Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Скрыпник, Об устранимости изолированной особенности для анизотропных эллиптических уравнений с абсорбцией, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 7, 85–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:52:16

УДК 517.956.25

И. И. Скрыпник

Об устранимости изолированной особенности для анизотропных эллиптических уравнений с абсорбцией

Работа посвящена изучению решений с точечной особенностью для общего эллиптического уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^{q-1} u = 0.$$

Развит метод получения новых поточечных оценок решения и интегральных оценок градиента решения. Установлены точные условия поведения члена уравнения, характеризующего абсорбцию, при которых не существует решений с точечной особенностью.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучается устранимость изолированных особенностей решений квазилинейного эллиптического уравнения

$$-\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x, u) = 0 \quad (1.1)$$

в $\Omega \setminus \{x_0\}$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$.

Предполагаем, что коэффициенты $g(x, u)$, $a_i(x, u, \xi)$, $i = 0, \dots, n$, определены при $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяют условиям Каратеодори и при некоторых положительных постоянных ν_1 , ν_2 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_i &\geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i}, \\ |a_i(x, u, \xi)| &\leq \nu_2 \left(\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + |u|^{p(1-\frac{1}{p_i})} + 1 \right), \quad i = 1, \dots, n, \\ |a_0(x, u, \xi)| &\leq \nu_2 \left(\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p}} + |u|^{p-1} + 1 \right), \\ g(x, u) \operatorname{sign} u &\geq \nu_1 (|u|^q - 1), \quad |g(x, u)| \leq \nu_2 (|u|^q + 1), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 05-1000008-7921).

а числа $p, q, p_i, i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n < \frac{n-1}{n-p} p, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, \quad p < n, \quad (1.3)$$

$$q \geq \frac{n(p-1)}{n-p}. \quad (1.4)$$

Первый результат по устранимости изолированной особенности для решения уравнения

$$-\Delta u + u^q = 0, \quad x \in \Omega \setminus \{x_0\}, \quad (1.5)$$

был получен Х. Брезисом и Л. Вероном (см. [1]), которые показали, что в случае $q \geq n/(n-2)$ любое решение уравнения (1.5) имеет устранимую особенность в точке $\{x_0\}$.

Для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений специального вида с абсорбцией аналогичные вопросы рассматривались многими авторами. Обзор полученных результатов и литературные ссылки можно найти в монографии Л. Верона [2].

Устранимость изолированных особенностей для общих эллиптических и параболических уравнений с абсорбцией получена автором в работах [3], [4].

Уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + g(x)|u|^{p-2}u = 0 \quad (1.6)$$

мало изучены.

Локальная ограниченность решений уравнения (1.6) была получена в работах [5], [6] при условии

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \frac{np}{n-p}, \quad p < n. \quad (1.7)$$

М. Джаквинта (см. [7]) и П. Марчеллини (см. [8]) построили контрпримеры нерегулярных и неограниченных решений уравнения (1.6) при $p_n > np/(n-p)$. В связи с тем, что не удастся построить в явном виде фундаментальное решение уравнения (1.6), до недавнего времени не было понятно, как сформулировать точное условие устранимости изолированной особенности для решения этого уравнения. Этот вопрос был успешно решен в работе [9], где доказывается, что особенность в точке $\{x_0\}$ устранима, если $g(x) \in L_{\frac{n}{p-\delta}}(\Omega)$, $0 < \delta < 1$, и

$$\operatorname{ess\,sup}_{D(R) \setminus D(r)} |u(x)| = o\left(r^{-\frac{n-p}{p-1}}\right), \quad p < n, \quad (1.8)$$

где R – некоторое фиксированное число и

$$D(r) = \left\{ x \in \Omega : \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(0)}|^{\frac{a_i}{a_1}} \right)^{a_1} \leq r \right\}, \quad (1.9)$$

$$a_i = \frac{p_i(p-1)}{p(p_i-1) + n(p-p_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Условие (1.8) является точным и совпадает с аналогичным условием для уравнения (1.6) при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ (см. [10]).

В настоящей работе доказывается, что если выполнены условия (1.3), (1.4), то изолированная особенность решения уравнения (1.1) устранима. Доказательство основано на новых априорных оценках решений с особенностью.

Метод получения подобных оценок был разработан в работе [11] и в дальнейшем развит в работах [3], [4], [9], [10].

В § 2 мы формулируем вспомогательные утверждения и основные результаты. Вспомогательные поточечные интегральные оценки решения уравнения (1.1) доказываются в §§ 3, 4. Основная поточечная оценка решения уравнения (1.1) доказывается в § 5.

§ 2. Вспомогательные утверждения и основные результаты

Анизотропное пространство Соболева $W_{p_1, \dots, p_n}^1(\Omega)$ будем обозначать через $W_{(p)}^1(\Omega)$.

Следующую теорему вложения можно найти, например, в [5].

ЛЕММА 2.1. Пусть $u(x) \in \dot{W}_1^1(\Omega)$ и

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx < \infty, \quad \alpha_i \geq 0, \quad p_i \geq 1.$$

Если $1 < p < n$, то

$$u(x) \in L_q(\Omega), \quad q = \frac{np}{n-p} \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} \right)$$

и выполнено следующее неравенство:

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq c \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{np_i(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p_k})}}, \quad (2.1)$$

где c – некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от $n, \alpha_i, p_i, i = 1, \dots, n$.

В дальнейшем также будем использовать следующее простое утверждение, доказательство которого можно найти в [11; гл. 8, § 1].

