Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Условия обратимости нелинейного разностного оператора $(\mathcal{R}x)(n) = H(x(n), x(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, в пространстве ограниченных числовых последовательностей, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 107–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:31:22

УДК 517.988.6

В. Е. Слюсарчук

Условия обратимости нелинейного разностного оператора $(\mathcal{R}x)(n) = H(x(n), x(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, в пространстве ограниченных числовых последовательностей

Получены необходимые и достаточные условия обратимости нелинейного разностного оператора

$$(\mathcal{R}x)(n) = H(x(n), x(n+1)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

в пространстве ограниченных двусторонних числовых последовательностей. Здесь $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: обратимость нелинейного оператора, телеграфные уравнения.

§ 1. Постановка основной задачи

Обозначим через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ банахово пространство всех отображений $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, множество значений каждого из которых ограничено, с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|$. Рассмотрим отображение $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$, определенное равенством

$$(\mathcal{R}x)(n) = H(x(n), x(n+1)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $x \in l_\infty$.

Цель настоящей статьи – найти условия существования ограниченных решений разностного уравнения

$$H(x(n), x(n+1)) = z(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где $z \in l_\infty$, и условия, при выполнении которых отображение $\mathcal{R}$ имеет обратное непрерывное отображение.

Очевидно, что в классе нелинейных отображений, действующих в l_∞ , отображение $\mathcal{R}$ наиболее простое. Однако решение задачи об обратимости этого отображения вследствие его нелинейности не является тривиальным. Известные методы исследования обратимости линейных и слабо нелинейных отображений (см., например, [1]–[7]) не применимы к $\mathcal{R}$. Для рассматриваемого отображения и аналогичных нелинейных отображений, действующих в других функциональных пространствах, необходимо разрабатывать новые методы исследования. Один из таких методов предложен в настоящей статье. Он базируется на теории s -непрерывных операторов, теореме о неявной недифференцируемой функции и использует инвариантные интервалы этой функции. Заметим, что необходимые и достаточные условия обратимости (в пространстве l_∞) и липшицевой обратимости (в пространствах $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$) оператора $\mathcal{R}$ в случае $H(x, y) = y - f(x)$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, получены автором в [8]–[10] (случаи почти периодических и периодических последовательностей рассмотрены соответственно в [11] и [12]).

§ 2. Локально сходящиеся последовательности и c -непрерывные отображения

Последовательность элементов $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $x \in l_\infty$ при $k \rightarrow \infty$, если эта последовательность ограничена и для каждого $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|n| \leq p} |x_k(n) - x(n)| = 0.$$

Для такой последовательности будем использовать следующее обозначение:

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отображение $\mathcal{F}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ назовем c -непрерывным, если для произвольных $x \in l_\infty$, $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x$, $k \rightarrow \infty$, выполняется соотношение $\mathcal{F}x_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} \mathcal{F}x$, $k \rightarrow \infty$.

Понятие c -непрерывного отображения было введено (на языке “ ε , δ ”) Мухамадиевым в [13] при исследовании дифференциальных операторов. Его изучение было продолжено в [14]–[21] и других работах. Рассмотренное выше определение c -непрерывного отображения предложено автором (см., например, [22], [23]).

Примером c -непрерывного отображения является отображение $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$, определенное равенством (1). Очевидно, что это отображение также является непрерывным и ограниченным.

Важными для дальнейшего являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (см. [8]). *Для каждой ограниченной последовательности (x_k) элементов пространства l_∞ существуют строго возрастающая последовательность (k_l) натуральных чисел и элемент $x \in l_\infty$, для которых $x_{k_l} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x$, $l \rightarrow \infty$, и $\|x\|_{l_\infty} \leq \sup_{k \geq 1} \|x_k\|_{l_\infty}$.*

ТЕОРЕМА 2. *Если оператор $\mathcal{F}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ c -непрерывный, то для произвольных элементов x, y, x_k и y_k , $k \in \mathbb{N}$, пространства l_∞ , для которых $x_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x$, $y_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} y$ и $\mathcal{F}x_k - y_k \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} 0$, $k \rightarrow \infty$, имеет место равенство $\mathcal{F}x = y$.*

Утверждение теоремы 2 вытекает из условий теоремы и равенств

$$\mathcal{F}x - y = (\mathcal{F}x - \mathcal{F}x_k) + (\mathcal{F}x_k - y_k) + (y_k - y), \quad k \geq 1.$$

§ 3. Условия А, В, С, C_s , C_u и теоремы о неявных функциях

При решении задачи об обратимости оператора $\mathcal{R}$ будем использовать следующие условия.

УСЛОВИЕ А. $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

УСЛОВИЕ В. $\{H(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

УСЛОВИЕ С. *Если для некоторых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$ и $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, то $|x_1 - x_2| \neq |y_1 - y_2|$.*

УСЛОВИЕ C_s . *Если для некоторых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$, то $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|$.*

УСЛОВИЕ C_u . Если для некоторых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$, то $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$.

Также при исследовании оператора $\mathcal{H}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ будем использовать следующие теоремы о неявных недифференцируемых функциях.

ТЕОРЕМА 3 (см. [24]). Пусть для функции $H(x, y)$ выполняются условия A , B и C_s . Тогда для каждой точки $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, для которой $H(x_0, y_0) = z_0$, соотношением

$$H(x, y) = z \quad (3)$$

определяется единственная непрерывная на $\mathbb{R}^2$ неявная функция $y = Y(x, z)$, для которой $y_0 = Y(x_0, z_0)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для функции $H(x, y)$ выполняются условия A , B и C_u . Тогда для каждой точки $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, для которой $H(x_0, y_0) = z_0$, соотношением (3) определяется единственная непрерывная на $\mathbb{R}^2$ неявная функция $x = X(y, z)$, для которой $x_0 = X(y_0, z_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задача о существовании ограниченных решений разностного уравнения (2) равносильна аналогичной задаче для разностного уравнения

$$x(n+1) = Y(x(n), z(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

если выполняются условия A , B и C_s , и для разностного уравнения

$$x(n) = X(x(n+1), z(n)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

если выполняются условия A , B и C_u .

§ 4. Отображения $\mathcal{Y}_z$ и $\mathcal{X}_z$

Будем предполагать, что выполняются условия теоремы 3. Тогда соотношение (3) определяет неявную функцию $y = Y(x, z)$. На основании непрерывности этой функции на $\mathbb{R}^2$ для произвольных $z \in l_\infty$ и $x \in l_\infty$ переменная $u(n) = Y(x(n), z(n))$, $n \in \mathbb{Z}$, является ограниченной. Поэтому можно определить оператор $\mathcal{Y}_z: l_\infty \rightarrow l_\infty$ соотношением

$$(\mathcal{Y}_z x)(n) = Y(x(n-1), z(n-1)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В случае выполнения условий теоремы 4 аналогичным образом можно определить оператор $\mathcal{X}_z: l_\infty \rightarrow l_\infty$ соотношением

$$(\mathcal{X}_z x)(n) = Y(x(n+1), z(n)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Важными для дальнейшего являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда для произвольных $x', x'', z \in l_\infty$, для которых $x' \neq x''$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{Y}_z^2 x' - \mathcal{Y}_z^2 x''\|_{l_\infty} < \|x' - x''\|_{l_\infty}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию C_u

$$|Y(Y(x_1, z_1), z_2) - Y(Y(x_2, z_1), z_2)| < |x_1 - x_2| \quad (5)$$

для всех $(x_1, z_1, z_2), (x_2, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3$, для которых $x_1 \neq x_2$. Поэтому если $x' \neq x''$, то выполняется неравенство (4) или

$$\|\mathcal{Y}_z^2 x' - \mathcal{Y}_z^2 x''\|_{l_\infty} = \|x' - x''\|_{l_\infty}. \quad (6)$$

