Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Москвин, Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 3, 95–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:53:11

УДК 517.938.5

А. Ю. Москвин

Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере

Статья посвящена исследованию топологии слоений Лиувилля случая интегрируемости Дуллина–Матвеева. Найдено множество критических точек гамильтониана, вычислены типы изоэнергетических поверхностей, проверены условия невырожденности и найдены типы невырожденных точек пуассонова действия, исследовано отображение момента и построена бифуркационная диаграмма. Методом компьютерного моделирования установлено условие боттовости, найдены индексы критических окружностей, типы перестроек и грубые молекулы. В итоге практически завершена грубая лиувиллева классификация этого интегрируемого случая.

Библиография: 24 названия.

§ 1. Введение

В работах [1]–[4] А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым, М. П. Харламовым была развита теория топологической классификации интегрируемых случаев с двумя степенями свободы. Был построен инвариант, который классифицирует интегрируемые случаи с двумя степенями свободы с точностью до лиувиллевой эквивалентности. В работах [5]–[7] разобраны некоторые полиномиальные интегрируемые случаи – Ковалевской, Клебша, Стеклова, Соколова. В работе [8] Х. Р. Дуллиным и В. С. Матвеевым найден новый интегрируемый случай на кокасательном расслоении к двумерной сфере.

В настоящей работе для случая Дуллина–Матвеева найдены множество критических точек и множество критических значений отображения момента, топология изоэнергетических поверхностей, особые точки векторного поля и их тип, количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы. С помощью компьютера вычислены индексы критических окружностей и сделан вывод о типе грубых молекул интегрируемого случая.

Случай Дуллина–Матвеева является топологически новым, поскольку такой набор грубых молекул не встречается ни в одном из известных случаев интегрируемости. В одной из молекул встречается атом D_2 . Такая перестройка торов Лиувилля не встречается ни в одном из классических случаях интегрируемости динамики твердого тела.

§ 2. Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях

2.1. Некоторые необходимые понятия. Ознакомиться с доказательствами утверждений из этого параграфа можно, например, в книге В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [9] либо в книге А. В. Борисова и И. С. Мамаева [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скобкой Пуассона на многообразии M^n называется отображение $\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M^n) \times C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ со свойствами:

- 1) $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (линейность);
- 2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность);
- 3) $\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$ (тождество Лейбница);
- 4) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (тождество Якоби).

Многообразие, снабженное скобкой Пуассона, будем называть *пуассоновым*.

Таким образом, все гладкие функции на пуассоновом многообразии со структурой скобки образуют алгебру Ли. Скобка Пуассона относительно каждой из переменных является оператором дифференцирования в пространстве функций $C^\infty(M^n)$. Поэтому в локальных координатах она принимает упрощенный вид.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В любых локальных координатах $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ скобка Пуассона–Ли может быть записана в виде

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \{x^i, x^j\}.$$

Нетрудно проверить, что функции $\pi^{ij} = \{x^i, x^j\}$, определяемые в локальных координатах на многообразии, образуют кососимметрический тензор типа $(2, 0)$. Этот тензор называется *тензором Пуассона*. И фактически определить скобку Пуассона означает задать тензор Пуассона. Следует понимать, что не всякий кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ может быть тензором Пуассона некоторой скобки. Этому препятствует тождество Якоби. Кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ на многообразии является тензором Пуассона некоторой скобки тогда и только тогда, когда

$$\pi^{ij} \frac{\partial \pi^{qr}}{\partial x^j} + \pi^{rj} \frac{\partial \pi^{iq}}{\partial x^j} + \pi^{qj} \frac{\partial \pi^{ri}}{\partial x^j} = 0. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Симплектической структурой на гладком многообразии M называется дифференциальная 2-форма ω , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$;
- 2) ω не вырождена в каждой точке многообразия, т.е. в любых локальных координатах $\det \Omega(x) \neq 0$, где $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$ – матрица формы.

Многообразие, снабженное симплектической структурой, называется *симплектическим*.

Очевидно, что при таких ограничениях симплектическое многообразие может быть лишь четномерно. Коэффициенты матрицы 2-формы ω образуют кососимметрический тензор типа $(0, 2)$ с двумя нижними индексами. Поскольку симплектическая форма невырождена, ее можно обратить и получить кососимметрический тензор типа $(2, 0)$ уже с двумя верхними индексами ω^{ij} . Следовательно, на симплектическом многообразии можно ввести скобку следующим образом:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \omega^{ij}.$$

Несложно показать, что условие замкнутости симплектической формы в точности совпадает с условием (1). Таким образом, любое симплектическое многообразие является пуассоновым.

Примером пуассонова многообразия может служить любая коалгебра алгебры Ли. Если $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – координатные функции в коалгебре, а c_{ij}^k – структурные константы алгебры, то скобку Пуассона двух гладких функций на коалгебре можно ввести вполне естественным образом:

$$\{f, g\} = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Тождество Якоби выполняется автоматически, поскольку c_{ij}^k – структурные константы некоторой алгебры Ли. Тензор Пуассона коалгебры будет иметь вид $c_{ij}^k x_k$. Вообще говоря, тензор Пуассона должен иметь два верхних индекса, но в коалгебре принято координатные функции писать с нижними индексами, поэтому и получился тензор с двумя нижними индексами.

Мы будем предполагать известными основные понятия теории алгебр Ли: присоединенное, коприсоединенное действие группы, орбиты действия, форма Кириллова. Выше был приведен классический пример пуассонова многообразия. Следующее утверждение помогает ввести некоторый полезный для приложений класс симплектических многообразий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Все орбиты коприсоединенного действия группы Ли на своей коалгебре G^* являются симплектическими многообразиями с канонической 2-формой ω – формой Кириллова. Форма Кириллова есть ограничение тензора Пуассона коалгебры на орбиту. Скобку Пуассона на этих многообразиях можно вычислять следующим образом: если f, g – две гладкие функции на орбите, то продолжаем их произвольным образом до гладких функций $\tilde{f}, \tilde{g}$ на всей коалгебре, и тогда*

$$\{f, g\}(x) = \{\tilde{f}, \tilde{g}\}(x).$$

Тензор Пуассона π^{ij} является тензором с верхними индексами, а для тензоров с верхними индексами, вообще говоря, нет естественного способа ограничения с многообразия на подмногообразие, в отличие от тензоров с нижними индексами. Но в случае пуассоновых многообразий есть общий метод, который все же позволяет провести ограничение тензора Пуассона на симплектические листы этого пуассонова многообразия (в нашем случае – на орбиты). Причем это ограничение является невырожденным кососимметрическим тензором ω^{ij} типа $(2, 0)$ уже на орбите, а 2-форма, заданная матрицей ω_{ij} , является замкнутой. Сам метод ограничения тензора Пуассона на орбиту описан в [11]. В дальнейшем в настоящей работе понадобится лишь знание того, как устроена скобка Пуассона на орбитах. Причем утверждения 2 вполне достаточно, т.е. сам метод ограничения тензора Пуассона с коалгебры на орбиту не потребуются.

2.2. Коалгебра Ли $e(3)^*$. Применим все введенные выше конструкции к коалгебре Ли $e(3)^*$ группы движений трехмерного пространства. Это шестимерная коалгебра. В ней можно ввести стандартные координаты

$$L_x, \quad L_y, \quad L_z, \quad x, \quad y, \quad z,$$

в которых тензор Пуассона примет вид

$$\|\pi^{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & L_z & -L_y & 0 & z & -y \\ -L_z & 0 & L_x & -z & 0 & x \\ L_y & -L_x & 0 & y & -x & 0 \\ 0 & z & -y & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переменные L_x, L_y, L_z принято называть *импульсами*. По тензору Пуассона можно понять, как устроена скобка Пуассона на этой коалгебре. На коалгебре $e(3)^*$ есть две *функции Казимира*, т.е. функции, коммутирующие относительно скобки со всеми гладкими функциями на коалгебре. Это $I_1 = x^2 + y^2 + z^2$ (ее принято называть *геометрическим интегралом*) и $I_2 = xL_x + yL_y + zL_z$ (*интеграл площадей*). Для коалгебры $e(3)^*$ также верно следующее утверждение, показывающее, как она расслаивается на симплектические многообразия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При $c_1 > 0$ $M_{c_1, c_2}^4 = \{I_1 = c_1, I_2 = c_2\}$ – орбита коприсоединенного действия группы $E(3)$ движений трехмерного пространства на своей коалгебре $e^*(3)$.

Многообразия M_{c_1, c_2}^4 , $c_1 > 0$, являются четырехмерными симплектическими многообразиями, диффеоморфными кокасательному расслоению к двумерной сфере T^*S^2 .

2.3. Интегрируемость по Лиувиллю. Рассмотрим динамические уравнения на пуассоновых многообразиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Векторное поле v на многообразии M^n , снабженном структурой скобки Пуассона, называется *гамильтоновым* с гамильтонианом $H \in C^\infty(M^n)$, если для любой функции $f \in C^\infty(M^n)$ выполнено $\{f, H\} = v(f)$. В этом случае пишут $v = \text{sgrad } H$, а $\text{sgrad } H$ называют *кососимметрическим* градиентом функции H .

В любых локальных координатах гамильтоново векторное поле имеет вид

$$v^i = \pi^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j} = \{x^i, H\}.$$

Гамильтонова динамическая система на многообразии, снабженном пуассоновой структурой, имеет вид $\dot{x} = \text{sgrad } H$, или, в локальных координатах, $\dot{x}^i = \{x^i, H\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для интегралов гамильтоновых векторных полей верно следующее: F является интегралом гамильтонова векторного поля с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$. В таком случае гамильтониан гамильтонова векторного поля всегда является интегралом этого поля. При этом скобка двух интегралов опять будет интегралом. Действительно, если F и G – два интеграла векторного поля, то $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$, и из тождества Якоби следует

$$\{ \{G, F\}, H \} = \{F, \{H, G\}\} + \{G, \{F, H\}\} = 0.$$

Следовательно, $\{G, F\}$ коммутирует с H и тоже является интегралом векторного поля. Таким образом, множество интегралов гамильтонова векторного поля

является подалгеброй алгебры Ли гладких функций. Эта подалгебра является максимальной, т.е. непополняемой, и определяется лишь самим гамильтонианом.

