Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пржиялковский, Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 9, 107–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:35:21

УДК 512.772

В. В. Пржиялковский

Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях

В работе обобщается теорема Гивенталья для полных пересечений в гладких торических многообразиях для случая многообразий Фано. Найдены инварианты Громова–Виттена для гладких полных пересечений Фано размерности ≥ 3 во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях. Также выводится обобщенное уравнение Римана–Роха для таких многообразий. Как следствие вычисляются считающие матрицы гладких трехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ антиканонических степеней 2, 8 и 16.

Библиография: 29 названий.

Пусть X – общее полное пересечение гиперповерхностей степеней $d_1, \dots, d_l$ в $\mathbb{P}^N$, $d_0 = N + 1 - \sum d_i > 0$, $n = N - l \geq 3$. Пусть $H_H^*(X) \subset H^*(X, \mathbb{Z})$ – подкольцо, порожденное классом H , двойственным гиперплоскому сечению, а $S = H_H^*(X) \otimes \mathbb{C}[[q]]$. Класс когомологий $H \otimes 1 \in S$, где $H \in H_H^*(X)$, обозначим той же буквой H . Тогда по теореме Гивенталья о полных пересечениях в проективных пространствах (см. [1]) I -ряд (т.е. производящий ряд для одноточечных инвариантов Громова–Виттена с потомками; см. определение 2.7) для X записывается в виде

$$I^X = \exp(-\alpha_X q) \sum_{d=0}^{\infty} \hat{I}_d^X q^d = \exp(-\alpha_X q) \sum_{d=0}^{\infty} q^d \frac{\prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^{d_i} (d_i H + j)}{\prod_{i=1}^d (H + i)^{N+1}} \in S,$$

где $\alpha_X = d_1! \cdots d_l!$, если $d_0 = 1$, и $\alpha_X = 0$, если $d_0 > 1$.

Рассмотрим $D = q \cdot d/dq \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[[q]] [q \cdot d/dq]$. Тогда уравнение Римана–Роха, т.е. дифференциальное уравнение вида

$$\left(D^{N+1} - \prod_{i=0}^l d_i^{d_i} q \prod_{j=1}^{d_i} \left(D + \frac{j}{d_i} \right) \right) [\Phi(q)] = 0,$$

имеет в качестве решения ряд $\mathcal{I}^X = \sum q^d (d_0 d)! \hat{I}_{d, H^0}^X$.

В настоящей работе обобщаются эти результаты на полные пересечения во *взвешенных проективных пространствах* и *особых торических многообразиях*.

В § 1 формулируются основные результаты. В § 2 даются необходимые определения и формулируются известные результаты. В § 3 доказываются и обсуждаются основные теоремы этой работы (теоремы 1.1, 1.2). В приложении (§ 4) формулируется гипотеза Гольшева. Следствие из теоремы 1.1 завершает ее доказательство.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00613 и № 05-01-00353) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-9969.2006.1).

Обозначения. Символом Похгаммера $(X)_n$ будем обозначать произведение $X(X+1)\cdots(X+n-1)$, в котором X – элемент некоторого кольца (см. [2; 6.1.22]). Бесконечное произведение $\prod_{a=-\infty}^{n-1}(X+a)$ будем обозначать $[X]_n$. (Бесконечное произведение определяется формально; в тексте будем использовать лишь отношение двух бесконечных произведений, у которых все (кроме конечного числа) множители можно формально сократить.)

Группы гомологических и когомологических классов на X по модулю кручения мы будем обозначать $H_*(X)$ и $H^*(X)$ соответственно.

Одним и тем же символом мы будем обозначать гиперповерхность и двойственный ей класс когомологий.

Обозначим $B = \mathbb{C}[[q]]$ и $D = q \cdot d/dq \in \mathcal{D} = B[q \cdot d/dq]$.

Все многообразия рассматриваются над полем $\mathbb{C}$.

§ 1. Результаты

Необходимые определения даны в пп. 2.1, 2.2 и 2.4.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_1, \dots, w_k)$ – взвешенное проективное пространство. Рассмотрим гладкое полное пересечение X гиперповерхностей $X_1, \dots, X_l$, не пересекающее особое множество $\mathbb{P}$. Пусть $-K_X > 0$, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}H$, где H – класс, двойственный гиперплоскости, $i: X \rightarrow \mathbb{P}$ – естественное вложение.

1) I -ряд для X имеет вид

$$I^X = \exp(-\alpha_X q) \sum_{d=0}^{\infty} q^d i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^l (X_a + 1)_{d \cdot \deg X_a}}{\prod_{a=1}^k (w_a H + 1)_{d \cdot w_a}} \right),$$

где $\alpha_X = 0$, если индекс многообразия не меньше 2, и

$$\alpha_X = \frac{\prod_{a=1}^l (\deg X_a)!}{\prod_{a=1}^k w_a!}$$

в случае индекса 1.

2) Пусть d_i , $1 \leq i \leq l$, – степени гиперповерхностей X_i (относительно H), a $d_0 = \sum w_i - \sum d_i$ – индекс многообразия X . Пусть

$$\mathcal{J}^X(q) = \sum q^d ((d_0 d)! (e^{\alpha_X} I^X)_{d, H^0}).$$

Рассмотрим оператор (обобщающий оператор Римана–Роха; см. [3])

$$L = \prod_{i=1}^k (w_i D - (w_i - 1))_{w_i} - q \prod_{i=0}^l (d_i D + 1)_{d_i}.$$

Тогда $L[\mathcal{J}^X(q)] = 0$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть Y – $\mathbb{Q}$ -факториальное торическое многообразие, а $Y_1, \dots, Y_k$ – дивизоры, соответствующие ребрам веера Y . Рассмотрим гладкое полное пересечение X гиперповерхностей $X_1, \dots, X_l$, не пересекающее особое множество Y . Пусть $-K_X > 0$, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, а $i: X \rightarrow Y$ – естественное вложение. Пусть ℓ – численно эффективная образующая группы $H_2(Y)$, и

для $\beta = d\ell$ положим $q^\beta = q^d$. Пусть $\Lambda \subset H_2(X)$ – полу группа циклов алгебраических кривых на X .

1) I -ряд для X имеет вид

$$I^X = \exp(-\alpha_X q) \sum_{\beta \in \Lambda} q^{\beta} i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^l (X_a + 1)_{\beta \cdot X_a}}{\prod_{a=1}^k (Y_a + 1)_{\beta \cdot Y_a}} \right),$$

где $\alpha_X = 0$, если индекс многообразия не меньше 2, и

$$\alpha_X = \frac{\prod_{a=1}^l (\ell \cdot X_a)!}{\prod_{a=1}^k (\ell \cdot Y_k)!}$$

в случае индекса 1.