ЛЕММА 2.2. Пусть $\{\alpha_i\}, i = 1, 2, \dots$, – ограниченная числовая последовательность такая, что для всех $j \geq 1$ выполнено неравенство

$$\alpha_j \leq A a^j \alpha_{j+1}^\sigma, \quad \sigma \in (0, 1), \quad A, a \geq 1. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\alpha_1 \leq c A^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (2.3)$$

где постоянная c зависит лишь от σ, a .

Определим понятие сингулярного решения уравнения (1.1) с особенностью в точке $\{x_0\}$. Под решением уравнения (1.1) с особенностью в $\{x_0\}$ понимаем функцию $u(x)$, удовлетворяющую включению

$$u(x)\psi(x) \in W_{(p)}^1(\Omega) \quad (2.4)$$

и интегральному тождеству

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \varphi dx + \int_{\Omega} g(x, u) \varphi dx = 0 \quad (2.5)$$

с $\varphi(x) = \psi(x)\zeta(x)$, где $\psi(x)$ – произвольная функция класса $C^\infty(\Omega)$, равная нулю в окрестности $\{x_0\}$, и $\zeta(x)$ – произвольная функция из пространства $\dot{W}_{(p)}^1(\Omega)$.

Будем говорить, что сингулярность в точке $\{x_0\}$ *устранима*, если $u(x) \in W_{(p)}^1(\Omega)$ и интегральное тождество (2.5) справедливо для любой функции $\varphi(x) \in \dot{W}_{(p)}^1(\Omega)$.

Нашим основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $u(x)$ является сингулярным решением уравнения (1.1) в области $\Omega \setminus \{x_0\}$ и выполнены условия (1.2)–(1.4). Тогда особенность в точке $\{x_0\}$ *устранима*.

Доказательство теоремы 2.1 состоит из нескольких этапов. Вначале устанавливается предварительная поточечная оценка, которая дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда существует постоянная K_1 , зависящая лишь от $\nu_1, \nu_2, q, n, p_i, i = 1, \dots, n$, такая, что справедлива оценка

$$|u(x)| \leq K_1 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(0)}|^{\frac{p_i q}{q-p_i+1}} \right)^{-\frac{1}{q}} \quad (2.6)$$

для

$$0 < \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(0)}|^{\frac{p_i q}{q-p_i+1}} \leq R_0, \quad x \in \Omega.$$

В дальнейшем, используя (2.6) и некоторые интегральные оценки градиента из § 4, мы получаем улучшенную оценку вида

$$|u(x)| \leq K_2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(0)}|^{a_i} \right)^{-\frac{n-p}{p-1} + \theta}, \quad \theta > 0, \quad (2.7)$$

для $0 < \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(0)}|^{a_i} \leq R_0$, a_i определены в (1.10). Из (2.7) мы получим, что решение $u(x)$ удовлетворяет включению

$$|u(x)|^{q-p+1} \in L_{\frac{n}{p-\delta_0}}(\Omega) \quad (2.8)$$

с некоторым $0 < \delta_0 < 1$, поэтому теорема 2.1 является следствием результатов работы [9].

ЗАМЕЧАНИЕ. Все результаты работы остаются справедливыми для более общего уравнения, когда справедливы структурные неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \xi) \xi_i &\geq \nu_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i}, \\ |a_i(x, u, \xi)| &\leq \nu_2 \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} + g_1(x) |u|^{p(1-\frac{1}{p_i})} + f_1(x), \quad i = 1, \dots, n, \\ |a_0(x, u, \xi)| &\leq h(x) \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p}} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \\ g(x, u) \operatorname{sign} u &\geq \nu_1 |u|^q - f_3(x), \quad |g(x, u)| \leq \nu_2 |u|^q + f_4(x) \end{aligned}$$

с неотрицательными функциями $h(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $f_1(x)$ – $f_4(x)$, для которых справедливо включение

$$\begin{aligned} F(x) &\in L_{\frac{n}{p-\delta}}(\Omega), \quad 0 < \delta < 1, \\ F(x) &= h^p(x) + \sum_{i=1}^n [f_1(x)]^{\frac{p_i}{p_i-1}} + \sum_{i=1}^n [g_1(x)]^{\frac{p_i}{p_i-1}} + g_2(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x). \end{aligned}$$

§ 3. Доказательство теоремы 2.2

Без ограничения общности считаем, что $x_0 = 0$. Зафиксируем положительное число

$$R_0 \leq \frac{1}{2} \min\{1, \operatorname{dist}(0, \partial\Omega)\}$$

и обозначим для $0 < r \leq R_0$

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= \left\{ x \in \Omega : \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\bar{p}_i} \right)^{\frac{1}{a}} \leq r \right\}, \\ a &= \frac{pq}{q-p+1}, \quad \bar{p}_i = \frac{p_i q}{q-p_i+1}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$M(r) = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)| : x \in \Omega(R_0) \setminus \Omega(r)\}. \tag{3.2}$$

Используя итерационный метод Мозера, легко показать, что величина $M(r)$ конечна при любом $r > 0$. Далее предполагаем, что $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \infty$, так как в противном случае устранимость особенности следует из работы [9]. Для $0 < \rho < R_0/4$, $\sigma \in (0, 1/8)$ рассмотрим функцию

$$\varphi_{\sigma\rho}(x) = \omega\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\bar{p}_i}\right)^{\frac{1}{a}}}{\rho}\right),$$

где $\omega: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция класса C^∞ такая, что $\omega(s) = 1$ при $1 \leq s \leq 2$, $\omega(s) = 0$ вне интервала $1 - \sigma \leq s \leq 2 + \sigma$; $0 \leq \omega(s) \leq 1$, $\left| \frac{d\omega(s)}{ds} \right| \leq \frac{2}{\sigma}$.

