Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω -проективно-инвариантные меры, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 43–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 08:40:24

УДК 515.168.3

Л. А. Бекларян

**К вопросу о классификации групп
гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III.
 ω -проективно-инвариантные меры**

Работа посвящена изучению групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, общего вида. Для таких групп определяется серия метрических инвариантов в виде ω -проективно-инвариантных мер, где ω – кардинальное число. Сформулирована теорема о существовании ω -проективно-инвариантной меры, что является естественным обобщением теоремы Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности. Для групп с ω -проективно-инвариантной мерой изучаются “препятствия” для существования 1-проективно-инвариантной меры. Принятый подход основан на исследовании топологической структуры множества неподвижных точек элементов группы, орбит точек на прямой, минимальных множеств и комбинаторных свойств групп.

Библиография: 19 названий.

Настоящая статья является продолжением работ [1], [2] и использует принятые там обозначения.

Введение

Различные вопросы алгебры, анализа, теории динамических систем, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом приводят к необходимости исследования групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию [3]–[16]. Одним из центральных вопросов при их исследовании и классификации является описание инвариантных и проективно-инвариантных мер [1]–[18]. В работах [1], [2], [17], [18] проведено систематическое исследование инвариантных и проективно-инвариантных мер. Получены различные критерии существования указанных метрических инвариантов, связанные как со структурой множества неподвижных точек элементов группы, так и с групповой структурой каноническим образом выделенных подмножеств группы Q . Там же на основе полученных результатов для таких групп предложена классификационная схема.

Настоящая работа посвящена изучению более общих метрических инвариантов – введенных автором ω -проективно-инвариантных мер, где ω – некоторое кардинальное число. В случае $\omega = 0$, $\omega = 1$ определение ω -проективно-инвариантной меры переходит в определение инвариантной и проективно-инвариантной меры соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 97-01-00625, 96-00974) и фонда INTAS (грант № 94-3420).

Центральным моментом в работе является исследование проблемы существования ω -проективно-инвариантной меры. Для групп с ω -проективно-инвариантной мерой изучаются “препятствия” для существования 1-проективно-инвариантной меры. В работах [1], [2], [18], как и в данной работе, принятый подход для описания групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию (классификация множества неподвижных точек элементов группы, минимальных множеств), позволяет исследовать природу существования ω -проективно-инвариантных мер.

Параграф 1 посвящен основным определениям и некоторым предварительным сведениям.

Параграф 2 в силу важности минимальных множеств посвящен дальнейшему исследованию их свойств (см. [2; раздел 9]). В случае отсутствия минимального множества описана структура группы Q (лемма 2.1). Приведен критерий отсутствия минимального множества для группы Q , связанный со свойствами конечно порожденных подгрупп (теорема 2.2). Исследована связь между свойствами минимальных множеств группы Q и ее подгрупп (леммы 2.2, 2.3).

Исследования минимальных множеств для счетных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в работах [12], [13]. В них указаны критерии существования минимальных множеств и при этих условиях уточняется структура орбит.

Параграф 3 посвящен изучению новых по отношению к имеющимся в [1] критериев существования 0-проективно-инвариантной меры, связанных с метрическими свойствами конечно порожденных подгрупп (теорема 3.1), с групповыми свойствами канонически выделенных подмножеств группы Q , а также с метрическими свойствами орбит точек на прямой (теоремы 3.1, 3.2, 3.3). В работе [9] доказана важная теорема, связывающая комбинаторные свойства орбит (субэкспоненциальный рост орбит) конечно порожденной группы с вопросом существования 0-проективно-инвариантной меры. Для произвольной группы такая формулировка условия существования 0-проективно-инвариантной меры не допускает обобщения. Критерий субэкспоненциального роста может быть заменен эквивалентным ему критерием (условие б) теоремы 3.2), который справедлив уже для любой группы. Далее сформулированы леммы о продолжении меры 0-проективно-инвариантной относительно нормальной подгруппы G группы Q до меры 1-проективно-инвариантной относительно группы Q (леммы 3.1, 3.2). В дополнение к соответствующим результатам из [10] в этих леммах содержится утверждение о единственности полученной 1-проективно-инвариантной меры. Тем не менее, для полноты в рамках развитого формализма проводится доказательство всех утверждений.

Параграф 4 посвящен исследованию 0-максимальных подгрупп – максимальных нормальных подгрупп, для которых существует 0-проективно-инвариантная мера. Существование таких подгрупп тесно связано с вопросом существования ω -проективно-инвариантной меры. Для 0-максимальных подгрупп приводится теорема существования (теорема 4.1), дано описание структуры таких подгрупп (лемма 4.1, теорема 4.2).

В §5 сформулирована теорема существования ω -проективно-инвариантной меры. Она является естественным обобщением теоремы Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности (обобщенная теорема Боголюбова–Крылова).

В §6 для групп с ω -проективно-инвариантной мерой изучаются “препятствия” в проблеме существования 1-проективно-инвариантной меры. Оказывается, что такие “препятствия” носят комбинаторный характер (теорема 6.1). Суть такого условия заключается в существовании 0-максимальной подгруппы M со свободно действующим элементом и отсутствии свободной подгруппы с двумя образующими для факторгруппы Q/H , где H – нормальная подгруппа группы Q , образованная элементами, для каждого из которых множество неподвижных точек содержит минимальное множество. В работе [10] результат такого типа получен при более сильном предположении: факторгруппа Q/H аменабельная.

§1. Некоторые предварительные сведения и основные определения

Важнейшими характеристиками для групп Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ являются:

$Q(t) = \{q(t) : q \in Q\}$ – орбита точки $t \in \mathbb{R}$;

$N(Q) = \{t : t \in \mathbb{R}; \exists q \in Q, q \neq e, q(t) = t\}$ – множество неподвижных точек элементов группы Q ;

$Q^N = \{q : q \in Q; \exists t \in \mathbb{R}, q(t) = t\}$ – объединение стабилизаторов;

$\text{Fix } Q = \{t : t \in \mathbb{R}; \forall q \in Q, q(t) = t\}$ – множество неподвижных точек группы Q ;

$\text{Fix } Q^N = \{t : t \in \mathbb{R}; \forall q \in Q^N, q(t) = t\}$ – множество неподвижных точек объединения стабилизаторов;

$Q_{+\infty}^N = \{q : q \in Q^N, \sup\{t : q(t) = t\} = +\infty\}$,

$Q_{-\infty}^N = \{q : q \in Q^N, \inf\{t : q(t) = t\} = -\infty\}$, $Q_{\infty}^N = Q_{+\infty}^N \cap Q_{-\infty}^N$.

Если G – некоторое множество элементов, то через $\overline{G} = \langle G \rangle$ будем обозначать группу, порожденную множеством G .

В дальнейшем K^+ будет обозначать группу всех гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. Через $\mathcal{M}$ обозначим пространство σ -конечных борелевских мер на $\mathbb{R}$ ($\mathcal{M}^+$ – конус положительных мер). Здесь $\mathcal{M}$ рассматривается как сопряженное пространство к пространству $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и топологией индуктивного предела в $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ [19; гл. I, дополнение].

Если $Q \subseteq K^+$, то через Q_* будем обозначать изоморфную ей группу непрерывных линейных операторов, действующих на пространстве $\mathcal{M}$. Изоморфизм $\theta : Q \rightarrow Q_*$, где $\theta(q) = q_*$, определяется следующим образом: $q_*\mu(B) = \mu(q^{-1}(B))$ для любой меры $\mu \in \mathcal{M}$ и любого борелевского множества B .

Заметим, что конус положительных мер $\mathcal{M}^+$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов Q_* . Для любой положительной меры $\mu \in \mathcal{M}^+$ через $\mathcal{K}_{\mu}(Q)$ обозначим замкнутый выпуклый конус, порожденный орбитой $Q_*(\mu) = \{q_*\mu\}_{q \in Q}$ меры μ . Очевидно, что конус $\mathcal{K}_{\mu}(Q)$ инвариантен относительно группы непрерывных линейных операторов Q_* .

Для любого $\mu \in \mathcal{M}^+$ множество элементов $q \in Q$ таких, что для соответствующих непрерывных линейных операторов $q_* = \theta(q)$ конус $\mathcal{K}_{\mu}(Q)$ является неподвижным, образуют нормальную подгруппу, которую будем обозначать через Γ_{μ} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Конус $\mathcal{K}_{\mu}(Q)$ называется *минимальным*, если для любой меры $\bar{\mu} \in \mathcal{K}_{\mu}(Q)$ справедливо условие $\mathcal{K}_{\mu}(Q) = \mathcal{K}_{\bar{\mu}}(Q)$.

