Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ш. Калимуллин, Почти вычислимо перечислимые семейства множеств, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 33–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:25:54

УДК 510.53+510.531+510.532

И. Ш. Калимуллин

Почти вычислимо перечислимые семейства множеств

Построено почти вычислимо перечислимое семейство, не являющееся $\emptyset'$ -вычислимо перечислимым. Более того, установлено, что для любого вычислимо перечислимого (в.п.) множества A существует семейство, являющееся X -в.п. тогда и только тогда, когда множество X не является A -вычислимым.

Библиография: 5 названий.

Пусть X – некоторое подмножество множества натуральных чисел ω и $\mathcal{S}$ – счетное семейство подмножеств ω . Семейство $\mathcal{S}$ называется X -вычислимо перечислимым (X -в.п.), если для некоторой вычислимой функции f имеет место соотношение

$$\mathcal{S} = \{W_{f(n)}^X : n \in \omega\}.$$

Здесь через W_m^X обозначена область определения частичной функции Φ_m^X , вычислимой на машине Тьюринга с оракулом X и гёделевым номером m . В частности, семейство всех X -вычислимо перечислимых подмножеств ω записывается в виде $\{W_n^X : n \in \omega\}$ и поэтому само является X -вычислимо перечислимым. Кроме того, множество $Y \subseteq \omega$ является X -в.п. тогда и только тогда, когда одноэлементное семейство $\{Y\}$ является X -в.п. Далее будет использоваться терминология и обозначения из монографий [1] и [2]. Например, если множество $Y \subseteq \omega$ является X -вычислимым, то говорим, что Y сводится к X по Тьюрингу, и пишем $Y \leq_T X$; через X' обозначается тьюрингов скачок множества X , т.е.

$$X' \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \omega : n \in W_n^X\}.$$

Отметим, что $X \leq_T X'$ и множество X' является X -в.п. Из определения немедленно следует, что дополнение тьюрингова скачка $\overline{X'}$ не является X -в.п. множеством и, следовательно, $X' \not\leq_T X$.

Через $X^{(n)}$ обозначим n -ую итерацию тьюрингова скачка множества X :

$$X^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} X, \quad X^{(n+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (X^{(n)})'.$$

Множество $Y \subseteq \omega$ является $X^{(n)}$ -в.п. тогда и только тогда, когда Y принадлежит уровню Σ_{n+1}^X арифметической иерархии, релятивизованной относительно оракула X .

Если оракул X является пустым множеством $\emptyset$, то в изложенной выше терминологии такой оракул часто будет опускаться. Например, $W_n \stackrel{\text{def}}{=} W_n^\emptyset$, а подмножества ω и их семейства, являющиеся $\emptyset$ -вычислимо перечислимыми, называются просто *вычислимо перечислимыми* (в.п.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00605) и гранта Президента РФ МК-4314.2008.1.

© И. Ш. Калимуллин, 2008

Под *мерой* в настоящей работе мы понимаем стандартную (равномерную) вероятностную меру на канторовом пространстве 2^ω . Будем говорить, что некоторое свойство выполнено *почти для всех* $X \in 2^\omega$, если совокупность тех $X \in 2^\omega$, на которых оно выполнено, имеет меру, равную единице.

Счетное семейство $\mathcal{S}$ назовем *почти вычислимо перечислимым*, если для некоторой вычислимой функции f мера совокупности множеств $X \in 2^\omega$ таких, что

$$\mathcal{S} = \{W_{f(n)}^X : n \in \omega\},$$

больше нуля. Отметим, что за счет выбора вычислимой функции f указанная мера может быть сделана сколь угодно близкой к единице (по теореме Лебега о плотности). В частности, семейство $\mathcal{S}$ почти в.п. тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ является X -в.п. почти для всех $X \in 2^\omega$.

Из следующего результата следует, что в отличие от семейств для подмножеств ω термин “почти в.п.” не имеет смысла.