Предположим, что выполняется равенство (6). Тогда существует последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел, для которой

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{Y}_z^2 x' - \mathcal{Y}_z^2 x''\|_{l_\infty} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |Y(Y(x'(n_k), z(n_k)), z(n_k - 1)) - Y(Y(x''(n_k), z(n_k)), z(n_k - 1))| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |x'(n_k) - x''(n_k)| > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку последовательности $(x'(n_k))$, $(x''(n_k))$, $(z(n_k))$ и $(z(n_k - 1))$ ограничены, то существует такая строго возрастающая последовательность $(k_m)_{m \geq 1}$ натуральных чисел, что подпоследовательности $(x'(n_{k_m}))$, $(x''(n_{k_m}))$, $(z(n_{k_m}))$ и $(z(n_{k_m} - 1))$ будут сходящимися. Пусть a , b , c и d — соответственно пределы этих подпоследовательностей. Тогда на основании (7) и непрерывности функции $Y(Y(x, z_1), z_2)$ на $\mathbb{R}^3$ имеем

$$|Y(Y(a, c), d) - Y(Y(b, c), d)| = |a - b| > 0,$$

что противоречит (5). Следовательно, предположение о выполнении равенства (6) ложно. Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В неравенстве (4) степень два можно заменить произвольным натуральным числом n .

Аналогичным образом доказывается

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда для произвольных $x', x'', z \in l_\infty$, для которых $x' \neq x''$, выполняется неравенство

$$\|\mathcal{X}_z^2 x' - \mathcal{X}_z^2 x''\|_{l_\infty} < \|x' - x''\|_{l_\infty}.$$

§ 5. Достаточные условия обратимости оператора $\mathcal{R}$

В дальнейшем будем использовать еще следующие два условия.

УСЛОВИЕ D. Для каждого отрезка $[\alpha, \beta]$ существует отрезок $[a, b]$, для которого $a < Y(Y(x, z_1), z_2) < b$ для всех $(x, z_1, z_2) \in [a, b] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$.

УСЛОВИЕ E. Для каждого отрезка $[\alpha, \beta]$ существует отрезок $[a, b]$, для которого $a < X(X(x, z_1), z_2) < b$ для всех $(x, z_1, z_2) \in [a, b] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполняются условия A, B, C_s и D. Тогда оператор $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный непрерывный и ограниченный оператор $\mathcal{R}^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$, банахово пространство m -периодических элементов $x \in l_\infty$ с нормой $\|x\|_{\mathcal{P}_m} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_{l_\infty}$. Фиксируем

произвольный элемент $z \in l_\infty$. Пусть $[\alpha, \beta]$ – такой отрезок, что $\alpha \leq z(n) \leq \beta$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим последовательность элементов $z_m \in \mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$, для которой

$$\alpha \leq z_m(n) \leq \beta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и

$$z_m \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} z, \quad m \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Также рассмотрим отображение $\mathcal{Y}_{z_m}^2 : l_\infty \rightarrow l_\infty$, относительно которого, очевидно, инвариантно пространство $\mathcal{P}_m$. Так как выполнено условие D, то существует такой отрезок $[a, b]$, что $a \leq (\mathcal{Y}_{z_m}^2 y)(n) \leq b$, $n \in \mathbb{Z}$, если $a \leq y(n) \leq b$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому ограниченное замкнутое и выпуклое множество

$$\Omega_m = \{y \in \mathcal{P}_m : a \leq y(n) \leq b, n \in \mathbb{Z}\}$$

инвариантно относительно $\mathcal{Y}_{z_m}^2$. Это отображение непрерывно, поскольку функция $Y(x, z)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Поскольку также банахово пространство $\mathcal{P}_m$ конечномерно, то для $\mathcal{Y}_{z_m}^2$ выполняются все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке [25]. Поэтому отображение $\mathcal{Y}_{z_m}^2$ имеет неподвижную точку $x_m^* \in \Omega_m$, т.е.

$$x_m^* = \mathcal{Y}_{z_m}^2 x_m^*.$$

Покажем единственность этой точки. Предположим, что y_m^* – также неподвижная точка отображения $\mathcal{Y}_{z_m}^2$, $y_m^* \in \mathcal{P}_m$ и $y_m^* \neq x_m^*$. Тогда

$$\mathcal{Y}_{z_m}^2 x_m^* - \mathcal{Y}_{z_m}^2 y_m^* = x_m^* - y_m^*$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{Y}_{z_m}^2 x_m^* - \mathcal{Y}_{z_m}^2 y_m^*\|_{l_\infty} = \|x_m^* - y_m^*\|_{l_\infty} > 0. \quad (9)$$

Однако на основании теоремы 5

$$\|\mathcal{Y}_{z_m}^2 x_m^* - \mathcal{Y}_{z_m}^2 y_m^*\|_{l_\infty} < \|x_m^* - y_m^*\|_{l_\infty},$$

что противоречит (9).

Следовательно, x_m^* – единственная в пространстве $\mathcal{P}_m$ неподвижная точка отображения $\mathcal{Y}_{z_m}^2$.

Из равенств

$$\mathcal{Y}_{z_m}^2 (\mathcal{Y}_{z_m} x_m^*) = \mathcal{Y}_{z_m} (\mathcal{Y}_{z_m}^2 x_m^*) = \mathcal{Y}_{z_m} x_m^*$$

следует, что $\mathcal{Y}_{z_m} x_m^*$ – также неподвижная точка отображения $\mathcal{Y}_{z_m}^2$. Поэтому в силу единственности $\mathcal{Y}_{z_m} x_m^* = x_m^*$.

Итак,

$$x_m^*(n) \equiv (\mathcal{Y}_{z_m} x_m^*)(n).$$

Тогда с учетом замечания 1

$$H(x_m^*(n), x_m^*(n+1)) \equiv z_m(n). \quad (10)$$

Согласно теореме 1 существуют строго возрастающая последовательность (m_k) натуральных чисел и элемент $x^* \in l_\infty$, для которых

$$x_{m_k} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x^*, \quad k \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Тогда на основании (8), (10), (11) и условия А имеем

$$H(x^*(n), x^*(n+1)) \equiv z(n)$$

и, следовательно,

$$x^*(n) \equiv (\mathcal{Y}_z^2 x^*)(n). \quad (12)$$

Пусть y^* – также решение уравнения (2) и, следовательно, $y^*(n) \equiv (\mathcal{Y}_z^2 y^*)(n)$. Тогда на основании теоремы 4 с учетом (12) получаем $\|x^* - y^*\|_{l_\infty} < \|x^* - y^*\|_{l_\infty}$, если $x^* \neq y^*$, что невозможно.

Итак, разностное уравнение (2) для каждого элемента $z \in l_\infty$ имеет единственное решение $x^* \in l_\infty$. Поэтому оператор $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный оператор $\mathcal{R}^{-1}$. Этот оператор ограничен в силу условия D.

