Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мисяков, О строении радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 109–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:09:32

УДК 512.541

В. М. Мисяков

О строении радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы

Описано строение радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, радикал Джекобсона.

Пирс в работе [1] сформулировал задачу описания элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы в терминах их действия на группе. В связи с этим в дальнейшем было найдено строение радикала Джекобсона колец эндоморфизмов вполне разложимой p -группы и вполне разложимой группы без кручения (см. [2; гл. 4, § 20, теорема 20.10] и [2; гл. 4, § 22, теорема 22.11] соответственно). В работе [2; гл. 4, проблема 19] была поставлена общая задача описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы. В настоящей статье дается решение этой задачи.

Все группы, рассматриваемые в работе, являются абелевыми. Введем следующие обозначения: $E(G)$, $J(E(G))$ – кольцо эндоморфизмов группы G и радикал Джекобсона этого кольца соответственно; $T_p(G)$ – p -компонента периодической части группы G ; $\text{Hom}(A, B)$ – группа гомоморфизмов из группы A в группу B ; $r(A)$ – ранг группы A ; $h_p(a)$ – p -высота элемента a ; $A[n]$ – подмножество $\{a \in A \mid na = 0\}$ группы A ; $o(A)$ – порядок группы A ; $\bigoplus_{i \in I} A_i$, $\prod_{i \in I} A_i$ – прямая сумма и прямое произведение групп A_i , $i \in I$, соответственно. Все понятия, которые не поясняются, являются стандартными и можно найти их, например, в [2]–[5].

Напомним принцип идеализации, который будем использовать ниже (см. [5; часть II, гл. 7, утверждение 7.11]). Пусть R и S – ассоциативные кольца с единицей, M – R - S -бимодуль. Идеализацией бимодуля M называется кольцо, состоящее из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad r \in R, \quad s \in S, \quad m \in M,$$

с обычными операциями сложения и умножения матриц. Обозначим построенное кольцо символом $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Будем отождествлять естественным образом кольца R и S с $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ соответственно, произведение $R \times S$ – с $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ и бимодуль M – с $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, мы также можем получить идеализацию бимодуля в следующей ситуации. Пусть G – прямая сумма двух

групп, $G = B \oplus A$, причем B – вполне характеристическое слагаемое, т.е. $\text{Hom}(B, A) = 0$. Группа $\text{Hom}(A, B)$ стандартным способом превращается в $E(B)$ - $E(A)$ -бимодуль. Следовательно, можно записать идеализацию этого бимодуля в виде:

$$\begin{pmatrix} E(B) & \text{Hom}(A, B) \\ 0 & E(A) \end{pmatrix}.$$

Поскольку известно, что кольцо $E(G)$ естественным образом отождествляется с данным кольцом матриц (см. [4; гл. XV, § 106, теорема 106.1]), то кольцо эндоморфизмов $E(G)$ можно считать идеализацией $E(B)$ - $E(A)$ -бимодуля $\text{Hom}(A, B)$.

Напомним, что смешанная группа называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой циклических p -групп и групп без кручения ранга один.

Пусть A – некоторая p -группа. Тогда с ней можно связать следующие два идеала ее кольца эндоморфизмов:

$$\begin{aligned} H(A) &= \{\delta \in E(A) \mid x \in A[p], h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\delta x)\}, \\ F(A) &= \{\delta \in E(A) \mid \delta p^k A[p] = 0 \text{ для некоторого } k \geq 0\}. \end{aligned}$$

Пусть B – группа без кручения, D – делимая часть группы B и P – множество простых чисел. Обозначим через

$$H'(B) = \left\{ \varphi \in E(B) \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \text{ если } x \in D; \\ h_p(\varphi x) > h_p(x), \text{ если } x \in B \setminus D \quad \forall p \in P \end{array} \right. \right\}$$

идеал кольца $E(B)$.