ТЕОРЕМА 1 (см. Стилвелл [3]). *Пусть $A \subseteq \omega$ и $n \in \omega$. Если A является $X^{(n)}$ -в.п. почти для всех $X \in 2^\omega$, то A является $\mathcal{O}^{(n)}$ -в.п.*

Эта теорема позволяет оценить степень детерминированной перечислимости почти в.п. семейств.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Каждое почти в.п. семейство является $\mathcal{O}''$ -в.п. Кроме того, если почти в.п. семейство состоит лишь из конечных множеств, то оно $\mathcal{O}'$ -в.п.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть семейство $\mathcal{S}$ почти в.п. По теореме 1 все множества из $\mathcal{S}$ являются в.п. Рассмотрим индексное множество

$$I(\mathcal{S}) = \{e \in \omega : W_e \in \mathcal{S}\},$$

полностью описывающее семейство $\mathcal{S}$. Ясно, что если $\mathcal{S}$ является X -в.п., то $I(\mathcal{S})$ будет X'' -в.п. Тогда по теореме 1 множество $I(\mathcal{S})$ является $\mathcal{O}''$ -в.п.

Для случая, когда семейство состоит лишь из конечных множеств, достаточно вместо $I(\mathcal{S})$ рассмотреть множество

$$J(\mathcal{S}) = \{j \in \omega : D_j \in \mathcal{S}\},$$

где $\{D_j\}_{j \in \omega}$ – сильно вычислимая последовательность всех конечных множеств. По теореме 1 множество $J(\mathcal{S})$ будет $\mathcal{O}'$ -в.п.

Вероятно, первым примером почти в.п. семейства, не являющегося в.п., следует считать семейство, построенное Вехнером [4]. Приведем упрощенную версию его построения. Используемая ниже операция $\oplus$, заданная равенством

$$X \oplus Y \stackrel{\text{def}}{=} \{2x : x \in X\} \cup \{2x + 1 : x \in Y\},$$

осуществляет стандартное кодирование двух множеств в одно.

ТЕОРЕМА 3 (см. Вехнер [4]). 1) *Семейство*

$$\mathcal{W} = \{\{e\} \oplus U : e \in \omega, \text{ \& } U \text{ конечно, \& } U \neq W_e\}$$

не является в.п.;

2) существует вычислимая функция d такая, что для всех невычислимых множеств X имеет место соотношение

$$\mathscr{W} = \{W_{d(n)}^X : n \in \omega\}.$$

Таким образом, семейство $\mathscr{W}$ не является X -в.п. лишь для счетного числа различных $X \in 2^\omega$. В частности, $\mathscr{W}$ почти в.п.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $\mathscr{W} = \{W_{f(n)} : n \in \omega\}$ для некоторой вычислимой функции f . Рассмотрим в.п. множество

$$R = \{\langle e, n \rangle : 2e \in W_{f(n)}\}.$$

Так как для каждого $e \in \omega$ в семействе $\mathscr{W}$ найдется по крайней мере одно множество вида $\{e\} \oplus U$, то существует такая вычислимая функция r , что $\langle e, r(e) \rangle \in R$ для всех $e \in \omega$.

Фиксируем теперь вычислимую функцию s такую, что

$$W_{c(e)} = \{x : 2x + 1 \in W_{f(r(e))}\}$$

для всех $e \in \omega$. Так как $W_{f(r(e))} = \{e\} \oplus W_{c(e)} \in \mathscr{C}$, то $W_{c(e)} \neq W_e$ для всех $e \in \omega$, что противоречит теореме рекурсии.

2) Выберем сильно вычислимый массив конечных множеств $\{W_{e,s}\}_{e,s \in \omega}$ такой, что

$$W_e = \bigcup_s W_{e,s}, \quad W_{e,s} \subseteq W_{e,s+1}$$

для всех $e, s \in \omega$. Кроме того, пусть $\{D_j\}_{j \in \omega}$ – сильно вычислимая последовательность всех конечных множеств. Для $X \subseteq \omega$ и $j \in \omega$ введем обозначение

$$X_j \stackrel{\text{def}}{=} D_j \cup (X \oplus \overline{X}).$$

Ясно, что X_j в.п. тогда и только тогда, когда X вычислимо.