Покажем непрерывность оператора $\mathcal{R}^{-1}$. Предположим, что это свойство для $\mathcal{R}^{-1}$ не выполняется. Существуют элементы $x, z, x_m, z_m \in l_\infty$, $m \in \mathbb{N}$, и число $\varepsilon > 0$, для которых

$$\begin{aligned} \mathcal{R}x = z, \quad \mathcal{R}x_m = z_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|z_m - z\|_{l_\infty} = 0, \\ \|x_m - x\|_{l_\infty} \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Согласно последнему соотношению существует такая последовательность (n_m) целых чисел, что $|x_m(n_m) - x(n_m)| \geq \varepsilon/2$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим элементы u_m, v_m, x_m^* и z_m^* пространства l_∞ , определенные равенствами

$$\begin{aligned} u_m(n) = x(n + n_m), \quad v_m(n) = z(n + n_m), \quad x_m^*(n) = x_m(n + n_m), \\ z_m^*(n) = z_m(n + n_m). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{R}u_m = v_m$, $\mathcal{R}x_m^* = z_m^*$, $|x^*(0) - u_m(0)| \geq \varepsilon/2$, $m \in \mathbb{N}$, и $\lim_{m \rightarrow \infty} \|z_m^* - v_m\|_{l_\infty} = 0$. На основании теоремы 1 существуют возрастающая последовательность (m_k) натуральных чисел и элементы v^*, u^* и x^{**} пространства l_∞ , для которых $v_{m_k} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} v^*$, $u_{m_k} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} u^*$ и $x_{m_k} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} x^{**}$, $k \rightarrow \infty$. Поэтому на основании $\mathcal{C}$ -непрерывности оператора $\mathcal{R}$ и теоремы 2 имеем

$$\mathcal{R}u^* = v^*, \quad \mathcal{R}x^{**} = v^*, \quad u^* \neq x^{**}.$$

Эти соотношения противоречат обратимости оператора $\mathcal{R}$.

Следовательно, предположение, что оператор $\mathcal{R}^{-1}$ не является непрерывным, ложно.

Теорема 7 доказана.

Аналогичным образом устанавливается

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполняются условия А, В, С_u и Е. Тогда оператор $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный непрерывный и ограниченный оператор $\mathcal{R}^{-1}$.

Далее покажем, что условия теорем 7 и 8 являются в некоторой степени необходимыми для обратимости оператора $\mathcal{R}$.

§ 6. Отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Используем отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие точку $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, где $u = H(x, y)$ и $v = H(y, x)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть для функции $H(x, y)$ выполняется условие С и отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение W^{-1} . Тогда для функции $H(x, y)$ выполняются условия А, В и одно из условий C_s или C_u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $WW^{-1} = I$ и непрерывности отображений W^{-1} и I (I – единичное отображение) следует непрерывность отображения $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Поэтому функция $H(x, y)$ является непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

Следовательно, для $H(x, y)$ выполняется условие А.

Из обратимости отображения $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ следует, что для каждого $y \in \mathbb{R}$ уравнение $H(x, x) = y$ имеет единственное решение $x \in \mathbb{R}$. Поэтому для функции $H(x, y)$ выполняется также условие В.

Далее покажем, что для функции $H(x, y)$ выполняется только одно из условий C_s или C_u .

Зафиксируем произвольное число $z \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество

$$\Gamma_z = \{(x, y) : H(x, y) = z\}.$$

Это множество содержит не менее двух точек. Действительно, поскольку отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение, то для произвольных чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ система уравнений

$$\begin{cases} H(x, y) = z_1, \\ H(y, x) = z_2 \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = x(z_1, z_2), \\ y = y(z_1, z_2), \end{cases}$$

где $x(z_1, z_2)$ и $y(z_1, z_2)$ – непрерывные на $\mathbb{R}^2$ функции. С помощью этих функций множество Γ_z можно представить в виде $\Gamma_z = \{(x, y) : x = x(z, t), y = y(z, t), t \in \mathbb{R}\}$. Это множество не может быть одноточечным множеством, поскольку непрерывное отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение, для которого

$$W^{-1}(z_1, z_2) = (x(z_1, z_2), y(z_1, z_2)),$$

имеет место равенство $\Gamma_z = W^{-1}\{(z, t) : t \in \mathbb{R}\}$ и множество $\{(z, t) : t \in \mathbb{R}\}$ не является одноточечным множеством.

На основании непрерывности функций $x(z_1, z_2)$ и $y(z_1, z_2)$ и связности множества $\{(z, t) : t \in \mathbb{R}\}$ множество Γ_z является связным множеством [26].

Очевидно, что каждые две кривые Γ_{z_1} и Γ_{z_2} , $z_1 \neq z_2$, не имеют общих точек. Далее используем условие С.

Нет таких точек $(x_i, y_i) \in \Gamma_z$, $i = \overline{1, 4}$ ($(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ и $(x_3, y_3) \neq (x_4, y_4)$), для которых

$$|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|, \quad (13)$$

$$|x_3 - x_4| > |y_3 - y_4|. \quad (14)$$

Действительно, если множество таких точек непустое, то существуют числа t_i , $i = \overline{1, 4}$, для которых $x_i = x(z, t_i)$, $y_i = y(z, t_i)$, $i = \overline{1, 4}$. Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ или $t_1 > t_2 \geq t_3 > t_4$;
- 2) $t_1 \leq t_3 < t_2 < t_4$ или $t_1 \geq t_3 > t_2 > t_4$;
- 3) $t_1 < t_3 < t_4 \leq t_2$ или $t_1 > t_3 > t_4 \geq t_2$.

Другие возможные случаи сводятся к случаям 1)–3) перестановкой соответствующих элементов. Используем непрерывную на $[0, 1]$ функцию

$$\omega(s) = |x(z, t_1 + (t_3 - t_1)s) - x(z, t_2 + (t_4 - t_2)s)| - |y(z, t_1 + (t_3 - t_1)s) - y(z, t_2 + (t_4 - t_2)s)|.$$

На основании (13) и (14) имеем

$$\omega(0) = |x_1 - x_2| - |y_1 - y_2| < 0, \quad \omega(1) = |x_3 - x_4| - |y_3 - y_4| > 0.$$

Поэтому согласно теореме Больцано–Коши [27] для некоторого числа $s^* \in (0, 1)$

$$\omega(s^*) = 0. \quad (15)$$

Поскольку

$$[t_2 + (t_4 - t_2)s] - [t_1 + (t_3 - t_1)s] = (t_2 - t_1)(1 - s) + (t_4 - t_3)s$$

и для всех $s \in [0, 1]$ выполнено условие $(t_2 - t_1)(1 - s) + (t_4 - t_3)s \neq 0$, то

$$t_1 + (t_3 - t_1)s^* \neq t_2 + (t_4 - t_2)s^*. \quad (16)$$

Поэтому на основании (16) и (15) для чисел

$$\begin{aligned} x_1^* &= x(z, t_1 + (t_3 - t_1)s^*), & x_2^* &= x(z, t_2 + (t_4 - t_2)s^*), \\ y_1^* &= y(z, t_1 + (t_3 - t_1)s^*), & y_2^* &= y(z, t_2 + (t_4 - t_2)s^*) \end{aligned}$$

получаем, что

$$(x_1^*, y_1^*) \neq (x_2^*, y_2^*), \quad |x_1^* - x_2^*| = |y_1^* - y_2^*|,$$

а на основании включений $(x_i^*, y_i^*) \in \Gamma_z$, $i = 1, 2$, имеем

$$H(x_1^*, y_1^*) = H(x_2^*, y_2^*),$$

что противоречит выполнению для функции $H(x, y)$ условия С.

Таким образом, на кривой Γ_z нет точек, для которых выполняются соотношения (13) и (14).