Будем обозначать через γ всевозможные постоянные, зависящие лишь от ν_1 , ν_2 , n , $p_1, \dots, p_n$.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx + \int_{\Omega} |u|^{q+1} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx \leq \gamma \sigma^{-\frac{p(p+1)}{q-p+1}} \rho^{n-\frac{p(q+1)}{q-p+1}}, \quad (3.3)$$

здесь k – фиксированное положительное число, $k \geq p_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.5) функции

$$\psi(x) = u(x) \varphi_{\sigma\rho}^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \varphi_{\sigma\rho}(x).$$

Используя условия (1.2), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{q+1} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx \\ & \leq \gamma \sum_{i=1}^n (\sigma\rho)^{-\frac{p(q-p_i+1)}{q-p+1}} \int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx + \gamma \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p) \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что в силу условий (1.3), (1.4) выполнено неравенство

$$p_1 \leq p \leq p_n < q + 1, \quad (3.5)$$

поэтому неравенство Юнга влечет

$$\begin{aligned} & \gamma \sum_{i=1}^n (\sigma\rho)^{-\frac{p(q-p_i+1)}{q-p+1}} \int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx \\ & \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |u(x)|^{q+1} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx + \gamma \sigma^{-\frac{p(q+1)}{q-p+1}} \rho^{n-\frac{p(q+1)}{q-p+1}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь мы также воспользовались очевидным неравенством

$$\text{mes } \Omega(\rho) \leq \gamma \rho^n. \quad (3.7)$$

Аналогичным образом оценивается второе слагаемое правой части (3.4). Оценка (3.3) является следствием неравенств (3.4), (3.6). Таким образом, лемма 3.1 доказана.

Подставим в интегральное тождество (2.5) пробные функции

$$\psi(x) = u(x) |u(x)|^l \varphi_{\sigma\rho}^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \varphi_{\sigma\rho}(x), \quad k, l > 0.$$

Используя условия (1.2), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u(x)|^l \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{l+q+1} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx \\ & \leq \gamma (k+l)^{p_n} \sum_{i=1}^n (\sigma\rho)^{-p \frac{q-p_i+1}{q-p+1}} \int_{\Omega} |u(x)|^{l+p_i} \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx \\ & \quad + \gamma (k+l)^{p_n} \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p) |u(x)|^l \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Положим

$$H(\rho) = 1 + M^p(\rho) + \sum_{i=1}^n \rho^{-p \frac{q-p_i+1}{q-p+1}} M^{p_i}(\rho);$$

тогда неравенство (3.8) влечет

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u(x)|^l \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{l+q+1} \varphi_{\sigma\rho}^k(x) dx \\ & \leq \gamma(k+l)^{p_n} \sigma^{-p \frac{q-p_1+1}{q-p+1}} H(\rho(1-\sigma)) M^{p_n}(\rho(1-\sigma)) \int_{\Omega} |u(x)|^{l-p_n} \varphi_{\sigma\rho}^{k-p_n}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть l, l_1, l_2 – произвольные положительные числа такие, что

$$l = l_1 + l_2, \quad l_1 - p = l_2 \frac{n}{p} - q - 1. \quad (3.10)$$

Используя неравенство Гёльдера, неравенство (3.9) и лемму 2.1 при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = l_1 - p$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x)|^l \varphi_{\sigma\rho}^l(x) dx \\ & \leq \left(\int_{\Omega} [|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x)]^{l_1 \frac{n}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\int_{\Omega} [|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x)]^{l_2 \frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}} \\ & \leq \gamma \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} (|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x))^{l_1-p} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u(x) \varphi_{\sigma\rho}(x)) \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{p}{n p_i}} \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} [|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x)]^{l_2 \frac{n}{p}} dx \right)^{\frac{p}{n}} \\ & \leq \gamma l^{p_n(1+\frac{p}{n})} \sigma^{-p \frac{q-p_1+1}{q-p+1} (1+\frac{p}{n})} H^{1+\frac{p}{n}}(\rho(1-\sigma)) M^{(1+\frac{p}{n})p_n}(\rho(1-\sigma)) \\ & \quad \times \left(\int_{\Omega} [|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x)]^{l \frac{n}{n+p} - (q+1-p) \frac{p}{n+p} - p-p_n} dx \right)^{1+\frac{p}{n}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассмотрим последовательность $\{l_j\}$, определенную следующим образом:

$$l_j = \left(2(q+1) + n + p_n \frac{n+p}{p} \right) \left(\frac{n+p}{n} \right)^j - q - 1 - n - p_n \frac{n+p}{p}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Используя итерационный метод Мозера, из (3.11) получим

$$\begin{aligned} & M^{2(q+1)+n+p_n \frac{n+p}{p}}(\rho) \\ & \leq \gamma \sigma^{-\gamma} H^{1+\frac{n}{p}}(\rho(1-\sigma)) M^{p_n(1+\frac{n}{p})}(\rho(1-\sigma)) \int_{\Omega} [|u(x)| \varphi_{\sigma\rho}(x)]^{q+1} dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Положим

$$y(\rho) = M(\rho) \rho^{\frac{p}{q-p+1}}.$$

Тогда, используя лемму 3.1, из (3.12) получим

$$y^{2(q+1)+n+p_n(1+\frac{n}{p})}(\rho) \leq \gamma \sigma^{-\gamma} y^{p_n(1+\frac{n}{p})}(\rho(1-\sigma)) H_1^{1+\frac{n}{p}}(\rho(1-\sigma)), \quad (3.13)$$

где

$$H_1(\rho) = \rho^{p \frac{q+1}{q-p+1}} + \rho^p y^p(\rho) + \sum_{i=1}^n y^{p_i}(\rho).$$