Перейдем к рассмотрению симплектических многообразий и гамильтоновых векторных полей на них.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гамильтонова система v на симплектическом многообразии M^{2n} называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ таких, что:

- 1) $f_1, f_2, \dots, f_n$ – первые интегралы v ;
- 2) они функционально независимы на M^{2n} , т.е. почти всюду на M^{2n} градиенты линейно независимы;
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ для любых i и j ;
- 4) векторные поля полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Оказывается, если на симплектическом многообразии M^{2n} есть вполне интегрируемая гамильтонова система, то в “компактном” случае это симплектическое многообразие может быть расслоено на n -мерные торы и особые слои. Об этом говорит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Лиувилля). Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) заданы вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и $T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ – регулярная неособая поверхность уровня интегралов $f_1, f_2, \dots, f_n$. Тогда:

- 1) если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n (этот тор называется тором Лиувилля);
- 2) слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

В случае интегрируемой гамильтоновой системы на симплектическом многообразии *слоением Лиувилля* называют слоение этого многообразия на особые и неособые поверхности уровня интегралов.

Ознакомиться с более подробной формулировкой и доказательством теоремы Лиувилля можно, например, в [3; т. 1, гл. 1].

2.4. Случай Горячева–Чаплыгина. Вернемся к четырехмерным симплектическим многообразиям M_{c_1, c_2}^4 , $c_1 > 0$, из п. 2.2. При рассмотрении гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, т.е. при $n = 2$, для интегрируемости по Лиувиллю достаточно существования еще одного дополнительно, не зависящего от гамильтониана интеграла.

Уравнения Эйлера–Пуассона движения твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести могут быть записаны в гамильтоновом виде на симплектических многообразиях вида $M_{1,g}^4$. Как известно из классической механики, в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой фазовое пространство шестимерно: первые три координаты отвечают угловым скоростям движения в координатах, жестко связанных с телом, а остальные три – координаты единичного вектора, направленного вертикально вверх. Ввиду того, что такая задача всегда имеет два интеграла – геометрический и интеграл площадей, – фазовое пространство может быть редуцировано до четырехмерного. Более подробно о процессе сведения задачи от шестимерной до четырехмерной можно прочитать, например, в книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [3; т. 2, гл. 5].

Случай Горячева–Чаплыгина (1899 г.) имеет место лишь на $M_{1,0}^4$:

$$H = \frac{L_x^2}{2A} + \frac{L_y^2}{2A} + \frac{2L_z^2}{A} + a_1x + a_2y,$$

$$F = L_z(L_x^2 + L_y^2) - Az(a_1L_x + a_2L_y).$$

Здесь F – функция третьей степени по импульсам. В этом случае главные моменты удовлетворяют условию $A_1 = A_2 = 4A_3$ и центр масс расположен в плоскости симметрии тела, отвечающей первым двум осям инерции тела. Скобка Пуассона функций H и F выглядит так:

$$\{H, F\} = (xL_x + yL_y + zL_z)(a_2L_x - a_1L_y).$$

Отсюда видно, что функции H и F находятся в инволюции (т.е. коммутируют) не на всех четырехмерных многообразиях $M_{1,g}^4$, поэтому система интегрируема лишь на одной специальной четырехмерной поверхности $\{I_1 = 1, I_2 = 0\}$, т.е. на $M_{1,0}^4$. Это случай так называемой частной интегрируемости, отвечающий нулевому значению интеграла площадей I_2 . При этом совместные поверхности уровня интегралов H и F на $M_{1,g}^4$ компактны. Более того, даже изоэнергетические поверхности

$$Q_h^3 = \{\xi \in M_{1,g}^4 \mid H(\xi) = h\}$$

компактны. Следовательно, верны предположения теоремы Лиувилля, а значит, многообразие $M_{1,g}^4$ расслаивается на торы и на особые слои.

Ниже будет рассмотрен аналог этой системы – интегрируемый случай тоже на $M_{1,0}^4$ с интегралом третьей степени по импульсам.

§ 3. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы

3.1. Лиувиллева эквивалентность. В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, развитой А. Т. Фоменко и Х. Цишангом в работах [12]–[14], традиционно рассматриваются несколько типов их изоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Две интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) (соответственно (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2)) *лиувиллево эквивалентны*, если существует диффеоморфизм $\varphi: M_1^4 \rightarrow M_2^4$ (соответственно $\varphi: Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$), переводящий слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Это отношение эквивалентности можно несколько ослабить. В результате возникает понятие грубой лиувиллевой эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две интегрируемые гамильтоновы системы (M_1^4, v_1) и (M_2^4, v_2) (соответственно (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2)) называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки базы) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Дальнейшее развитие теории Фоменко–Цишанга дано в работах А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко, Х. Цишанга [2], [12]–[23].

3.2. Изоэнергетические поверхности. *Изоэнергетическими поверхностями* называются трехмерные многообразия вида $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$. Сразу ограничимся рассмотрением лишь тех h , при которых, во-первых, Q_h^3 компактно и, во-вторых, $dH \neq 0$ всюду на Q_h^3 . Тем самым мы гарантируем, что Q_h^3 является гладким компактным подмногообразием в M^4 , а векторное поле $v = \text{sgrad } H$ нигде на нем не обращается в нуль.

Поскольку гамильтониан является интегралом гамильтонова векторного поля, вектор кососимметрического градиента $v = \text{sgrad } H$ направлен вдоль изоэнергетической поверхности. В интегрируемом случае на изоэнергетической поверхности можно рассмотреть поток кососимметрического градиента дополнительного интеграла $w = \text{sgrad } F$. Это векторное поле опять же сохраняет Q_h^3 , поскольку в локальных координатах

$$w(H) = \left(\omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \frac{\partial H}{\partial x^i} = \{H, F\} = 0.$$

Таким образом, на неособых изоэнергетических поверхностях можно рассматривать два векторных поля, а именно $v = \text{sgrad } H$ и $w = \text{sgrad } F$. Причем, во-первых, первое векторное поле нигде на Q_h^3 не обращается в нуль, во-вторых – критическим точкам отображения момента будут соответствовать те точки, где зависимы векторные поля v и w , т.е. $w = \lambda v$. *Отображением момента* называется отображение $H \times F: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$.

Для топологического исследования интегрируемого случая с двумя степенями свободы полезно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 (см. [3; т. 1, гл. 1]). *Интеграл F не может иметь изолированных критических точек на неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . В случае компактной Q_h^3 критические точки F организованы в критические окружности. Каждая критическая окружность проецируется в одну точку на бифуркационной диаграмме. Параметр λ пропорциональности $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен вдоль критической окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем такие локальные координаты на четырехмерном многообразии x_1, x_2, x_3, x_4 , в которых $\text{sgrad } H = (1, 0, 0, 0)$. Тогда, поскольку F и H коммутируют, получаем

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

т.е.

$$F = F(x_2, x_3, x_4), \quad H = H(x_2, x_3, x_4).$$

Теперь понятно, что если градиенты F и H пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности λ , то они будут пропорциональны и в точке, сдвинутой вдоль первой координатной оси, т.е. вдоль интегральной траектории гамильтонова поля с тем же коэффициентом пропорциональности. Утверждение доказано.

Пусть $x \in Q_h^3$ – критическая точка дополнительного интеграла F на изоэнергетической поверхности. Тогда $d^2F(x)$ – квадратичная форма, вырожденная в направлении $v = \text{sgrad } H$. Поэтому дополнительный интеграл F не является функцией Морса на Q_h^3 . Однако в случае динамических систем на Q_h^3 существует естественный аналог этого понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Дополнительный интеграл F называется *интегралом Ботта* на данной изоэнергетической поверхности Q^3 , если в каждой его критической точке гессиан имеет ранг, равный 2.

Для каждой невырожденной критической окружности отображения момента можно ввести понятие индекса. Возьмем точку на критической окружности и рассмотрим количество положительных и отрицательных собственных значений квадратичной формы дополнительного интеграла F как функции на изоэнергетической поверхности. Для критической точки на невырожденной окружности возможны три случая: два положительных собственных значения; одно положительное и одно отрицательное значения; два отрицательных значения. Причем количество положительных и отрицательных собственных значений квадратичной формы дополнительного интеграла F как функции на изоэнергетической поверхности одинаково для разных точек критической окружности. *Индексом невырожденной критической окружности* называется количество отрицательных собственных значений квадратичной формы d^2F .

3.3. Бифуркации торов Лиувилля. На изоэнергетической поверхности Q^3 определено однопараметрическое семейство совместных поверхностей уровня T_ξ интегралов системы H и F , параметризованное значением второго интеграла F . Если объявить каждую компоненту связности точкой, то получим некоторый одномерный граф – базу слоения Лиувилля (рис. 1). Причем вершинам графа будут соответствовать критические слои слоения.

Рис. 1

Прообразом каждого открытого ребра графа является многообразие, диффеоморфное $T^2 \times (0, 1)$. Вершинам графа соответствуют сингулярные слои. Типичной является ситуация, когда при переходе через критический уровень число компонент связности T_ξ меняется.

Будем рассматривать трехмерную окрестность особого слоя в Q^3 . Оказывается, что в боттовском случае с точностью до лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировать количество критических окружностей на сингулярном слое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (А. Т. Фоменко). Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется *3-атомом*.

По сути 3-атом – это трехмерное многообразие со структурой лиувиллева слоения, содержащего ровно один сингулярный слой. Край такого многообразия состоит из некоторого числа торов Лиувилля. Количество критических окружностей на сингулярном слое атома называется *сложностью 3-атома*. В книге А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко [3] изложен алгоритм, позволяющий явно перечислить все атомы заданной сложности. 3-атомы принято обозначать заглавными латинскими буквами с натуральными индексами и звездочками. Три наиболее простых 3-атома (A , A^* и B) изображены на рис. 2.

Рис. 2

Если теперь в каждую вершину графа на рис. 1 поставить подходящий 3-атом, то получим так называемую *грубую молекулу*. Грубая молекула несет информацию о базе слоения Лиувилля, а также позволяет локально восстановить его структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (А. Т. Фоменко; см. [3]). *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) с боттовскими дополнительными интегралами F_1 и F_2 грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

Вопрос лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы также решен в работах А. Т. Фоменко и Х. Цишанга. Если на ребра и вершины графа поставить некоторые числа по алгоритму, описанному в [3], то получим так называемую *меченую молекулу*. При этом верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг; см. [14]). *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) с боттовскими дополнительными интегралами F_1 и F_2 лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченые молекулы совпадают.*

Полное и последовательное доказательство фактов, изложенных в этом параграфе, можно найти в книге [3].