Обозначим через G_+ множество всех чисел $z \in \mathbb{R}$, для каждого из которых для произвольных несовпадающих точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma_z$ выполняется неравенство (13). Аналогично через G_- обозначим множество всех чисел $z \in \mathbb{R}$, для каждого из которых для произвольных несовпадающих точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma_z$ выполняется неравенство (14). В силу выполнения для функции $H(x, y)$ условия С

$$G_+ \cup G_- = \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$G_+ \cap G_- = \emptyset. \quad (18)$$

Покажем, что $G_+ = \mathbb{R}$ или $G_- = \mathbb{R}$. Сначала покажем, что G_+ и G_- – открытые множества. Предположим, что $G_+ \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $z_1 \in G_+$. Рассмотрим две несовпадающие точки $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*) \in \Gamma_{z_1}$. Согласно неравенству

$$|x_1^* - x_2^*| < |y_1^* - y_2^*|$$

для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|\check{x}_1 - \check{x}_2| < |\check{y}_1 - \check{y}_2|,$$

если

$$|\check{x}_1 - x_1^*| < |\check{y}_1 - y_1^*| < \varepsilon, \quad |\check{x}_2 - x_2^*| < |\check{y}_2 - y_2^*| < \varepsilon.$$

Поскольку непрерывное отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение W^{-1} , то множества $W^{-1}S_1$ и $W^{-1}S_2$, где

$$S_i = \{(x, y) : |x - x_i^*| + |y - y_i^*| < \varepsilon\}, \quad i = 1, 2,$$

являются окрестностями точек (z_1, z_2^*) и (z_1, z_2^{**}) соответственно ($z_2^* = H(y_1^*, x_1^*)$, $z_2^{**} = H(y_2^*, x_2^*)$). Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что для открытых множеств

$$U_1 = \{(\check{z}_1, \check{z}_2) : |\check{z}_1 - z_1| + |\check{z}_2 - z_2^*| < \delta\}, \quad U_2 = \{(\check{z}_1, \check{z}_2) : |\check{z}_1 - z_1| + |\check{z}_2 - z_2^{**}| < \delta\}$$

будут выполняться соотношения

$$U_i \subset W^{-1}S_i, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что для каждого $\check{z}_1 \in (z_1 - \delta, z_1 + \delta)$ существуют точки $(\check{x}_1, \check{y}_1)$ и $(\check{x}_2, \check{y}_2)$, для которых

$$|\check{x}_1 - \check{x}_2| < |\check{y}_1 - \check{y}_2| \quad (19)$$

и

$$H(\check{x}_1, \check{y}_1) = H(\check{x}_2, \check{y}_2) = \check{z}_1.$$

Поскольку на кривой $\Gamma_{\check{z}_1}$ есть точки, удовлетворяющие (19), то в силу выполнения для функции $H(x, y)$ условия С неравенство (19), как было показано ранее, справедливо для каждой пары несовпадающих точек кривой $\Gamma_{\check{z}_1}$. Следовательно, $(z_1 - \delta, z_1 + \delta) \subset G_+$, т.е. на основании произвольности выбора точки $z_1 \in G_+$ множество G_+ открыто.

Аналогичным образом устанавливается открытость множества G_- .

Поскольку множество $\mathbb{R}$ связно, то на основании (17), (18) и открытости G_+ , если $G_+ \neq \emptyset$, и открытости G_- , если $G_- \neq \emptyset$, каждое из множеств G_+ и G_- может совпадать с $\mathbb{R}$ или $\emptyset$. Таким образом, $G_+ = \mathbb{R}$ или $G_- = \mathbb{R}$, т.е. для функции $H(x, y)$ выполняется только одно из условий C_s или C_u .

Теорема 9 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для функции $H(x, y)$ выполняется условие С и отображение $\mathcal{H}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратное непрерывное отображение $\mathcal{H}^{-1}$. Тогда для функции $H(x, y)$ выполняются условия А, В и одно из условий C_s или C_u .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 9 условие С выполняется, если для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ функции $H(x, x + c)$ и $H(-x, x + c)$ являются строго монотонными.

Действительно, если для функции $H(x, y)$ условие С не выполняется, то для некоторых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, имеем

$$H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2), \quad |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|.$$

Поэтому для некоторых чисел $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$, получаем, что

$$H(x_1, x_1 + c_1) = H(x_1 + c_2, x_1 + c_2 + c_1)$$

или

$$H(-x_1, x_2 + c_1) = H(-x_1 - c_2, x_1 + c_2 + c_1).$$

Каждое из этих двух равенств противоречит строгой монотонности функций $H(x, x + c_1)$ и $H(-x, x + c_1)$, поскольку $c_2 \neq 0$.

§ 7. Неподвижные точки функций $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$ и $X(\cdot, z_2) \circ X(\cdot, z_1)$

Приведем еще два утверждения, которые позволяют установить для $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$ и $X(\cdot, z_2) \circ X(\cdot, z_1)$ выполнение условий D и E.

ТЕОРЕМА 10. Пусть для функции $H(x, y)$ выполняется условие C_s и отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение W^{-1} . Тогда:

(I) для каждой точки $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ функция $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$ имеет единственную неподвижную точку;

(II) для каждого ограниченного, замкнутого и связного множества $K \subset \mathbb{R}^2$ множество $X = \{x : Y(Y(x, z_1), z_2) = x, (z_1, z_2) \in K\}$ является ограниченным замкнутым промежутком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании условий теоремы и утверждений теорем 9 и 3 существуют единственные функции $Y(x, z_1)$ и $Y(x, z_2)$, для которых

$$H(x, Y(x, z_1)) = z_1, \quad H(x, Y(x, z_2)) = z_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

в частности,

$$H(Y(x, z_1), Y(Y(x, z_1), z_2)) = z_2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Поскольку существует единственная точка $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, для которой

$$\begin{cases} H(x^*, y^*) = z_1, \\ H(y^*, x^*) = z_2, \end{cases}$$

то

$$H(x^*, Y(x^*, z_1)) = z_1$$

и

$$H(Y(x^*, z_1), x^*) = z_2. \quad (21)$$

Согласно (20) имеем

$$H(Y(x^*, z_1), Y(Y(x^*, z_1), z_2)) = z_2.$$

Отсюда и из соотношения (21) на основании теоремы 3 получаем, что

$$Y(Y(x^*, z_1), z_2) = x^*.$$

Таким образом, точка $x^* \in \mathbb{R}$ является неподвижной для $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$. Эта точка единственная. Действительно, если точка x^{**} является неподвижной для функции $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$ и

$$x^* \neq x^{**}, \quad (22)$$

то на основании условия C_s имеем

$$\begin{aligned} |x^* - x^{**}| &= |Y(Y(x^*, z_1), z_2) - Y(Y(x^{**}, z_1), z_2)| \\ &< |Y(x^*, z_1) - Y(x^{**}, z_1)| < |x^* - x^{**}|. \end{aligned}$$

Мы получили неравенство $|x^* - x^{**}| < |x^* - x^{**}|$, противоречащее (22).

Таким образом, первая часть утверждения теоремы обоснована.

Далее рассмотрим непрерывное отображение $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которое определяется соотношением

$$P(x, y) = x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Из приведенных рассуждений следует, что в случае выполнения условий теоремы для точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, для которой $W(a, b) = (z_1, z_2)$ (такая точка единственная), первая координата a является неподвижной точкой для $Y(Y(\cdot, z_1), z_2)$ и $a = PW^{-1}(z_1, z_2)$.

Очевидно, что $X = PW^{-1}K$. Из этого равенства, из непрерывности отображения PW^{-1} , компактности и связности множества K вытекает компактность и связность множества X (см. [26]).

Следовательно, вторая часть утверждения теоремы также обоснована.

Теорема 10 доказана.

Аналогичным образом устанавливается

ТЕОРЕМА 11. Пусть для функции $H(x, y)$ выполняется условие C_u и отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение W^{-1} . Тогда для каждой точки $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ функция $X(\cdot, z_2) \circ X(\cdot, z_1)$ имеет единственную неподвижную точку и для каждого ограниченного, замкнутого и связного множества $K \subset \mathbb{R}^2$ множество $\{y: X(X(y, z_1), z_2) = y, (z_1, z_2) \in K\}$ является ограниченным замкнутым промежутком.