Выберем последовательность $\{\sigma_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\sigma_j = 2^{-(j-1)}$, и обозначим

$$y_j = y(\rho - (\sigma_1 + \dots + \sigma_j)\rho), \quad H_j = \rho^{p \frac{q+1}{q-p+1}} + \rho^p y_j^p + \sum_{i=1}^n y_j^{p_i}.$$

Из неравенства (3.13) следует оценка

$$\begin{aligned} y_j &\leq \gamma 2^{j\gamma} H_{j+1}^{r_0} y_{j+1}^{r_1}, \quad j = 1, 2, \dots, \\ r_0 &= \frac{n+p}{p} \frac{1}{2(q+1) + n + p_n \frac{n+p}{p}}, \quad r_1 = p_n r_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Условия (1.3), (1.4) обеспечивают неравенство $2r_1 < 1$. Используя лемму 2.2, из (3.14) получим

$$y_1 = M(\rho) \rho^{\frac{p}{q-p+1}} \leq \gamma, \quad (3.15)$$

что и доказывает теорему 2.2.

§ 4. Интегральные оценки решения

Определим при $0 \leq \lambda < n - p$ числа

$$\begin{aligned} b_i(\lambda) &= \frac{p_i}{p + \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ b_i(\lambda) &> 0, \quad b_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где a_i определены в (1.10).

Рассмотрим при $r \in (0, R_0)$ функцию

$$\begin{aligned} \psi_r: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \psi_r(x) = \eta_r \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i(\lambda)}{b_1(\lambda)}} \right)^{b_1(\lambda)} \right), \\ \eta_r(s) &= \begin{cases} 0 & \text{при } s \leq r, \\ 1 & \text{при } s \geq R(r), \\ - \left[(1-\theta) \ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-1} \int_r^s \frac{1}{z \ln z} dz & \text{при } r < s < R(r), \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

θ – выбираемое далее число из интервала $(0, 1)$, $R(r)$ определяется равенством

$$\ln \frac{1}{R(r)} = \left[\ln \frac{1}{r} \right]^\theta. \quad (4.3)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \widetilde{D}(r, \lambda) &= \left\{ x \in \Omega : \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i(\lambda)}{b_1(\lambda)}} \right)^{b_1(\lambda)} \leq r \right\}, \\ E(r, \lambda) &= \{ x \in \Omega \setminus \{0\} : u(x) \geq \widetilde{M}(r, \lambda) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(r, \lambda) &= \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)| : x \in \widetilde{D}(R_0, \lambda) \setminus \widetilde{D}(r, \lambda)\}, \\ u_r(x, \lambda) &= (u(x) - \widetilde{M}(r, \lambda))_+.\end{aligned}$$

Определим функцию $F_1(r, \lambda)$ при $0 < r < R_0$, $0 \leq \lambda < n - p$ равенствами

$$F_1(r, \lambda) = R^\lambda(r) \quad \text{при } \lambda > 0,$$

$$F_1(r, 0) = \begin{cases} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1 - \frac{p_1 - 1}{q - p_1 + 1}} & \text{при } \frac{p_1 - 1}{q - p_1 + 1} < 1, \\ \ln \ln \frac{1}{r} & \text{при } \frac{p_1 - 1}{q - p_1 + 1} = 1, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{1 - \frac{p_1 - 1}{q - p_1 + 1}} & \text{при } \frac{p_1 - 1}{q - p_1 + 1} > 1, \end{cases} \quad q = \frac{n(p - 1)}{n - p}. \quad (4.4)$$

Для упрощения записи в дальнейшем будем писать $b_i, E(r), \widetilde{M}(r), u_r(x)$ вместо $b_i(\lambda), E(r, \lambda), \widetilde{M}(r, \lambda), u_r(x, \lambda)$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1, и пусть $u(x)$ дополнительно удовлетворяет неравенству*

$$|u(x)| \leq K' \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{b_i} \right)^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}} \quad \text{при } 0 < \sum_{i=1}^n |x_i|^{b_i} < R_0. \quad (4.5)$$

Тогда при $r \in (0, R_0)$, $R(r) < \rho < R_0$, $k > p_n$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx + \int_{E(\rho)} \ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} u^q(x) \psi_r^k(x) dx \\ \leq K_3 \left\{ \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_1} F_1(r, \lambda) + \rho^{p+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

с постоянной K_3 , зависящей лишь от $K', \theta, \nu_1, \nu_2, n, p_1, \dots, p_n, q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.5) функции

$$\psi(x) = \ln_+ \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \psi_r(x).$$

Используя неравенства (1.2), стандартными рассуждениями получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx + \int_{E(\rho)} \ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} u^q(x) \psi_r^k(x) dx \\ \leq \gamma \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} u^{p_i-1}(x) \ln^{p_i} \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^{k-p_n}(x) dx \\ + \gamma \int_{E(\rho)} u^{p-1}(x) \ln^p \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \psi_r^{k-p_n}(x) dx = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $\lambda = 0$, используя неравенство Юнга, имеем

$$\begin{aligned} I_1 - \frac{1}{4} \int_{E(\rho)} \ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} u^q(x) \psi_r^k(x) dx \\ \leq \gamma \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} \left[\ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \right]^{(p_i - \frac{p_i-1}{q}) \frac{q}{q-p_i+1}} \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{\bar{p}_i} dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Положим

$$x_i = \text{sign } y_i |y_i|^{\varkappa \frac{b_1}{b_i}}, \quad \varkappa = 2 \max_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{b_1}.$$

