - \tilde{G}^k(\theta)). \quad (4.6)$$

Алгоритм 2. Решая уравнения (1.8), находим θ_j^{k+1} и вычисляем $\bar{y}^{k+1}$. Находим $\tilde{e}$ -точки $\xi_i^{k+1} = \cos \gamma_i^{k+1}$, $i = 0, 1, \dots, m+1$, для $q_n(x, \bar{y}^{k+1})$. Вычисляем

$$r_i^{k+1} = |q_n(\xi_i^{k+1}, \bar{y}^{k+1})|, \quad s_i^{k+1} = \ln r_i^{k+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m+1.$$

Алгоритм 3. По формулам (2.17), (2.18) определяем $\delta G^{k+1}(\varphi_j)$:

$$\delta G^{k+1}(\varphi_j) = \text{Int}_{m+1}(\varphi_j, s^{k+1}, \bar{\gamma}^{k+1}), \quad j = 0, 1, \dots, 2^d(m+1), \quad (4.7)$$

и полагаем при $0 < \tau_k \leq 1$

$$G^{k+1}(\varphi_j) = G^k(\varphi_j) + \tau_k \delta G^{k+1}(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2^d(m+1). \quad (4.8)$$

Заметим, что в [17], [24] был предложен при $m = n$, $w(x) = 1$ итерационный метод с использованием фазовой функции и других формул для поправок к ней.

Случай $m > n$ требует дополнительных предположений. Разберем одно из них. Пусть известно значение m и функция $q_n(x, \bar{x})$ имеет в процессе итераций вид

$$q_n(x, \bar{x}) = w(x) l_m(x, \bar{x}) \omega_{m+1}(x, \bar{x}), \quad (4.9)$$

где $|l_m(x, \bar{x})| > 0$ на $[0, \pi]$. Тогда проводим итерационный метод по выше приведенным формулам, положив в них $n = m$, при этом искомым многочлен $L_n(x, \bar{y})$ согласно следствию 2 совпадет с $L_m(x, \bar{y})$.

Рис. 2

Эффективность предлагаемого метода была проверена численными расчетами по составленной автором программе PHASE. В приведенных примерах 3–9 и результатах расчетов $\xi_0 = 1$, $\xi_{m+1} = -1$, $\tau_k = 1$, $d = 2$. За весовую функцию были взяты функция $w(x) = 1$ или четная функция $w(x) = w_0(x)$, график которой приведен на рис. 2. Приведены значения n , m , e_n , δ – отношения разброса значений r_i к e_n – и it – число итераций.

ПРИМЕР 3. Пусть $f(x) = \exp 2x$. Производные этой функции не меняют знак. Тогда при $n = m = 10$, $w(x) = 1$ имеем $e_{10} = 5.48 \cdot 10^{-8}$, $\delta = 1.7 \cdot 10^{-6}$,

Рис. 3. Здесь сплошная линия обозначает $\psi_{10}(\theta)$ при $w(x) = 1$, пунктир – $\psi_{10}(\theta)$ при $w(x) = w_0(x)$

it = 2, а при $w(x) = w_0(x) - e_{10} = 6.9 \cdot 10^{-8}$, $\delta = 2.8 \cdot 10^{-1}$, it = 3. Графики функций $\psi_{10}(\theta)$ при $w(x) = 1$ и $w(x) = w_0(x)$ приведены на рис. 3.

Рассмотрим случаи, когда $m = n + 1$, а корни y_j расположены симметрично относительно $x = 0$.

Рис. 4. Здесь сплошная линия обозначает $\psi_9(\theta)$ при $w(x) = 1$, пунктир – $\psi_9(\theta)$ при $w(x) = w_0(x)$

ПРИМЕР 4. Пусть $f(x) = \sin \pi x$. Производные этой функции меняют знак. Тогда при $n = 9$, $w(x) = 1$ имеем: $e_9 = 5.85 \cdot 10^{-6}$, $\delta = 1.45 \cdot 10^{-7}$, it = 2, а при $w(x) = w_0(x) - e_9 = 8.9 \cdot 10^{-6}$, $\delta = 2.9 \cdot 10^{-4}$, it = 3. Графики функций $\psi_9(\theta)$ при $w(x) = 1$ и $w(x) = w_0(x)$ приведены на рис. 4.

Рис. 5

Известно (см. [5], [6]), что для $T_{11}(x)$ при $n < 11$, $w(x) = 1$ МНП есть нулевой многочлен.