2) Пусть $d_i, 1 \leq i \leq l$, – степени гиперповерхностей X_i (относительно ℓ), $w_i, 1 \leq i \leq k$, – степени дивизоров, соответствующих ребрам веера Y , а d_0 – индекс многообразия X . Пусть

$$\mathcal{J}^X(q) = \sum q^d ((d_0 d)!) (e^{\alpha_X} I^X)_{d, H^0}.$$

Рассмотрим оператор (обобщающий оператор Римана–Роха; см. [3])

$$L = \prod_{i=1}^k (w_i D - (w_i - 1))_{w_i} - q \prod_{i=0}^l (d_i D + 1)_{d_i}.$$

Тогда $L[\mathcal{J}^X(q)] = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. По теореме Лефшеца (см. [4; теорема 3.2.4, (i) и замечание 3.2.6]) условия теорем 1.1 и 1.2 выполняются для полных пересечений размерности 3 и больше, не пересекающих особое множество, если группа Пикара объемлющего многообразия равна $\mathbb{Z}$ (что автоматически выполнено в случае теоремы 1.1).

§ 2. Определения и предварительные сведения

На протяжении всей работы мы будем рассматривать инварианты *рода* 0, т.е. соответствующие рациональным кривым.

Аксиоматическое определение примарных инвариантов было дано М. Л. Концевичем и Ю. И. Маниным в [5]. Инварианты с потомками были определены и построены в [6] и [7].

2.1. Пространства модулей кривых. Рассмотрим гладкое многообразие X такое, что $-K_X \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Кривой* называется приведенная схема чистой размерности 1. *Родом кривой* C называется число $h^1(\mathcal{O}_C)$.

Легко видеть, что связная кривая имеет род 0 тогда и только тогда, когда она является деревом рациональных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Связная кривая C с $n \geq 0$ отмеченными точками $p_1, \dots, p_n \in C$ называется *предстабильной*, если она имеет особенности не хуже обыкновенных двойных точек, а $p_1, \dots, p_n$ – различные гладкие точки (см. [8; III–2.1]). Отображение $f: C \rightarrow X$ связной кривой рода 0 с n отмеченными точками называется *стабильным*, если C – предстабильная кривая, а на каждой ее стягиваемой компоненте лежат, как минимум, три отмеченные или особые точки ([8; V–1.3.2]).

Другими словами, стабильное отображение связной кривой – это отображение, имеющее лишь конечное число инфинитезимальных автоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Семейством стабильных отображений (над схемой S) кривых рода 0 с n отмеченными точками называется набор

$$(\pi: \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n, f: \mathcal{C} \rightarrow X),$$

где π – плоское проективное отображение с n сечениями $p_1, \dots, p_n$, геометрические слои $(\mathcal{C}_s, p_1(s), \dots, p_n(s))$ которого являются предстабильными кривыми рода 0 с n отмеченными точками такими, что ограничение $f|_{\mathcal{C}_s}$ на каждый из этих слоев является стабильным отображением.

Два семейства над S

$$(\pi: \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n, f), \quad (\pi': \mathcal{C}' \rightarrow S, p'_1, \dots, p'_n, f')$$

называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\tau: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ такой, что $\pi = \pi' \circ \tau$, $p'_i = \tau \circ p_i$, $f = f' \circ \tau$.

Пусть $\beta \in H_2^+(X)$. Рассмотрим следующий (контравариантный) функтор $\overline{\mathcal{M}}_n(X, \beta)$ из категории (комплексных алгебраических) схем в категорию множеств. Пусть $\overline{\mathcal{M}}_n(X, \beta)(S)$ – множество классов изоморфизмов семейств стабильных отображений кривых рода 0 с n отмеченными точками $(\pi: \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n, f)$ таких, что $f_*([\mathcal{C}_s]) = \beta$, где $[\mathcal{C}_s]$ – фундаментальный класс кривой $\mathcal{C}_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пространством модулей отображений в X кривых рода 0 класса $\beta \in H_2^+(X)$ с n отмеченными точками $\overline{M}_n(X, \beta)$ называется стек Делиня–Мамфорда (см. [8; V–5.5]), являющийся грубым пространством модулей (см. [9; определение 1.3]), представляющим $\overline{\mathcal{M}}_n(X, \beta)$.

2.2. Инварианты Громова–Виттена и I -ряды. Определение инвариантов Громова–Виттена дается в терминах теории пересечений на компактных стеках $\overline{M}_n(X, \beta)$, которую можно ввести благодаря тому, что локально эти стеки являются факторами гладких многообразий по конечным группам (см. [10]). Однако эти стеки не всегда имеют ожидаемую размерность. Чтобы корректно оперировать с произведениями когомологических циклов на них, необходимо ввести *виртуальный фундаментальный класс* $[\overline{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}}$ виртуальной размерности $\text{vdim } \overline{M}_n(X, \beta) = \dim X - \deg_{K_X} \beta + n - 3$ (его конструкцию см. в [8; VI–1.1]). Во многих случаях (например, в случае однородных пространств) виртуальный фундаментальный класс совпадает с обычным.

Рассмотрим отображения $ev_i: \overline{M}_n(X, \beta) \rightarrow X$, $ev_i(C; p_1, \dots, p_n, f) = f(p_i)$. Пусть $\pi_{n+1}: \overline{M}_{n+1}(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_n(X, \beta)$ – морфизм, забывающий точку p_{n+1} (и стягивающий компоненты, которые становятся нестабильными при забывании p_{n+1}), а $\sigma_i: \overline{M}_n(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_{n+1}(X, \beta)$ – сечение, соответствующее

отмеченной точке p_i и построенное следующим способом. Образом кривой $(C; p_1, \dots, p_n, f)$ при отображении σ_i будет кривая $(C'; p_1, \dots, p_{n+1}, f')$, где $C' = C \cup C_0$, $C_0 \simeq \mathbb{P}^1$, C_0 и C пересекаются в (не отмеченной на C') точке p_i , а точки p_{n+1} и новая точка p_i лежат на C_0 . При этом f' стягивает C_0 в точку, а $f'|_C = f$ (см. рис. 1).