Применяя s-m-n теорему, найдем такую вычислимую функцию g , что $W_{g(e,j,y,u)}^X = D_j$, если $y \in (W_{e,t} - D_j) \cup (D_j - W_{e,t})$ для всех $t \geq u$, а в противном случае

$$W_{g(e,j,y,u)}^X = D_j \cup \{x \in X_j : (\exists s)[x \leq \ell^X(e, j, s)]\},$$

где $\ell^X(e, j, s) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x \leq s : (\forall y < x)[y \in W_{e,s} \iff x \in X_j]\}$.

Пусть множество X не вычислимо. Тогда для всех $e, j \in \omega$ существует предел $\ell^X(e, j) = \lim_s \ell^X(e, j, s)$, так как иначе $X_j = W_e$ и, следовательно, X вычислимо. Поэтому $W_{g(e,j,y,u)}^X$ конечно и $W_{g(e,j,y,u)}^X \neq W_e$ для всех $e, j, y, u \in \omega$. С другой стороны, пусть $D_j \neq W_e$ для некоторых $e, j \in \omega$. Тогда существуют такие y и u , что $y \in (W_{e,t} - D_j) \cup (D_j - W_{e,t})$ для всех $t \geq u$ и, следовательно, $W_{g(e,j,y,u)}^X = D_j$. Поэтому вычислимая функция d , определяемая равенством $W_{d(\langle e,j,y,u \rangle)}^X = \{e\} \oplus W_{g(e,j,y,u)}^X$, удовлетворяет части 2) теоремы.

Таким образом, оценка “ $\emptyset'$ -в.п.” из следствия 2 для почти в.п. семейств конечных множеств не может быть улучшена до “ $\emptyset$ -в.п.”. Покажем теперь, что оценка “ $\emptyset''$ -в.п.” для произвольных почти в.п. семейств не улучшается до “ $\emptyset'$ -в.п.”.

Используя методику из доказательства теоремы 3, будем искать почти в.п. семейство, не являющееся $\emptyset'$ -в.п., среди семейств вида

$$\mathcal{W}(\emptyset', \mathcal{R}) = \{\{e\} \oplus U : e \in \omega \text{ \& } U \in \mathcal{R} \text{ \& } U \neq W_e^{\emptyset'}\},$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое бесконечное в.п. семейство. По теореме рекурсии семейства такого вида не могут быть $\emptyset'$ -в.п. В силу следствия 2 семейство $\mathcal{R}$ должно содержать по крайней мере одно бесконечное множество. Более того, если $\mathcal{R}$ содержит некоторое непустое конечное множество F , то семейство $\mathcal{W}(\emptyset', \mathcal{R})$ не является почти в.п. Действительно, в противном случае множество $J(\mathcal{W}(\emptyset', \mathcal{R}))$ из доказательства следствия 2 будет $\emptyset'$ -в.п. Отсюда получаем противоречие следующим образом. Найдем вычислимые функции f и g такие, что для всех $e \in \omega$

$$W_{g(e)}^{\emptyset'} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } e \notin \emptyset'', \\ F, & \text{если } e \in \emptyset'', \end{cases} \quad D_{f(e)} = \{g(e)\} \oplus F.$$

Тогда

$$e \notin \emptyset'' \iff f(e) \in J(\mathcal{W}(\emptyset', \mathcal{R}))$$

и, следовательно, $\overline{\emptyset''}$ является $\emptyset'$ -в.п., что невозможно. Таким образом, в качестве в.п. семейства $\mathcal{R}$ мы не можем взять семейство всех вычислимых множеств или семейство всех вычислимо перечислимых множеств. Если же в этих семействах удалить все конечные множества, то получим заведомо не в.п. семейства.

Докажем теперь, что можно положить $\mathcal{R}$ равным семейству $\mathcal{P}$ всех областей значения строго возрастающих примитивно рекурсивных функций. Мы установим, что $\mathcal{W}(\emptyset', \mathcal{P})$ является X -в.п. тогда и только тогда, когда $X \not\leq_T \emptyset'$. Более того, множество $\emptyset'$ в последнем утверждении можно заменить на произвольное в.п. множество A .