ПРИМЕР 5. Пусть $f(x) = T_{11}(x)$. Тогда при $n = 9$, $w(x) = w_0(x)$ имеем $e_9 = 1.35$, $\delta = 1.8 \cdot 10^{-3}$, $it = 10$. Графики функций $T_{11}(x)$, $P_9(x)$ приведены на рис. 5.

Рис. 6

ПРИМЕР 6. Пусть $f(x) = \exp(-10x^2)$. Производные этой функции изменяются в широких пределах. Тогда при $n = 16$ имеем $e_{16} = 2.76 \cdot 10^{-4}$, $\delta_{16} = 3.81 \cdot 10^{-7}$, $it = 4$. График функции $\psi_{16}(\theta)$ приведен на рис. 6.

Рассмотрим случай недифференцируемой функции.

Рис. 7

ПРИМЕР 7. Пусть $f(x) = |x|$ – функция, удовлетворяющая условию Липшица. Тогда при $n = 24$, $w(x) = 1$ имеем $e_{24} = 1.17 \cdot 10^{-2}$, $\delta = 3.29 \cdot 10^{-5}$, $it = 13$. График функции $\psi_{24}(\theta)$ приведен на рис. 7.

Рис. 8

ПРИМЕР 8. Пусть $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ – функция, имеющая бесконечные производные при $|x| = 1$. Тогда при $n = 32$ имеем $e_{32} = 8.75 \cdot 10^{-3}$, $\delta = 9.21 \cdot 10^{-4}$, $it = 10$. График функции $\psi_{32}(\theta)$ приведен на рис. 8.

ПРИМЕР 9. Пусть $f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(200x)$ – аппроксимация ступеньки. Тогда при $n = 35$ имеем $e_{35} = 1.14 \cdot 10^{-1}$, $\delta = 2.36 \cdot 10^{-6}$, $it = 4$. Графики функций $f(x)$, $P_{35}(x)$ приведены на рис. 9, а $\psi_{35}(\theta)$ – на рис. 10.

Рис. 9

Расчеты показали эффективность предложенного алгоритма движения всего множества нулей и ϵ -точек. Расчеты каждого примера при различных n показали важные качества предложенного алгоритма: наличие в каждом примере при $n \rightarrow \infty$ своей асимптотики у функций $\psi_n(\theta)$ и что скорость сходимости итераций зависит от гладкости приближаемой функции и не уменьшается с ростом n . Уместно определить границы применимости предложенного метода. Этому поможет

Рис. 10

ПРИМЕР 10. Пусть $f(x) = \tilde{w}(x)$, где $\tilde{w}(x)$ является фрактальной функцией Вейерштрасса–Мандельброта, представимая лакунарным тригонометрическим рядом: при $t = (1 + x)/2$

$$\tilde{w}(x) = \frac{1}{10} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(b^n t/2)}{b^{(2-\bar{d})n}},$$

Рис. 11

где $b > 1$, $1 < \bar{d} < 2$. Она непрерывна, но не дифференцируема ни в одной точке. Здесь нарушены предположения и условия аппроксимации функций, сингулярных интегралов квадратурными формулами для фазовой функции. Уравнения (1.8) для корней $r_n(x)$ могут иметь неединственные решения. Пусть $b = 1.4$, $\bar{d} = 1.8$. Положим $d = 2$, $w(x) = 1$, $n = 48$. При $\tau_k = \tau$ метод (4.4)–(4.8) не сходиллся. Было найдено значение $0 < p < 1$ в алгоритме

$$\tau_k = p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, 16, \quad \tau_{17} = p10^{-5},$$

при котором для $it = 17$ получен приближенный к МНП многочлен $Q_{48}(x)$ с отклонением $\tilde{e} = 0.147$ от $\tilde{w}(x)$. Это $p = 0.975$ с $\xi_0 = 0.999976$, $\xi_{49} = -1$. Графики функций $\tilde{w}(x)$, $Q_{48}(x)$ приведенные на рис. 11, а $\psi_{48}(\theta)$ – на рис. 12, показывают на отсутствие должной гладкости у функции $\psi_{48}(\theta)$ и неединственность

Рис. 12

решений уравнений (1.8), так как функция $q_{48}(x)$ имеет 1567 нулей. В этом примере метод оказался очень чувствительным к изменению p .