Пусть $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}^+$ – конус и $\mu \in \mathcal{K}$. Луч $\lambda\mu$, $\lambda > 0$, называется *крайним*, если не существует мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{K}$ и положительных чисел λ_1, λ_2 таких, что $\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. σ -конечная борелевская мера $\mu \in \mathcal{M}^+$ называется ω -проективно-инвариантной относительно группы Q , если выпуклый конус $\mathcal{K}_\mu(Q)$ является минимальным, луч $\lambda\mu$ – крайним, а ω – мощностью множества крайних лучей.

Справедливо следующее простое утверждение. Если $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$ являются соответственно ω_1 -, ω_2 -проективно-инвариантными мерами, то либо $\mathcal{K}_{\mu_1}(Q) \cap \mathcal{K}_{\mu_2}(Q) = \emptyset$, либо $\mathcal{K}_{\mu_1}(Q) = \mathcal{K}_{\mu_2}(Q)$ (очевидно, что при этом $\omega_1 = \omega_2$).

В случае $\omega = 1$ данное определение совпадает с определением проективно-инвариантной меры из [2]. Инвариантная мера [1] является частным случаем проективно-инвариантной меры, и ее по определению будем называть 0-проективно-инвариантной мерой.

Пусть заданы группа $Q \subseteq K^+$ и нормальная подгруппа $G \subseteq Q$. Если σ -конечная борелевская мера μ является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G (т.е. $g_*\mu = \mu$ для любого $g \in G$), то любая мера из конуса $\mathcal{K}_\mu(Q)$ также будет 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G . Действительно, достаточно показать, что для любого $q \in Q$ мера $q_*\mu$ также является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G . В силу нормальности подгруппы G любой элемент $g \in G$ имеет представление $g = qhq^{-1}$, где $h \in G$. Тогда $g_*(q_*\mu) = (qh)_*\mu = q_*h_*\mu = q_*\mu$, откуда и следует, что любая мера из конуса $\mathcal{K}_\mu(Q)$ является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G .

В силу определения конуса $\mathcal{K}_\mu(Q)$ и отмеченного свойства нормальных подгрупп справедливо следующее простое предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $Q \subseteq K^+$, $\mu \in \mathcal{M}$. Тогда для любого $\bar{\mu} \in \mathcal{K}_\mu(Q)$ справедливы включения: $\mathcal{K}_{\bar{\mu}}(Q) \subseteq \mathcal{K}_\mu(Q)$, $\Gamma_\mu \subseteq \Gamma_{\bar{\mu}}$.

Если мера μ является ω -проективно-инвариантной, то для любого $\bar{\mu} \in \mathcal{K}_\mu(Q)$ справедливы равенства: $\mathcal{K}_{\bar{\mu}}(Q) = \mathcal{K}_\mu(Q)$, $\Gamma_\mu = \Gamma_{\bar{\mu}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $Q \subseteq K^+$. Нормальная подгруппа M группы Q называется 0-максимальной, если для M существует 0-проективно-инвариантная мера и M не является собственным подмножеством какой-либо нормальной подгруппы группы Q , для которой также существует 0-проективно-инвариантная мера.

Очевидно, если существует 0-максимальная подгруппа M группы Q , то она совпадает с какой-либо из нормальных подгрупп Γ_μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $Q \subseteq K^+$. Непустое подмножество $E(Q) \subseteq \mathbb{R}$ называется минимальным, если оно замкнуто, Q -инвариантно и не содержит собственных замкнутых Q -инвариантных подмножеств. Если не существует минимального множества, то по определению будем полагать, что $E(Q) = \emptyset$.

Определим ряд канонических подмножеств группы $Q \subseteq K^+$, с помощью которых будут формироваться условия существования метрических инвариантов такой группы. Положим

$$C = (Q \setminus Q^N) \cup Q_\infty^N.$$

Если минимальное множество $E(Q)$ непусто и не дискретно, то оно единственное (см. [2]), поэтому можно однозначно определить нормальную подгруппу H группы

Q следующим образом

$$H = \{h : h \in Q, E(Q) \subseteq \text{Fix } h\}.$$

Если минимальное множество $E(Q)$ непусто и дискретно, то по определению положим $H = Q^N$. Заметим, что в этом случае $Q^N = \overline{Q}^N$ (см. [1]). Если при этом $Q^N \neq Q$, то $Q_\infty^N = Q^N$. Если $E(Q) = \emptyset$, то по определению положим $H = \langle e \rangle$.

§ 2. Критерии существования минимальных множеств

Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их “нетривиальности” орбиты точек обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют важнейшие характеристики метрических инвариантов. К ранним исследованиям по минимальным множествам относятся работы Данжуа для гомеоморфизмов окружности [4]. Исследование минимальных множеств для счетных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, приведены в работах [12], [13]. В них указаны критерии существования минимальных множеств и при этих условиях уточняется структура орбит. Там же исследовались критерии существования минимальных множеств для групп диффеоморфизмов. В работе [2] для произвольных групп гомеоморфизмов $Q \subseteq K^+$ сформулирован критерий существования минимального множества, исследована структура минимальных множеств. Ниже будут сформулированы новые критерии существования минимальных множеств, основанные на метрических свойствах конечно порожденных подгрупп и на структуре множества неподвижных точек.

В работе [2] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть для $Q \subseteq K^+$ существует минимальное множество $E(Q)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- а) $E(Q)$ – дискретное множество, $E(Q) \subseteq \text{Fix } Q^N$ и множество $\text{Fix } Q^N$ состоит из объединения замкнутых (дискретных) орбит;
- б) $E(Q)$ – совершенное нигде не плотное подмножество, является единственным минимальным множеством и содержится в замыкании орбиты $\overline{Q(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$;
- в) $E(Q) = \mathbb{R}$ (что эквивалентно условию минимальности группы Q).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если множество $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ (что эквивалентно существованию 0-проективно-инвариантной меры), то минимальное множество $E(Q)$ непусто и $E(Q) \subseteq \text{Fix } Q^N$ (см. [2; теорема 9.2]). Если для группы Q существует 1-проективно-инвариантная мера, то минимальное множество $E(Q)$ также непусто (см. [2; теорема 7.3]). Если множества $\mathbb{P}_F(Q)$, $\mathbb{P}_N(Q)$ непусты, то они совпадают с минимальным множеством $E(Q)$ (см. [2; теорема о факторгруппе и теорема 5.1]).

Из результатов раздела 9 работы [2] следует важная лемма.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Если минимальное множество $E(Q)$ пусто, т.е. $E(Q) = \emptyset$, то $Q = Q_\infty^N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 9.2 работы [2] следует, что для такой группы $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. В таком случае для любой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху. Пусть существует элемент $q \in Q$ такой, что $q \notin Q_\infty^N$. Если $q \in Q \setminus Q^N$, то по свойству в) теоремы 9.2 [2] $E(Q) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $Q = Q^N$. Предположим, что $q \in Q^N \setminus Q_\infty^N$. Для определенности будем полагать, что $q \notin Q_{+\infty}^N$. Определим точку $\bar{t} = \sup\{t : t \in N(\langle q \rangle)\}$. Очевидно, что точка $\bar{t}$ корректно определена и конечна. Рассмотрим множество замыканий орбит $\overline{Q(t)}$ всех точек t прямой $\mathbb{R}$. На этом множестве введем отношение частичного порядка: $\overline{Q(t_1)} \preceq \overline{Q(t_2)}$, если $\overline{Q(t_1)} \subseteq \overline{Q(t_2)}$. Выберем замкнутый интервал Δ с внутренней точкой $\bar{t}$. Для произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t)}$. Зафиксируем произвольную точку $t_1 \in \overline{Q(t)}$ и возьмем замыкание орбиты $\overline{Q(t_1)}$. Очевидно, что $\overline{Q(t_1)} \preceq \overline{Q(t)}$ и образует цепь. По лемме Цорна такая цепь содержится в некоторой максимальной цепи $\{\overline{Q(t_\alpha)}\}$, $\alpha \in A$, где A – некоторое множество индексов. Построим пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{Q(t_\alpha)}$. В силу неограниченности любой орбиты и наличия элемента $q \in Q^N \setminus Q_\infty^N$ пересечение $\Delta \cap \overline{Q(t)}$ непусто для любой точки $t \in \mathbb{R}$. Тогда множества $\Delta \cap \overline{Q(t_\alpha)}$, $\alpha \in A$, образуют центрированную систему компактов, и поэтому пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} (\Delta \cap \overline{Q(t_\alpha)})$ непусто. Следовательно, пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{Q(t_\alpha)}$ также непусто и, как несложно заметить, образует минимальное множество. Противоречие. Следовательно, $Q = Q_\infty^N$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если для подгруппы $\tilde{Q}$, $\tilde{Q} \subseteq Q$, минимальное множество $E(\tilde{Q})$ непусто и не дискретно, то минимальное множество $E(Q)$ группы Q также непусто и $E(\tilde{Q}) \subseteq E(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 множество $E(\tilde{Q})$ – либо совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$, либо совпадает с $\mathbb{R}$. И в том и в другом случае по той же теореме минимальное множество $E(\tilde{Q})$ содержится в замыкании орбиты $\tilde{Q}(t)$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$. В таком случае для любой точки $t \in \mathbb{R}$ множество $E(\tilde{Q})$ будет содержаться в замыкании орбиты $Q(t)$ группы Q , откуда и следует, что $E(Q) \neq \emptyset$ и $E(\tilde{Q}) \subseteq E(Q)$.