§ 8. Условия существования инвариантных промежутков для функций $Y(\cdot, z_2) \circ Y(\cdot, z_1)$ и $X(\cdot, z_2) \circ X(\cdot, z_1)$

Будем использовать следующие два условия.

УСЛОВИЕ F. Для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |Y(x, z_1) - Y(x, z_2)| < +\infty.$$

УСЛОВИЕ G. Для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |X(y, z_1) - X(y, z_2)| < +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условия F и G, выполняются, если, например, соотношение $H(x, y) = z$ принимает соответственно вид $y - f(x) = z$ или $x - g(y) = z$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции.

Зафиксируем произвольные числа $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = \{x + Y(Y(x, z_1), z_2) : x \in \mathbb{R}\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение W^{-1} и выполняются условия C_s и F. Тогда

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = \mathbb{R}, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

или для некоторой функции $\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (\delta(z_1, z_2), +\infty), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

или для некоторой функции $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (-\infty, \gamma(z_1, z_2)), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы 9 для функции $H(x, y)$ выполняются условия A и B. Так как для функции $H(x, y)$ выполнено условие C_s , то функция $Y(x, z)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^2$ (согласно теореме 3). Следовательно, функция $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ переменной x непрерывна на $\mathbb{R}$, а множества $\mathcal{I}_{z_1, z_2}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ являются открытыми и связными.

Предположим, что функция $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ переменной x является ограниченной на $\mathbb{R}$ для некоторых $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Существует число $\alpha > 0$, для которого

$$-x - \alpha < Y(Y(x, z_1), z_2) < -x + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Поскольку на основании условия C_s для некоторого числа $\beta > 0$

$$|Y(x, z_i)| < |x| + \beta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

то согласно (23) для некоторого числа $\gamma \geq \beta$ имеем

$$|x| - \gamma < |Y(x, z_i)| < |x| + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и условия F вытекает, что для некоторого числа $\delta > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $i = 1, 2$ выполняется какое-либо из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} -x - \delta < Y(x, z_i) < -x + \delta, & \quad x - \delta < Y(x, z_i) < x + \delta, \\ -|x| - \delta < Y(x, z_i) < -|x| + \delta, & \quad |x| - \delta < Y(x, z_i) < |x| + \delta. \end{aligned}$$

Каждое из последних четырех соотношений противоречит (23). Следовательно, предположение об ограниченности функции $Y(Y(x, z_1), z_2)$ переменной x на $\mathbb{R}$ ложное. Итак, множества $\mathcal{I}_{z_1, z_2}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, открытые, связные и неограниченные. Отсюда в силу условия F следует утверждение леммы.

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда для каждой точки $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ существует такой отрезок $[a, b]$, что $a < Y(Y(x, z_1), z_2) < b$ для всех $x \in [a, b]$, причем:

(I) $a = -b$ и b может быть как угодно большим положительным числом, если $\mathcal{I}_{z_1, z_2} = \mathbb{R}$;

(II) $a = -\omega + M$, $b = \omega$, где M – произвольное число, $M < 2x^*$ (x^* – неподвижная точка для $Y(Y(\cdot, z_1), z_2)$) и ω – произвольное как угодно большое положительное число, если $\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (-\infty, \gamma)$ (γ – действительное число, зависящее от z_1 и z_2);

(III) $a = -\omega + M$, $b = \omega$, где M – произвольное число, $M > 2x^*$ (x^* – неподвижная точка для $Y(Y(\cdot, z_1), z_2)$) и ω – произвольное как угодно большое положительное число, если $\mathcal{I}_z = (\delta, +\infty)$ (δ – действительное число, зависящее от z_1 и z_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 выполняется какое-либо одно из следующих соотношений:

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = \mathbb{R}, \quad (24)$$

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (-\infty, \gamma), \quad (25)$$

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (\delta, +\infty), \quad (26)$$

где δ и γ – некоторые действительные числа, зависящие от z_1 и z_2 .

Пусть x^* – неподвижная точка для $Y(Y(\cdot, z_1), z_2)$. Такая точка существует на основании теоремы 10.

Предположим, что $x^* = 0$. Поскольку на основании условия C_s функции $x - Y(Y(x, z_1), z_2)$ и $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ являются строго возрастающими по переменной x на $\mathbb{R}$, то $|Y(Y(x, z_1), z_2)| < |x|$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Очевидно, что в этом случае a может быть произвольным отрицательным числом, а b – произвольным положительным числом.

Предположим, что $x^* > 0$. На основании строгого возрастания функций $x - Y(Y(x, z_1), z_2)$ и $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ по x на $\mathbb{R}$

$$|Y(Y(x, z_1), z_2) - x^*| < |x - x^*|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x^*\}. \quad (27)$$

В случае выполнения соотношения (24) существует такое число $x^{**} < 0$, что $Y(Y(x, z_1), z_2) < -x$ для всех $x < x^{**}$. Отсюда и соотношения (27) следует утверждение леммы.

Рассмотрим случай, когда выполнены соотношения (25). На основании строгого возрастания функции $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ по переменной x на $\mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + Y(Y(x, z_1), z_2)) = -\infty.$$

Поэтому согласно (27) для всех достаточно больших $x < 0$

$$|Y(Y(x, z_1), z_2)| < |x|. \quad (28)$$

А согласно (25), строгому возрастанию функции $x + Y(Y(x, z_1), z_2)$ по переменной x на $\mathbb{R}$ и положительности числа x^* имеем

$$-x + 2x^* < Y(Y(x, z_1), z_2) < x, \quad x > x^*.$$

Поэтому $|Y(Y(x, z_1), z_2)| < |x|$ для всех $x > x^*$. Отсюда, из соотношения (28) и непрерывности $Y(Y(x, z_1), z_2)$ следует утверждение леммы для каждого отрезка $[a, b]$, если $a < 0$, $b > 0$ и числа $|a|$, b являются достаточно большими.

Далее рассмотрим случай, когда выполнены соотношения (26). Очевидно, что

$$\delta < 2x^*, \quad (29)$$

$$-x + \delta < Y(Y(x, z_1), z_2) < -x + 2x^*, \quad x < x^*, \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + Y(Y(x, z_1), z_2)) = +\infty. \quad (31)$$

Фиксируем произвольное число

$$M > 2x^*. \quad (32)$$

Согласно (31) и непрерывности функции $Y(Y(x, z_1), z_2)$ существует такое число $\omega > x^*$, что

$$-x + M < Y(Y(x, z_1), z_2), \quad x \geq \omega,$$

и

$$-\omega + M < Y(Y(x, z_1), z_2), \quad x \in [x^*, \omega]. \quad (33)$$

Из соотношений (27), (29), (30), (32) и (33) вытекает, что

$$-\omega + M < Y(Y(x, z_1), z_2) < \omega, \quad x \in [-\omega + M, \omega].$$

Существование инвариантных промежутков для $Y(Y(\cdot, z_1), z_2)$ при $x^* < 0$ устанавливается аналогичным образом.

Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждения, аналогичные леммам 1 и 2, имеют место и для функции $X(y, z)$. В этих леммах функцию $Y(x, z)$ и условие F следует заменить соответственно функцией $X(y, z)$ и условием G.

§ 9. Необходимые условия обратимости оператора $\mathcal{R}$

ТЕОРЕМА 12. Пусть отображение $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратное непрерывное отображение $\mathcal{R}^{-1}$ и выполняются условия C_s и F. Тогда для функции $Y(x, z)$ выполняется условие D.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из условий теоремы следует, что отображение $W: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет обратное непрерывное отображение. Пусть $[\alpha, \beta]$ – тот же отрезок, что и в условии D.