3.4. Бифуркационная диаграмма отображения момента. Рассмотрим бифуркационную диаграмму на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ некоторой интегрируемой по Лиувиллю системы. Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость на несколько камер. В прообразе каждой точки камеры лежит несколько торов Лиувилля, если, конечно, у точки есть прообразы. Для точек бифуркационной диаграммы, отвечающих критическим точкам отображения момента, в прообразе лежат сингулярные слои. Под *рангом отображения момента в точке* принято понимать ранг дифференциала отображения момента в этой точке.

Поскольку многообразие M_{c_1, c_2}^4 является алгебраическим при $c_1 > 0$ как поверхность уровня двух многочленов I_1 и I_2 , то множество критических точек

отображения $H \times F$ на M_{c_1, c_2}^4 можно найти следующим способом. Находим точки, в которых зависимы градиенты функций I_1 , I_2 , H и F как функций в $e(3)^*$. Потом получившееся множество точек ограничиваем на M_{c_1, c_2}^4 , тем самым, получаем множество критических точек отображения $H \times F$ на M_{c_1, c_2}^4 . Обоснование этого метода можно найти в [3; т. 2, гл. 5]. Множество критических значений отображения – это просто образ множества критических точек при этом отображении.

Второй способ нахождения критических точек отображения момента может показаться похожим на первый, но иногда его бывает проще осуществить. А именно, мы ищем векторы кососимметрических градиентов интегралов H и F как функций на M_{c_1, c_2}^4 , но в координатах объемлющего шестимерного пространства $e(3)^*$. В силу утверждения 2

$$\text{sgrad } H = (\{L_x, H\}, \{L_y, H\}, \{L_z, H\}, \{x, H\}, \{y, H\}, \{z, H\}).$$

Аналогичное выражение получаем для $\text{sgrad } F$. Теперь опять рассмотрим точки, в которых $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$ зависимы в объемлющем пространстве, и ограничиваем это множество на M_{c_1, c_2}^4 . Получаем то же самое множество критических точек отображения момента.

§ 4. Топология слоений Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева

4.1. Интегрируемый случай. В работе Х. Р. Дуллина и В. С. Матвеева [8] найден новый интегрируемый случай на одной из орбит коприсоединенного действия группы $E(3)$, а именно на многообразии

$$M^4 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, xL_x + yL_y + zL_z = 0\}$$

в координатах, описанных выше. Новая система зависит от трех параметров $A, c, s \in \mathbb{R}$, где $s > 1$, $A > 0$. Гамильтониан H и дополнительный первый интеграл F представляются формулами

$$H := \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2 + (1 + G(z))L_z^2) - \frac{Ax}{\sqrt{W(z)}} + \frac{c}{W(z)}, \quad (3)$$

$$F := 2HL_z - L_z^3 + \frac{A}{\sqrt{W(z)}}(xL_z + 2W(z)L_x), \quad (4)$$

где

$$W(z) = z + s, \quad P(z) = 3z^2 + 4sz + 1, \quad G(z) = \frac{P(z)}{(2W(z))^2}.$$

Следует особо отметить, что данная система имеет интеграл третьей степени по импульсам. Интеграл в случае Горячева–Чаплыгина тоже третьей степени по импульсам (см. п. 2.4). Более того, в работе А. В. Цыганова [22] приведено четырехпараметрическое семейство интегрируемых случаев на $M_{1,0}^4$ с интегралом третьей степени по импульсам. В своей работе А. В. Цыганов искал гамильтониан и дополнительный первый интеграл в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{ц}} &= L_x^2 + L_y^2 + (3\alpha^2 + f(z))L_z^2 + m(z)x + g(z), \\ F_{\text{ц}} &= -2\alpha L_z(-\alpha^2 L_z^2 + L_x^2 + L_y^2 + f(z)L_z^2 + g(z)) - n(z)L_x - l(z)xL_z \end{aligned}$$

и получил следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4 (А. В. Цыганов; см. [22]). Гамильтониан H_{Π} и дополнительный интеграл F_{Π} коммутируют относительно скобки Пуассона $e(3)^*$ на многообразии $M_{1,0}^4$ тогда и только тогда, когда

$$24\alpha^2 - 9 = 15 \frac{zn'(z) - n''(z)(1 - z^2)}{n} + \frac{3zn''(z) - n'''(z)(1 - z^2)}{n'(z)} \left(9 - \frac{n(z)n''(z)}{n'(z)^2} \right) + n \left(\frac{5zn'''(z) - n''''(z)(1 - z^2) + 3n''(z)}{n'(z)^2} \right),$$

а все остальные функции, входящие в определения интегралов H_{Π} и F_{Π} , имеют вид

$$g(z) = \frac{d}{n(z)^2}, \quad m(z) = -\frac{n'(z)}{\alpha}, \quad l(z) = \frac{n(z)n''(z)}{n'(z)}, \\ f(z) = 1 - 3\alpha^2 - \alpha \frac{3zm(z) - 2(1 - z^2)m'(z)}{n(z)} + \frac{zl(z) - (1 - z^2)l'(z)}{n(z)}.$$

Из теоремы видно, что семейство интегрируемых случаев Цыганова параметризуется решениями обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Частное решение вида $n(z) = cz$, $\alpha = \pm 1$, $c \in \mathbb{R}$, соответствует интегрируемому случаю Горячева–Чаплыгина, а частное решение $n(z) = c\sqrt{z+s}$, $\alpha = \pm 1$, $s > 1$, $c \in \mathbb{R}$, соответствует случаю Дуллина–Матвеева.

4.2. Топология изоэнергетических поверхностей. Для поиска критических точек векторного поля существуют те же два способа, что и при поиске критических точек отображения момента (см. п. 3.4): либо находим точки, в которых зависимы градиенты функций I_1 , I_2 и H как функций объемлющего шестимерного пространства, а потом ограничиваем это множество на M_{c_1, c_2}^4 ; либо вычисляем вектор косога градиента H , как показано выше, приравниваем все его компоненты к нулю и опять ограничиваем получившееся множество точек на M_{c_1, c_2}^4 .

Функция на многообразии называется *функцией Морса* или *морсовской функцией*, если все ее критические точки невырождены в том смысле, что в этих точках невырождены матрицы вторых производных. Важная теорема теории функций Морса звучит так.

ТЕОРЕМА 5 (лемма Морса). Пусть x_0 – критическая точка функции Морса f на многообразии M^n . Тогда существуют такие локальные координаты $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в окрестности точки x_0 , что функция f примет вид

$$f(x) = f(x_0) - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 - \dots - (x^k - x_0^k)^2 + (x^{k+1} - x_0^{k+1})^2 + \dots + (x^n - x_0^n)^2$$

для некоторого целого k от 0 до n .

Число k определено однозначно как количество отрицательных собственных значений гессиана функции f в точке x_0 . Его принято называть *индексом невырожденной критической точки*.

Вернемся к интегрируемому случаю. Одним из результатов данной работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Множество критических точек гамильтониана H случая Дуллина–Матвеева на многообразии $M^4 = M_{1,0}^4$ можно представить в виде

$$\begin{cases} y = 0, \\ L_x = L_y = L_z = 0, \\ A(x^2 + 2zW(z)) - \frac{2cx}{\sqrt{W(z)}} = 0. \end{cases}$$

В случае $c = 0$ система Дуллина–Матвеева сильно упрощается, и поэтому при $c = 0$ верны более сильные утверждения:

- 1) интеграл энергии H на M^4 имеет только два критических значения

$$h_1 = -A\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}, \quad h_2 = A\sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})};$$

- 2) критические точки ξ_1 и ξ_2 , отвечающие критическим значениям h_1 и h_2 , обе невырождены, т.е. интеграл энергии H на M^4 является функцией Морса;
- 3) критические точки ξ_1 и ξ_2 являются точками ранга нуль отображения момента;
- 4) критическая точка, отвечающая значению h_1 , это точка глобального минимума;
- 5) критическая точка, отвечающая значению h_2 , это седловая точка индекса 2;
- 6) неособые изоэнергетические поверхности Q_h^3 диффеоморфны трехмерной сфере S^3 при $h \in (h_1, h_2)$ и трехмерному проективному пространству $\mathbb{RP}^3$ при $h > h_2$; при $h < h_1$ множество Q_h^3 пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критические точки гамильтониана – это те точки нашего алгебраического многообразия M^4 , где зависимы градиенты функций H , I_1 и I_2 как функций в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$. Выпишем таблицу, в строках которой стоят градиенты функций H , I_1 и I_2 :

$H :$	L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
$I_1 :$	0	0	0	$2x$	$2y$	$2z$
$I_2 :$	x	y	z	L_x	L_y	L_z

(5)

Критические точки это как раз те точки, в которых зависимы строчки таблицы. В предположении, что $y \neq 0$, вычтем из третьей строчки вторую с коэффициентом $L_y/(2y)$, тогда зависимость строк таблицы (5) будет эквивалентна зависимости строк такой таблицы:

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2}G'L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
x	y	z	$L_x - \frac{x}{y}L_y$	$L_z - \frac{z}{y}L_y$

(6)

Определитель первого и второго столбцов последней таблицы должен равняться нулю, поскольку две строчки зависимы, т.е. $yL_x - xL_y = 0$. Следовательно, определитель второго и четвертого столбцов не равен нулю. При $y \neq 0$ получили противоречие с зависимостью строк.

Если предположить, что $y = 0$, $L_y \neq 0$, то из второго и пятого столбцов таблицы (5) видно, что вторая строчка должна быть нулевой, что невозможно, так как $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

В случае $y = 0$, $L_y = 0$ из таблицы (5) можно выкинуть второй и пятый столбцы:

L_x	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	$\frac{1}{2} G' L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
0	0	x	z
x	z	L_x	L_z

(7)

Если $x = 0$, то поскольку $I_2 = 0$, получаем $z = \pm 1$, $L_z = 0$. Из первого столбца таблицы (7) следует, что $L_x = 0$, поскольку вторая и третья строчки таблицы (7) так же, как и вторая и третья строчки таблицы (5), независимы на всем фазовом пространстве. Определитель второго, третьего и четвертого столбцов таблицы (7) равен $-Az^2/\sqrt{W(z)} \neq 0$, т.е. строчки независимы. Получили противоречие.