Сформулируем результат, развивающий лемму 2.2.

ЛЕММА 2.3. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если для нормальной подгруппы $\tilde{Q}$, $\tilde{Q} \subseteq Q$, минимальное множество $E(\tilde{Q})$ непусто и не дискретно, то минимальное множество $E(Q)$ группы Q также непусто и $E(\tilde{Q}) = E(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 множество $E(Q)$ непусто и $E(\tilde{Q}) \subseteq E(Q)$. Если $E(\tilde{Q}) = \mathbb{R}$, то доказательство очевидно. Пусть $E(\tilde{Q})$ – совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что множество $E(\tilde{Q})$ является Q -инвариантным. Докажем от противного.

Пусть множество $E(\tilde{Q})$ не является Q -инвариантным. Рассмотрим дополнение к множеству $E(\tilde{Q})$, т.е. множество $\mathbb{R} \setminus E(\tilde{Q})$, которое состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов. Так как $E(\tilde{Q})$ не является Q -инвариантным, то обязательно найдутся интервалы $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \mathbb{R} \setminus E(\tilde{Q})$ такие, что для некоторого элемента $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ справедливы условия $q(\Delta_1) \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, $q(\Delta_1) \neq \Delta_2$.

Возможны три различных случая взаиморасположения:

- 1) $\Delta_2 \subset q(\Delta_1)$;
- 2) $q(\Delta_1) \subset \Delta_2$;
- 3) $q(\Delta_1) \setminus \Delta_2 \neq \emptyset, \Delta_2 \setminus q(\Delta_1) \neq \emptyset$.

Через $t_0^1, t_1^1, t_0^2, t_1^2$ обозначим концы интервалов Δ_1, Δ_2 соответственно.

Случай первый. Пусть $\Delta_2 \subset q(\Delta_1)$. Для определенности будем считать, что $q(t_0^1) \neq t_0^2$. Так как $t_0^2 \in E(\tilde{Q})$, то из определения минимального множества следует существование элемента $\bar{q} \in \tilde{Q}$, для которого точка $\bar{q}q(t_0^1)$ может быть сколь угодно близка к точке t_0^2 . Выберем элемент $\bar{q} \in \tilde{Q}$ таким, чтобы точка $\bar{q}q(t_0^1)$ принадлежала внутренности интервала $q(\Delta_1)$. Тогда точка $q^{-1}\bar{q}q(t_0^1)$ будет принадлежать внутренности интервала Δ_1 . Из нормальности подгруппы $\tilde{Q}$ следует, что $q^{-1}\bar{q}q \in \tilde{Q}$, а из $\tilde{Q}$ -инвариантности минимального множества $E(\tilde{Q})$ следует, что $q^{-1}\bar{q}q(t_0^1)$ не принадлежит интервалу Δ_1 . Противоречие. Следовательно, условие $\Delta_2 \subset q(\Delta_1)$ нереализуемо.

Случай второй. Пусть $q(\Delta_1) \subset \Delta_2$, что эквивалентно условию $\Delta_1 \subset q^{-1}(\Delta_2)$ и сводится к первому случаю.

Случай третий. Пусть $q(\Delta_1) \setminus \Delta_2 \neq \emptyset, \Delta_2 \setminus q(\Delta_1) \neq \emptyset$. Для определенности будем полагать, что $q(t_1^1) \subset (t_0^2, t_1^2)$. Дословно повторяя доказательство первого случая, получим, что третий случай также нереализуем.

Рассмотрение всех трех случаев убеждает нас в том, что множество $E(\tilde{Q})$ является Q -инвариантным.

Выше для произвольной группы $Q \subseteq K^+$ были сформулированы некоторые условия непустоты минимального множества $E(Q)$ группы $Q \subseteq K^+$. Приведем критерий пустоты минимального множества $E(Q)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $Q \subseteq K^+$. Для пустоты минимального множества $E(Q)$ необходимо и достаточно, чтобы:

- а) для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ существовала 0-проективно-инвариантная мера;
- б) для любого $n = 1, 2, \dots$ существовала конечно порожденная подгруппа $\tilde{Q} \subseteq Q$, для которой $[-n, n] \cap \text{Fix } \tilde{Q}^N = \emptyset$;
- в) для любого $n = 1, 2, \dots$ существовала точка $t \in \mathbb{R}$ такая, что $Q(t) \cap [-n, n] = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $E(Q) = \emptyset$. Тогда условие а) является следствием критерия существования минимального множества (см. [2; теорема 9.2, в)]).

Условие б) докажем от противного. Предположим, что найдется интервал $\Delta_n = [-n, n]$ такой, что для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ пересечение $\Delta_n \cap \text{Fix } \tilde{Q}^N$ непусто. В таком случае множества $\Delta_n \cap \text{Fix } \tilde{Q}, \tilde{Q} \subseteq Q$, образуют центрированную систему компактов. Заметим, что $\text{Fix } Q^N = \bigcap_{\tilde{Q} \subseteq Q} \text{Fix } \tilde{Q}$, где пересечение берется по всем конечно порожденным подгруппам $\tilde{Q}$, откуда и следует, что $\Delta_n \cap \text{Fix } Q^N \neq \emptyset$. Следовательно, $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ и по замечанию 2.1 $E(Q) \neq \emptyset$. Полученное противоречие и доказывает условие б).

Условие в) также докажем от противного. Пусть существует натуральное число n такое, что $Q(t) \cap \Delta_n \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где $\Delta_n = [-n, n]$. Далее, буквально повторяя рассуждения доказательства леммы 2.1 (начиная с момента определения

частичного порядка на множестве замыканий орбит и полагая Δ равным Δ_n), получим, что минимальное множество $E(Q)$ непусто. Полученное противоречие и доказывает условие в).

Достаточность. Докажем от противного. Предположим, что $E(Q) \neq \emptyset$. Если минимальное множество $E(Q)$ дискретно, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ по теореме 2.1. Так как по условию а) для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ также выполняется условие $\text{Fix } \tilde{Q}^N \neq \emptyset$, а $\text{Fix } Q^N \subseteq \text{Fix } \tilde{Q}^N$, то условие б) нарушается. Следовательно, минимальное множество $E(Q)$ не может быть дискретным.

Пусть минимальное множество $E(Q)$ недискретно. По теореме 2.1 для любой точки $t \in \mathbb{R}$ минимальное множество $E(Q)$ принадлежит замыканию орбиты $\overline{Q(t)}$. Но это противоречит условию в). Полученное противоречие и доказывает условие пустоты минимального множества $E(Q)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если минимальное множество $E(Q)$ пусто, т.е. $E(Q) = \emptyset$, то для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ справедливы условия

$$\inf\{t : t \in \text{Fix } \tilde{Q}^N\} = -\infty, \quad \sup\{t : t \in \text{Fix } \tilde{Q}^N\} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{Q}$ — конечно порожденная подгруппа, и пусть для определенности нарушается второе из условий следствия, т.е. пусть $\sup\{t : t \in \text{Fix } \tilde{Q}^N\} = \bar{t} < +\infty$. Заметим, что для группы Q справедливо условие $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, и поэтому любая орбита не ограничена ни снизу, ни сверху. Далее, дословно повторяя доказательство леммы 2.1 с абзаца, где определяется точка $\bar{t}$, получаем, что минимальное множество $E(Q)$ непусто. Полученное противоречие и доказывает следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если группа Q конечно порожденная, то минимальное множество непусто, т.е. $E(Q) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, то $E(Q) \neq \emptyset$ в силу замечания 2.1.