Заметим в заключение, что формула (4.5), дающая переход от функции $\tilde{g}(\theta)$ к $\tilde{G}^0(\theta)$, может быть положена в основу другого итерационного метода, в котором

$$\delta G^{k+1} = \ln \left| \frac{q_n(x, \bar{y}^{k+1})}{\cos((m+1)\theta + \psi^{k+1}(\theta))} \right|.$$

Список литературы

- [1] П. Л. Чебышёв, “Теория механизмов, известных под названием параллелограммов”, *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, М., 1955, 611–648.
- [2] П. Л. Чебышёв, “Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций”, *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, М., 1955, 462–578.
- [3] П. Л. Чебышёв, “О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных”, *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, М., 1955, 579–610.
- [4] Е. Я. Ремез, *Основы численных методов чебышёвского приближения*, Наукова думка, Киев, 1969.
- [5] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, т. 1, Физматлит, М., 1959; англ. пер.: I. S. Berezin, N. P. Zhidkov, *Computing methods*, vol. 1, Pergamon Press, Oxford–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt; Addison-Wesley, Reading, MA–London, 1965.
- [6] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Физматлит, М.; Нев. Диалект, Спб., 2000.
- [7] В. И. Лебедев, “О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения”, *Тезисы докладов III международной конференции “Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания”* (Обнинск, 2006), Изд-во Обнинского ун-та, Обнинск, 2006, 76–77.
- [8] В. И. Лебедев, “О методе нахождения многочленов наилучшего с весом приближения”, *Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского*, **33** (2006), 3–18.
- [9] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [10] С. Ф. Пашковский, “О расположении ϵ -точек полиномов наилучшего приближения”, *Докл. АН СССР*, **117**:4 (1957), 576–577.
- [11] М. И. Кадец, “О распределении точек максимального отклонения при аппроксимации непрерывных функций многочленами”, *УМН*, **15**:1 (1960), 199–202; англ. пер.: M. I. Kadec, “On the distribution of points of maximum deviation in the approximation of continuous functions by polynomials”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **26** (1963), 231–234.
- [12] В. Г. Вердиев, “Эволюция нулей и точек экстремумов тригонометрического многочлена при изменении его экстремального значения”, *Матем. заметки*, **48**:5 (1990), 143–146.
- [13] С. Н. Бернштейн, “Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций”, *Собрание сочинений*, т. I. *Конструктивная теория функций* (1905–1930), Изд-во АН СССР, М., 1952, 127–135.
- [14] С. Н. Бернштейн, “Об одном классе ортогональных многочленов”, *Собрание сочинений*, т. I. *Конструктивная теория функций* (1905–1930), Изд-во АН СССР, М., 1952, 452–465.

- [15] С. Н. Бернштейн, “О многочленах, ортогональных на конечном отрезке”, *Собрание сочинений*, т. II. *Конструктивная теория функций* (1931–1953), Изд-во АН СССР, М., 1954, 7–106.
- [16] Г. Cserő, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [17] E. Stiefel, “Methods – old and new – for solving the Tchebycheff approximation problem”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **1**:1 (1964), 164–176.
- [18] П. Л. Чебышёв, “О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных”, *Полное собрание сочинений*, т. 3, Изд-во АН СССР, М., Л., 1948, 108–120.
- [19] А. А. Марков, “Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля”, *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, ОГИЗ, М., Л., 1948, 244–291.
- [20] В. И. Лебедев, “Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 21–66; англ. пер.: V. I. Lebedev, “Extremal polynomials and methods of optimization of numerical algorithms”, *Sb. Math.*, **195**:10 (2004), 1413–1459.
- [21] И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн*, Янус, М., 1995.
- [22] V. I. Lebedev, “A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. I”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **8**:3 (1993), 195–222.
- [23] V. I. Lebedev, “A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. II”, *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **8**:5 (1993), 397–426.
- [24] E. Stiefel, “Phase methods for polynomial approximation”, *Approximation of functions* (Proc. Sympos. General Motors Res. Lab., Warren, MI, 1964), Elsevier, Amsterdam, 1965, 68–82.

В. И. Лебедев (V. I. Lebedev)

Российский научный центр

“Курчатовский институт”, г. Москва;

Институт вычислительной математики РАН, г. Москва

E-mail: lebedev@inm.ras.ru

Поступила в редакцию

07.06.2007 и 06.11.2007