Итак, остается следующее единственное допустимое соотношение на переменные: $y = 0$, $L_y = 0$, $x \neq 0$. Упрощаем таблицу:

L_x	$(1 + G)L_z$	$\frac{1}{2} G' L_z^2 + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} + \frac{Az}{x\sqrt{W}} - \frac{c}{W^2(z)}$
x	z	$L_z - \frac{z}{x} L_x$

(8)

Зависимость строк эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + zL_z = 0, \\ \left(\frac{1}{1-z^2} + G\right)L_z = 0, \\ \frac{x}{2} G' L_z^2 + \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}} + \frac{Az}{\sqrt{W}} - \frac{cx}{W^2} + GL_x L_z = 0, \end{cases} \quad (9)$$

или, уже в упрощенном виде,

$$\begin{cases} L_x = L_y = L_z = 0, \\ y = 0, \\ A(x^2 + 2zW) - \frac{2cx}{\sqrt{W}} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Теперь рассмотрим частный случай, когда $c = 0$. Получаем две критические точки $\xi_{1,2} = (0, 0, 0, \pm x_0, 0, z_0)$, где

$$z_0 = -s + \sqrt{s^2 - 1}, \quad x_0 = \sqrt{2 + 2s\sqrt{s^2 - 1} - 2s^2}.$$

Для обеих точек выполнено $y = 0$. Легко проверить, что в точках ξ_1 и ξ_2 градиенты функций F , I_1 и I_2 линейно зависимы. Следовательно,

$$\text{grad } H|_{M^4}(\xi_i) = \text{grad } F|_{M^4}(\xi_i) = 0$$

для обеих точек и ранг отображения момента в этих точках равен нулю. Далее, подставляя точки в гамильтониан, получаем два критических значения.

Следующая лемма полезна для поиска индексов критических точек. Под d^2K будем понимать гессиан функции K , т.е. матрицу вторых частных производных.

ЛЕММА 1 (см. [3; т. 2, лемма 5.1]). Пусть для точки $\xi_0 \in M_{c_1, c_2}^4$ выполнено условие

$$\text{grad } H(\xi_0) = \lambda_1 \text{grad } I_1(\xi_0) + \lambda_2 \text{grad } I_2(\xi_0).$$

Тогда квадратичная форма, определяемая гессианом функции $\tilde{H} = H|_{M_{c_1, c_2}}$ в точке ξ_0 , является ограничением формы, определяемой матрицей

$$\mathbf{G} = d^2H - \lambda_1 d^2I_1 - \lambda_2 I_2,$$

на касательное пространство $T_{\xi_0} M_{c_1, c_2}^4$.

Продолжим доказательство теоремы 6. В обеих критических точках выполнено равенство $\text{grad } H = \lambda \text{grad } I_1$, где $\lambda = -A/(2x\sqrt{W}(z))$. Воспользуемся леммой. В координатах L_x, L_y, L_z, x, y, z получаем

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + G(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix},$$

$$d^2I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве к M^4 в точках ξ_i векторы

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} -z_0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

можно взять за базис. Тогда матрица $d^2\tilde{H}$ в этом базисе примет вид

$$d^2\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2\left(\frac{1}{1-z^2} + G\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Итак, обе критические точки ξ_1 и ξ_2 невырождены, ξ_1 – локальный минимум, ξ_2 – седло индекса 2. Следовательно, для любого h из (h_1, h_2) изоэнергетическая поверхность Q_h^3 диффеоморфна S^3 как поверхность уровня функции Морса вблизи точки локального минимума.

Теперь рассмотрим Q_h^3 при $h > h_2$. Заменяем $G(z)$ на $tG(z)$, тем самым введем еще один параметр $t \in [0, 1]$. Тогда если найти критические значения нового гамильтониана, это будут те же h_1 и h_2 , поскольку при подсчете критических значений исходного гамильтониана от функции $G(z)$ нам потребовалось только свойство

$$\frac{1}{1-z^2} + G(z) > 0,$$

а оно сохранится после введения параметра. Следовательно, неособые компактные поверхности в M^4

$$\{\chi \in M^4 \mid H_t(\chi) = h\}$$

диффеоморфны при $t \in [0, 1]$ и при одном и том же h . При $t = 1$ получаем Q_h^3 , а при $t = 0$ – новую поверхность, которая задается системой уравнений

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2h + \frac{2Ax}{\sqrt{W}}, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Если взять

$$h > \max_{x^2+y^2+z^2=1} \frac{Ax}{\sqrt{W(z)}},$$

то гладкой заменой

$$\vec{L} \rightarrow \frac{h + Ax/\sqrt{W}}{h} \vec{L}$$

получаем еще одну поверхность

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2h, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Последняя поверхность уже диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$, а значит, и изоэнергетическая поверхность Q_h^3 при $h > h_2$ диффеоморфна $\mathbb{R}P^3$. Теорема 6 доказана.

4.3. Типы критических точек отображения момента ранга нуль.

Пусть на (M^4, ω) задана интегрируемая система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F , а точка $\xi \in M^4$ такая, что $dH(\xi) = dF(\xi) = 0$. Оператор на $T_\xi M$ называется *симплектическим*, если он сохраняет форму $\omega|_\xi$. На $T_\xi M$ корректно определены два симплектических оператора,

$$A_H := \Omega^{-1} d^2(H|_\xi), \quad A_F := \Omega^{-1} d^2(F|_\xi),$$

порождающих в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $K(H, F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Положение равновесия ξ называется *невыврожденным*, если подалгебра $K(H, F)$ является картановской подалгеброй в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Укажем эффективный способ проверки картановости подалгебры $K(H, F)$. Коммутативная подалгебра $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. Итак, сначала надо убедиться, что операторы A_H и A_F линейно независимы, а затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$ имеет попарно различные собственные значения (такой элемент называется *регулярным элементом* $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$).

Оба оператора A_H и A_F соответствуют стандартному представлению алгебры $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Это помогает классифицировать положения равновесия ранга нуль. В стандартном представлении $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ собственные значения операторов разбиваются на пары вида $\lambda, -\lambda$. Поэтому невырожденные точки ранга нуль можно классифицировать по типу собственных значений регулярного элемента в алгебре Картана $K(H, F)$:

центр–центр – чисто мнимые корни $iA, -iA, iB, -iB$;

центр–седло – два вещественных и два мнимых корня $-A, A, iB, -iB$;

седло–седло – вещественные корни $-A, A, -B, B$;

фокус–фокус – чисто комплексные корни $A - iB, A + iB, -A + iB, -A - iB$.

Зная тип невырожденного положения равновесия, можно многое сказать о топологии слоения Лиувилля в его окрестности. Теоретическое обоснование классификации можно найти, например, в [3; т. 1, гл. 1].

Применительно к интегрируемому случаю Дуллина–Матвеева получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Для случая Дуллина–Матвеева на множестве параметров $A > 0, s > 1, c = 0$ верно следующее описание лиувиллева слоения в окрестности критических точек отображения момента ранга нуль:

ξ_1 – особая точка типа центр–центр при $A \neq \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}$;

ξ_2 – особая точка типа фокус–фокус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для поиска симплектических операторов A_H и A_F полезно следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть ξ – критическая точка функции φ на

$$M_{1,g}^4 = \{I_1 = 1, I_2 = g\}.$$

Тогда если Φ – гладкое продолжение функции φ на все пространство $\mathbb{R}^6$, то:

1) существуют такие $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, что

$$\text{grad } \Phi|_{\xi} = \lambda_1 \text{grad } I_1|_{\xi} + \lambda_2 \text{grad } I_2|_{\xi};$$

2) оператор $A_{\varphi} = \Omega^{-1} d^2(H|_{\xi})$ равен ограничению оператора

$$\pi^{ij} (d^2 H|_{\xi} - \lambda_1 d^2 I_1|_{\xi} - \lambda_2 d^2 I_2|_{\xi})_{jk}$$

на $M_{1,g}^4$ в точке ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризация векторного поля v в особой точке ξ в координатной форме представляется в виде $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(\xi)$. При этом если векторное поле сохраняет некоторое подмногообразие N , то оператор линеаризации этого поля в особой точке на подмногообразии будет ограничением оператора линеаризации в объемлющем многообразии M .

В нашем случае оператор A_{φ} является линеаризацией гамильтонова векторного поля в особой точке. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\omega^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \Big|_{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\omega^{ij}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Big|_{\xi} + \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \Big|_{\xi} = \omega^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} \Big|_{\xi},$$

поскольку $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Big|_{\xi} = 0$. С другой стороны, оператор A_{φ} есть ограничение линеаризации гамильтонова векторного поля в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$, т.е.

$$A_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\pi^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial y^j} \right) (\xi) \Big|_{M_{1,0}^4}.$$

Лемма доказана.

С помощью леммы вычислим операторы A_H и A_F в критических точках. Для оператора A_H имеем

$$A_H = \Omega^{-1} d^2(H|_{\xi}) = \|\pi^{ij} (d^2 H - \lambda_1 d^2 I_1 - \lambda_2 d^2 I_2)_{jk}\|(\xi),$$

где

$$\text{grad } H|_{\xi} = \lambda_1 \text{grad } I_1|_{\xi} + \lambda_2 \text{grad } I_2|_{\xi}.$$

Для оператора A_F

$$A_F = \Omega^{-1} d^2(f|_{\xi}) = \|\pi^{ij} (d^2 F - \mu_1 d^2 I_1 - \mu_2 d^2 I_2)_{jk}\|(\xi),$$

если

$$\text{grad } f|_{\xi} = \mu_1 \text{grad } I_1|_{\xi} + \mu_2 \text{grad } I_2|_{\xi}.$$

В нашем случае

$$\text{grad } H|_{\xi_l} = -\frac{A}{x\sqrt{W}} \text{grad } I_1|_{\xi_l}, \quad \text{grad } F|_{\xi_l} = \frac{2A\sqrt{W}}{x} \text{grad } I_2|_{\xi_l}.$$

Следовательно, для линейризации векторного поля $\text{sgrad } H$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \left\| \pi^{ij} \left(d^2 H + \frac{A}{x\sqrt{W}} d^2 I_1 \right)_{jk} \right\|_{\xi_l} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & \frac{A}{x\sqrt{W}} - \frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Az}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Az}{x\sqrt{W}} + \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} & 0 & -\frac{Az}{2W\sqrt{W}} + x \left(\frac{A}{x\sqrt{W}} - \frac{3Ax}{4W^2\sqrt{W}} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x(1+G) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И для линейризации векторного поля $\text{sgrad } F$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \pi^{ij} \left(d^2 F - \frac{2A\sqrt{W}}{x} d^2 I_2 \right)_{jk} \right\|_{\xi_l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & \frac{A}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x} \\ -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2Az\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2Az\sqrt{W}}{x} + \frac{Ax}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} + x\left(\frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{2A\sqrt{W}}{x}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A\sqrt{W} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2Az\sqrt{W}}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2Az\sqrt{W}}{x} - \frac{Ax}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} + x\left(\frac{Ax}{2W\sqrt{W}} - \frac{A\sqrt{W}}{x}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A\sqrt{W} & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось ограничить эти два оператора на $TM|_{\xi_l}$. В базисе $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}$ операторы A_H и A_F принимают вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1+x^2G & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & -2Ax\sqrt{W} & 0 & 0 \\ \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2Ax\sqrt{W} \\ 0 & 0 & \frac{2A\sqrt{W}}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим оператор

$$A_H - \frac{x}{2A\sqrt{W}} A_F = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 & \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ -1 & 0 & -\frac{A}{x\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & 1+x^2G & 0 & x^2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Его характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^4 + 2\left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + x^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} - x^2\right)^2.$$

Дискриминант D равен $16x^2Ax/\sqrt{W}$. Теперь для точки ξ_1 , где $x > 0$, получаем четыре различных чисто мнимых собственных значения, но только если

свободный член многочлена не равен нулю, т.е. если

$$A \neq x\sqrt{W} = \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{2(s - \sqrt{s^2 - 1})}.$$

А для точки ξ_2 , где $x < 0$, получаем четыре различных комплексных не чисто мнимых и не действительных значения. То есть ξ_1 – особая точка типа центр–центр, ξ_2 – особая точка типа фокус–фокус.