Пусть $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай первый — среди образующих группы Q существует свободно действующий элемент q . Это означает, что $\text{Fix } q = \emptyset$. Не нарушая общности, можем считать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $q(t) > t$. Если взять достаточно большой интервал $[-n, n]$ так, чтобы выполнялось условие $q(-n) < n$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо условие $Q(t) \cap [-n, n] \neq \emptyset$.

Случай второй — для любой из образующих q_i , $i = \overline{1, s}$, найдется точка t_i такая, что $q_i(t_i) = t_i$. В силу конечности числа образующих найдется достаточно большой интервал $[-n, n]$ такой, что выполняются условия $t_i \in]-n, n[$. Так как справедливо условие $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то для любой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху. Тогда в силу выбора интервала $[-n, n]$ должно выполняться условие $Q(t) \cap [-n, n] \neq \emptyset$.

Итак, мы показали, что в случае $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ для конечно порожденной группы Q условие в) теоремы 2.2 нарушается, что и доказывает предложение 2.1.

§ 3. Критерии существования 0- и 1-проективно-инвариантных мер

В работе [1] исследовались инвариантные меры, которые в силу вышеприведенного определения совпадают с 0-проективно-инвариантными мерами. Там же (см. [1; теорема 4.1]) доказано, что существование инвариантной меры для группы Q эквивалентно условию непустоты множества $\text{Fix } Q^N$. Ниже для группы $Q \subseteq K^+$ сформулируем критерий существования 0-проективно-инвариантной меры, использующий метрические свойства конечно порожденных подгрупп.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Для существования 0-проективно-инвариантной меры необходимо и достаточно, чтобы:*

- а) *для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ существовала 0-проективно-инвариантная мера (т.е. $\text{Fix } \tilde{Q}^N \neq \emptyset$);*
- б) *существовало натуральное число n такое, что для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ выполнялось условие $[-n, n] \cap \text{Fix } \tilde{Q}^N \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость очевидна.*

Достаточность. Система множеств $[-n, n] \cap \text{Fix } \tilde{Q}^N$, $\tilde{Q} \subseteq Q$, где $\tilde{Q}$ – конечно порожденные подгруппы группы Q , образует центрированную систему компактов. Следовательно, множество $\text{Fix } Q^N = \bigcap_{\tilde{Q} \subseteq Q} \text{Fix } \tilde{Q}^N$ непусто, откуда и следует утверждение теоремы (см. [1; теорема 4.1]).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть $Q \subseteq K^+$ и для любой конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ существует 0-проективно-инвариантная мера. Если для какой-либо конечно порожденной подгруппы $\tilde{Q} \subseteq Q$ минимальное множество $E(\tilde{Q})$ не дискретно, то существует 0-проективно-инвариантная мера относительно группы Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий следствия 3.1 условие а) теоремы 3.1 выполняется. Остается доказать справедливость условия б). Пусть G – произвольная подгруппа группы Q . Построим группу $\Gamma = \langle \tilde{Q}, G \rangle$. Очевидно, что $\text{Fix } \Gamma^N \subseteq \text{Fix } G^N$. По лемме 2.2 $E(\tilde{Q}) \subseteq E(\Gamma)$, а в силу теоремы 2.1 $E(\Gamma) \subseteq \text{Fix } \Gamma^N$. Следовательно, $E(\tilde{Q}) \subseteq \text{Fix } G^N$, откуда и следует условие б).

Ниже приводится критерий существования 0-проективно-инвариантной меры, использующий свойство орбит, а также критерий, использующий структуру объединения стабилизаторов.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $Q \subseteq K^+$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- а) *существует 0-проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера μ ;*
- б) *существует точка $t \in \mathbb{R}$, для которой $\sup_{q \in Q^N} |q(t)| < +\infty$;*
- в) *справедливо хотя бы одно из условий:*
 - (1) $Q_\infty^N = \overline{Q}_\infty^N \neq C = Q$,
 - (2) $E(Q)$ – непустое дискретное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть справедливо утверждение а). Тогда $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ (см. [1; теорема 4.1]). В таком случае для любой точки $t \in \text{Fix } Q^N$ выполняется неравенство из б). Из того же условия $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ следует, что $\overline{Q}^N = Q^N$, а условие $E(Q) \neq \emptyset$ следует из замечания 2.1. Если $E(Q)$ не дискретно, то по теореме о факторгруппе (см. [1]) следует, что $Q = C \neq Q^N = \overline{Q}^N = Q_\infty^N = \overline{Q}_\infty^N$, что и доказывает пункт в).

Пусть справедливо утверждение б). Докажем утверждение а) и доказательство проведем от противного. Предположим, что $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $Q^N(t)$ будет не ограниченным ни снизу, ни сверху. Противоречие. Следовательно, $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

Остается доказать, что из условия в) следует условие а). Действительно. Если $E(Q)$ – непустое дискретное множество, то $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$ (по теореме 2.1), что эквивалентно условию а).

Пусть $\overline{Q}_\infty^N = Q_\infty^N$ и $Q = C \neq Q_\infty^N$. Из последнего условия следует, что $Q^N = Q_\infty^N$, и поэтому $Q \neq Q^N$. В таком случае утверждение а) следует из теоремы о факторгруппе (см. [1]).

Приведем одно достаточное условие существования 0-проективно-инвариантной σ -конечной борелевской меры, использующее структуру объединения стабилизаторов Q^N группы Q .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если объединение стабилизаторов Q^N образует группу и $Q \setminus Q^N \neq \emptyset$, то существует 0-проективно-инвариантная σ -конечная борелевская мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем от противного. Так как существование инвариантной меры эквивалентно условию $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$, то предположим, что $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Так как объединение стабилизаторов образует группу, т.е. $Q^N = \overline{Q}^N$, то по теореме о факторгруппе [1] $Q/\overline{Q}^N$ – тривиальная группа, что противоречит условию $Q \setminus Q^N \neq \emptyset$. Следовательно, $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$.

По мере μ , 0-проективно-инвариантной относительно группы G , строится гомоморфизм $\tau_\mu: G \mapsto \mathbb{R}$ (см. [1], [10]), и для любых 0-проективно-инвариантных мер μ, ν гомоморфизмы τ_μ, τ_ν являются линейно зависимыми элементами в $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ с положительным коэффициентом растяжения, т.е. $\tau_\mu = c\tau_\nu$, $c > 0$. Образ гомоморфизма τ_μ есть либо точка нуля, либо бесконечная циклическая группа, либо всюду плотное подмножество $\mathbb{R}$. Если $\text{Im } \tau_\mu = 0$, то $G = G^N$. Если $\text{Im } \tau_\mu$ – бесконечная циклическая группа (дискретное подмножество $\mathbb{R}$), то $\overline{G}^N = G^N$ и G/G^N – бесконечная циклическая группа. Если $\text{Im } \tau_\mu$ – всюду плотное подмножество, то $\overline{G}^N = G^N$ и $G/\overline{G}^N$ – коммутативная нециклическая группа.

Если $\tau_\mu \neq \emptyset$, то $\tau_{q*\mu} = c(q)\tau_\mu$ для любого $q \in Q$ и отображение $A_Q: Q \mapsto \mathbb{R}$, где $A_Q(q) = \log c(q)$, определяет гомоморфизм.

ЛЕММА 3.1. Пусть $Q \subseteq K^+$, а $G \subseteq Q$ – нормальная подгруппа. Если σ -конечная борелевская мера μ является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G , $\tau_\mu \neq 0$ в $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ и $\text{Im } \tau_\mu$ – всюду плотное подмножество $\mathbb{R}$, то мера μ является 1-проективно-инвариантной относительно группы Q . Более того, такая 1-проективно-инвариантная относительно

группы Q мера единственная, и является 0-проективно-инвариантной тогда и только тогда, когда $A_Q = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппа G будет строго эргодичной группой (см. [2; теорема 6.8]), поэтому конус $\mathcal{K}_\mu(Q)$ одномерный (т.е. вырождается в луч). В таком случае $q_*\mu = c(q)\mu$, $c(q) > 0$, для любого $q \in Q$. Здесь числа $c(q)$ те же, что и в определении гомоморфизма A_Q . Единственность меры μ следует из строгой эргодичности подгруппы G и, соответственно, строгой проективной эргодичности группы Q (см. [2; теорема 7.4]). Если $A_Q = 0$, то $c(q) = 1$ для любого $q \in Q$, откуда и следует последнее утверждение леммы.