Тогда неравенство (4.5) при $\lambda = 0$ влечет

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} \left[\ln \frac{u(x)}{\widetilde{M}(\rho)} \right]^{(p_i - \frac{p_i-q}{q}) \frac{q}{q-p_i+1}} \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{\bar{p}_i} dx \\ \leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_i} \int_{\tilde{D}(R(r)) \setminus \tilde{D}(r)} \frac{|x_i|^{\left(\frac{b_i}{b_1}-1\right)\bar{p}_i} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{b_k}{b_1}} \right)^{-\bar{p}_i}}{\left[\ln \frac{1}{\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{b_k}{b_1}}} \right]^{\frac{\bar{p}_i-1}{q-p_i+1}}} dx \\ \leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_i} \int_{D_1(R(r)) \setminus D_1(r)} \frac{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{\varkappa} \right)^{-\frac{b_1}{b_i} \bar{p}_i} \prod_{k=1}^n |y_k|^{\varkappa \frac{b_1}{b_k} - 1}}{\left[\ln \frac{1}{|y|} \right]^{\frac{\bar{p}_i-1}{q-p_i+1}}} dy \\ \leq \gamma \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_1} F_1(r, 0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь мы использовали обозначение

$$D_1(r) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^{\varkappa} \right]^{b_1} \leq r \right\}.$$

При $\lambda > 0$, используя неравенство (4.5), получим

$$I_1 \leq \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{D}(R(r)) \setminus \tilde{D}(r)} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{b_k}{b_1}} \right)^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1} (p_i-1) b_1 - p_i} |x_i|^{\left(\frac{b_i}{b_1}-1\right)p_i} dx \leq \gamma F_1(r, \lambda). \quad (4.10)$$

Аналогичным образом, используя неравенство (4.5) при $\lambda \geq 0$, получим

$$I_2 \leq \int_{\tilde{D}(\rho)} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}} \right)^{(p-n+\lambda)b_1} \ln^p \frac{1}{\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}}} dx \leq \gamma \rho^{p+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho}. \quad (4.11)$$

Здесь мы воспользовались также включением $E(\rho) \subset \tilde{D}(\rho)$.

Собирая неравенства (4.7)–(4.11), получим (4.6). Таким образом, лемма 4.1 доказана.

Определим при $z \in \mathbb{R}^1$ функцию

$$\Phi_\rho(z) = [(\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{1-\varepsilon} - (z - \widetilde{M}(2\rho))^{1-\varepsilon}]_+,$$

где ε – произвольное число из интервала $(1, n/(n-p))$.

Обозначим при $0 < r < R_0$

$$F_2(r, \lambda) = \begin{cases} [R(r)]^{\frac{\lambda}{p_1-1}} & \text{при } \lambda > 0, \\ \left[\ln \frac{1}{R(r)} \right]^{-1} & \text{при } \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что выполнено все условия леммы 4.1. Тогда при $R(r) < \rho < R_0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} (u(x) - \widetilde{M}(2\rho))^{-\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx \leq K_4 H(r, \rho) \quad (4.13)$$

с постоянной K_4 , зависящей лишь от K' , ν_1 , ν_2 , n , $p_1, \dots, p_n$. Здесь

$$\begin{aligned} H(r, \rho) &= (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{1-\varepsilon} \\ &\times \left\{ F_2^{p_1-1}(r, \lambda) + (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{(1-\varepsilon)(p-1)} \rho^{n-\varepsilon(n-p)+\lambda} + \rho^{p+\lambda} \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-\bar{p}_1} F_1(r) + \rho^{p+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\}^{\frac{p_i-1}{p_i}} F_2^{\frac{p_i-1}{p_i}}(r, \lambda) \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.5) функции

$$\psi(x) = \Phi_\rho(u(x)) \psi_r^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \psi_r(x).$$

Совершая стандартные преобразования, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} (u(x) - \widetilde{M}(2\rho))^{-\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx + \int_{E(\rho)} \Phi_\rho(u(x)) u^q(x) \psi_r^k(x) dx \\ &\leq \gamma (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{1-\varepsilon} \{I_3 + I_4 + I_5 + I_6\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{E(\rho)} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right| \psi_r^{k-1}(x) dx, \\ I_4 &= \int_{E(\rho)} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \right)^{1-\frac{1}{p}} \psi_r^k(x) dx, \\ I_5 &= \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} u^{p_i-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx, \\ I_6 &= \int_{E(\rho)} u^{p-1}(x) \psi_r^k(x) dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство (4.5), получим

$$\begin{aligned} &\int_{E(\rho)} u^{p_i-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \\ &\leq \gamma \left[\ln \ln \frac{1}{r} \right]^{-p_i} \int_{\widetilde{D}(R(r)) \setminus \widetilde{D}(r)} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{b_k}{b_1}} \right)^{-b_1 \frac{n-p-\lambda}{p-1} (p_i-1) - p_i} \frac{|x_i|^{(\frac{b_i}{b_1}-1)p_i}}{\left[\ln \frac{1}{\sum_{k=1}^n |x_k|^{\frac{b_k}{b_1}}} \right]^{p_i}} dx \\ &\leq \gamma F_2^{p_i-1}(r, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Оценка интеграла правой части (4.15) получена аналогично (4.9). Из неравенства Гёльдера, леммы 4.1 и (4.15) получаем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \int_{E(\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \psi_r^k(x) dx \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\int_{E(\rho)} u^{p_i-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}} \\ &\leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\tilde{p}_1} F_1(r, \lambda) + \rho^{p+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} F_2^{\frac{p_i-1}{p_i}}(r, \lambda). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Используя неравенство Юнга и (4.5), имеем

$$\begin{aligned} &(\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{1-\varepsilon} I_4 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} (u(x) - \widetilde{M}(2\rho))^{-\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx \\ &\leq \gamma (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{(1-\varepsilon)p} \int_{E(\rho)} u^{\varepsilon(p-1)}(x) \psi_r^k(x) dx \\ &\leq \gamma (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{(1-\varepsilon)p} \rho^{n-\varepsilon(n-p)+\lambda} \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$I_6 \leq \gamma \rho^{p+\lambda}. \quad (4.18)$$

Собирая неравенства (4.14)–(4.18), получим (4.13). Таким образом, лемма 4.2 доказана.