4.4. Критические точки отображения момента при $y \neq 0$. Будем искать критические точки отображения момента первым способом из описанных в п. 3.4. Для нахождения критических точек полезна следующая техническая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть

$$f_1, f_2, f_3, f_4: e(3)^* \rightarrow \mathbb{R}$$

– попарно коммутирующие в некоторой точке $\lambda_0 \in (e(3))^*$ функции (т.е. $\{f_i, f_j\}(\lambda_0) = 0$). Пусть в этой точке λ_0 выполнены следующие условия:

- 1) зависимы первые пять координат градиентов функций f_1, f_2, f_3, f_4 , отвечающих переменным L_x, L_y, L_z, x, y ;
- 2) для некоторого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ выполняется $x \frac{\partial f_i}{\partial L_y} - y \frac{\partial f_i}{\partial L_x} \neq 0$.

Тогда градиенты функций f_1, f_2, f_3, f_4 линейно зависимы в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейную комбинацию градиентов функций $f_j, j = 1, \dots, 4$, в точке λ_0

$$\alpha = a_1 \text{grad } f_1|_{\lambda_0} + a_2 \text{grad } f_2|_{\lambda_0} + a_3 \text{grad } f_3|_{\lambda_0} + a_4 \text{grad } f_4|_{\lambda_0}.$$

Из условия 1) леммы следует, что можно так подобрать коэффициенты a_j , что первые пять координат вектора α будут обращаться в нуль. Рассмотрим шестую координату вектора $\alpha = (0, \dots, 0, \alpha_6)$. Поскольку f_1, f_2, f_3, f_4 попарно коммутируют в точке λ_0 , значит, градиенты функций f_j и их линейные комбинации коммутируют на векторах относительно формы, отвечающей тензору Пуассона (2), взятого в точке λ_0 . Пусть для определенности в условии 2) леммы $i = 1$, т.е.

$$x \frac{\partial f_1}{\partial L_y} - y \frac{\partial f_1}{\partial L_x} \neq 0.$$

Тогда

$$0 = (\text{grad } f_1)_i \pi^{ij} \alpha_j = \left(x \frac{\partial f_1}{\partial L_y} - y \frac{\partial f_1}{\partial L_x} \right) \alpha_6.$$

Следовательно, $\alpha_6 = 0$. Лемма доказана.

Пользуясь только что доказанной леммой, для нахождения точек, в которых зависимы градиенты функций H, F, I_1, I_2 , почти всегда необходимо искать только точки, в которых зависимы лишь первые пять координат градиентов, а не все шесть. Для нахождения точек, удовлетворяющих условию 2) леммы 3, полезно воспользоваться таблицей градиентов (16), тогда это условие запишется в виде

$$\begin{cases} y \neq 0, \\ xL_y \neq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно, на множестве $y \neq 0$ достаточно проверять зависимость лишь первых пяти координат градиентов функций H , K , I_1 , I_2 . Выпишем таблицу, в строчках которой стоят компоненты градиентов функций H , K , I_1 , I_2 :

$H :$	L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0
$K :$	$2L_xL_z + 2A\sqrt{W}$	$2L_yL_z$	$L_x^2 + L_y^2 + 3GL_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$-\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$	0
$I_1 :$	0	0	0	x	y
$I_2 :$	x	y	z	L_x	L_y

(16)

ТЕОРЕМА 8. Множество критических точек отображения момента интегрируемого случая Дуллина–Матвеева при $y \neq 0$ имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ (xL_y - yL_x)\left(\frac{L_z}{2Wy} + \frac{L_y}{y^2}\right) = \frac{A}{\sqrt{W}}, \\ \left(2G - 1 - \frac{z}{2W}\right)L_z^2 + \frac{2W}{y}L_yL_z + \left(1 - \frac{1 - z^2 + 2zW}{y^2}\right)L_y^2 + L_x^2 + \frac{2c}{W} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ищем точки, в которых строчки таблицы (16) зависимы. Вычтем из второй строчки первую с коэффициентом $2L_z$:

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$	0
$2A\sqrt{W}$	0	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$	0
0	0	0	x	y
x	y	z	L_x	L_y

(18)

Теперь вычтем из четвертой строчки третью с коэффициентом L_y/y . Тогда ввиду того, что $y \neq 0$, зависимость строчек таблицы (18) эквивалентна зависимости строчек таблицы

L_x	L_y	$(1 + G)L_z$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$
$2A\sqrt{W}$	0	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}}$
x	y	z	$L_x - \frac{x}{y}L_y$

(19)

Вычтем из первой строчки третью с коэффициентом L_y/y . Тогда опять же ввиду того, что $y \neq 0$, зависимость строчек таблицы (19) эквивалента зависимости строчек новой таблицы

$L_x - \frac{x}{y} L_y$	$(1 + G)L_z - \frac{z}{y} L_y$	$-\frac{A}{\sqrt{W}}$
$2A\sqrt{W}$	$L_x^2 + L_y^2 + (G - 2)L_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2c}{W}$	$\frac{AL_z}{\sqrt{W}} + 2\frac{A\sqrt{W}L_y}{y}$

(20)

Поскольку мы видим, что нижний элемент первого столбца последней таблицы ненулевой, для зависимости строк необходимо приравнять к нулю лишь два определителя. Это первый и второй столбцы и первый и третий. После аккуратных выкладок получим выражения из (19). Теорема доказана.

4.5. Бифуркационная диаграмма отображения момента. Опишем структуру множества критических точек отображения момента для интегрируемого случая Дуллина–Матвеева.

Для каждой точки $\xi \in M^4$, в которой зависимы кососимметрические градиенты гамильтониана H и интеграла F , возможны два варианта: либо точка ξ является особой для гамильтонова векторного поля $v = \text{sgrad } H$ в точке ξ , либо косые градиенты интеграла и гамильтониана пропорциональны с некоторым коэффициентом пропорциональности λ , т.е.

$$\text{sgrad } F = \lambda \text{sgrad } H.$$

Поскольку функция F постоянна вдоль векторного поля $\text{grad } H$, то вся траектория, выходящая из точки ξ , состоит из критических точек отображения момента с тем же коэффициентом пропорциональности λ в силу утверждения 4.

В нашем случае все критические траектории являются либо окружностями, либо точками, поскольку изоэнергетические поверхности компактны. Более того, согласно утверждению 4 вся эта траектория проектируется в одну точку бифуркационного множества отображения момента.

Исходя из этих рассуждений получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Коэффициент пропорциональности $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ постоянен на критических окружностях.*

В нашем случае этот коэффициент равен $2g$, где

$$g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y}. \quad (21)$$

Шестую координату $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$, отвечающую переменной z , легко вычислить. Коэффициент g есть отношение шестых координат косых градиентов. Исходя из третьего уравнения системы (17) на критические точки, на множестве $y \neq 0$ коэффициент g определен корректно.

ТЕОРЕМА 9. На множестве критических точек отображения момента случая Дуллина–Матвеева при $y \neq 0$ верна следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y}, \\ \lambda = \frac{L_z - g}{W}, \\ L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs - 2c)\lambda^2 = A^2, \\ H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), \\ F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gc\lambda + 2g^3. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $g, \lambda \in \mathbb{R}$ – вспомогательные коэффициенты.

Фактически теорема обеспечивает лишь необходимые условия на критические точки, но не достаточные. Для поиска бифуркационной диаграммы следует еще оценить, при каких значениях g и λ система (22) совместна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Подставим выражение для g в третье уравнение (17), получим

$$L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}. \quad (23)$$

Получившееся подставим в выражение для g :

$$(L_z - g) \left(\frac{1 - z^2}{2W} (L_z - 2g) + zL_z \right) = Ax\sqrt{W}. \quad (24)$$

Как легко видеть, четвертое уравнение (17) может быть записано в виде

$$GL_z^2 + L_x^2 + L_y^2 + \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} g(L_z - g) - 2gL_z + \frac{2c}{W} = 0. \quad (25)$$

Опять же из (21) и (23) выразим L_x через переменные z и L_z :

$$L_x = x \frac{L_z - 2g}{2W} + \frac{A\sqrt{W}}{g - L_z}. \quad (26)$$

Распишем выражение через z , L_z и g :

$$L_x^2 + L_y^2 = \frac{A^2W}{(L_z - g)^2} - GL_z^2 + \frac{g}{W} \frac{1 - z^2 + 2zW}{W} L_z - g \frac{1 - z^2}{W^2}. \quad (27)$$

Выражение (27) подставляем в (25) и после некоторых преобразований получаем

$$A^2 + 2g \left((1 - s^2) \left(\frac{L_z - g}{W} \right) - gs \right) \left(\frac{L_z - g}{W} \right)^2 + 2c \left(\frac{L_z - g}{W} \right)^2 = 0. \quad (28)$$