Рис. 1

Пусть $L_i = \sigma_i^* \omega_{\pi_{n+1}}$, где $\omega_{\pi_{n+1}}$ – относительный дуализирующий пучок для π_{n+1} . Слоем L_i над точкой $(C; p_1, \dots, p_n, f)$ является $T_{p_i}^* C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5 (см. [8; VI–2.1]). *Кокасательным линейным классом* называется класс

$$\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\bar{M}_n(X, \beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6 (см. [8; VI–2.1]). Рассмотрим классы когомологий $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(X)$. Пусть $a_1, \dots, a_n$ – неотрицательные целые числа и $\beta \in H_2(X)$. Тогда *инвариант Громова–Виттена с потомками*, соответствующий этому набору, есть

$$\langle \tau_{a_1} \gamma_1, \dots, \tau_{a_n} \gamma_n \rangle_\beta = \psi_1^{a_1} \cdot ev_1^*(\gamma_1) \cdots \psi_n^{a_n} \cdot ev_n^*(\gamma_n) \cdot [\bar{M}_n(X, \beta)]^{\text{virt}},$$

если $\sum \text{codim } \gamma_i + \sum a_i = \text{vdim } \bar{M}_n(X, \beta)$, и 0 в противном случае. Если все a_i равны нулю, то такие инварианты называются *примарными* и равны ожидаемому числу рациональных кривых класса β на X , пересекающих циклы, двойственные классам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, деленному на произведение степеней дивизоров, встречающихся среди γ_i . Символы τ_0 мы будем опускать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7 (см. [11]). Пусть $\mu_1, \dots, \mu_N$ – базис $H^*(X)$, $\check{\mu}_1, \dots, \check{\mu}_N$ – двойственный базис, а $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ – базис $H_2(X)$, так что любая кривая β представляется в виде $\beta = \sum \beta_i \gamma_i$. Рассмотрим кольцо $B = \mathbb{C}[[q]]$, $q = (q_1, \dots, q_k)$, и положим $q^\beta = \prod q_i^{\beta_i}$. Тогда *I-ряд* для X задается следующим образом:

$$I^X = \sum_{\beta \geq 0} I_\beta^X q^\beta \in B \otimes H^*(X), \quad I_\beta^X = \sum_{i, j \geq 0} \langle \tau_i \mu_j \rangle_\beta \check{\mu}_j$$

(мы будем использовать один и тот же символ для $\gamma \in H^*(X)$ и $1 \otimes \gamma \in B \otimes H^*(X)$).

Фундаментальным членом *I-ряда* назовем ряд

$$I_{H^0}^X = \sum_{\beta \geq 0} \langle \tau_{(-K_X) \cdot \beta - 2} \check{1} \rangle_\beta \cdot q^\beta,$$

где $\check{1}$ – класс, двойственный единице в когомологиях.

В случае $k = 1$ и произвольного ряда $I \in B \otimes H^*(X)$ положим $I = \sum_{q \geq 0} I_d q^d$.

ЛЕММА 2.8 (см. [12; лемма 5.5] или [13; доказательство леммы 1]). Пусть $Y \subset X$ – полное пересечение, а $\varphi: H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ – гомоморфизм ограничения. Пусть $\tilde{\gamma}_1 \in \varphi(H^*(X))^\perp$, а $\gamma_2, \dots, \gamma_l \in \varphi(H^*(X))$. Тогда для любого $\beta \in \varphi(H_2(X)) \subset H_2(Y)$ инвариант Громова–Виттена на Y вида

$$\langle \tau_{d_1} \tilde{\gamma}_1, \tau_{d_2} \gamma_2, \dots, \tau_{d_l} \gamma_l \rangle_\beta$$

равен нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Рассмотрим полное пересечение $Y \subset X$. Обозначим $\varphi: H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ – отображение ограничения, и пусть $R = \varphi(H^*(X)) \subset H^*(Y)$. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_N$ – базис в R , $\check{\mu}_1, \dots, \check{\mu}_N \in R$ – двойственный базис, а $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ – базис $H_2(Y)$, так что любая кривая β представляется в виде $\beta = \sum \beta_i \gamma_i$. Рассмотрим кольцо $B = \mathbb{C}[[q]]$, $q = (q_1, \dots, q_k)$, и положим $q^\beta = \prod q_i^{\beta_i}$. Тогда ограниченный I -ряд для Y задается следующим образом:

$$\tilde{I}^Y = \sum_{\beta \geq 0} \tilde{I}_\beta^Y q^\beta \in B \otimes R \subset B \otimes H^*(Y), \quad \tilde{I}_\beta^Y = \sum_{i,j \geq 0} \langle \tau_i \mu_j \rangle_\beta \check{\mu}_j.$$

Термин “ограниченный” будет применяться для инвариантов полного пересечения, соответствующих классам когомологий, ограниченных с объемлющего многообразия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Для полного пресечения $Y \subset X$ размерности 3 или больше $I^Y = \tilde{I}^Y$, так как $H_2(Y) \simeq H_2(X)$ и по лемме 2.8 и аксиоме дивизора (теорема 2.12) одноточечные инварианты, соответствующие примитивным классам, равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Инварианты, соответствующие двум и более классам когомологий, в которых участвуют примитивные когомологические классы промежуточной размерности, уже не обязательно равны нулю. Например, для двух примитивных классов α и β , гиперплоского сечения H и прямой ℓ на трехмерной кубике

$$\langle \alpha, \beta, H^2 \rangle_\ell = -\alpha \cdot \beta$$

(см. [14; предложение 1]).

2.3. Соотношения между многоточечными инвариантами. Цель данного пункта – описать связь одноточечных инвариантов Громова–Виттена с потомками (т.е. с коэффициентами I -ряда) и многоточечными (в частности, двухточечными, которые нам понадобятся в дальнейшем) примарными инвариантами.

Одноточечные инварианты с потомками выражаются через многоточечные с потомками с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.12 (аксиома дивизора для инвариантов с потомками; см. [15; лемма 1.5.2]). Пусть Y – гладкое проективное многообразие, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(Y)$, а $\gamma_0 \in H^2(Y)$ – дивизор. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \gamma_0, \tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_n} \gamma_n \rangle_\beta &= (\gamma_0 \cdot \beta) \langle \tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_n} \gamma_n \rangle_\beta \\ &+ \sum_{k, d_k \geq 1} \langle \tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_k-1} (\gamma_0 \cdot \gamma_k), \dots, \tau_{d_n} \gamma_n \rangle_\beta. \end{aligned}$$

Следующая теорема (вместе с аксиомой дивизора) позволяет рекурсивно выразить трехточечные инварианты с потомками через примарные.