Определим функцию $u^{(\rho)}(x)$ и множество $E(\rho, 2\rho)$:

$$\begin{aligned} u^{(\rho)}(x) &= \min \{ (u(x) - \widetilde{M}(2\rho)), \widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho) \}, \\ E(\rho, 2\rho) &= \{ x \in \Omega : \widetilde{M}(2\rho) < u(x) < \widetilde{M}(\rho) \}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены все условия леммы 4.1. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \leq K_5 \widetilde{M}(\rho) \rho^{\delta+\lambda} (1 + (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{(1-\varepsilon)(p-1)}) \quad (4.19)$$

с постоянными $\delta > 0$, K_5 , зависящими лишь от $\nu_1, \nu_2, n, p_1, \dots, p_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.5) функции

$$\psi(x) = u^{(\rho)}(x) \psi_r^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \psi_r(x), \quad k > p_n.$$

Используя неравенства (1.2), получим

$$\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx + \int_{E(2\rho)} u^{(\rho)}(x) u^q(x) \psi_r^k(x) dx \leq \gamma (I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}), \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \sum_{i=1}^n \int_{E(2\rho)} \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p_i}} u^{(\rho)}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right| \psi_r^{k-1}(x) dx, \\
 I_8 &= \int_{E(2\rho)} \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \right)^{1-\frac{1}{p}} u^{(\rho)}(x) \psi_r^k(x) dx, \\
 I_9 &= \widetilde{M}(\rho) \sum_{i=1}^n \int_{E(2\rho)} u^{p_i-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx, \\
 I_{10} &= \widetilde{M}(\rho) \int_{E(2\rho)} u^{p-1}(x) \psi_r^k(x) dx.
 \end{aligned}$$

При $\lambda \geq 0$ из неравенства Гёльдера и (4.15) получаем

$$\begin{aligned}
 I_7 &\leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \int_{E(2\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \psi_r^k(x) dx \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \\
 &\quad \times \left(\int_{E(2\rho)} u^{p_i-1}(x) \left| \frac{\partial \psi_r(x)}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}} \\
 &\leq \gamma \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \int_{E(2\rho)} \frac{1}{u(x)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p_j} \psi_r^k(x) dx \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} F_2^{\frac{p_i-1}{p_i}}(r, \lambda), \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_8 &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx + \gamma \widetilde{M}(\rho) \int_{E(\rho, 2\rho)} u^{p-1}(x) \psi_r^k(x) dx \\
 &\quad + \gamma \widetilde{M}(\rho) \left(\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho)} (u(x) - \widetilde{M}(2\rho))^{-\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &\quad \times \left(\int_{E(\rho)} u^{\varepsilon(p-1)}(x) \psi_r^k(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Собирая неравенства (4.6), (4.11), (4.13), (4.15), (4.18), (4.21), (4.22), из (4.20) получим

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \int_{E(\rho, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_r^k(x) dx \\
 &\leq \gamma \widetilde{M}(\rho) \rho^{p+\lambda} + \gamma \widetilde{M}(\rho) F_2^{p_1-1}(r, \lambda) + \gamma \widetilde{M}(\rho) H^{\frac{p-1}{p}}(r, \rho) \rho^{\frac{n-\varepsilon(n-p)+\lambda}{p}} \\
 &\quad + \gamma \widetilde{M}(\rho) \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_1} F_1(r, \lambda) + \rho^{p+\lambda} \ln^p \frac{1}{\rho} \right\}^{\frac{p_i-1}{p_i}} F_2^{\frac{p_i-1}{p_i}}(r, \lambda). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Теперь перейдем к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (4.23).

Равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_2(r, \lambda) = 0 \tag{4.24}$$

непосредственно следует из определения функции $F_2(r, \lambda)$.

Также из определения $F_1(r, \lambda)$ следует

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_1(r, \lambda) = 0 \quad \text{при } \lambda > 0, \quad (4.25)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\ln \ln \frac{1}{r} \right)^{-\bar{p}_1} F_1(r, 0) = 0 \quad \text{при } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad \frac{p_1-1}{q-p_1+1} = 1, \quad (4.26)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_1(r, 0) = 0 \quad \text{при } q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad \frac{p_1-1}{q-p_1+1} > 1. \quad (4.27)$$

Далее, при $\lambda = 0$, $q = n(p-1)/(n-p)$, $(p_1-1)/(q-p_1+1) < 1$ в силу определения $R(r)$ имеем

$$F_1(r, 0)F_2(r, 0) \leq \gamma \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1 - \frac{p_1-1}{q-p_1+1} - \theta}. \quad (4.28)$$

Правая часть (4.28) стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, если

$$\theta > 1 - \frac{p_1-1}{q-p_1+1}. \quad (4.29)$$

Окончательно, выбирая θ из условия

$$\theta = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \frac{p_1-1}{q-p_1+1} & \text{при } \lambda = 0, \quad q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad \frac{p_1-1}{q-p_1+1} < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } \lambda \geq 0, \quad q \geq \frac{n(p-1)}{n-p}, \quad \frac{p_1-1}{q-p_1+1} \geq 1, \end{cases}$$

переходим к пределу при $r \rightarrow 0$ в неравенстве (4.23) и получаем оценку (4.19). Таким образом, лемма 4.3 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2.1