ЛЕММА 1. *Если $C \in \mathcal{P}$, $C \subseteq B$ и B примитивно рекурсивно, то $B \in \mathcal{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C = \text{rng } p$, где p – строго возрастающая примитивно рекурсивная функция. Тогда $B = \text{rng } q$ для строго возрастающей примитивно рекурсивной функции q , определенной по индукции следующим образом:

$$q(0) = \min B; \quad q(n+1) = \min\{b \leq p(n+1) : b > q(n) \text{ \& } b \in B\}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть A – в.п. множество. Тогда существует вычислимая функция g такая, что для произвольных $X \not\leq_T A$ и $e \in \omega$ множество $W_{g(e)}^X$ примитивно рекурсивно и $W_{g(e)}^X \neq W_e^A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вычислимой перечислимости множества A существует сильно вычислимый массив конечных множеств $\{V_{e,s}\}_{e,s \in \omega}$ такой, что

$$W_e^A = \bigcup_u \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}$$

для всех $e \in \omega$, причем

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle e, x, u \rangle : (\forall s \geq u) [x \in V_{e,s}]\} \leq_T A.$$

Определим также

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle e, x, u \rangle \in M : (\forall t < u) [\langle e, x, t \rangle \notin M]\}.$$

Очевидно, что $N \leq_T A$ и $N = \{\langle e, x, u \rangle \in M : u = 0 \vee x \notin V_{e, u-1}\}$.

Отождествим множество натуральных чисел ω с множеством T всех конечных строк в алфавите $\omega \cup \{\omega\}$ при помощи такой нумерации, что соответствие

$$\sigma \mapsto \text{длина строки } \sigma$$

и предикаты

$$\begin{aligned} P_1(\sigma, i, x) &= \text{“символ } x \in \omega \text{ является } i\text{-м символом строки } \sigma\text{”}, \\ P_2(\sigma, i) &= \text{“символ } \omega \text{ является } i\text{-м символом строки } \sigma\text{”} \end{aligned}$$

примитивно рекурсивны. В частности, для $\sigma \in T$ и $n \in \omega$ запись $\sigma < n$ означает, что номер, соответствующий строке σ , меньше n . Для $\sigma, \tau \in T$ будем писать $\sigma \subseteq \tau$ ($\sigma \subset \tau$), если строка σ является (собственным) началом τ , конкатенацию строк σ и τ будем обозначать через $\sigma * \tau$. Длина строки σ обозначается через $|\sigma|$.

Фиксируем $e \in \omega$ и $X \not\leq_T A$. Пусть $\hat{X} = X \oplus \bar{X}$. Очевидно, что $\hat{X} \equiv_T X$ и $\hat{X}$ не является A -в.п. Определим множество $Z = W_{g(e)}^X$ с помощью следующего X -вычислимого построения.

Шаг $s = 0$. Положим $Z_0 = \emptyset$.

Шаг $s + 1$. Пусть конечное множество Z_s уже определено. Положим

$$\ell(s) = \min\{x + u : (\forall t) [u \leq t < s \implies x \in V_{e, t} \ \& \ x \notin Z_t]\}.$$

Определим

$$\begin{aligned} Z_{s+1} &= Z_s \cup \{\sigma < \ell(s) : |\sigma| \in \hat{X} \ \& \ (\forall \tau) [\tau * \omega \subseteq \sigma \implies |\tau| \notin \hat{X}]\} \\ &\cup \{\sigma < \ell(s) : (\exists t < s) (\exists \tau) (\exists u \leq t) [\tau * u \subseteq \sigma \ \& \ \tau \notin V_{e, t}]\} \\ &\cup \{\sigma < \ell(s) : (\exists \tau) (\exists u > 0) [\tau * u \subseteq \sigma \ \& \ \tau \in V_{e, u-1}]\}, \end{aligned}$$

где переменные σ и τ действуют на множестве конечных строк T .