ТЕОРЕМА 2.13 (топологическая рекурсия; см. [8; VI–6.2.1]). Пусть Y – гладкое проективное многообразие, $\{\Delta^i\}$ и $\{\Delta_i\}$, $i = 1, \dots, N$, – двойственные базисы в $H^*(Y)$. Тогда

$$\langle \tau_{d_1} \gamma_1, \tau_{d_2} \gamma_2, \tau_{d_3} \gamma_3 \rangle_\beta = \sum_{a, \beta_1 + \beta_2 = \beta} \langle \tau_{d_1-1} \gamma_1, \Delta^a \rangle_{\beta_1} \langle \Delta_a, \tau_{d_2} \gamma_2, \tau_{d_3} \gamma_3 \rangle_{\beta_2},$$

где сумма берется по всем a , β_1 , β_2 , по которым она имеет смысл, т.е. $a = 1, \dots, N$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$.

С помощью теорем 2.12, 2.13 можно выразить одноточечные инварианты через примарные двухточечные (см. [16; предложение 5.2]). Оказывается, во многих случаях эти выражения обратимы. А именно, обратные выражения выводятся рекурсивно с помощью аксиомы дивизора и следующей теоремы (см. также [17; теорема 5.2] и [16]).

ТЕОРЕМА 2.14 (Ли, Пандхарипанде; см. [13; теорема 2, i]). Пусть Y – гладкое проективное многообразие. Рассмотрим самодвойственное кольцо $R \subset H^*(Y)$, порожденное подгруппой группы Пикара $\text{Pic } Y$, такое, что для любых $\mu_1, \dots, \mu_n \in R$ и $\nu \in R^\perp$

$$\langle \tau^{a_1} \mu_1, \dots, \tau^{a_n} \mu_n, \tau^a \nu \rangle_\beta = 0.$$

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$, $H \in \text{Pic } Y$, Δ^i и Δ_i – двойственные базисы R . Тогда инвариант

$$\langle \tau^{k_1} \gamma_1, \dots, \tau^{k_n} \gamma_n \rangle_\beta$$

алгебраически выражается через одноточечные инварианты Громова–Виттена с потомками с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \langle \tau_{k_1} \gamma_1, \dots, \tau_{k_n} H \cdot \gamma_n \rangle_\beta &= \langle \tau_{k_1} H \cdot \gamma_1, \dots, \tau_{k_n} \gamma_n \rangle_\beta + (\beta \cdot H) \langle \tau_{k_1+1} \gamma_1, \dots, \tau_{k_n} \gamma_n \rangle_\beta \\ &- \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \beta_1 H \sum_{S^1 \cup S^n = S, a} \langle \tau_{k_{s_1^1}} \gamma_{s_1^1}, \dots, \tau_{k_{s_a^1}} \gamma_{s_a^1}, \Delta^a \rangle_{\beta_1} \langle \Delta_a, \tau_{k_{s_1^n}} \gamma_{s_1^n}, \dots, \tau_{k_{s_b^n}} \gamma_{s_b^n} \rangle_{\beta_2}, \\ \langle \tau_{k_1} \gamma_1, \dots, \tau_{k_n+1} \gamma_n \rangle_\beta &= -\langle \tau_{k_1+1} \gamma_1, \dots, \tau_{k_n} \gamma_n \rangle_\beta \\ &+ \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ S^1 \cup S^n = S, a}} \langle \tau_{k_{s_1^1}} \gamma_{s_1^1}, \dots, \tau_{k_{s_a^1}} \gamma_{s_a^1}, \Delta^a \rangle_{\beta_1} \langle \Delta_a, \tau_{k_{s_1^n}} \gamma_{s_1^n}, \dots, \tau_{k_{s_b^n}} \gamma_{s_b^n} \rangle_{\beta_2}, \end{aligned}$$

где $H \in \text{Pic } Y \cap R$, а последние суммы в каждом равенстве берутся по всем таким разбиениям $S^1 = \{s_1^1, \dots, s_a^1\}$ и $S^n = \{s_1^n, \dots, s_b^n\}$ множества $S = \{1, \dots, n\}$, что $1 \in S^1$ и $n \in S^n$.

Условие этой теоремы выполняется для подкольца ограниченных когомологий полного пересечения в торическом многообразии (см. [18; 5.2]) или подкольца кольца когомологий трехмерных многообразий Фано, порожденного группой Пикара. Конкретный вид выражений для трехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ см. в [16].

Таким образом, теоремы 1.1 и 1.2 позволяют найти ограниченные квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях.

2.4. Торические многообразия. Определение и основные свойства торических многообразий см. в [19] или в [18]. Напомним лишь, что торическое многообразие – это многообразие, на котором действует тор $T \simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{C}^*)^n$, так что одна из орбит этого действия является открытым по Зарискому множеством. Оно характеризуется своим *веером*, т.е. некоторым набором конусов с вершинами в точках решетки, двойственной к решетке характеров тора. При этом алгебро-геометрические свойства торического многообразия переформулируются в терминах свойств этого веера.

Напомним некоторые из них.

Каждому конусу веера $\sigma \subset N = \mathbb{R}^n$ размерности r можно сопоставить орбиту тора размерности $n-r$ (здесь n – размерность торического многообразия). Так, каждому ребру веера (одномерному конусу) можно сопоставить (эквивариантный) дивизор Вейля¹. Дивизоры, соответствующие ребрам веера, порождают группу классов дивизоров. Дивизор Вейля $D = \sum d_i M_i$, где M_i – дивизоры, соответствующие ребрам веера, является дивизором Картье, если для каждого конуса этого веера σ существует вектор n_σ такой, что $\langle n_\sigma, m_i \rangle = d_i$, где m_i – примитивные элементы ребер конуса. Если такой вектор один для всех конусов, то дивизор является главным. Поэтому если торическое многообразие n -мерно, а количество ребер его веера равно k , то ранг его группы классов дивизоров равен $n - k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Многообразие называется *$\mathbb{Q}$ -факториальным*, если какая-то кратность любого дивизора Вейля на нем является дивизором Картье.

Таким образом, на $\mathbb{Q}$ -факториальном многообразии естественным образом можно построить теорию пересечений для дивизоров Вейля.

Торическое многообразие является $\mathbb{Q}$ -факториальным тогда и только тогда, когда любой конус соответствующего ему веера симплициален. В этом случае его группа Пикара порождена над $\mathbb{Q}$ дивизорами, соответствующими ребрам веера.

Рассмотрим взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_l)$. Соответствующий ему веер порождается целочисленными векторами $m_0, \dots, m_l \in \mathbb{R}^l$ такими, что $\sum w_i m_i = 0$. Если $w_0 = 1$, то можно взять $m_0 = (-w_1, \dots, -w_l)$, $m_i = e_i$, где e_i – базис в $\mathbb{R}^l$. При этом набор векторов $\{m_i\}$ соответствует набору стандартных дивизоров – стратов $\{D_i \in |w_i H|\}$.