Теперь видно, что

$$\lambda = \frac{L_z - g}{W} \quad (29)$$

является еще одной функцией, постоянной на критических окружностях. При этом λ и g связаны шестым уравнением системы (22). Выражение для H подставим в (27):

$$\begin{aligned} 2H + \frac{2Ax}{\sqrt{W}} - L_z^2 + \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} g(L_z - g) - 2gL_z &= 0, \\ 2H + (1 - s^2) \left(\frac{L_z - g}{W} \right)^2 - 4gs \frac{L_z - g}{W} - 3g^2 &= 0, \\ H = \frac{1}{2} ((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Выражение (27) подставим в интеграл F :

$$F = g \left(2L_z - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} (L_z - g) \right) L_z - \frac{Ax}{\sqrt{W}} L_z + 2A\sqrt{W} L_x. \quad (31)$$

Упростим:

$$\begin{aligned} 2A\sqrt{W} L_x - \frac{Ax}{\sqrt{W}} L_z &= -g \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} (L_z - g)^2 \\ &+ g^2 \frac{1 - z^2 - 2zW}{W^2} (L_z - g) - \frac{2A^2 W}{L_z - g}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} g \left(2L_z - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} (L_z - g) \right) L_z &= g \left(2 - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} \right) (L_z - g)^2 \\ &+ g^2 \left(4 - \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} \right) (L_z - g) + 2g^3, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} F &= g \left(2 - 2 \frac{1 - z^2 + 2zW}{W^2} \right) (L_z - g)^2 + 4g^2 \left(1 - \frac{zW}{W^2} \right) (L_z - g) \\ &+ 2g^3 - \frac{2A^2 W}{L_z - g}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$F = 2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 4g^2 s\lambda + 2g^3 - \frac{2A^2}{\lambda}, \quad (35)$$

или

$$F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 8gc\lambda + 2g^3. \quad (36)$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 4. Множество критических траекторий случая Дуллина–Матвеева, полностью лежащих в гиперплоскости $y = 0$, исчерпывается особыми точками векторного поля $v = \text{sgrad } H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если векторное поле лежит в гиперплоскости $y = 0$, то координата, отвечающая переменной y , равна нулю у этого векторного поля. Приравняем координату $\text{sgrad } H$, отвечающую переменной y , к нулю:

$$(\text{sgrad } H)_5 = -z \frac{\partial H}{\partial L_x} + x \frac{\partial H}{\partial L_z} = -zL_x + x(1 + G(z))L_z = 0.$$

На гиперплоскости $y = 0$ выделим следующие случаи. Пусть $x = 0$, $y = 0$, тогда интеграл площадей имеет вид $I_2 = zL_z = 0$. Получаем $z = \pm 1$, $L_z = 0$, и из условия $(\text{sgrad } H)_5 = 0$ имеем $L_x = 0$. Мы рассматриваем критические точки векторного поля, т.е. те точки, в которых зависимы градиенты функций H , F , I_1 , I_2 . А поэтому матрица, составленная из первых, третьих, четвертых и шестых координат градиентов функций H , F , I_1 , I_2 , должна быть вырождена. Первую, третью и четвертую координаты градиентов функций H , F , I_1 , I_2 можно взять из таблицы (16), шестую координату придется подсчитать при $y = 0$. Поэтому матрица, составленная из первых, третьих, четвертых и шестых координат градиентов функций H , F , I_1 , I_2 , при $y = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W(z)}} & 0 \\ 2A\sqrt{W(z)} & L_y^2 + \frac{2c}{W(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но определитель такой матрицы равен $2A^2z^2$, и он не равен нулю. Значит, при $x = 0$, $y = 0$ критических точек гамильтонова векторного поля Дуллина–Матвеева нет.

В случае $x \neq 0$, $y = 0$ из $(\text{sgrad } H)_5 = 0$ и из равенства нулю интеграла площадей получаем

$$\left(\frac{1}{1-z^2} + G(z) \right) L_z = 0, \quad I_2 = xL_x + zL_z.$$

Значит, $L_z = 0$, $L_x = 0$. Теперь из зависимости строк таблицы (18) получаем

$$L_y = 0, \quad A(x^2 + 2zW(z)) - \frac{2cx}{\sqrt{W(z)}} = 0.$$

Следовательно, при $x \neq 0$, $y = 0$ получаем множество точек, которое в точности совпадает с множеством критических точек из системы (10).

Рис. 3

Теперь для построения бифуркационной диаграммы в случае $c = 0$ необходимо найти условия совместности системы (22). Такие вычисления технически не очень сложные, поэтому приводим лишь результат.

ТЕОРЕМА 10. *Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Дуллина–Матвеева при $c = 0$ имеет следующие компоненты (см. рис. 3):*

- 1) критические точки $(h, f) = (h_1, 0)$, $(h, f) = (h_2, 0)$;
- 2) кривые, задающиеся при $\lambda, g \in \mathbb{R}$ условием

$$\begin{cases} 2g((s^2 - 1)\lambda + gs)\lambda^2 = A^2, \\ H = \frac{1}{2}((s^2 - 1)\lambda^2 + 4gs\lambda + 3g^2), \quad H \geq h_1, \\ F = -2g(s^2 - 1)\lambda^2 + 2g^3. \end{cases}$$

4.6. Количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы при $c = 0$. В этом пункте мы рассмотрим количество критических окружностей в прообразе каждой точки бифуркационной диаграммы.

ТЕОРЕМА 11. *В случае Дуллина–Матвеева при $c = 0$ в прообразе каждой точки кривых бифуркационной диаграммы $\gamma_1, \beta_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ и γ_2 лежит ровно по одной критической окружности. В прообразе общей точки кривых γ_1 и γ_2 лежит одна точка из $M_{1,0}^4$. В прообразе пересечений $\beta_2 \cap \alpha_1, \beta_2 \cap \alpha_2$ и $\beta_1 \cap \alpha_2$ лежат по две критические окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего пункта имеем следующее представление для критических точек отображения момента:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ xL_x + yL_y + zL_z = 0, \\ g = L_z + \frac{Ay\sqrt{W}}{yL_x - xL_y}, \\ \lambda = \frac{L_z - g}{W}, \\ L_y = \frac{y(L_z - 2g)}{2W}, \\ 2g((s^2 - 1)\lambda + gs)\lambda^2 = A^2. \end{cases} \quad (37)$$

Для каждого g и λ подсчитаем количество критических окружностей, удовлетворяющих вышеуказанной системе. Из системы можно вывести

$$L_z = g + \lambda W(z), \quad L_y = \frac{y(\lambda W(z) - g)}{2W(z)}, \quad L_x = \frac{x(\lambda W(z) - g)}{2W(z)} - \frac{A}{\lambda\sqrt{W(z)}}.$$

Следовательно, уравнение совместности системы можно свести к уравнению на сфере Пуассона

$$x = \frac{\lambda}{2A\sqrt{W(z)}} [(1 - z^2)(\lambda W(z) - g) + 2zW(z)(g + \lambda W(z))] =: f(z). \quad (38)$$

Теперь рассмотрим точки пересечения гладкой плоской кривой $x = f(z)$ и окружности $x^2 + z^2 = 1$ и разделим эти точки на три типа:

- 1) точки, в которых кривая $x = f(z)$ “входит” во внутренность круга $x^2 + z^2 \leq 1$;
- 2) точки, в которых кривая “выходит” во внешность круга;
- 3) точки, в которых кривая лишь касается окружности, оставаясь вне или внутри окружности.

Заметим, что точкам типа 3) соответствуют особые точки векторного поля $\text{sgrad } H$. Мы рассматриваем лишь вырожденные точки отображения момента ранга 1, без критических точек ранга 0. Поэтому ни при каких допустимых значениях интегралов g и λ точек типа 3) получиться не может. Следовательно, возможны лишь точки типов 1) и 2), причем в равных количествах. То есть если при каких-то g и λ имеется k точек типа 1), то имеется и k точек типа 2). И при этом в прообразе лежит k критических окружностей.

Сделаем еще одно замечание. Возьмем какую-то критическую точку бифуркационной диаграммы, подсчитаем количество критических окружностей, “висящих” над этой точкой. Пусть их оказалось k штук. Теперь начинаем гладко передвигаться по кривой бифуркационной диаграммы на уровни более высокой энергии. Тем самым, мы гладко меняем как параметры g и λ , так и уравнение кривой $x = f(z)$. При этом количество критических окружностей меняться не должно, в противном случае для кривой $x = f(z)$ возникали бы точки типа 3) пересечения с окружностью $x^2 + z^2 = 1$. Итак, на каждой гладкой кривой бифуркационной диаграммы количество критических окружностей строго постоянно, причем равно количеству окружностей для критических значений с высокой энергией.

Рассмотрим точку на кривой α_1 и устремим ее на высокий уровень энергии, что будет характеризоваться условиями $g \rightarrow +0$, $\lambda \rightarrow +\infty$, $g\lambda^3 = O(1)$. Уравнение кривой $x = f(z)$ примет вид

$$x = \frac{\lambda^2 \sqrt{W(z)}}{2A} (1 - z^2 + 2zW(z)) + o(1). \quad (39)$$

Пересечений с окружностью $x^2 + z^2 = 1$ ровно два: одно – точка типа 1), другое – типа 2). Таким образом, в прообразе каждой внутренней точки кривой α_1 лежит одна критическая окружность.

Теперь рассмотрим точку на кривой α_2 . Устремим ее на бесконечность. Это будет характеризоваться условиями

$$g \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow +0, \quad g\lambda = \frac{A}{\sqrt{2s}} + o(1).$$

В таком случае уравнение кривой $x = f(z)$ примет вид

$$x = \frac{2zW(z) + z^2 - 1}{2\sqrt{2sW(z)}} + o(1). \quad (40)$$

Точек пересечения с окружностью $x^2 + z^2 = 1$ опять только две. Таким образом, в прообразе каждой внутренней точки кривой α_2 лежит тоже лишь одна окружность.

Для кривой γ_2 имеем

$$g \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow -0, \quad g\lambda = -\frac{A}{\sqrt{2s}} + o(1).$$

Уравнение кривой $x = f(z)$ имеет вид

$$x = -\frac{2zW(z) + z^2 - 1}{2\sqrt{2sW(z)}} + o(1). \quad (41)$$

Точек пересечения с окружностью опять только две. В прообразе каждой внутренней точки кривой γ_2 лежит одна окружность.

Поскольку наша диаграмма по своей структуре симметрична относительно прямой $f = 0$, значит, в прообразе точек кривых β_1 , β_2 и γ_1 тоже лежит ровно по одной критической окружности.

Теорема 11 доказана.

4.7. Индексы некоторых критических точек дополнительного интеграла. В этом пункте мы рассмотрим только одну критическую окружность и ее индекс (см. определение 7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. При $c = 0$ одна окружность в прообразе кривой α_2 имеет индекс 1.