Пусть теперь C – некоторая вполне разложимая группа без кручения и $C = \bigoplus_{t \in \Omega(C)} C_t$ – ее каноническое разложение, где $\Omega(C)$ есть множество типов всех прямых слагаемых группы C ранга один, C_t – однородные компоненты группы C . Обозначим через $F'(C)$ левый идеал кольца $E(C)$, состоящий из эндоморфизмов $\alpha \in E(C)$ таких, что $r(\alpha(C_t)) < \infty$ для всех $t \in \Omega(C)$ и, кроме того, если группа C_t не почти делима, то $\alpha(C_t) = 0$. Напомним, что группа без кручения G называется *почти делимой*, если $1 \leq |\Pi(G)| < \aleph_0$, где $\Pi(G) = \{p \in P \mid pG \neq G\}$.

Обозначим через $N(G)$ сумму всех идеалов кольца $E(G)$, состоящих из локально нильпотентных эндоморфизмов группы G . Эндоморфизм α группы G называется *локально нильпотентным*, если для всякого элемента $a \in G$ существует натуральное число n , зависящее от a , такое, что $\alpha^n(a) = 0$.

Докажем предварительно следующее простое утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть A – группа без кручения ранга один, B – циклическая группа порядка p^n , где p – простое число, тогда

$$\text{Hom}(A, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } pA = A, \\ Z(p^n), & \text{если } pA \neq A. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $pA = A$. Если $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$, $a \in A$, то существует $a_1 \in A$ такой, что $pa_1 = a$. Для элемента $a_1 \in A$ существует $a_2 \in A$ такой, что $pa_2 = a_1$. Продолжая этот процесс, получим, что для элемента

$a_{n-1} \in A$ существует $a_n \in A$ такой, что $pa_n = a_{n-1}$. То есть $a = p^n a_n$. Имеем $\alpha a = \alpha(p^n a_n) = p^n(\alpha a_n) = 0$, из чего следует, что $\alpha = 0$.

Пусть $pA \neq A$. Тогда $A/p^n A \cong Z(p^n)$. Точная последовательность

$$0 \longrightarrow p^n A \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/p^n A \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A/p^n A, B) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(p^n A, B). \quad (1)$$

Для $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$ получаем, что $i^*(\alpha) = \alpha i = \alpha|_{p^n A}$. Если $a \in p^n A$, то существует $a_1 \in A$ такой, что $a = p^n a_1$. Тогда $\alpha|_{p^n A}(a) = p^n(\alpha a_1) = 0$ и, следовательно, $i^* = 0$. Так как последовательность (1) точна, то $\text{im } \pi^* = \ker i^* = 0$ и π^* – эпиморфизм. Таким образом, $\text{Hom}(A/p^n A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$. С другой стороны, $\text{Hom}(A/p^n A, B) \cong \text{Hom}(Z(p^n), Z(p^n)) \cong Z(p^n)$. Последний изоморфизм следует из [2; гл. 1, § 2, упражнение 14 б)].

Приведем основной результат настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ – смешанная вполне разложимая группа, где $G_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая периодическая группа, $G_2 = \bigoplus_{j \in J} B_j$ – вполне разложимая группа без кручения. Тогда

$$J(E(G)) = (J(E(G_1)) \times J(E(G_2))) \oplus \text{Hom}(G_2, G_1),$$

где $J(E(G_1)) = \prod_{p \in P} (H(T_p(G_1)) \cap F(T_p(G_1)))$; $J(E(G_2)) = (H'(G_2) \cap F'(G_2)) + N(G_2)$; группа $\text{Hom}(G_2, G_1)$ изоморфна подгруппе группы $\prod_{i \in I} A_i^{J_i}$, $J_i \subseteq J$, причем $B_\alpha \neq p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J_i$ и $B_\alpha = p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J \setminus J_i$, $o(A_i) = p_i^{k_i}$, $i \in I$, $p_i \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G = G_1 \oplus G_2$ – смешанная вполне разложимая группа, где $G_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая периодическая группа, а $G_2 = \bigoplus_{j \in J} B_j$ – вполне разложимая группа без кручения, то $\text{Hom}(G_1, G_2) = 0$ (см. [3; гл. VIII, § 43, свойство А)). Тогда $\text{Hom}(G_2, G_1)$ есть $E(G_1)$ - $E(G_2)$ -бимодуль и поэтому кольцо

$$E(G) = \begin{pmatrix} E(G_1) & \text{Hom}(G_2, G_1) \\ 0 & E(G_2) \end{pmatrix}$$