Торическое многообразие является *гладким*, если для каждого конуса σ соответствующего ему веера полугруппа $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ порождается частью базиса решетки $m_1^\sigma, \dots, m_k^\sigma$. При этом добавлению ребра $a = a_1 m_1^\sigma + \dots + a_k m_k^\sigma$, $a_i \in \mathbb{Q}$, к конусу (и соединению его гранями с “соседними” ребрами) соответствует взвешенное раздутие вдоль подмногообразия, соответствующего σ , с весами $1/r \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ и $a_i = \alpha_i/r$. Добавляя таким образом к вееру ребра, в конце концов можно торически разрешить особенности торического многообразия.

¹ А именно, пусть $\Sigma \in N = \mathbb{Z}^n$ – веер торического многообразия X_Σ , а $\sigma \in \Sigma$ – произвольный конус. Пусть M – решетка, двойственная N , относительно какого-нибудь невырожденно-го спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а $\sigma^\vee$ – двойственный конус для σ (т.е. $\sigma^\vee = \{l \in M \mid \forall k \in \sigma \langle l, k \rangle \geq 0\}$). Пусть $U_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee]$ соответствует σ . Многообразие X_σ получается из аффинных многообразий U_σ , $\sigma \in \Sigma$, путем склейки U_σ и U_τ вдоль $U_{\sigma \cap \tau}$, $\sigma, \tau \in \Sigma$. Таким образом, если $l \subset \sigma \in \Sigma$ – ребро веера, то дивизор, соответствующий l , ограничивается на U_σ как $U_l \subset U_\sigma$.

Таким образом, особым множеством взвешенного проективного пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_l)$ является объединение стратов, задающихся уравнениями вида $x_{i_1} = \dots = x_{i_j} = 0$, где x_{i_j} – координата веса w_{i_j} , а $\{i_1, \dots, i_j\}$ – такое максимальное по включению множество индексов, что наибольший общий делитель остальных больше единицы.

Квантовые когомологии гладких торических многообразий описаны в [20].

ТЕОРЕМА 2.16 (Гивенталь; см. [21; теорема 0.1]). *Пусть X – гладкое торическое многообразие, а Y – гладкое полное пересечение в нем с положительным антиканоническим классом. Пусть $X_1, \dots, X_k$ – дивизоры, соответствующие лучам веера X , дивизоры $Y_1, \dots, Y_r$ задают Y , $\Lambda \subset H_2(X)$ – полугруппа циклов алгебраических кривых на Y , а $i: Y \rightarrow X$ – естественное вложение. Тогда*

$$I^Y = e^{h(q)} \sum_{\beta \in \Lambda} q^{\beta} i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^r [Y_a]_{\beta \cdot Y_a + 1}}{\prod_{a=1}^r [Y_a]_1} \frac{\prod_{a=1}^k [X_a]_1}{\prod_{a=1}^k [X_a]_{\beta \cdot X_a + 1}} \right),$$

где $h(q)$ – многочлен с носителем в кривых, пересекающихся с антиканоническим классом по 1 (т.е. $h(q) = \sum_{\beta} h_{\beta} q^{\beta}$, где $\beta \cdot (-K_Y) = 1$).

2.5. Считающие матрицы трехмерных многообразий Фано. Теорема 1.1 имеет непосредственное применение в теории трехмерных многообразий Фано.

Рассмотрим гладкое трехмерное многообразие Фано X с группой Пикара $\mathbb{Z}$. Обозначим $K = -K_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.17 (см. [22; 1.7, 1.10]). *Считающей матрицей многообразия X называется матрица $A \in \text{Mat}(4 \times 4)$ вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{33} \end{pmatrix},$$

нумерация столбцов и строк которой начинается с нуля, а элементы задаются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{\langle K^{3-i}, K^j, K \rangle_{j-i+1}}{\deg X} = \frac{j-i+1}{\deg X} \langle K^{3-i}, K^j \rangle_{j-i+1}$$

(степень антиканоническая).

Легко видеть, что матрица A симметрична относительно побочной диагонали: $a_{ij} = a_{3-j, 3-i}$. По определению $a_{ij} = 0$ при $j - i + 1 < 0$. Если $j - i + 1 = 0$, то $a_{ij} = 1$, так как $\langle K^{3-i}, K^j, K \rangle_{j-i+1}$ в этом случае – просто число точек пересечения K^{3-i} , K^j и K , которое, очевидно, равно $\deg X$; $a_{00} = a_{33} = 0$. Остальные коэффициенты a_{ij} – это “ожидаемые” числа рациональных кривых степени $j - i + 1$, пересекающих K^{3-i} и K^j , умноженные на $(j - i + 1) / \deg X$, за одним исключением. А именно, по аксиоме дивизора

$$a_{01} = 2 \cdot (2 \cdot \text{ind}(X) \cdot (\text{число коник, проходящих через общую точку})).$$

Рассмотрим следующие многообразия Фано (см. [23]–[28]):

- 1) многообразие V_1 антиканонической степени 8 (двойное накрытие конуса над поверхностью Веронезе с ветвлением в гладкой кубике);
- 2) многообразие V_2 антиканонической степени 16 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой квартике);
- 3) многообразие V'_2 антиканонической степени 2 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18. *Многообразия V_1 , V_2 и V'_2 допускают следующую конструкцию:*

- 1) многообразие типа V_1 изоморфно гладкой гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$;
- 2) многообразие типа V_2 изоморфно гладкой гиперповерхности степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$;
- 3) многообразие типа V'_2 изоморфно гладкой гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Двойное накрытие $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$, разветвленное в дивизоре, заданном функцией $f_k(x_0, \dots, x_n)$ степени k , можно задать уравнением $x_{n+1}^2 = f_k$ в $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n, k/2)$. Здесь переменные x_i имеют веса w_i , а переменная x_{n+1} имеет вес $k/2$.

ТЕОРЕМА 2.19. *Считающие матрицы многообразий V_1 , V_2 и V'_2 таковы:*

- 1) для многообразия V_1

$$M(V_1) = \begin{pmatrix} 0 & 240 & 0 & 57\,600 \\ 1 & 0 & 1\,248 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- 2) для многообразия V_2

$$M(V_2) = \begin{pmatrix} 0 & 48 & 0 & 2\,304 \\ 1 & 0 & 160 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- 3) для многообразия V'_2

$$M(V'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 137\,520 & 119\,681\,240 & 21\,690\,374\,400 \\ 1 & 624 & 650\,016 & 119\,681\,240 \\ 0 & 1 & 624 & 137\,520 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.18 представим данные многообразия как гиперповерхности во взвешенных проективных пространствах. По теореме 1.1 найдем их одноточечные инварианты Громова–Виттена. Применив теорему 2.14 к подкольцу кольца когомологий, порожденному классом, двойственным к классу гиперплоского сечения, найдем примарные двухточечные инварианты. Они и составят выписанные считающие матрицы.