Вначале докажем вспомогательную поточечную оценку. Определим функцию $\xi_\rho: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ класса C^∞ такую, что

$$\begin{aligned} \xi_\rho(x) &= \xi \left(\frac{(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}})^{b_1}}{\rho} \right), \\ \xi(s) &= \begin{cases} 1 & \text{при } s \geq 2, \\ 0 & \text{при } s \leq 1, \end{cases} \\ 0 \leq \xi(s) \leq 1, & \quad \left| \frac{d\xi(s)}{ds} \right| \leq \gamma. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1. Тогда при $0 < \rho < R_0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{p+n+p_n \frac{n}{p}} \\ & \leq K_6 \widetilde{M}^{p_n \frac{n}{p}}(\rho) \left[\widetilde{M}^p(\rho) + \sum_{i=1}^n \widetilde{M}^{p_i}(\rho) \rho^{-p - \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_i)} \right]^{\frac{n}{p}} \int_{\Omega} u_{2\rho}^p(x) \xi_\rho^p(x) dx \quad (5.1) \end{aligned}$$

с постоянной K_6 , зависящей лишь от $\nu_1, \nu_2, n, p_1, \dots, p_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.5) функции

$$\psi(x) = u_{2\rho}^{l+1}(x)\xi_\rho^{k-1}(x), \quad \zeta(x) = \xi_\rho(x).$$

Используя неравенства (1.2), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{2\rho}^l(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \xi_\rho^k(x) dx \\ & \leq \gamma(l+k)^{p_n} H(\rho) \widetilde{M}^{p_n}(\rho) \int_{\Omega} u_{2\rho}^{l-p_n}(x) \xi_\rho^{k-p_n}(x) dx, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$H(\rho) = \widetilde{M}^p(\rho) + \sum_{i=1}^n \widetilde{M}^{p_i}(\rho) \rho^{-p - \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_i)}.$$

Используя лемму 2.1 при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = l(n-p)/n-p$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{2\rho}^l(x) \xi_\rho^l(x) dx \\ & \leq \gamma \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} [u_{2\rho}(x) \xi_\rho(x)]^{l \frac{n-p}{n-p-p}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{2\rho}(x) \xi_\rho(x)) \right|^{p_i} dx \right\}^{\frac{n}{n-p}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из неравенств (5.2), (5.3), используя итерационный метод Мозера, получим неравенство (5.1). Таким образом, лемма 5.1 доказана.

Отметим, что оценка (2.6) влечет неравенство

$$\widetilde{M}(\rho) \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}}, \quad (5.4)$$

$$\lambda = \frac{(q+1)(n-p) - p(n-1)}{q+1-p} \geq 0. \quad (5.5)$$

Действительно, если

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}} \right)^{b_1} \geq \rho, \quad (5.6)$$

то возможны два варианта:

$$|x_1| > \sum_{i=2}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}}; \quad |x_1| \leq \sum_{i=2}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}}.$$

В первом случае из (5.6) имеем $|x_1|^{b_1} > 2^{-b_1} \rho$. Используя теорему 2.2, получим

$$|u(x)| \leq \gamma \rho^{-\frac{p + \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_1)}{q-p_1+1}} = \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}}. \quad (5.7)$$

Во втором случае из (5.6) следует

$$\left(\sum_{i=2}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}} \right)^{b_1} > \frac{\rho}{2^{b_1}}. \quad (5.8)$$

Опять возможны два варианта:

$$|x_2| > \sum_{i=3}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}}; \quad |x_2| \leq \sum_{i=3}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}}.$$

В первом случае из (5.8) имеем $|x_2|^{b_2} > 2^{-2b_1}\rho$; используя теорему 2.1, получаем

$$|u(x)| \leq \gamma \rho^{-\frac{p + \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_2)}{q-p_2+1}} = \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}}. \quad (5.9)$$

Во втором случае из (5.8) следует

$$\left(\sum_{i=3}^n |x_i|^{\frac{b_i}{b_1}} \right)^{b_1} \geq \frac{\rho}{2^{2b_1}}. \quad (5.10)$$

Продолжая рассуждать аналогичным образом, на n -м шаге получим

$$|u(x)| \leq \gamma \rho^{-\frac{p + \frac{n-p-\lambda}{p-1}(p-p_n)}{q-p_n+1}} = \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}}. \quad (5.11)$$

Оценим теперь интеграл в правой части (5.1). Из определения $\widetilde{M}(\rho)$ следует, что

$$|u(x)| \leq M(\rho), \quad \text{если } \xi_\rho(x) \neq 0,$$

поэтому, используя лемму 2.1 при $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u_{2\rho}(x) \xi_\rho(x)]^p dx &\leq \int_{\Omega} [u^{(\rho)}(x)]^p dx \leq \gamma \rho^p \sum_{i=1}^n \int_{E(\rho, 2\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \\ &\leq \gamma \widetilde{M}(\rho) \rho^{p+\delta+\lambda} (1 + (\widetilde{M}(\rho) - \widetilde{M}(2\rho))^{-(\varepsilon-1)(p-1)}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Используя неравенства (5.1), (5.11), получаем

$$(M(\rho) - M(2\rho))^{(\varepsilon-1)(p-1)+p+n+p_n \frac{n}{p}} \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda}{p-1}((\varepsilon-1)(p-1)+n+1+p_n \frac{n}{p})-n+p+\lambda+\delta}. \quad (5.13)$$

Непосредственными вычислениями из (5.13) получаем

$$M(\rho) - M(2\rho) \leq \gamma^{-\frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1}}, \quad \delta_0 = \frac{\delta(p-1)}{(\varepsilon-1)(p-1)+p+n+p_n \frac{n}{p}}. \quad (5.14)$$

Определим последовательности $\{\rho_j\}$, $\{M_j\}$ равенствами $\rho_j = 2^{-j}R_0$, $M_j = \widetilde{M}(\rho_j)$. Из оценки (5.14) следует

$$M_j - M_{j-1} \leq \gamma 2^j \frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1} R_0^{-\frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1}}. \quad (5.15)$$