Докажем теперь, что множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_s Z_s$ примитивно рекурсивно и $Z \neq W_e^A$. Предположим сначала, что $W_e^A \not\subseteq Z$. Тогда $\lim_s \ell(s) < \infty$, множество Z конечно и, тем более, примитивно рекурсивно. Поэтому можем считать, что $W_e^A \subseteq Z$ и, следовательно, $\lim_s \ell(s) = \infty$.

Назовем строку $\sigma \in T$ *правильной*, если для любого ее начала вида $\tau * u$, где $u \in \omega$, справедливо $\langle e, \tau, u \rangle \in N$. Заметим, что если строка $\sigma \in Z$ правильна, то $|\sigma| \in \hat{X}$. Тем более справедливо следующее утверждение:

$$\text{строка } \sigma \in W_e^A \text{ правильна} \implies |\sigma| \in \hat{X}$$

для всех σ . Поскольку правильность строки проверяется эффективно с помощью оракула A и $\hat{X}$ не A -в.п., существует такое $n \in \hat{X}$, что $\sigma \notin W_e^A$ для всех правильных строк σ длины n . Выберем наименьшее возможное $n \in \hat{X}$ с указанным свойством.

Тогда для каждого $m < n$, $m \in \hat{X}$, существует правильная строка $\sigma_m \in W_e^A$ длины m . При этом заметим, что если $\tau * \omega \subseteq \sigma_m$, то $|\tau| \notin \hat{X}$, поскольку

$\sigma_m \in Z$. Если же $\tau * u \subseteq \sigma_m$, $u \in \omega$, то в силу правильности строки σ имеем $\langle e, \tau, u \rangle \in N$ и поэтому $\tau \in W_e^A \subseteq Z$ и $|\tau| \in \hat{X}$. Таким образом, строки σ_m при $m < n$, $m \in \hat{X}$, определены однозначно и имеют общее продолжение.

Определим строку σ_n длины n , одно из таких продолжений, исходя из следующих условий:

$$\begin{aligned} \tau \subset \sigma_n \ \& \ |\tau| \notin \hat{X} &\implies \tau * \omega \subseteq \sigma_n, \\ \tau \subset \sigma_n \ \& \ |\tau| \in \hat{X} &\implies \tau * u \subseteq \sigma_n \ \& \ \langle e, \tau, u \rangle \in N \end{aligned}$$

для всех строк τ . Очевидно, что данные условия описывают однозначно правильную строку σ_n длины n . Так как $n \in \hat{X}$, то $\sigma_n \in Z$. С другой стороны, $\sigma_n \notin W_e^A$ по выбору n . Таким образом, $Z \neq W_e^A$. Кроме того, если $\sigma_n * u \subseteq \rho$ и $u \in \omega$, то $\rho \in Z$, так как $\langle e, \sigma_n, u \rangle \notin N$. Тогда

$$\begin{aligned} Z = \{ \rho \in T : (\exists \tau \subseteq \sigma_n) (\exists u \in \omega) [\tau * u \subseteq \rho \ \& \ \tau * u \not\subseteq \sigma_n] \} \\ \cup \{ \sigma_m : m \leq n \ \& \ m \in \hat{X} \}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следует примитивная рекурсивность множества Z .

ЛЕММА 3. Пусть A – в.п. множество. Тогда существует вычислимая функция h такая, что для произвольных $X \not\leq_T A$ и $e \in \omega$ имеет место $W_{h(e)}^X \in \mathcal{P}$ и $W_{h(e)}^X \neq W_e^A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – вычислимая функция из леммы 2. Фиксируем вычислимые функции a и b такие, что $W_{a(e)}^X = W_e^X \oplus \omega = \{2x : x \in W_e^X\} \cup \{2x+1 : x \in \omega\}$ и $W_{b(e)}^X = \{x : 2x \in W_e^X\}$ для всех $e \in \omega$ и $X \subseteq \omega$. Полагаем $h = a \circ g \circ b$. Пусть $e \in \omega$ и $X \not\leq_T A$. Тогда $W_{h(e)}^X \neq W_e^A$. По лемме 1 из примитивной рекурсивности множества $W_{h(e)}^X$ и соотношения $\{2x+1 : x \in \omega\} \subseteq W_{h(e)}^X$ следует, что $W_{h(e)}^X \in \mathcal{P}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – произвольное в.п. множество и $\mathcal{P}$ – семейство всех областей значения строго возрастающих примитивно рекурсивных функций. Тогда