§ 3. Доказательство основных теорем

3.1. Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Дивизоры на $\mathbb{P}$, которые соответствуют ребрам его веера, – это $w_1H, \dots, w_kH$. Таким образом, теорема 1.1 следует из теоремы 1.2.

Докажем теорему 1.2.

I. Пусть Σ – веер Y . Рассмотрим последовательность симплицальных вееров $\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ такую, что:

- (i) веер Σ_{i+1} получается из Σ_i добавлением ребра, лежащего внутри конуса, ребра которого не могут быть частью базиса целочисленной решетки, в которой лежит этот веер, и соединением его гранями с “соседними” ребрами (т.е. заменой всех конусов, содержащих добавляемое ребро, на все линейные оболочки этого ребра и граней конуса, не содержащих его);
- (ii) веер Σ_r соответствует гладкому многообразию.

Такую последовательность можно построить, например, следуя [19; 8.1–8.3].

В итоге мы получим торическое разрешение особенностей $f: \tilde{Y} = X_{\Sigma_r} \rightarrow Y$, где X_{Σ_r} – многообразие, соответствующее вееру Σ_r (см. сноску 1). Исключительным множеством этого разрешения будет объединение дивизоров $E_1, \dots, E_r$, которые соответствуют добавляемым ребрам. Пусть $W_1, \dots, W_k$ – дивизоры на многообразии Y , соответствующие ребрам его веера, а $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k$ – их собственные прообразы. Пусть $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_l$ – собственные прообразы дивизоров $X_1, \dots, X_l$, $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cap \dots \cap \tilde{X}_l$, а $j: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ – естественное вложение. Ясно, что существует изоморфизм g , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{j} & \tilde{Y} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

коммутативной, так как f – изоморфизм между $\tilde{Y} \setminus (\bigcup_{i=1}^r E_i)$ и $Y \setminus \text{Sing } Y$.

На торическом многообразии V , ассоциированном с полным симплицальным веером, каноническое отображение группы алгебраических циклов по модулю рациональной эквивалентности с рациональными коэффициентами в группу гомологий с рациональными коэффициентами

$$A_*(V)_{\mathbb{Q}} \rightarrow H_*(V, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом (см. [19; 10.9]). Таким образом, теорию пересечений можно распространить на группу гомологий с рациональными коэффициентами.

Отображение $f_*: H_2(\tilde{Y}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(Y, \mathbb{Q})$ сюръективно. Пусть $\lambda \subset X \subset Y$ – эффективная кривая такая, что $H_2(X) = \mathbb{Z}\lambda$, а $\tilde{\lambda} = f^{-1}(\lambda)$. Обозначим $K = \ker f_*$. Тогда $H_2(\tilde{Y}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\tilde{\lambda} + K$.

Цикл любой кривой β , лежащей на $\tilde{X}$, равен $\beta_0 \cdot \tilde{\lambda}$, где $\beta_0 \in \mathbb{Z}$ и $\beta_0 \geq 0$, так как представители элементов K лежат на исключительных дивизорах, не пересекающих $\tilde{X}$. Таким образом, если $\tilde{\Lambda}$ – полугруппа алгебраических кривых на $\tilde{X}$, то $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_{\geq 0}\tilde{\lambda}$.

Так как кратность пересечения дивизора с кривой зависит только от окрестности кривой, а f – изоморфизм в окрестности $\tilde{X}$, то $\tilde{\lambda} \cdot \tilde{X}_i = \lambda \cdot X_i$ и $\tilde{\lambda} \cdot \tilde{W}_i = \lambda \cdot W_i$.

Таким образом, для любой кривой $\beta = \beta_0 \cdot \tilde{\lambda}$ на $\tilde{X}$ имеем $\beta \cdot \tilde{W}_i = \beta_0 \cdot (\lambda \cdot W_i)$, $\beta \cdot \tilde{X}_i = \beta_0 \cdot (\lambda \cdot X_i)$ и $\beta \cdot E_i = 0$.

Дивизоры, соответствующие ребрам веера $\tilde{Y}$, это $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k, E_1, \dots, E_r$. Однако в выражении для I -ряда многообразия $\tilde{X}$ из теоремы 2.16 множители, в которых участвуют дивизоры E_i , сократятся, так что их можно опустить. Рассмотрим кольца $H^*(X)[[q]]$ и $H^*(\tilde{X})[[\tilde{q}]]$ и изоморфизм между ними, переводящий q в $\tilde{q}$ и действующий на коэффициенты как f^* . Пусть $j: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ – естественное вложение. Тогда

$$\begin{aligned} I^{\tilde{X}} &= e^{\tilde{h}(\tilde{q})} \sum_{\beta=\beta_0 \tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}} \tilde{q}^{\beta_0} j^* \left(\frac{\prod_{a=1}^l [\tilde{X}_a]_{\beta \cdot \tilde{X}_a + 1}}{\prod_{a=1}^l [\tilde{X}_a]_1} \frac{\prod_{a=1}^k [\tilde{W}_a]_1}{\prod_{a=1}^k [\tilde{W}_a]_{\beta \cdot \tilde{W}_a + 1}} \right) \\ &= j^* f^* \left(e^{h(q)} \sum_{\beta_0 \geq 0} q^{\beta_0} \prod_{a=1}^l (X_a + 1)_{\beta_0 \cdot \deg X_a} \cdot \frac{1}{\prod_{a=1}^k (\tilde{W}_a + 1)_{\beta_0 \cdot w_a}} \right) \\ &= g^* \left(e^{h(q)} \sum_{d=0}^{\infty} q^d i^* \left(\frac{\prod_{a=1}^l (X_a + 1)_{d \cdot \deg X_a}}{\prod_{a=1}^k (\tilde{W}_a + 1)_{d \cdot w_a}} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{h}(\tilde{q})$ – многочлен из теоремы 2.16, а $h(q)$ – его прообраз. Второе равенство выполнено, так как в качестве представителей классов дивизоров (над $\mathbb{Q}$) в обеих его частях можно выбрать дивизоры, собственно пересекающиеся с X , и их собственные прообразы (так как $\text{Pic } Y = \mathbb{Z}$, то каждый эффективный дивизор на Y является обильным, а значит, эквивалентным очень обильному, взятому с некоторым рациональным коэффициентом), а f при ограничении на $\tilde{X}$ – изоморфизм, индуцирующий изоморфизм групп когомологий f^* , переводящий дивизоры в их собственные прообразы. Наконец, так как g^* – изоморфизм колец когомологий X и $\tilde{X}$, то $I^{\tilde{X}} = g^*(I^X)$.