ЛЕММА 3.2. Пусть $Q \subseteq K^+$, а $G \subseteq Q$ – нормальная подгруппа. Если σ -конечная борелевская мера μ является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы G , $\tau_\mu \neq 0$ в $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$, а $A_Q \neq 0$ в $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, то мера μ является 1-проективно-инвариантной относительно группы Q . Более того, такая 1-проективно-инвариантная относительно группы Q мера единственная и не является 0-проективно-инвариантной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения гомоморфизма τ_μ [1], [10] следует, что $\tau_\mu(q^{-n}gq^n) = \tau_{q_*^n\mu}(g)$ для любых $g \in G$, $q \in Q$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $A_Q \neq 0$, то найдется элемент $q \in Q$ такой, что $c(q) \neq 1$. Из условия $\tau_\mu \neq 0$ следует существование элемента $g \in G$, для которого $\tau_\mu(g) \neq 0$. В таком случае $\tau_\mu(q^{-n}gq^n) = \tau_{q_*^n\mu}(g) = c^n(q)\tau_\mu(g)$ для элементов q, g и любого $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что нуль является предельной точкой множества $c^n(q)\tau_\mu(g)$, откуда следует, что $\text{Im } \tau_\mu$ – всюду плотное множество в $\mathbb{R}$. Тогда утверждение леммы следует из леммы 3.1.

ЛЕММА 3.3. Пусть $Q \subseteq K^+$, а $G \subseteq Q$ – нормальная подгруппа с 0-проективно-инвариантной мерой такой, что $\tau_\mu \neq 0$ в $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$. Тогда $A_Q \neq 0$ в $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$ в том и только том случае, когда $C \neq Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_Q \neq 0$ в $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$. По лемме 3.2 мера μ является единственной 1-проективно-инвариантной относительно Q мерой, но не является 0-проективно-инвариантной. Тогда $Q^N = \overline{Q}^N \neq C \neq Q$ (см. [2; теорема 7.4]).

Обратное. Пусть $C \neq Q$. Покажем, что $A_Q \neq 0$. Выберем произвольный элемент $q \in Q \setminus C = Q^N \setminus Q_\infty^N$ и элемент $g \in G$, удовлетворяющий условию $\tau_\mu(g) \neq 0$. Очевидно, что $g \in G \setminus G^N$. Не нарушая общности, можем считать, что для элемента q и некоторой точки $\bar{t} \in \mathbb{R}$ выполняются условия $q(\bar{t}) = \bar{t}$, $q(t) > t$ для всех $t \in]\bar{t}, +\infty[$, а для элемента g справедливо условие $q(t) > t$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\tau_\mu(g) \neq 0$. Из определения гомоморфизма A_Q следует, что $A_Q(q^n) = n \log c(q)$ для любых $n \in \mathbb{Z}$, где $c(q)$ удовлетворяет уравнению $\tau_{q_*^n\mu}(g) = c^n(q)\tau_\mu(g)$. Из определения гомоморфизма τ_μ следует, что $\tau_{q_*^n\mu}(g) = \tau_\mu(q^{-n}gq^n) = \mu([\bar{t}, q^{-n}gq^n(t)])$. Легко заметить, что $q^{-n}gq^n(\bar{t}) > \bar{t}$ и $q^{-n}gq^n(\bar{t}) \rightarrow \bar{t}$ при $n \rightarrow +\infty$, откуда и следует, что $\tau_{q_*^n\mu}(g) \rightarrow \mu([\bar{t}])$ при $n \rightarrow +\infty$.

Предположим, что $c(q) = 1$. Тогда из равенства $\tau_{q_*^n\mu}(g) = \tau_\mu(g)$, справедливого для любого $n \in \mathbb{Z}$, следует, что $\mu([\bar{t}]) \neq 0$, $\mu([\bar{t}, g(\bar{t})]) = 0$. Так как $q^{-n}gq^n \in G$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, а мера μ является 0-проективно-инвариантной относительно G , то $(q^{-n}gq^n)_*\mu = \mu$. В таком случае для точки $q^{-n}gq^n(\bar{t})$ получим, что $\mu([q^{-n}gq^n(\bar{t})]) = (q^{-n}gq^n)_*\mu([q^{-n}gq^n(\bar{t})]) = \mu([\bar{t}])$. Так как это справедливо при

всех $n \in \mathbb{Z}$, то это противоречит условию $\mu(\bar{t}, g(\bar{t})) = 0$. Следовательно, $c(q) \neq 1$, а вместе с ним и $A_Q \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В условиях леммы 3.3 для элементов $q \in Q \setminus C = Q^N \setminus Q_\infty^N$ и только для них $A_Q(q) \neq 0$.

Сформулируем критерий существования 1-проективно-инвариантной меры с использованием структуры канонически определенных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $Q \subseteq K^+$ и для группы Q не существует 0-проективно-инвариантной меры. Для существования 1-проективно-инвариантной меры необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $Q_\infty^N = \overline{Q}_\infty^N \neq C = \overline{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость непосредственно следует из теоремы 7.4 работы [2].

Достаточность. Рассмотрим группу C . Очевидно, что для такой группы $C^N = Q_\infty^N$. Так как $C \neq Q_\infty^N$, то по предложению 3.1 существует мера μ , 0-проективно-инвариантная относительно группы C . Из определения гомоморфизма τ_μ следует, что в нашем случае $\tau_\mu \neq 0$.

Если бы $C = Q$, то мера μ была бы 0-проективно-инвариантной относительно группы Q , что противоречит условию теоремы. Следовательно, $C \neq Q$. Тогда подгруппа C удовлетворяет всем условиям леммы 3.3 (в которой $C = G$), в силу чего $A_Q \neq 0$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. В условиях теоремы 3.3 выполняется условие $\overline{C} \neq Q$.

В работе [18] приводится критерий существования 1-проективно-инвариантной меры, использующий структуру множества неподвижных точек элементов группы.

§ 4. Существование 0-максимальных подгрупп

В этом параграфе будут сформулированы условия существования 0-максимальных подгрупп, описана их структура. Такое описание позволит указать основное “препятствие” для существования 1-проективно-инвариантной меры.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если $E(Q) \neq \emptyset$, то существует 0-максимальная подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера (т.е. $\text{Fix } Q^N \neq \emptyset$), то максимальная подгруппа совпадает со всей группой Q .

2) Если для группы Q существует 1-проективно-инвариантная мера, не являющаяся 0-проективно-инвариантной, то по следствию 7.3 работы [2] нормальные подгруппы H и C группы Q удовлетворяют условию $H \neq C \neq Q$.

Покажем, что любая нормальная подгруппа G группы Q с 0-проективно-инвариантной мерой содержится в нормальной подгруппе C , т.е. $G \subseteq C$. Действительно. Так как $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то непустое замкнутое множество $\text{Fix } G^N$ не ограничено ни снизу, ни сверху. Если бы существовал элемент $\bar{q} \in G \cap (Q^N \setminus Q_\infty^N)$, то множество $\text{Fix } G^N$ было бы ограниченным либо сверху, либо снизу. Противоречие.

Следовательно, такого элемента $\bar{q}$ не существует и $G \subseteq C$. Итак, всякая нормальная подгруппа G с 0-проективно-инвариантной мерой содержится в подгруппе C , а сама подгруппа C является единственной 0-максимальной подгруппой.

3) Остается рассмотреть случай, когда для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры. Очевидно, что в этом случае минимальное множество $E(Q)$ недискретное. Рассмотрим нормальную подгруппу H . Из определения подгруппы H следует, что $E(Q) \subseteq \text{Fix } H^N = \text{Fix } H \neq \emptyset$, следовательно, для такой подгруппы существует 0-проективно-инвариантная мера. Пусть существует нормальная подгруппа G с 0-проективно-инвариантной мерой, для которой справедливо включение $H \subseteq G$.

Вначале покажем, что $G \subseteq C$. Так как $\text{Fix } Q^N = \emptyset$, то непустое замкнутое множество $\text{Fix } G^N$ не ограничено ни снизу, ни сверху. Если бы существовал элемент $\bar{q} \in G \cap (Q^N \setminus Q_\infty^N)$, то множество $\text{Fix } G^N$ было бы ограниченным либо сверху, либо снизу. Противоречие. Следовательно, такого элемента $\bar{q}$ не существует и $G \subseteq C$.