Рассмотрим случай, когда для всех $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$

$$\mathcal{I}_{z_1, z_2} = (\gamma, +\infty),$$

где γ – число, зависящее от z_1 и z_2 (согласно лемме 1 это соотношение выполняется для всех $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$, если оно выполняется для некоторых $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{R}$).

Используем множество $\bigcup_{z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]} \{x : x = Y(Y(x, z_1), z_2)\}$. Согласно теореме 10 это множество есть некоторый отрезок $[u, v]$.

Фиксируем произвольное число $M > 2v$. На основании леммы 2 для каждой точки $(z_1, z_2) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ существует такое число $\omega(z_1, z_2) > 0$, что выполняется соотношение

$$-\omega(z_1, z_2) + M < Y(Y(x, z_1), z_2) < \omega(z_1, z_2) \quad (34)$$

для всех $x \in [-\omega(z_1, z_2) + M, \omega(z_1, z_2)]$. Обозначим через $S(r, (z_1, z_2))$ открытый шар $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : (t_1 - z_1)^2 + (t_2 - z_2)^2 < r^2\}$. Согласно (34) и непрерывности функции $Y(Y(x, z_1), z_2)$ на $\mathbb{R}^3$ для каждой точки $(z_1, z_2) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ существует число $\nu(z_1, z_2) > 0$, для которого

$$-\omega(z_1, z_2) + M < Y(Y(x, t_1), t_2) < \omega(z_1, z_2)$$

для всех $x \in [-\omega(z_1, z_2) + M, \omega(z_1, z_2)]$ и $(t_1, t_2) \in S(\nu(z_1, z_2), (z_1, z_2))$.

Поскольку

$$[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \subset \bigcup_{(z_1, z_2) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]} S(\nu(z_1, z_2), (z_1, z_2))$$

и $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ – компактное множество, то существует такое конечное множество

$$\{(z_{1,1}, z_{2,1}), (z_{1,2}, z_{2,2}), \dots, (z_{1,m}, z_{2,m})\} \subset [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta],$$

что

$$[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \subset \bigcup_{i=1}^m S(\nu(z_{1,i}, z_{2,i}), (z_{1,i}, z_{2,i})). \quad (35)$$

Обозначим через Ω наибольший элемент множества

$$\{\omega(z_{1,1}, z_{2,1}), \omega(z_{1,2}, z_{2,2}), \dots, \omega(z_{1,m}, z_{2,m})\}.$$

Так как выполнено условие C_s , то

$$-\Omega + M < Y(Y(x, t_1), t_2) < \Omega,$$

если $x \in [-\Omega + M, \Omega]$ и $(t_1, t_2) \in S(\nu(z_{1,i}, z_{2,i}), (z_{1,i}, z_{2,i}))$, $i = \overline{1, m}$. Поэтому согласно (35) для всех $(x, z_1, z_2) \in [-\Omega + M, \Omega] \times [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$

$$-\Omega + M < Y(Y(x, z_1), z_2) < \Omega.$$

Следовательно, в случае, когда $\mathcal{J}_{z_1, z_2} = (\gamma, +\infty)$ для всех $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$ (γ – действительное число, зависящее от z_1 и z_2), теорема доказана.

В случае, когда $\mathcal{J}_{z_1, z_2} = (-\infty, \delta)$ для всех $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$, где δ – действительное число, зависящее от z_1 и z_2 , доказательство теоремы проводится аналогично (этот случай сводится к предыдущему случаю заменой x на $-x$).

В случае, когда $\mathcal{J}_{z_1, z_2} = \mathbb{R}$ для всех $z_1, z_2 \in [\alpha, \beta]$, доказательство теоремы аналогично доказательству, приведенному в первом случае. Нужно в соответствующих рассуждениях положить $M = 0$ и использовать первую часть утверждения леммы 2.

Теорема 12 доказана.

Аналогичным образом устанавливается

ТЕОРЕМА 13. Пусть оператор $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный непрерывный оператор $\mathcal{R}^{-1}$ и выполняются условия C_u и G . Тогда для функции $Y(x, z)$ выполняется условие E .

§ 10. s -непрерывность оператора $\mathcal{R}^{-1}$

ТЕОРЕМА 14. Пусть оператор $\mathcal{R}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный оператор $\mathcal{R}^{-1}$. Тогда оператор $\mathcal{R}^{-1}$ s -непрерывный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оператор $\mathcal{R}^{-1}$ не является s -непрерывным. Существуют элементы $x, z, x_m, z_m \in l_\infty$, $m \in \mathbb{N}$, и числа $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$, для которых

$$\mathcal{R}x = z, \quad (36)$$

$$\mathcal{R}x_m = z_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (37)$$

$$z_m \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} z, \quad m \rightarrow \infty, \quad (38)$$

$$\max_{|n| \leq p} |x_m(n) - x(n)| \geq \varepsilon, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (39)$$

Согласно теореме 1 существуют строго возрастающая последовательность (m_k) натуральных чисел и элемент $y \in l_\infty$, для которых

$$x_{m_k} \xrightarrow{\text{loc}, l_\infty} y, \quad k \rightarrow \infty, \quad (40)$$

а согласно теореме 2, s -непрерывности оператора $\mathcal{R}$ и соотношениям (37), (38), (40) имеем

$$\mathcal{R}y = z.$$

Это равенство и равенство (36) противоречат обратимости оператора $\mathcal{R}$, поскольку на основании (39) и (40) $x \neq y$.

Таким образом, предположение, что оператор $\mathcal{R}^{-1}$ не является s -непрерывным, ложно.

Теорема 14 доказана.

§ 11. Приложение оператора $\mathcal{R}$ к исследованию ограниченных решений системы телеграфных уравнений

Рассмотрим банахово пространство C^0 непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $y = y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)|$, банахово пространство C^1 всех функций $y \in C^0$, для каждой из которых $\frac{dy}{dt} \in C^0$, с нормой $\|y\|_{C^1} = \|y\|_{C^0} + \left\| \frac{dy}{dt} \right\|$, банахово пространство $C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}$ непрерывных и ограниченных на $[0, l] \times \mathbb{R}$, $l \in (0, +\infty)$, функций $\omega = \omega(x, t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|\omega\|_{C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}} = \sup_{(x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}} |\omega(x, t)|$ и банахово пространство $C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}}$ всех функций $\omega \in C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}$, частные производные $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ которых являются элементами пространства $C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}$, с нормой

$$\|\omega\|_{C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}}} = \|\omega\|_{C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}} + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\|_{C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}} + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|_{C^0_{[0,l] \times \mathbb{R}}}$$

(в точках $(0, t)$ и (l, t) частная производная $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ совпадает соответственно с правой частной производной $\frac{\partial_+ \omega}{\partial x}$ в точке $(0, t)$ и с левой частной производной $\frac{\partial_- \omega}{\partial x}$ в точке (l, t)).

Используя результаты исследований обратимости оператора $\mathcal{R}$, получим для системы уравнений

$$L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}, \quad (41)$$

$$C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x}, \quad (x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}, \quad (42)$$

$$E(t) = v(0, t) + Ri(0, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (43)$$

$$i(l, t) = g(v(l, t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

удобные для приложений условия существования и единственности решения $(i, v) \in C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}} \times C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}}$ для каждой функции $E \in C^1$. Здесь $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, а L , C и R — положительные числа.

Заметим, что эта задача изучалась автором в [28]. В случае замены $\mathbb{R}$ на $[0, +\infty)$ и выбора функции g с соответствующими свойствами система (41)–(44) описывает колебательные процессы в длинной линии с туннельным диодом [29].

Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты из [28]. Если ввести обозначения

$$s = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad k = \frac{z - R}{z + R}, \quad \Delta = \frac{2l}{s}$$

и использовать общее решение системы уравнений (41)–(42)

$$i(x, t) = \frac{1}{z}(\varphi(x - st) - \psi(x + st)), \quad v(x, t) = \varphi(x - st) + \psi(x + st),$$

где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, то можно показать (см. [28]), что для каждой функции $E \in C^1$ решение рассматриваемой задачи для системы (41)–(44) сводится к решению аналогичной задачи о существовании и единственности решения $u \in C^1$ разностного уравнения

$$\frac{1}{z} u(t) + g(u(t)) + \frac{k}{z} u(t - \Delta) - kg(u(t - \Delta)) = \frac{2}{z + R} E(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

В [28], в частности, доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $E \in C^1$. Если система (41)–(44) имеет решение $(i, v) \in C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}} \times C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}}$, то функция $v(l, t)$ является решением уравнения (45).

ТЕОРЕМА 16. Пусть $E \in C^1$. Если уравнение (45) имеет решение $u \in C^1$, то система уравнений (41)–(44) имеет решение $(i, v) \in C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}} \times C^1_{[0, l] \times \mathbb{R}}$, которое представляется в виде

$$i(x, t) = \frac{u(t + \frac{l-x}{s}) - u(t + \frac{x-l}{s})}{2z} + \frac{\omega(t + \frac{l-x}{s}) + \omega(t + \frac{x-l}{s})}{2},$$

$$v(x, t) = \frac{u(t + \frac{l-x}{s}) + u(t + \frac{x-l}{s})}{2} + \frac{z(\omega(t + \frac{l-x}{s}) - \omega(t + \frac{x-l}{s}))}{2},$$

где

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} k^n F(t - n\Delta), \quad F(t) = \frac{2}{z + R} E\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{z} u(t) - \frac{k}{z} u(t - \Delta).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Система уравнений (41)–(44) для каждой функции $E \in C^1$ имеет единственное решение $(i, v) \in C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}} \times C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда уравнение (45) для каждой функции $E \in C^1$ имеет единственное решение $u \in C^1$.

Уравнение (45) есть разностное уравнение с непрерывным временем, аналогичное разностному уравнению (2). Этому уравнению соответствует функция

$$H_1(x, y) = \frac{y}{z} + g(y) + \frac{kx}{z} - kg(x),$$

аналогичная $H(x, y)$, и оператор $\mathcal{R}_1: l_\infty \rightarrow l_\infty$, определяемый соотношением

$$(\mathcal{R}_1 x)(n) = H_1(x(n), x(n+1)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

аналогичный $\mathcal{R}$.

Используем оператор $\mathcal{R}_1$ для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 17. Пусть

$$\sup_{(x,y) \in M} \left| \frac{k(1 - zg'(x))}{1 + zg'(y)} \right| = q < 1$$

для каждого ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ и $\{x + Rg(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Тогда для каждой функции $E \in C^1$ система уравнений (41)–(44) имеет единственное решение $(i, v) \in C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}} \times C^1_{[0,l] \times \mathbb{R}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий теоремы, ограничений на функцию $g(x)$ и тождества $H_1(x, x) \equiv x + Rg(x)$ для функции $H_1(x, y)$ выполняются условия А, В и C_s . Поэтому на основании теоремы 3 соотношением $H_1(x, y) = h$ неявно определяется функция $y = Y_1(x, h)$, непрерывная на $\mathbb{R}^2$, для которой

$$|Y_1(x_1, h) - Y_1(x_2, h)| \leq q|x_1 - x_2|$$

для всех $(x_1, x_2, h) \in \mathbb{R}^3$. Отсюда и из неравенства $q < 1$ следует, что для $Y_1(x, h)$ выполняется условие D. Следовательно, в силу теоремы 7 оператор $\mathcal{R}_1: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратный непрерывный и ограниченный оператор $\mathcal{R}_1^{-1}$.

Зафиксируем произвольную функцию $E \in C^1$ и рассмотрим уравнение

$$H_1(y((n-1)\Delta + s), y(n\Delta + s)) = \frac{2}{z+R} E(n\Delta + s), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (46)$$

где $s \in [0, \Delta)$. Это уравнение на основании ограниченности оператора $\mathcal{R}_1^{-1}$ имеет для каждого $s \in [0, \Delta)$ единственное ограниченное решение $y_s = y(n\Delta + s)$, для которого

$$\sup_{0 \leq s < \Delta, n \in \mathbb{Z}} |y(n\Delta + s)| < +\infty.$$

Поскольку $E \in C^1$ и, следовательно, функция $E(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для каждого $s_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |E(t+s) - E(t+s_0)| = 0.$$

Поэтому на основании непрерывности оператора $\mathcal{R}_1^{-1}$ имеем

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |y(n\Delta + s) - y(n\Delta + s_0)| = 0, \quad s_0 \in (0, \Delta),$$

$$\lim_{s \rightarrow \Delta-0} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |y(n\Delta + s) - y((n+1)\Delta)| = 0, \quad \lim_{s \rightarrow +0} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |y(n\Delta + s) - y(n\Delta)| = 0.$$

Отсюда и (46) следует, что функция

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} y\left(\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right] + \left\{\frac{t}{\Delta}\right\}\right)\Delta\right),$$

где $[t/\Delta]$ и $\{t/\Delta\}$ – целая и дробная части числа t/Δ соответственно, является непрерывным решением разностного уравнения (45), т.е.

$$\frac{1}{z} x(t) + g(x(t)) + \frac{k}{z} x(t - \Delta) - kg(x(t - \Delta)) \equiv \frac{2}{z + R} E(t). \quad (47)$$

Покажем, что это решение является элементом пространства C^1 . Рассмотрим произвольное число $\delta > 0$. Согласно (47) имеем

$$\frac{1}{z} x(t + \delta) + g(x(t + \delta)) + \frac{k}{z} x(t - \Delta + \delta) - kg(x(t - \Delta + \delta)) \equiv \frac{2}{z + R} E(t + \delta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \left(\frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} + \frac{g(x(t + \delta)) - g(x(t))}{\delta} \right) \\ & + \frac{k}{z} \left(\frac{x(t - \Delta + \delta) - x(t - \Delta)}{\delta} - z \frac{g(x(t - \Delta + \delta)) - g(x(t - \Delta))}{\delta} \right) \\ & \equiv \frac{2}{z + R} \frac{E(t + \delta) - E(t)}{\delta} \end{aligned}$$

и, следовательно, на основании теоремы Лагранжа о конечных приращениях [27] для некоторого $T \in [0, \delta]$, зависящего от функции g и сужения $x|_{[t, t+\delta]}$ функции x на отрезок $[t, t + \delta]$, $T = T(g, x|_{[t, t+\delta]})$, имеет место тождество

$$\begin{aligned} & (1 + zg'(x(t + T(g, x|_{[t, t+\delta]})))) \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} \\ & + k(1 - zg'(x(t - \Delta + T(g, x|_{[t-\Delta, t-\Delta+\delta]})))) \frac{x(t - \Delta + \delta) - x(t - \Delta)}{\delta} \\ & \equiv \frac{2z}{z + R} \frac{E(t + \delta) - E(t)}{\delta}. \end{aligned}$$

Это тождество представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} & \equiv \frac{2z}{(z + R)(1 + zg'(x(t + T(g, x|_{[t, t+\delta]}))))} \frac{E(t + \delta) - E(t)}{\delta} \\ & - \frac{k(1 - zg'(x(t - \Delta + T(g, x|_{[t-\Delta, t-\Delta+\delta]}))))}{1 + zg'(x(t + T(g, x|_{[t, t+\delta]}))))} \frac{x(t - \Delta + \delta) - x(t - \Delta)}{\delta}. \end{aligned}$$