Осталось найти $h(q)$. Если X имеет индекс не меньше 2, то кривых, пересекающихся с антиканоническим классом по 1, не существует, и $h(q) = 0$. Если индекс X равен 1, то такая кривая – это прямая ℓ (относительно антиканонического класса X) и $h(q) = -\alpha_X q$. Заметим, что на X через общую точку не проходят прямые, т.е. $\langle H^{\dim X} \rangle_{\ell} = 0$. Это значит, что коэффициент $\exp(-\alpha_X q) \cdot I_{\ell}^X$ при H^0 равен нулю, откуда

$$\alpha_X = \frac{\prod_{a=1}^l (\ell \cdot X_a)!}{\prod_{a=1}^k (\ell \cdot Y_k)!} = \frac{\prod_{a=1}^l (\deg X_a)!}{\prod_{a=1}^k w_a!}.$$

II. Как легко видеть,

$$\mathcal{J}^X(q)_{H^0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^l (d_i n)!}{\prod_{j=1}^k (w_j n)!} q^n.$$

Рассмотрим теперь решение уравнения $L[\mathcal{J}^X(q)] = 0$ в виде ряда $\mathcal{J}^X = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$. Ясно, что $D[q^n] = nq^n$. Поэтому

$$\left(\prod_{i=1}^k (w_i D - (w_i - 1))_{\mathbf{w}_i} \right) [q^n] = \left(\prod_{i=1}^k (w_i n - (w_i - 1))_{\mathbf{w}_i} \right) q^n.$$

Аналогично,

$$\left(q \prod_{i=0}^l (d_i D + 1)_{d_i} \right) [q^{n-1}] = \left(\prod_{i=0}^l (d_i(n-1) + 1)_{d_i} \right) q^n.$$

Подставляя $\mathcal{J}^X$ в дифференциальное уравнение и пользуясь полученными равенствами, мы получим рекурсивное выражение для коэффициентов a_n , а именно

$$a_n = \frac{\prod_{i=0}^l (d_i(n-1) + 1)_{d_i}}{\prod_{i=1}^k (w_i n - (w_i - 1))_{w_i}} a_{n-1}.$$

Полагая $a_0 = 1$, по индукции мы получим

$$a_n = \sum \frac{\prod_{i=0}^l (d_i n)!}{\prod_{j=1}^k (w_j n)!} q^n,$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Легко видеть, что оператор Римана–Роха делится слева на $D^{\dim Y - \dim X}$. Пусть $L = D^{\dim Y - \dim X} \tilde{L}$. Тогда $\tilde{L} \mathcal{J}^X = 0$.

3.2. Комментарии и примеры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. 1) Достаточным, но не необходимым условием того, что полное пересечение $X = X_1 \cup \dots \cup X_l$ общих гиперповерхностей степеней $d_1, \dots, d_l$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_1, \dots, w_k)$ не проходит через особое множество $\mathbb{P}$, является следующее:

количество дивизоров Картье среди X_i превышает
размерность особого множества $\mathbb{P}$.

Численно это выражается так:

(число степеней d_i , делящихся на каждое из a_i) $>$ (максимальное число
весов w_i таких, что наибольший общий делитель остальных больше 1)

(см. п. 2.4).

Для произвольного торического многообразия вместо числа дивизоров Картье следует брать число подвижных дивизоров (т.е. тех, которые можно сдвинуть с любой точки), а второе число равно коразмерности максимального конуса, ребра которого не являются частью базиса.

2) Предположение одномерности решетки Пикара объемлющего многообразия было сделано для наглядности; в случае числа Пикара, большего 1, теоремы 1.1 и 1.2 формулируются и доказываются аналогично. Вместо переменной q нужно взять мультипеременную $q = (q_1, \dots, q_m)$, где $m = \text{rk Pic } X$, вместо степени кривой рассматривать мультистепень относительно набора образующих группы Пикара и т.д.; изменится лишь выражение для поправочного члена $\exp(-\alpha_X q)$.

3) Если опустить предположение $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$ (или $\dim X \geq 3$ в замечании 1.3), то теоремы 1.1 и 1.2 будут давать *ограниченный* I -ряд (см. замечание 2.10).

4) Эти теоремы можно обобщить на случай многообразий Калаби–Яу; их доказательства в этом случае будут отличаться от доказательства теорем 1.1 и 1.2 лишь выводом выражений для поправочного члена (см. [21]).

ПРИМЕР 3.3. 1) Рассмотрим общую гиперповерхность $X^k \subset \mathbb{P}^n$. Пусть $k < n$. Тогда теорема 1.1 утверждает, что

$$I^X = \sum_{d=0}^{\infty} q^d \frac{(kH+1)_{kd+1}}{((H+1)_{d+1})^{n+1}},$$

что согласуется с формулой для I -ряда гиперповерхности в проективном пространстве, полученной в [1].

Если $k = n$, то по теореме 1.1

$$I^X = e^{-k!q} \sum_{d=0}^{\infty} q^d \frac{(kH+1)_{kd+1}}{((H+1)_{d+1})^{n+1}},$$

что согласуется с формулой (3) из [16].

2) В случае обычного проективного пространства ($w_i = 1$) теорема 1.1 принимает вид теоремы Гивенталья о полных пересечениях в проективных пространствах.

§ 4. Приложение: гипотеза Гольшпева

Рассмотрим вместо одной считающей матрицы (см. определение 2.17) *семейство* считающих матриц $A^\lambda = A + \lambda \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичная матрица. Рассмотрим одномерный тор $\mathbb{G}_m = \text{Spec } \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ и дифференциальный оператор $D = z \frac{\partial}{\partial z}$ на нем. Построим семейство матриц M^λ , определив элементы m_{kl}^λ матриц следующим образом:

$$m_{kl}^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } k > l + 1, \\ 1, & \text{если } k = l + 1, \\ a_{kl}^\lambda \cdot (Dz)^{l-k+1}, & \text{если } k < l + 1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим семейство дифференциальных операторов

$$\tilde{L}^\lambda = \det_{\text{right}}(D\mathbf{1} - M^\lambda),$$

где $\det_{\text{right}}$ обозначает “правый определитель”, т.е. определитель, полученный путем разложения по правому столбцу (все миноры также разлагаются по правому столбцу). Разделив $\tilde{L}^\lambda$ слева на D , получим семейство операторов L^λ , т.е. $\tilde{L}^\lambda = DL^\lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (см. [22; 1.8]). Уравнение из семейства $L^\lambda[\Phi(z)] = 0$ называется *считающим уравнением D3*.