Суммируя неравенство (5.15) по $2 \leq j \leq J$, получаем оценку

$$M_J - M_1 \leq \gamma 2^J \frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1} R_0^{-\frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1}},$$

из которой следует неравенство

$$\widetilde{M}(\rho) \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda-\delta_0}{p-1}} \quad \text{при } 0 < \rho < R_0. \quad (5.16)$$

При $\lambda = 0$, т.е. при $q = n(p-1)/(n-p)$, оценка (5.16) гарантирует равенство (1.8) и, кроме того, включение

$$|u(x)|^{q-p+1} \in L_{\frac{n}{p-\alpha}}(\Omega), \quad \alpha < \frac{\delta_0}{n-p}. \quad (5.17)$$

При $\lambda > 0$, т.е. при $q > n(p-1)/(n-p)$, рассмотрим

$$\begin{aligned} D_1^{(j)}(\rho) &= \left\{ x \in \Omega : \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{b_i(\lambda_j)}{b_1(\lambda_j)}} \right)^{b_1(\lambda_j)} \leq \rho \right\}, \\ M_1^{(j)} &= \text{ess sup} \{ |u(x)| : x \in D_1^{(j)}(R_0) \setminus D_1^{(j)}(\rho) \}, \\ \lambda_j &= \frac{\lambda}{(1 - \frac{\delta_0}{n-p})^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В силу легко проверяемого неравенства

$$\frac{n-p-\lambda_j}{b_i(\lambda_{j-1})} \geq \frac{n-p-\lambda_{j-1}-\delta_0}{b_i(\lambda_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots,$$

рассуждениями, аналогичными (5.6)–(5.11), можно показать, что из (5.16) следует оценка

$$M_1^{(1)}(\rho) \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda_1}{p-1}}. \quad (5.18)$$

Оценка (5.16) гарантирует последовательное улучшение оценки (5.18) с увеличением λ на каждом шаге на положительную величину $\frac{\delta_0}{n-p} \lambda / \left(1 - \frac{\delta_0}{n-p}\right)$ до тех пор, пока $n-p-\lambda_j$ остается положительным. За конечное число шагов мы получим неравенство

$$M_1^{(J)} \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\lambda_J}{p-1}}, \quad (5.19)$$

где λ_J удовлетворяет неравенствам

$$n-p - \frac{p(p-1)}{q-p+1} < n-p - \frac{\delta_0}{2}(n-p) < \lambda_J < n-p. \quad (5.20)$$

Из (5.19), в частности, имеем

$$|u(x)|^{q-p+1} \in L_{\frac{n}{p-\alpha}}(\Omega), \quad \alpha < p - (n-p-\lambda_J) \frac{q-p+1}{p-1}. \quad (5.21)$$

Кроме того, так как

$$\frac{n-p-\tilde{\lambda}}{b_i(\lambda_J)} \geq \frac{n-p-\lambda-\delta_0}{a_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.22)$$

при $\tilde{\lambda} = \lambda_J + \delta_0/2$ имеем

$$\text{ess sup} \{ |u(x)| : x \in D(R_0) \setminus D(\rho) \} \leq \gamma \rho^{-\frac{n-p-\tilde{\lambda}}{p-1}}, \quad (5.23)$$

где $D(\rho)$, a_i , $i = 1, \dots, n$, определены в (1.9), (1.10). Поэтому $u(x)$ удовлетворяет условию (1.8).

Теперь выполнены все условия работы [9], особенность в точке $\{0\}$ устранима. Таким образом, доказательство теоремы 2.1 завершено.

Список литературы

- [1] H. Brezis, L. Veron, “Removable singularities for some nonlinear elliptic equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **75**:1 (1980), 1–6.
- [2] L. Véron, *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **353**, Longman, Harlow, 1996.
- [3] И. И. Скрыпник, “Локальное поведение решений квазилинейных эллиптических уравнений с абсорбцией”, *Тр. Ин-та матем. и мех. НАН Украины*, **9** (2004), 183–190.
- [4] И. И. Скрыпник, “Устранимость изолированных особенностей решений квазилинейных параболических уравнений с абсорбцией”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 141–160; англ. пер.: I. I. Skrypnik, “Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption”, *Sb. Math.*, **196**:11 (2005), 1693–1713.
- [5] И. М. Колодий, “Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **25**:5 (1970), 44–52; англ. пер.: I. M. Kolodij, “The boundedness of generalized solutions of elliptic differential equations”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **25**:5 (1970), 31–37.
- [6] N. Fusco, C. Sbordone, “Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals”, *Comm. Partial Differential Equations*, **18**:1–2 (1993), 153–167.
- [7] M. Giaquinta, “Growth conditions and regularity, a counterexample”, *Manuscripta Math.*, **59**:2 (1987), 245–248.
- [8] P. Marcellini, *Un esempio di soluzione discontinua d’un problema variazionale in caso scalare*, Preprint № 11, Instituto Matematico “Ulisse Dini” Università di Firenze, Firenze, 1987.
- [9] Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I. I. Skrypnik, “Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations”, *Adv. Nonlinear Stud.*, **6**:4 (2006), 617–641.
- [10] F. Nicolosi, I. V. Skrypnik, I. I. Skrypnik, “Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities”, *Comm. Partial Differential Equations*, **28**:3–4 (2003), 677–696.
- [11] И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. V. Skrypnik, *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **139**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

И. И. Скрыпник (I. I. Skrypnik)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: iskrypnik@iamm.donbass.com

Поступила в редакцию

14.06.2007 и 25.11.2007