При $c = 0$ рассмотрим критическую точку точку ξ , имеющую координаты $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ на сфере Пуассона. Согласно теореме 9 имеем

$$\begin{cases} x = 0, & y = 1, & z = 0, \\ L_y = 0, \\ L_x L_z = -2A\sqrt{s}, \\ L_z^4 = \frac{8A^2 s^3}{2s^2 - 1}. \end{cases} \quad (42)$$

Выбираем точку, в которой $L_x < 0$, $L_z > 0$. Тогда, подсчитав параметры $g = L_z/2 > 0$ и $\lambda = L_z/(2s) > 0$ для точки ξ , легко понять, что эта точка лежит на кривой α_2 , причем $F(\xi) > 0$.

Таблица градиентов интегралов системы в точке ξ имеет вид

$H :$	L_x	0	$1 - \frac{1}{4s^2}$	$-\frac{A}{\sqrt{s}}$	0	$\frac{2s^2 - 1}{4s^3} L_z^2$
$F :$	$-2A\sqrt{s}$	0	$L_x^2 + \frac{3}{4s^2} L_z^2$	$-\frac{AL_z}{\sqrt{s}}$	0	$\frac{2s^2 - 1}{2s^3} L_z^3 + \frac{AL_x}{\sqrt{s}}$
$I_1 :$	0	0	0	0	1	0
$I_2 :$	0	1	0	L_x	0	L_z

(43)

Для упрощения подсчета индекса интеграла F на изоэнергетической поверхности $Q_h^3(\xi)$ в точке ξ воспользуемся леммой 5.1 из [3; т. 2]. Очевидна линейная комбинация градиентов $\text{grad } F - L_z \text{grad } H = 0$. Поэтому квадратичная форма, определяемая гессианом функции $\tilde{F} = F|_{Q_h^3}$ в точке ξ , является ограничением формы $\mathbf{G} = d^2 F - L_z d^2 H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$, где $d^2 H$ и $d^2 F$ – гессианы интегралов H и F как функций в шестимерном пространстве. После

несложных подсчетов получаем

$$\begin{aligned}
 d^2 H|_{\xi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4s^2+1}{4s^2} & 0 & 0 & \frac{2s^2-1}{2s^3}L_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2s^2-1}{2s^3}L_z & \frac{A}{2s\sqrt{s}} & 0 & \frac{3-5s^2}{4s^4}L_z^2 \end{pmatrix}, \\
 d^2 F|_{\xi} &= \begin{pmatrix} 2L_z & 0 & \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{s}} \\ 0 & 2L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & \frac{3}{2s^2} & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{3(2s^2-1)}{2s^3}L_z^2 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & \frac{AL_z}{2s\sqrt{s}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{3(2s^2-1)}{2s^3}L_z^2 & 0 & 0 & \frac{11-8s^2}{8s^4}L_z^3 \end{pmatrix}, \quad (44) \\
 \mathbf{G}|_{\xi} &= \begin{pmatrix} L_z & 0 & \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{s}} \\ 0 & L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4A\sqrt{s}}{L_z} & 0 & \frac{5-4s^2}{4s^2} & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{2s^2-1}{s^3}L_z^2 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{s}} & 0 & \frac{2s^2-1}{s^3}L_z^2 & 0 & 0 & \frac{5-8s^2}{8s^4}L_z^3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим ортогональное дополнение относительно стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^6$ к градиентам H , I_1 , I_2 из таблицы (5). Выберем в этом пространстве базисные векторы

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \left(\frac{A}{L_z\sqrt{s}}, -L_z, 0, 0, 0, 1 \right), \\
 e_2 &= \left(-\frac{L_z}{2s}, \frac{2A\sqrt{s}}{L_z}, 0, 1, 0, 0 \right), \\
 e_3 &= \left(\frac{4s^2+1}{8As^2\sqrt{s}}L_z^2, 0, 1, 0, 0, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Тогда ограничение формы $\mathbf{G} = d^2F - L_z d^2H$ на касательное пространство $T_\xi Q_h^3$ можно представить в координатном виде как

$$\mathbf{G}_{Q_h^3} = \begin{pmatrix} \frac{4s^4 - s^2 + 1}{4s^4} L_z^3 & -\frac{A(2s^2 + 1)L_z}{s\sqrt{s}} & \frac{8s^2 - 1}{4s^2} L_z^3 \\ -\frac{A(2s^2 + 1)L_z}{s\sqrt{s}} & \frac{4s^2 - 1}{4s^2} L_z^3 & -\frac{3L_z^4}{16AS^3\sqrt{s}} \\ \frac{8s^2 - 1}{4s^2} L_z^3 & -\frac{3L_z^4}{16AS^3\sqrt{s}} & \frac{-64s^4 + 52s^2 - 1}{64A^2s^5} L_z^5 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Итак, матрица $\mathbf{G}_{Q_h^3}$ имеет одно положительное, одно отрицательное и одно нулевое собственное значение.

4.8. Экспериментальные данные. Для поиска индексов критических окружностей полезна следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Любая критическая окружность случая Дуллина–Матвеева при $c = 0$ проходит через гиперплоскость $y = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Движение вдоль критической траектории периодически, поэтому координаты точки на критической окружности повторяются циклически. Следовательно, вдоль критической окружности каждая координата скорости должна обращаться в нуль в некоторых точках. Поскольку

$$(\text{sgrad } H)_3 = -\frac{Ay}{\sqrt{W(z)}},$$

значит, вдоль любой критической траектории есть точка, где $y = 0$.

Подсчет индексов критических окружностей и доказательство их невырожденности оказались технически сложными. С помощью компьютерной программы удалось доказать следующее экспериментальное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7 (“экспериментальное”). *При $c = 0$ все критические окружности на кривых бифуркационной диаграммы невырождены. Индекс окружностей, лежащих в прообразе кривых α_1, γ_1 , равен 2, в прообразе кривых α_2, β_2 – равен 1, в прообразе кривых γ_2, β_1 – равен 0.*

Для доказательства утверждения был развит алгоритм подсчета индексов критических окружностей. При движении по кривым бифуркационной диаграммы с маленьким шагом (подробнее смотри ниже) были вычислены индексы в серии порядка 3000 точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7. Сначала представим некоторое теоретическое обоснование алгоритма, а в конце доказательства укажем сам алгоритм.

Как видно из таблицы градиентов (18), на множестве критических точек из условия $y = 0$ следует $L_y = 0$. Рассмотрим случай $x \neq 0$.

На множестве $y = 0$, $L_y = 0$ гессианы интегралов H , F , I_1 , I_2 принимают соответственно вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+G & 0 & 0 & G'L_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'L_z & \frac{A}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} 2L_z & 0 & 2L_x & 0 & 0 & \frac{A}{\sqrt{W}} \\ 0 & 2L_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2L_x & 0 & 6GL_z & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & -\frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & 0 & \frac{AL_z}{2W\sqrt{W}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{W}} & 0 & \frac{Ax}{2W\sqrt{W}} & \frac{AL_z}{2W\sqrt{W}} & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$d^2I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d^2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где выражения $*$ громоздки и могут быть выписаны при необходимости. На множестве критических точек получаем следующую зависимость градиентов интегралов:

$$\text{sgrad } F = \lambda_1 \text{sgrad } H + \lambda_2 \text{sgrad } I_1 + \lambda_3 \text{sgrad } I_2, \quad (46)$$

где коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 можно найти из первых трех столбцов таблицы градиентов (18). А именно

$$\begin{pmatrix} L_x & 0 & x \\ (1+G)L_z & 0 & z \\ -\frac{A}{\sqrt{W}} & x & L_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_xL_z + 2A\sqrt{W} \\ L_x^2 + 3GL_z^2 - \frac{Ax}{\sqrt{W}} \\ -\frac{AL_z}{\sqrt{W}} \end{pmatrix}.$$

По правилу Крамера получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= x^2 \left(\frac{1}{x^2} + G \right) L_z, \\ \Delta_1 &= x^2 \left(3 \left(\frac{z^2}{x^2} + G \right) L_z^2 - \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{2Az\sqrt{W}}{x} \right) \right), \\ \Delta_2 &= -\frac{z^2}{x^2} \left(3 - \frac{1}{x^2} - G \right) L_z^4 - \left(-\frac{Az^2}{x\sqrt{W}} - 2G \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} + \frac{Az\sqrt{W}}{x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Ax}{\sqrt{W}} - \frac{2Az\sqrt{W}}{x} \right) \right) L_z^2 - \frac{A}{\sqrt{W}} \left(\frac{Ax^2}{\sqrt{W}} + 2Az\sqrt{W} \right), \\ \Delta_3 &= -z \left(3 - \frac{1}{x^2} - G \right) L_z^3 - x \left(\frac{Az}{\sqrt{W}} - 2A(1+G)\sqrt{W} \right) L_z, \\ \lambda_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.\end{aligned}$$

Теперь для множества критических точек строим квадратичную форму, определяемую вторым дифференциалом интеграла F как функции на Q_h^3 , по правилу

$$d^2(F|_{Q_h^3}) = (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2)|_{Q_h^3}.$$

Эта квадратичная форма на множестве критических точек всегда вырождена. И для нас интересны точки, в которых ранг этой формы равен 2.