1) семейство

$$\mathcal{W}(A, \mathcal{P}) = \{ \{e\} \oplus U : e \in \omega \ \& \ U \in \mathcal{P} \ \& \ U \neq W_e^A \}$$

не является A -в.п.;

2) существует вычислимая функция d такая, что для всех $X \not\leq_T A$ имеет место

$$\mathcal{W}(A, \mathcal{P}) = \{ W_{d(n)}^X : n \in \omega \}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Семейство $\mathcal{W}(\mathcal{O}', \mathcal{P})$ является почти в.п., но не $\mathcal{O}'$ -в.п.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. 1) Как и при доказательстве части 1) теоремы 3, рассуждая от противного, приходим к вычислимой функции $c(e)$ такой, что

$$W_{c(e)}^A \neq W_e^A$$

для всех $e \in \omega$, что противоречит теореме рекурсии.

2) Для доказательства существования функции d необходимо зафиксировать следующее:

- а) вычислимую последовательность $\{g_j\}_{j \in \omega}$ всех строго возрастающих примитивно рекурсивных функций (тогда $\mathcal{P} = \{\text{rng } g_j : j \in \omega\}$, причем предикат $P(j, y) = "y \in \text{rng } g_j"$ будет вычислимым);
- б) сильно вычислимый массив конечных множеств $\{V_{e,s}\}_{e,s \in \omega}$ такой, что

$$W_e^A = \bigcup_u \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}$$

для всех $e \in \omega$;

- в) вычислимую функцию k такую, что для всех $e, j, s \in \omega$

$$W_{k(e,j,s)}^A = \{x : g_j(x+s) \in W_e^A\};$$

- г) вычислимую функцию h из леммы 3.

Поскольку $W_{h(e)}^X \neq W_e^A$ и $W_{h(e)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leq_T A$, то для вычислимой функции $\tilde{h}$ такой, что

$$W_{\tilde{h}(e,j,s)}^X = \{g_j(x) : x < s\} \cup \{g_j(x+s) : x \in W_{h(k(e,j,s))}^X\},$$

также имеет место $W_{\tilde{h}(e,j,s)}^X \neq W_e^A$ и $W_{\tilde{h}(e,j,s)} \in \mathcal{P}$, если $X \not\leq_T A$ и $e, j, s \in \omega$.

Обозначим через v вычислимую функцию

$$v(e, y, s) = \min\{u \leq s : (\forall t) [u \leq t < s \implies y \in V_{e,t}]\},$$

неубывающую относительно переменной s .

Определим вычислимую функцию d_1 так, что

$$W_{d_1(e,j,y)}^X = \{g_j(x) : (\exists s > x) [y \notin V_{e,s} \vee g_j(x) \in W_{h(e,j,v(e,y,s))}^X]\}.$$

Очевидно, что если $y \notin W_e^A$, то $W_{d_1(e,j,y)}^X = \text{rng } g_j$. Если же $y \in W_e^A$, то существует предел $u = \lim_s v(e, y, s)$. Тогда $W_{d_1(e,j,y)}^X = W_{h(e,j,u)}^X$, откуда следует, что $W_{d_1(e,j,y)}^X \neq W_e^A$ и $W_{d_1(e,j,y)} \in \mathcal{P}$ при $X \not\leq_T A$.