Следующим шагом покажем, что $G^N = H$. Действительно. Из условия $H \subseteq G$ следует, что $H \subseteq G^N$ и, соответственно, $\text{Fix } G^N \subseteq \text{Fix } H$, откуда и следует цепочка включений $E(Q) \subseteq \text{Fix } G^N \subseteq \text{Fix } H$. Тогда в силу определения нормальной подгруппы H следует утверждение $G^N = H$.

Окончательно получим, что для любой нормальной подгруппы G с 0-проективно-инвариантной мерой такой, что $H \subseteq G$, выполняются условия $G \subseteq C$, $G^N = H$. На множестве всех нормальных подгрупп G группы Q , для которых существуют 0-проективно-инвариантные меры и справедливо включение $H \subseteq G$, введем отношение частичного порядка следующим образом: $G_1 \preceq G_2$, если $G_1 \subseteq G_2$.

Если для любой нормальной подгруппы указанного семейства выполнено условие $H = G$, то H и будет максимальной нормальной подгруппой с 0-проективно-инвариантной мерой.

Пусть существует подгруппа G_1 такая, что $H \subset G_1$, и для нее существует 0-проективно-инвариантная мера μ_1 . Из условия $H \neq G_1$ следует, что $\tau_{\mu_1} \neq 0$. Так как для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры, то по лемме 3.1 $\text{Im } \tau_{\mu_1}$ – бесконечное дискретное множество, а факторгруппа G_1/H – бесконечная циклическая группа. По лемме Цорна цепь $H \subset G_1$ содержится в некоторой максимальной цепи $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, причем для любого $\alpha \in A$ $\tau_{\mu_\alpha} \neq 0$, $\text{Im } \tau_{\mu_\alpha}$ – бесконечное дискретное множество, а G_α/H – бесконечная циклическая группа. Рассмотрим объединение $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, задающее нормальную подгруппу группы Q . Очевидно, что $H \subset G \subseteq C$ и $G^N = H$. Так как H – подгруппа, то $G^N = \overline{G}^N$. По предложению 3.1 для подгруппы G существует 0-проективно-инвариантная мера μ . В таком случае G будет 0-максимальной подгруппой. Более того, для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры, поэтому по лемме 3.1 $\text{Im } \tau_\mu$ – бесконечное дискретное множество, а G/H – бесконечная циклическая группа.

ЛЕММА 4.1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если $E(Q) \neq \emptyset$, то для любой 0-максимальной подгруппы M справедливо одно из следующих условий:

- (1) $H = M^N$, $M = Q$, если минимальное множество $E(Q)$ дискретное;
- (2) $H = M^N$, $M \subseteq C$, если минимальное множество $E(Q)$ недискретное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть минимальное множество $E(Q)$ дискретное. Тогда по теореме 2.1 для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера и утверждение (1) будет следовать из определения нормальной подгруппы H .

Пусть минимальное множество $E(Q)$ недискретное.

1) Если для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера, то $M = Q$, а из недискретности минимального множества следует, что $Q_\infty^N = \overline{Q}_\infty^N = Q^N = \overline{Q}^N \neq C = Q$ (см. [1; теорема о факторгруппе], [2; теорема 6.8]). Из определения нормальной подгруппы H будет следовать, что $H = Q_\infty^N$. Так как в рассматриваемом случае $M = Q$, то $H = M^N$, что и требовалось доказать.

2) Пусть для группы Q не существует 0-проективно-инвариантной меры, т.е. $\text{Fix } Q^N = \emptyset$. Из определения нормальной подгруппы H следует, что $E(Q) \subseteq \text{Fix } H^N = \text{Fix } H \neq \emptyset$. Из условия $\text{Fix } Q^N = \emptyset$ следует, что минимальное множество $E(Q)$ не ограничено ни снизу, ни сверху.

Пусть M является 0-максимальной подгруппой. Покажем, что $M \subseteq C$. Если бы существовал элемент $\bar{q} \in M \cap (Q^N \setminus Q_\infty^N)$, то замкнутое инвариантное относительно группы Q множество $\text{Fix } M^N$ было бы ограниченным либо сверху, либо снизу. Так как $E(Q) \subseteq \text{Fix } M^N$, то это противоречит условию не ограниченности ни снизу, ни сверху минимального множества $E(Q)$. Следовательно, такого элемента $\bar{q}$ не существует и $M \subseteq C$.

Следующим шагом покажем, что $H \subseteq M^N$. Так как $E(Q) \subseteq \text{Fix } M^N$, то из определения 0-максимальности подгруппы M и критерия существования 0-проективно-инвариантной меры (см. [1; теорема 4.1, п. а)]) следует, что $H \subseteq M^N$.

Так как $H \subseteq M^N$, то $\text{Fix } M^N \subseteq \text{Fix } H$ и окончательно получим цепочку включений $E(Q) \subseteq \text{Fix } M^N \subseteq \text{Fix } H$. Из полученной цепочки включений и определения нормальной подгруппы H и будет следовать утверждение леммы, т.е. $H = M^N$.

В действительности в ходе доказательства теоремы 4.1 и леммы 4.1 мы доказали большее, выяснили структуру 0-максимальных подгрупп.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $Q \subseteq K^+$ и $E(Q) \neq \emptyset$. Тогда 0-максимальная подгруппа M

- а) совпадает с группой Q , если для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера;
- б) совпадает с нормальной подгруппой C , если для группы Q не существует 0-проективно-инвариантной меры, но существует 1-проективно-инвариантная мера;
- в) содержит нормальную подгруппу H , если для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры и $C = Q$; более того, факторгруппа M/H – либо тривиальная, либо бесконечная циклическая группа;
- г) совпадает с нормальной подгруппой H , если для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры и $C \neq Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт а) следует из определения 0-максимальной подгруппы.

Доказательство п. б) дословно повторяет доказательство теоремы 4.1 (п. 2)).

Докажем п. в). Так как для группы Q не существует 1-проективно-инвариантной меры, то по теореме 2.1 минимальное множество не дискретно и утверждение п. в) следует из леммы 4.1 и последнего абзаца п. 3) доказательства теоремы 4.1.

Докажем п. г). Как и в предыдущем пункте, здесь минимальное множество не дискретно и по лемме 4.1 $H = M^N$. Остается доказать, что $M^N = M$. Действительно. Пусть $M^N \neq M$, а μ является 0-проективно-инвариантной мерой из определения 0-максимальной подгруппы. В таком случае $\tau_\mu \neq 0$ в $\text{Hom}(M, \mathbb{R})$ в силу условий $M^N \neq M$, $A_Q \neq 0$ в $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, $C \neq Q$ и леммы 3.3. По лемме 3.1 для такой группы Q должна существовать 1-проективно-инвариантная мера, что противоречит условиям п. г). Следовательно, $M^N = M$.

§ 5. Теория Боголюбова–Крылова о существовании метрических инвариантов для групп гомеоморфизмов прямой

Одним из первых результатов по метрическим инвариантам является теорема Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры для гомеоморфизма окружности. Здесь будет дано прямое обобщение теоремы Боголюбова–Крылова для группы гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Будет доказана теорема о существовании ω -проективно-инвариантной меры. В последующем это позволит описать “препятствия” в проблеме существования 1-проективно-инвариантной меры.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА–КРЫЛОВА. Пусть $Q \subseteq K^+$. Если $E(Q) \neq \emptyset$, то найдется такое кардинальное число ω , что для группы Q существует ω -проективно-инвариантная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $E(Q)$ – дискретное множество, то по теореме 2.2 для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера, откуда и следует доказательство теоремы.

2. Пусть $E(Q)$ не дискретное множество. Предположим, что l – такой замкнутый интервал на прямой, что $E(Q) \cap l \neq \emptyset$.

Для любого $\mu \in \mathcal{M}^+$ рассмотрим соответствующий замкнутый выпуклый конус $\mathcal{K}_\mu(Q)$. Возьмем ограничение мер из конуса $\mathcal{K}_\mu(Q)$ на интервал l и замкнем их в $*$ -слабой топологии пространства $\mathcal{M}$ (мера $\bar{\mu} \in \mathcal{M}$ является ограничением меры $\hat{\mu} \in \mathcal{M}$ на интервал l , если для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство $\bar{\mu}(B) = \hat{\mu}(B \cap l)$). Такой выпуклый замкнутый конус обозначим через $D_\mu(l, Q)$. Так как $E(Q) \neq \emptyset$, то конус $D_\mu(l, Q)$ ненулевой.