является идеализацией этого бимодуля. Как хорошо известно (см. [2; гл. 4, § 21, упражнение 1]), радикал Джекобсона кольца $E(G)$ можно записать в виде

$$J(E(G)) = \begin{pmatrix} J(E(G_1)) & \text{Hom}(G_2, G_1) \\ 0 & J(E(G_2)) \end{pmatrix}.$$

Отождествляя произведение $J(E(G_1)) \times J(E(G_2))$ с

$$\begin{pmatrix} J(E(G_1)) & 0 \\ 0 & J(E(G_2)) \end{pmatrix},$$

а бимодуль $\text{Hom}(G_2, G_1)$ с

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Hom}(G_2, G_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим, что $J(E(G)) = (J(E(G_1)) \times J(E(G_2))) \oplus \text{Hom}(G_2, G_1)$.

Поскольку G_1 – периодическая группа, то $G_1 = \bigoplus_{p \in P} T_p(G_1)$ и, следовательно, $E(G_1) = \prod_{p \in P} E(T_p(G_1))$ (см. [4; гл. XV, § 106, упражнение 4(a)]). Как вытекает из [6; гл. 4, § 15, упражнение 4], $J(E(G_1)) = \prod_{p \in P} J(E(T_p(G_1)))$. Так как $T_p(G_1)$ – прямая сумма циклических p -групп, то $J(E(G_1)) = \prod_{p \in P} (H(T_p(G_1)) \cap F(T_p(G_1)))$ (см. [2; гл. 4, § 20, теорема 20.10]). Так как группа G_2 вполне разложима, то $J(E(G_2)) = (H'(G_2) \cap F'(G_2)) + N(G_2)$ (см. [2; гл. 4, § 22, теорема 22.11]).

Так как $G_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $G_2 = \bigoplus_{j \in J} B_j$, то

$$\text{Hom}(G_2, G_1) = \text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} B_j, \bigoplus_{i \in I} A_i\right).$$

Как хорошо известно, точная последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\gamma} \prod_{i \in I} A_i$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} B_j, \bigoplus_{i \in I} A_i\right) \xrightarrow{\gamma^*} \text{Hom}\left(\bigoplus_{j \in J} B_j, \prod_{i \in I} A_i\right).$$

Учитывая, что $\text{Hom}(\bigoplus_{j \in J} B_j, \prod_{i \in I} A_i) \cong \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} \text{Hom}(B_j, A_i)$, и лемму 1, получим существование подмножества J_i (возможно, пустого) во множестве J такого, что $\prod_{j \in J} \text{Hom}(B_j, A_i) \cong A_i^{J_i}$, где $B_\alpha \neq p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J_i$ и $B_\alpha = p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J \setminus J_i$, $o(A_i) = p_i^{k_i}$, $i \in I$, $p_i \in P$. Следовательно, группа $\text{Hom}(G_2, G_1)$ изоморфна подгруппе группы $\prod_{i \in I} A_i^{J_i}$.

Список литературы

- [1] R. S. Pierce, “Homomorphisms of primary Abelian groups”, *Topics in Abelian groups* (New Mexico State Univ., 1962), Scott, Foresman, Chicago, IL, 1963, 215–310.
- [2] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов*, ТГУ, Томск, 2002; англ. пер.: P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev, *Endomorphism rings of abelian groups*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [3] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974; пер. с англ.: L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, vol. I, Pure and Applied Mathematics, **36**, Academic Press, New York–London, 1970.
- [4] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 2, Мир, М., 1977; пер. с англ.: L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, vol. II, Pure and Applied Mathematics, **36**, Academic Press, New York–London, 1973.
- [5] К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т. 1, Мир, М., 1977; англ. пер.: C. Faith, *Algebra: rings, modules and categories*, vol. I, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
- [6] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Grad. Texts in Math., **13**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1973.