Как видно из таблицы градиентов (5), при $y = 0$, $L_y = 0$ векторы e_2 и e_5 всегда лежат в TQ_h^3 . Осталось найти еще один вектор из TQ_h^3 , ортогональный e_2 , e_5 и градиентам из таблицы (5). Допустим,

$$\begin{aligned}e &= \left(x \left(\frac{z}{2} G'(z) - \frac{1}{x^2} (1 + G(z)) \right), 0, \right. \\ &\quad \left. x^2 \left(\frac{z}{x^4} + \frac{1}{2} G'(z) \right) L_z^2 + x \left(\frac{Ax^2}{2W(z)\sqrt{W(z)}} + \frac{Az}{\sqrt{W(z)}} \right), \right. \\ &\quad \left. -zx \left(\frac{1}{x^2} + G(z) \right), 0, -x^2 \left(\frac{1}{x^2} + G(z) \right) \right)^T.\end{aligned}$$

Вычислим

$$d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2$$

как квадратичную форму на векторах e_2 , e_5 , e . Ограничение $d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2$ на $\langle e_2, e_5 \rangle$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2L_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_z - \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель последней матрицы равен $(\lambda_1 - 2L_z)\lambda_2 - \lambda_3^2$. Если его приравнять к нулю, получим следующее уравнение:

$$(\Delta_1 - 2L_z\Delta)\Delta_2 - \Delta_3^2 = 0. \quad (47)$$

И если расписать последнее равенство, то можно получить довольно громоздкое выражение

$$b_1\xi^2 + b_2\xi + b_3 = 0, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \left(3 - \frac{1}{x^2} - G\right) \left(-\frac{3z^2}{x^2} - \frac{2G}{x^2}(x^2 + zW) + \frac{1}{x^2}(x^2 - 2zW) \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{x^4}(x^2 + 2zW) + \frac{4zW}{x^2}(1 + G)\right), \\ b_2 &= (x^2 + 2zW) \left(3 - \frac{1}{x^2} - G - \frac{z^2}{x^2} - \frac{2G}{x^2}(x^2 + zW) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^4}(x^2 - 2zW) - (z - 2W(1 + G))^2\right), \\ b_3 &= (x^2 + 2zW)^2, \\ \xi &= \frac{AxL_z^2}{\sqrt{W}}. \end{aligned}$$

Теперь составим уравнения критических точек при $y = L_y = 0$, $x \neq 0$. Косые градиенты H и F имеют только по две отличные от нуля координаты, а именно

$$\begin{aligned} (\text{sgrad } H)_2 &= \left(-\frac{z}{x}G + \frac{x}{2}G'\right)L_z^2 + \left(\frac{Az}{\sqrt{W}} + \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}}\right), \\ (\text{sgrad } H)_5 &= x\left(\frac{1}{x^2} + G\right)L_z, \\ (\text{sgrad } F)_2 &= \left(\frac{2z}{x} - \frac{z^3}{x^3} - \frac{3z}{x}G + xG'\right)L_z^3 - \left(2A\sqrt{W} - \frac{Az}{\sqrt{W}} - \frac{Ax^2}{2W\sqrt{W}}\right)L_z, \\ (\text{sgrad } F)_5 &= 3x\left(\frac{z^2}{x^2} + G\right)L_z^2 - \left(2Az\sqrt{W} + \frac{Ax^2}{\sqrt{W}}\right). \end{aligned}$$

После этого уравнение на зависимость косых градиентов примет вид

$$a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3 = 0, \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -2W\left(\frac{z}{x^4} + \frac{G'}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{x^2} - G\right), \\ a_2 &= (2zW + x^2)\left(\frac{2zW}{x^2}G - WG' - 3 + 2\left(\frac{1}{x^2} + G\right)\right) + 4W^2\left(\frac{1}{x^2} + G\right), \\ a_3 &= -(x^2 + 2zW)^2. \end{aligned}$$

Как видно, уравнения (48) и (49) эквивалентны. К тому же

$$(\langle e_2, e_5 \rangle)^T (d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2) (\langle e \rangle) = 0.$$

Отсюда получаем

$$d^2(F|_{Q_h^3}) = \begin{pmatrix} 2L_z - \lambda_1 & -\lambda_3 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где

$$a_{33} = e^T(d^2F - \lambda_1 d^2H - \lambda_2 I_1 - \lambda_3 I_2)e,$$

а главный минор, натянутый на первые два столбца и две строки, равен нулю.

Теперь укажем алгоритм, при помощи которого можно проверить экспериментальное утверждение.

- 1) Выбираем $N \in \mathbb{N}$.
- 2) Для каждого $z_m = 2m/N - 1$, где $m = 1, 2, \dots, N - 1$, рассматриваем

$$x_m = -\sqrt{1 - z_m^2} \quad \text{либо} \quad x_m = \sqrt{1 - z_m^2}.$$

- 3) Для выбранных z_m и x_m находим L_{z_m} из формулы (49).
- 4) Для получившихся z_m , x_m и L_{z_m} численно находим количество положительных и отрицательных собственных значений матрицы (50).

Описанный алгоритм проверен при $A = 1$, $s = 2$, $c = 0$, $N = 1000$. Программа написана на языке C++.

Рис. 4

Теперь на основании экспериментального утверждения можно провести грубую топологическую классификацию случая Дуллина–Матвеева. Пусть h_c – уровень энергии точки пересечения кривых α_2 и β_2 , h_k – уровень энергии общей точки кривых α_1 и α_2 (β_1 и β_2). Тогда понятно, что при движении вверх от уровня энергии h_1 грубый топологический тип изоэнергетической поверхности Q_h^3 может меняться лишь на уровнях h_2 , h_k и h_c (см. рис. 4). Следующую теорему тоже можно рассматривать как “экспериментальную”, потому что ее доказательство основывается на компьютерном эксперименте.

Рис. 5

ТЕОРЕМА 12 (“экспериментальное” утверждение). *Грубые молекулы изоэнергетических поверхностей Q_h^3 случая Дуллина–Матвеева имеют следующие топологические типы (см. рис. 5):*

тип 1 при $h \in (h_1, h_k) \setminus \{h_2\}$,

тип 2 при $h \in (h_c, \infty +)$,

тип 3 при $h \in (h_k, h_c) \setminus \{h_2\}$,

где h_k – уровень энергии общей точки кривых α_1 и α_2 (β_1 и β_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку кривым $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \beta_2$ соответствует индекс 0 или 2, бифуркации, отвечающие этим кривым, выражаются атомом A . Критические окружности, соответствующие кривым α_2, β_1 , имеют индекс 1. Таким кривым будет соответствовать либо атом B , либо атом A^* . Атом A^* получиться не может, поскольку при переходе через этот атом количество торов в прообразе не меняется. Теперь тип грубой молекулы определяется однозначно.

Такого набора грубых изоэнергетических поверхностей, тем более атома D_2 , нет ни у одного из исследованных случаев. Атом D_2 встречается в молекуле изоэнергетической поверхности $Q_{h_c}^3$, соответствующей точке пересечения кривых β_2, α_2 . Грубая молекула в этом случае имеет тип 4 (см. рис. 5).

4.9. Программа дальнейших исследований. Работа в направлении исследования случая Дуллина–Матвеева будет продолжена. Во-первых, следует вычислить грубую молекулу изоэнергетической поверхности $Q_{h_c}^3$. Также следует проверить невырожденность всех или почти всех критических окружностей отображения момента аналитическим способом. Только после аналитического доказательства “экспериментального” утверждения факты из п. 4.8 можно будет считать математически верными, и вопрос о классе грубой лиувиллевой эквивалентности системы Дуллина–Матвеева при $c = 0$ можно будет считать решенным.

Все результаты, полученные в настоящей работе, можно обобщить на случай $c \neq 0$. Этому препятствует лишь некоторая техническая сложность подсчетов. Финалом исследования случая можно считать работу по нахождению

меток Фоменко–Циппанга лиувиллева слоения и меченых молекул интегрируемого случая.

В заключение можно сказать кое-что о лиувиллевой эквивалентности системы Дуллина–Матвеева. Из теоремы 12 можно извлечь, что данный случай является новым и не сводится заменой переменных к уже известным интегрируемым динамическим системам. Такого набора грубых молекул изоэнергетических поверхностей, тем более атома D_2 , нет ни у одного из исследованных случаев. Это и свидетельствует о том, что данная динамическая система является новой.

Автор выражает глубокую благодарность А. Т. Фоменко, А. В. Болисинову, Е. А. Кудрявцевой, П. Морозову и А. А. Ошемкову за неоценимые советы и комментарии к данной работе.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко, “Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *УМН*, **50**:3 (1995), 3–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. V. Kozlov, A. T. Fomenko, “The Maupertuis principle and geodesic flows on the sphere arising from integrable cases in the dynamics of a rigid body”, *Russian Math. Surveys*, **50**:3 (1995), 473–501.
- [2] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45**:2 (1990), 49–77; англ. пер.: A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small”, *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 59–94.
- [3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [4] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988.
- [5] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 113–138; англ. пер.: P. V. Morozov, “The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case”, *Sb. Math.*, **193**:10 (2002), 1507–1533.
- [6] П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа”, *Матем. сб.*, **195**:3 (2004), 69–114; англ. пер.: P. V. Morozov, “Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff’s equations”, *Sb. Math.*, **195**:3 (2004), 369–412.
- [7] Г. Хагигатдуст, *Топология слоений Лиувилля для новых интегрируемых случаев на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$* , Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, М., 2004.
- [8] H. R. Dullin, V. S. Matveev, “A new integrable system on the sphere”, *Math. Res. Lett.*, **11**:5–6 (2004), 715–722.
- [9] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, М., Факториал; Ижевск, Изд-во УГУ, 1995.
- [10] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, РХД, Ижевск, 2001.
- [11] A. Weinstein, “Symplectic geometry”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **5**:1 (1981), 1–13.

- [12] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:2 (1988), 378–407; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “On typical topological properties of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:2 (1989), 385–412.
- [13] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике”, *Докл. АН СССР*, **294**:2 (1987), 283–287; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:3 (1987), 529–534.
- [14] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [15] А. В. Браилов, А. Т. Фоменко, “Топология интегральных подмногообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **134**(176):3(11) (1987), 375–385; англ. пер.: A. V. Brailov, A. T. Fomenko, “The topology of integral submanifolds of completely integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 373–383.
- [16] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий”, *УМН*, **43**:1 (1988), 5–22; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **43**:1 (1988), 3–24.
- [17] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами”, *Матем. заметки*, **43**:5 (1988), 663–671; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Morse-type theory for integrable Hamiltonian systems with tame integrals”, *Math. Notes*, **43**:5 (1988), 382–386.
- [18] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, В. В. Шарко, “Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **135**(177):3 (1988), 325–345; англ. пер.: S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Round Morse functions and isoenergy surfaces of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 319–336.
- [19] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1 (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.
- [20] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.
- [21] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функци. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [22] А. В. Цыганов, “Об одном семействе интегрируемых систем на сфере, обладающих кубическим интегралом движения”, *Докл. РАН*, **402**:4 (2005), 457–459; англ. пер.: A. V. Tsiganov, “On a family of integrable systems on a sphere possessing a cubic integral of motion”, *Soviet Math. Dokl.*, **71**:3 (2005), 413–415.

- [23] А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.
- [24] А. Т. Фоменко, “Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:4 (1991), 23–35; англ. пер.: А. Т. Fomenko, “A topological invariant which roughly classifies integrable strictly nondegenerate Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:4 (1991), 262–272.

А. Ю. Москвин (A. Yu. Moskvin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: moskvin-ay@mail.ru

Поступила в редакцию

19.06.2007