Пусть U – некоторая окрестность нуля в пространстве $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ с топологией индуктивного предела [19; гл. I, дополнение], а U° – ее поляр, являющаяся компактным множеством в $*$ -слабой топологии. В окрестности U найдется функция $x_l(\cdot)$ с компактным носителем, значение которой в любой точке интервала l не равно нулю. Рассмотрим гиперплоскость $\Pi = \{\mu : \mu \in \mathcal{M}, \langle x, \mu \rangle = 1/2\}$. Очевидно, что пересечение $\Pi \cap U^\circ$ является непустым выпуклым компактным множеством, не содержащим нуля. Конус $D_\mu(l, Q)$ совпадает с замкнутым выпуклым конусом, порожденным выпуклым компактным множеством $d_\mu(l, Q) = D_\mu(l, Q) \cap \Pi \cap U^\circ$. Более того, для любого $\bar{\mu} \in D_\mu(l, Q)$ луч $\lambda \bar{\mu}$, $\lambda > 0$, имеет непустое пересечение с множеством $d_\mu(l, Q)$.

В множестве всех выпуклых замкнутых конусов $\{\mathcal{K}_\mu(Q)\}_{\mu \in \mathcal{M}^+}$ можно ввести отношение частичного порядка следующим образом: для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$ положим $\mathcal{K}_{\mu_2}(Q) \preceq \mathcal{K}_{\mu_1}(Q)$, если $\mathcal{K}_{\mu_1}(Q) \subseteq \mathcal{K}_{\mu_2}(Q)$.

Для произвольной меры $\mu_1 \in \mathcal{M}^+$ образуем конус $\mathcal{K}_{\mu_1}(Q)$. В конусе $\mathcal{K}_{\mu_1}(Q)$ выберем элемент μ_2 . Для меры μ_2 также рассмотрим конус $\mathcal{K}_{\mu_2}(Q)$. Очевидно, что $\mathcal{K}_{\mu_2}(Q) \subseteq \mathcal{K}_{\mu_1}(Q)$ и такие конусы образуют цепь. По лемме Цорна такая цепь содержится в некоторой максимальной цепи $\{\mathcal{K}_{\mu_\alpha}(Q)\}_{\alpha \in \Sigma}$. Построим пересечение

$$\mathcal{K}(Q) = \bigcap_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{K}_{\mu_\alpha}(Q).$$

Покажем, что $\mathcal{K}(Q) \neq \emptyset$. Заметим, что множества $\{d_{\mu_\alpha}(l, Q)\}_{\alpha \in A}$ образуют центрированную систему компактов, и поэтому

$$d(l, Q) = \bigcap_{\alpha \in A} \{d_{\mu_\alpha}(l, Q)\}$$

является непустым компактным выпуклым множеством. Через $D(l, Q)$ обозначим замкнутый конус, порожденный множеством $d(l, Q)$. Очевидно, что для любого $\alpha \in A$ справедливо включение $D_{\mu_\alpha}(l, Q) \supseteq D(l, Q)$.

Пусть $\{I_i\}_{i=1}^\infty$ — расширяющаяся последовательность замкнутых интервалов такая, что $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$ и $I_1 \cap E(Q) \neq \emptyset$. Для любых $i, j = 1, 2, \dots, j \geq i$, возьмем ограничение мер из конуса $D(I_j, Q)$ на интервал I_i и замкнем их в $*$ -слабой топологии пространства $\mathcal{M}$. Такой выпуклый замкнутый конус обозначим через $D_j(I_i, Q)$. Очевидно, что для любых $i, j, k = 1, 2, \dots, k \geq j \geq i$, имеют место включения $D_k(I_i, Q) \subseteq D_j(I_i, Q) \subseteq D(I_i, Q)$. Так как $E(Q) \neq \emptyset$, а конусы $\{\mathcal{K}_{\mu_\alpha}(Q)\}_{\alpha \in A}$ инвариантны относительно группы линейных операторов Q_* , то для любых $i, j = 1, 2, \dots, j \geq i$, конус $D_j(I_i, Q)$ ненулевой. Заметим, что для любых $i, j = 1, 2, \dots, j \geq i$, конус $D_j(I_i, Q)$ совпадает с замкнутым выпуклым конусом, порожденным выпуклым компактным множеством $d_j(I_i, Q) = D_j(I_i, Q) \cap \Pi \cap U^0$ и для любого $\bar{\mu} \in D_j(I_i, Q)$ луч $\lambda \bar{\mu}$, $\lambda > 0$, имеет непустое пересечение с множеством $d_j(I_i, Q)$. Для всякого $i = 1, 2, \dots$ множества $\{d_j(I_i, Q)\}_{j=1}^\infty$ образуют центрированную систему компактов, и поэтому $d_\infty(I_i, Q) = \bigcap_{j=1}^\infty d_j(I_i, Q)$ является непустым компактным выпуклым множеством. Через $D_\infty(I_i, Q)$ обозначим замкнутый выпуклый конус, порожденный множеством $d_\infty(I_i, Q)$. Очевидно, что для любого $i = 1, 2, \dots$ имеет место включение $D_\infty(I_i, Q) \subseteq D(I_i, Q)$.

Выберем меру $\hat{\mu}_1 \in D_\infty(I_1, Q)$. В силу построения последовательности конусов $D_\infty(I_i, Q)$, $i = 1, 2, \dots$, найдется мера $\hat{\mu}_2 \in D_\infty(I_2, Q)$, ограничение которой на интервал I_1 совпадает с мерой $\hat{\mu}_1$. Продолжая такой процесс, получим последовательность мер $\hat{\mu}_i \in D_\infty(I_i, Q)$, $i = 1, 2, \dots$, такую, что ограничение меры $\hat{\mu}_{i+1}$ на интервал I_i совпадает с мерой $\hat{\mu}_i$. Построим меру $\hat{\mu} \in \mathcal{M}^+$ со свойствами: для любого $i = 1, 2, \dots$ ограничение меры $\hat{\mu}$ на интервал I_i совпадает с мерой $\hat{\mu}_i$. Мера $\hat{\mu}$ с такими свойствами существует и определяется однозначно мерами $\hat{\mu}_i$, $i = 1, 2, \dots$. В силу построения меры $\hat{\mu}$ она принадлежит конусу $\mathcal{K}(Q) \neq \emptyset$. Более того, конус $\mathcal{K}(Q)$ является минимальным, и любая мера $\mu \in \mathcal{K}(Q)$ может быть построена по процедуре, описанной выше.

Так как $d_\infty(I_1, Q)$ является выпуклым компактным множеством, то существует мера $\hat{\mu}_1 \in D_\infty(I_1, Q)$ такая, что непустое пересечение луча $\lambda\hat{\mu}_1$, $\lambda > 0$, с компактным множеством $d_\infty(I_1, Q)$ задавало бы крайнюю точку множества $d_\infty(I_1, Q)$. Очевидно, что в этом случае луч $\lambda\hat{\mu}_1$, $\lambda > 0$, будет крайним лучом в конусе $D_\infty(I_1, Q)$. Тогда мера $\hat{\mu} \in \mathcal{K}(Q)$, построенная по процедуре, описанной выше, задает луч $\lambda\hat{\mu}$, $\lambda > 0$, который будет крайним лучом конуса $\mathcal{K}(Q)$. Следовательно, мера $\hat{\mu}$ является ω -проективно-инвариантной мерой, где ω – мощность множества крайних лучей $\{\lambda(q_*\mu), \lambda > 0\}_{q_* \in Q}$.

§ 6. Проблема существования 1-проективно-инвариантной меры и связанные с ней комбинаторные “препятствия”

Здесь исследованы основные “препятствия” в проблеме существования 1-проективно-инвариантной меры для группы гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию. Оказывается, что для групп с некоторой ω -проективно-инвариантной мерой основные “препятствия” связаны с комбинаторными свойствами факторгруппы Q/H , где нормальная подгруппа H – это объединение стабилизаторов 0-максимальной подгруппы M .