Определим теперь вычислимую функцию d_2 так, что

$$W_{d_2(e,j,y,u)}^X = \begin{cases} \text{rng } g_j, & \text{если } y \in \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}, \\ W_{h(e,j,t)}^X, & \text{если } t = \min\{s \geq u : y \notin V_{e,s}\}. \end{cases}$$

Убедимся, что вычислимая функция d такая, что

$$W_{d(\langle e,j,y,u \rangle)}^X = \begin{cases} \{e\} \oplus W_{d_1(e,j,y)}^X, & \text{если } u = 0 \text{ и } y \in \text{rng } g_j, \\ \{e\} \oplus W_{d_2(e,j,y,u)}^X, & \text{если } u > 0 \text{ и } y \notin \text{rng } g_j, \\ \{e\} \oplus W_{h(e)}^X & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $n = \langle e, j, y, u \rangle \in \omega$ и $X \subseteq \omega$, удовлетворяет утверждению теоремы.

Пусть $X \not\leq_T A$. Отметим сначала, что по построению $W_{d(n)}^X \in \mathcal{W}(A, \mathcal{P})$ для всех $n \in \omega$. Предположим, что $\{e\} \oplus \text{rng } g_j \in \mathcal{W}(A, \mathcal{P})$. Тогда $\text{rng } g_j \neq W_e^A$. Если $y \in \text{rng } g_j - W_e^A$, то $W_{d(n)}^X = \{e\} \oplus \text{rng } g_j$ при $n = \langle e, j, y, 0 \rangle$. Если же $y \in W_e^A - \text{rng } g_j$, то $y \in \bigcap_{s \geq u} V_{e,s}$ для некоторого $u > 0$ и, следовательно, $W_{d(n)}^X = \{e\} \oplus \text{rng } g_j$ при $n = \langle e, j, y, u \rangle$.

Таким образом, $\mathcal{W}(A, \mathcal{P}) = \{W_{d(n)}^X : n \in \omega\}$.

Доказанная теорема 4 имеет также другое интересное следствие. Известно (см. [5]), что каждое счетное семейство $\mathcal{S}$ можно закодировать в некоторый счетный неориентированный граф $\Gamma(\mathcal{S})$ так, что для всех множеств $X \subseteq \omega$ справедливо следующее утверждение:

$\mathcal{S}$ является X -в.п. $\iff \Gamma(\mathcal{S})$ имеет X -вычислимую изоморфную копию.

Класс тьюринговых степеней множеств $X \subseteq \omega$, для которых счетная алгебраическая система $\mathcal{A}$ имеет X -вычислимую изоморфную копию, называется *спектром степеней системы $\mathcal{A}$* и обозначается через $\mathbf{Sp}(\mathcal{A})$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для каждой в.п. степени $\mathbf{a}$ существует счетная алгебраическая система $\mathcal{A} = \Gamma(\mathcal{W}(A, \mathcal{P}))$, где A – в.п. множество степени $\mathbf{a}$, такая, что

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{a}\}.$$

В частности (при $\mathbf{a} = \mathbf{0}'$), существует система со спектром степеней, состоящим из всех не- Δ_2^0 степеней.

В связи с этим интересным представляется вопрос о существовании почти вычислимой алгебраической системы (т.е. такой, мера спектра степеней которой равна единице), не являющейся $\emptyset^{(n)}$ -вычислимой при как можно большем $n \geq 2$ или вообще не имеющей арифметического представления.

Список литературы

- [1] Х. Роджерс мл., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: Н. Rogers, jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1967.
- [2] R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1987; рус. пер.: Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казанское мат. общество, Казань, 2000.
- [3] J. Stillwell, “Decidability of the “almost all” theory of degrees”, *J. Symbolic Logic*, **37**:3 (1972), 501–506.
- [4] S. Wehner, “Enumerations, countable structures and Turing degrees”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:7 (1998), 2131–2139.
- [5] S. Goncharov, V. Harizanov, J. Knight, Ch. McCoy, R. Miller, R. Solomon, “Enumerations in computable structure theory”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **136**:3 (2005), 219–246.

И. Ш. Калимуллин (I. Sh. Kalimullin)
 Механико-математический факультет
 Казанского государственного университета
 E-mail: Iskander.Kalimullin@ksu.ru

Поступила в редакцию
 09.07.2007 и 03.04.2008