Поскольку согласно условиям теоремы

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \delta > 0} \left| \frac{k(1 - zg'(x(t - \Delta + T(g, x|_{[t-\Delta, t-\Delta+\delta]))}))}{1 + zg'(x(t + T(g, x|_{[t, t+\delta]))}))} \right| \leq q < 1, \quad (48)$$

то на основании последнего тождества и метода последовательных приближений

$$\begin{aligned} \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} &\equiv \frac{2z(E(t + \delta) - E(t))}{(z + R)(1 + zg'(x(t + T(g, x|_{[t, t+\delta]))})))\delta} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l K_l \frac{2z(E(t - l\Delta + \delta) - E(t - l\Delta))}{(z + R)(1 + zg'(x(t - l\Delta + T(g, x|_{[t-l\Delta, t-l\Delta+\delta]))})))\delta}, \end{aligned}$$

где

$$K_l = \prod_{m=1}^l \frac{k(1 - zg'(x(t - m\Delta + T(g, x|_{[t-m\Delta, t-m\Delta+\delta]))}))}{1 + zg'(x(t - (m-1)\Delta + T(g, x|_{[t-(m-1)\Delta, t-(m-1)\Delta+\delta]))})).}$$

В силу (48) в последнем тождестве можно почленно перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Учитывая, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} T(g, x|_{[t-m\Delta, t-m\Delta+\delta]}) = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} x'(t) &\equiv \frac{2zE'(t)}{(z + R)(1 + zg'(x(t + T_1)))} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\prod_{m=1}^l \frac{k(1 - zg'(x(t - m\Delta)))}{1 + zg'(x(t + (m-1)\Delta))} \right) \frac{2zE'(t - l\Delta)}{(z + R)(1 + zg'(x(t - l\Delta)))}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $x' \in C^0$.

Итак, разностное уравнение (45) для каждой функции $E \in C^1$ имеет решение $x \in C^1$. Это решение единственное, поскольку аналогичным свойством обладают решения разностного уравнения (46). Тогда в силу теоремы 16 для каждой функции $E \in C^1$ система уравнений (41)–(44) имеет решение $(i, v) \in C_{[0, l] \times \mathbb{R}}^1 \times C_{[0, l] \times \mathbb{R}}^1$. Это решение единственное в силу замечания 6.

Теорема 17 доказана.

Список литературы

- [1] А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, М., 1971; пер. с рум.: A. Halanay, D. Wexler, *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri*, Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, Bucharest, 1968.
- [2] Д. И. Мартынюк, *Лекции по качественной теории разностных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1972.
- [3] А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища школа, Киев, 1992.

- [4] Ch. V. Coffman, J. J. Schäffer, “Dichotomies for linear difference equations”, *Math. Ann.*, **172**:2 (1967), 139–166.
- [5] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbf{Z}$ функций”, *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 662–666; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous linear difference operators in the space of bounded functions on $\mathbf{Z}$ ”, *Math. Notes*, **37**:5 (1985), 360–363.
- [6] В. Е. Слюсарчук, “Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений”, *Укр. матем. журн.*, **39**:5 (1987), 660–662; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Weakly nonlinear perturbations of normally solvable functional-differential and discrete equations”, *Ukrainian Math. J.*, **39**:5 (1987), 540–542.
- [7] А. Г. Баскаков, “Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов”, *Матем. заметки*, **67**:6 (2000), 816–827; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Invertibility and the fredholm property of difference operators”, *Math. Notes*, **67**:6 (2000), 690–698.
- [8] В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Видавництво національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, 2006.
- [9] В. Ю. Слюсарчук, “Умови оборотності нелінійного різницевого оператора $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$ у просторі $l_\infty(\mathbf{Z}, \mathbb{R})$ ”, *Нелінійні коливання*, **9**:2 (2006), 244–263; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Invertibility conditions for the nonlinear difference operator $(\mathcal{D}x)(n) = x(n+1) - f(x(n))$ in the space $l_\infty(\mathbf{Z}, \mathbb{R})$ ”, *Nonlinear Oscil. (N. Y.)*, **9**:2 (2006), 237–256.
- [10] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbf{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 448–454; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for the lipschitzian invertibility of nonlinear difference operators in the spaces $l_p(\mathbf{Z}, \mathbb{R})$ with $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Math. Notes*, **68**:3 (2000), 386–391.
- [11] В. Ю. Слюсарчук, “Необхідні і достатні умови ліпшицевої оборотності нелінійних різницевих операторів у просторі майже періодичних числових послідовностей”, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр.*, №6, Вид-во “Прут”, Чернівці, 2001, 270–276.
- [12] В. Ю. Слюсарчук, “Необхідні і достатні умови існування періодичних розв’язків нелінійного рівняння $x(n+1) - f(x(n)) = h(n)$, $n \in \mathbf{Z}$ ”, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр.*, №7, Вид-во “Прут”, Чернівці, 2001, 237–243.
- [13] Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274; англ. пер.: É. Mukhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11**:3 (1972), 169–172.
- [14] Э. Мухамадиев, *Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ЛОМИ, Л., 1978.
- [15] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116(158)**:4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.
- [16] В. Е. Слюсарчук, “Интегральное представление c -непрерывных линейных операторов”, *Доклады АН УССР, Сер. А*, 1981, №8, 35–38.
- [17] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.

- [18] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42:2** (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. Notes*, **42:2** (1987), 648–651.
- [19] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c -непрерывных функционально-дифференциальных операторов”, *Укр. матем. журн.*, **41:2** (1989), 201–205; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of uniformly c -continuous functional-differential operators”, *Ukrainian Math. J.*, **41:2** (1989), 180–183.
- [20] В. Г. Курбатов, *Линейные дифференциально-разностные уравнения*, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж, 1990.
- [21] Чан Хыу Бонг, *Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Институт математики АН Украины, Киев, 1993.
- [22] В. Е. Слюсарчук, “Метод c -непрерывных операторов в теории импульсных систем”, *Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений* (Душанбе), 1987, 102–103.
- [23] В. Е. Слюсарчук, “Слабо нелинейные возмущения импульсных систем”, *Матем. физика и нелинейная мех.*, 1991, № 15(49), 32–35.
- [24] В. Ю. Слюсарчук, “Теорема про існування неявної недиференційовної функції”, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр.*, № 14, Вид-во “Прут”, Чернівці, 2006, 193–200.
- [25] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: L. Nirenberg, *Topic in nonlinear functional analysis*, Courant Institute of Math. Sciences, New York Univ., New York, 1974.
- [26] А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, *Геометрия*, Наука, М., 1990.
- [27] Г. М. Фиктенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, 6-е изд., Наука, М., 1966; нем. пер. 1-го изд.: G. M. Fikhtengol'ts, *Differential- und Integralrechnung*, vol. I, Hochschulbucher fur Math., **61**, VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1986.
- [28] В. Ю. Слюсарчук, “Обмежені розв’язки системи телеграфних рівнянь”, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. пр.*, № 13, Вид-во “Прут”, Чернівці, 2006, 199–211.
- [29] Д. Нагумо, М. Шимура, “Автоколебания в длинной линии с туннельным диодом”, *ТИИЭР*, **49:8** (1961), 1494–1504.

В. Е. Слюсарчук (V. Ye. Slyusarchuk)
 Национальный университет водного хозяйства
 и природопользования, г. Ровно, Украина
E-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Поступила в редакцию
 05.07.2007 и 15.08.2008