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $Q \subseteq K^+$ и $E(Q) \neq \emptyset$. Предположим, что 0-максимальная подгруппа M такова, что $H \neq M$. Тогда для существования меры, 1-проективно-инвариантной относительно группы Q , необходимо и достаточно, чтобы факторгруппа Q/H не содержала свободных подгрупп с двумя образующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть группа Q имеет 1-проективно-инвариантную меру. Если для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера, то по определению $H = Q^N$ и по теореме о факторгруппе (см. [1]) Q/H – коммутативная группа. Если для группы Q не существует 0-проективно-инвариантной меры, то по теореме 7.3 из [2] факторгруппа Q/H изоморфна подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, и поэтому является разрешимой группой.

Достаточность. Пусть Q/H не содержит свободных подгрупп с двумя образующими.

1) Если $E(Q)$ – дискретное множество, то по теореме 2.1 для группы Q существует 0-проективно-инвариантная мера.

2) Пусть $E(Q)$ – недискретное множество. Из определения 0-максимальности подгруппы M следует существование меры μ , 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы M . По лемме 4.1 $H = M^N$. Так как $H \neq M$, то $\tau_\mu \neq 0$ в $\text{Hom}(M, \mathbb{R})$. Если при этом $A_Q \neq 0$ в $\text{Hom}(Q, \mathbb{R})$, то по лемме 3.2 для группы Q существует 1-проективно-инвариантная мера.

Остается случай, когда $A_Q = 0$. В этом случае $C = Q$ по лемме 3.3. Если $\text{Im } \tau_\mu$ – недискретное множество (факторгруппа M/H – нециклическая группа), то по лемме 3.1 для группы Q существует 1-проективно-инвариантная мера.

Наконец, остается рассмотреть случай, когда $A_Q = 0$, $\text{Im } \tau_\mu$ – дискретное множество. В этом случае факторгруппа M/H – бесконечная циклическая группа. Пусть левый смежный класс tH определяет образующую факторгруппы M/H .

Так как M/H – циклическая, то, не нарушая общности, мы можем так переопределить меру μ , чтобы она удовлетворяла условиям: μ является 0-проективно-инвариантной относительно подгруппы M ; мера μ непрерывная и ее носитель совпадает с минимальным множеством, т.е. $\text{supp } \mu = E(Q)$; выполняется равенство $\tau_\mu(m) = 1$.

Определим отображение $\eta(t) = \tilde{\mu}(\bar{t}, t)$, где

$$\tilde{\mu}(\bar{t}, t) = \begin{cases} \mu(\bar{t}, t), & t \geq \bar{t}, \\ -\mu((t, \bar{t}]), & t < \bar{t}. \end{cases}$$

Отображение η является непрерывным, монотонно возрастающим и $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $q \in Q$ сравним значения $\eta(q(t))$ и $\eta(q(m(t)))$, где $\eta(q(t)) = \tilde{\mu}(\bar{t}, q(t))$, $\eta(q(m(t))) = \tilde{\mu}(\bar{t}, q(m(t)))$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta(q(m(t))) &= \tilde{\mu}(\bar{t}, q(m(t))) = \tilde{\mu}(\bar{t}, q(m(t))) + \tilde{\mu}([q(t), q(m(t)))) \\ &= \eta(q(t)) + q_*^{-1} \tilde{\mu}([t, m(t))). \end{aligned}$$

Так как $q_*^{-1} \tilde{\mu} = c(q^{-1}) \tilde{\mu}$, а при этом $A_Q = 0$, то из определения гомоморфизма A_Q следует, что $c(q^{-1}) = 1$. По определению гомоморфизма τ_μ имеем $\mu([t, m(t))) = \tau_\mu(m) = 1$. Окончательно получим, что

$$\eta(q(m(t))) = \eta(q(t)) + 1$$

и, в частности, $\eta(m(t)) = \eta(t) + 1$.

Определим группу гомеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, следующим образом

$$\begin{aligned} *_Q &= \{ *_q : *_q \in K^+; \text{ существует } q \in Q \text{ такой, что} \\ &\quad *_q(\eta(t)) = \eta(q(t)) \text{ для любого } t \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

Отображение $\eta^* : Q \rightarrow *_Q$, где $\eta^*(q) = *_q$, является эпиморфизмом и при этом

$$\eta(m) = *_m, \quad *_m(t) \equiv t + 1, \quad \ker \eta^* = H.$$

Тогда (см. [1; определение 1.4]) группа Q полусопряжена группе $*_Q$ и группа $*_Q$ изоморфна факторгруппе Q/H . Более того, для любых $*_q \in *_Q$, $t \in \mathbb{R}$

$$*_q(\eta(t) + 1) = *_q(\eta(m(t))) = \eta(q(m(t))) = \eta(q(t)) + 1 = *_q(\eta(t)) + 1,$$

откуда следует, что любой элемент $*_q \in *_Q$ перестановочен с элементом $*_m$, т.е. элемент $*_m$ принадлежит центру $Z(*_Q)$ группы $*_Q$.

Для таких групп (см. [2; теоремы 6.4, 6.7]) 0-проективно-инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда $*_Q^N = *_Q^N$, т.е. когда множество всех стабилизаторов Q^N образует подгруппу. Более того, для таких групп не существует 1-проективно-инвариантных мер, не являющихся 0-проективно-инвариантными.

Если не существует меры, 0-проективно-инвариантной относительно группы $*_Q$, что эквивалентно условию $*_Q^N \neq *_Q^N$, то (см. [6]) группа $*_Q$ содержит

свободную подгруппу с двумя образующими, что противоречит условию теоремы. Если существует мера, 0-проективно-инвариантная относительно группы $*Q$, то в силу теоремы 4.1 из [1] существует 0-проективно-инвариантная мера относительно группы Q .

В работе [10] приводится доказательство достаточного условия теоремы 6.1 в предположении, что факторгруппа Q/H является аменабельной.

Конструкции в доказательстве теоремы 6.1 позволяют уточнить п. в) теоремы 4.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $Q \subseteq K^+$ и $E(Q) \neq \emptyset$. Если $C = Q$, а 0-максимальная подгруппа такова, что $H \neq M$, то группа Q полуспряжена (см. [1]) группе $*Q \subseteq K^+$, центру $Z(*Q)$ которого принадлежит элемент $*m(t) = t + 1$.

Доказательство буквально повторяет доказательство достаточности в теореме 6.1 (см. 2), начиная со второго абзаца).

Для описания взаимосвязи между топологическими, алгебраическими и метрическими свойствами группы Q следует исследовать возможность обращения теоремы 4.1 и обобщенной теоремы Боголюбова–Крылова. Такие исследования, в частности, связаны с описанием носителя ω -проективно-инвариантной меры.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть $Q \subseteq K^+$. Для существования 0-максимальной подгруппы необходимо и достаточно, чтобы $E(Q) \neq \emptyset$.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть $Q \subseteq K^+$. Для существования ω -проективно-инвариантной меры необходимо и достаточно, чтобы $E(Q) \neq \emptyset$.

Список литературы

1. Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. I. Инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №3. С. 23–54.
2. Бекларян Л. А. К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры // Матем. сб. 1996. Т. 187. №4. С. 3–28.
3. Альфорт Л. В. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
4. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
5. Hinkkanen A. The structure of certain quasisymmetric groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. № 422. P. 85.
6. Солодов В. В. Гомеоморфизмы окружности и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №3. С. 599–613.
7. Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 58. М.: ВИНТИ, 1990. С. 191–256.
8. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1983.
9. Plante I. F. Foliations with measure preserving holonomy // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 327–361.
10. Plante I. F. Solvable groups acting on the line // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 401–414.
11. Imanishi H. Structure of codimension 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group // J. Math. Kyoto Univ. 1979. V. 19. №3. P. 481–495.
12. Salhi E. Sur un théoreme de structure des feuilletages de codimension 1 // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1985. V. 300. №18. P. 635–638.

13. *Salhi E.* Niveau des feuilles // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1985. V. 301. №5. P. 219–222.
14. *Matsumoto S.* Numerical invariants for semiconjugacy of homeomorphisms of the circle // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 98. №1. P. 163–168.
15. *Matsumoto S.* Some remarks on foliated S^1 bundles // Invent. Math. 1987. V. 90. P. 343–358.
16. *Chys E.* Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. Part III // Contemp. Math. 1987. V. 58. P. 81–105.
17. *Бекларян Л. А.* Структура факторгруппы группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, по подгруппе, порожденной объединением стабилизаторов // Докл. АН. 1993. Т. 332. №6. С. 679–681.
18. *Бекларян Л. А.* Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 179–180.
19. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

Центральный экономико-математический институт РАН
E-mail: Beklar@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
07.05.1998