ГИПОТЕЗА 4.2 (Гольшев; см. [22]). Для трехмерных гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ решения уравнений D3 модулярны. Конкретнее, пусть X – такое многообразие, i_X – его индекс, а $N = \deg X / (2i_X^2)$. Тогда в семействе считающих уравнений для X есть такое уравнение $L^{\lambda_X}[\Phi(z)] = 0$, решением которого является ряд Эйзенштейна веса 2 на $X_0(N)$.

Более подробное описание считающих уравнений как уравнений Пикара–Фукса можно найти в [22].

Основываясь на этой гипотезе, В. В. Голышев составил список матриц, гипотетически совпадающих со считающими матрицами трехмерных многообразий Фано. Для проверки гипотезы необходимо найти все такие матрицы.

Трехмерных гладких многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ насчитывается 17 семейств (см. [23], [24]). Для 14 из них считающие матрицы были найдены А. Бовилем [14] (см. также [29]), А. Г. Кузнецовым (не опубликовано), В. В. Голышевым (не опубликовано) и автором [16]. Матрицы для двух оставшихся многообразий получены в теореме 2.19.

Все полученные матрицы совпадают с матрицами, предсказанными В. В. Голышевым. Таким образом, теорема 2.19 завершает доказательство гипотезы Голышева.

Автор благодарит С. С. Галкина, А. Б. Гивенталя, В. В. Голышеву, Ф. Л. Зака, М. Э. Казаряна, М. А. Цфасмана, И. А. Чельцова, С. В. Шадрину и К. А. Шрамова за советы и разъяснения.

Список литературы

- [1] A. B. Givental, “Equivariant Gromov–Witten invariants”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1996**:13 (1996), 613–663; [arXiv: alg-geom/9603021](#).
- [2] M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York, 1972.
- [3] В. В. Голышев, “Вариации Римана–Роха”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 3–32; *англ. пер.*: V. V. Golyshev, “Riemann–Roch variations”, *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 853–881.
- [4] I. Dolgachev, “Weighted projective varieties”, *Group actions and vector fields*, Proc. Polish–North Amer. Semin. (Vancouver 1981), Lecture Notes in Math., **956**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 34–71.
- [5] M. Kontsevich, Yu. Manin, “Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **164**:3 (1994), 525–562.
- [6] K. Behrend, Yu. Manin, “Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants”, *Duke Math. J.*, **85**:1 (1996), 1–60; [arXiv: alg-geom/9506023](#).
- [7] K. Behrend, “Gromov–Witten invariants in algebraic geometry”, *Invent. Math.*, **127**:3 (1997), 601–617.
- [8] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, Факториал, М., 2002; *англ. пер.*: Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [9] Дж. Харрис, Я. Моррисон, *Модули кривых*, Мир, М., 2004; *пер. с англ.*: J. Harris, I. Morrison, *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math., **187**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] A. Vistoli, “Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces”, *Invent. Math.*, **97**:3 (1989), 613–670.
- [11] A. Gathmann, “Absolute and relative Gromov–Witten invariants of very ample hypersurfaces”, *Duke Math. J.*, **115**:2 (2002), 171–203; [arXiv: math.AG/9908054](#).
- [12] A. Gathmann, “Relative Gromov–Witten invariants and the mirror formula”, *Math. Ann.*, **325**:2 (2003), 393–412; [arXiv: math.AG/0009190](#).
- [13] Y.-P. Lee, R. Pandharipande, “A reconstruction theorem in quantum cohomology and quantum K -theory”, *Amer. J. Math.*, **126**:6 (2004), 1367–1379; [arXiv: math.AG/0104084](#).

- [14] A. Beauville, “Quantum cohomology of complete intersections”, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **2**:3–4 (1995), 384–398; [arXiv:alg-geom/9501008](#).
- [15] M. Kontsevich, Y. Manin, “Relations between the correlators of the topological sigma-model coupled to gravity”, *Comm. Math. Phys.*, **196**:2 (1998), 385–398.
- [16] В. В. Пржиялковский, “Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 145–158; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Gromov–Witten invariants of Fano threefolds of genera 6 and 8”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 433–446; [arXiv:math.AG/0410327](#).
- [17] A. Bertram, H. P. Kley, “New recursions for genus-zero Gromov–Witten invariants”, *Topology*, **44**:1 (2005), 1–24; [arXiv:math.AG/0007082](#).
- [18] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [19] В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.
- [20] V. V. Batyrev, “Quantum cohomology rings of toric manifolds”, *Journées de Géométrie Algébrique d’Orsay* (Orsay, 1992), Astérisque, **218**, 1993, 9–34; [arXiv:alg-geom/9310004](#).
- [21] A. Givental, “A mirror theorem for toric complete intersections”, *Topological field theory, primitive forms and related topics*, Proceedings of the 38th Taniguchi symposium (Kyoto, 1996), Progr. Math., **160**, Birkhäuser, Boston, MA, 1998, 141–175; [arXiv:alg-geom/9701016](#).
- [22] В. В. Голышев, “Проблемы геометричности и модулярность некоторых вариаций Римана–Роха”, *Докл. РАН*, **386**:5 (2002), 583–588; англ. пер.: V. V. Golyshev, “The geometricity problem and modularity of certain Riemann–Roch variations”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **66**:2 (2002), 231–236.
- [23] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. I”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:3 (1977), 485–527.
- [24] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 504–549; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. II”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 469–506.
- [25] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 59–157.
- [26] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [27] V. A. Iskovskih, Yu. G. Prokhorov, *Fano varieties*, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999; пер. с рус.: В. А. Исковских, Ю. Г. Прохоров, *Многообразия Фано*, Алгебраическая геометрия, **5**, ВИНТИ, М., 1999.
- [28] S. Mukai, “Fano 3-folds”, *Complex projective geometry* (Trieste, 1989/Bergen, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 255–263.
- [29] В. В. Голышев, “Модулярность уравнений D3 и классификация В. Исковских”, *Докл. РАН*, **396**:6 (2004), 733–739; англ. пер.: V. V. Golyshev, “Modularity of equations D3 and the Iskovskih classification”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 443–449; [arXiv:math.AG/0405039](#).

В. В. Пржиялковский (V. V. Przyjalkowski)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: victorprz@mi.ras.ru; przhijal@mccme.ru

Поступила в редакцию
 18.01.2005 и 07.09.2006