Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Скалыга, Аналог неравенства А.А. Маркова для полиномов от двух переменных, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 9, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:20:46

УДК 517.16

В. И. Скалыга

Аналог неравенства А. А. Маркова для полиномов от двух переменных

Получена точная оценка для частной производной любого порядка полиномов от двух переменных в точках вне единичного шара из l_2^2 для полиномов, нормированных на чебышёвской сетке точек единичного шара из l_1^2 .

Библиография: 8 названий.

В. А. Марков (см. [1; гл. 3, § 34]) в 1892 г. доказал неравенство для алгебраического полинома P_n с действительными коэффициентами степени не выше n

$$|P_n^{(k)}(x_0)| \leq T_n^{(k)}(1) \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)|, \quad -1 \leq x_0 \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

где $T_n(\cdot)$ – полином Чебышёва, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. При $k = 1$ неравенство (1) получил А. А. Марков в 1889 г. (см. [2]). Из его доказательства следует неравенство

$$|P_n^{(k)}(x_0)| \leq |T_n^{(k)}(x_0)| \max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)|, \quad |x_0| \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2)$$

Оценкам производных полиномов во внутренних точках отрезка и обобщению этих оценок и неравенств (1) и (2) в различных пространствах и для различных метрик полиномов посвящено большое число работ (см., например, обзоры [3] и [4]).

Точные решения экстремальных задач для производных полиномов применяются в теории приближений, например в задачах восстановления функционалов производных полиномов по неточной информации (см. [5; гл. 2, § 6.5]). При этом значение точной оценки является погрешностью оптимального метода восстановления. Если определена сетка узлов в обобщенном равенстве Рисса, то определен и оптимальный метод восстановления.

Обозначим через $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ пространство алгебраических полиномов от двух переменных с действительными коэффициентами степени не выше n . В работе автора [6] получен следующий аналог неравенства (2) для $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Пусть множество S – чебышёвская сетка точек на единичном шаре $B \subset l_1^2$, $B = \{(x, y) \in X : |x| + |y| \leq 1\}$:

$$S = \left\{ (x, y) : x + y = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad x - y = \cos \frac{j\pi}{n}, \quad i, j = 0, \dots, n \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-00275 и № 08-01-00450).

Для ограниченного множества $G \subset \mathbb{R}^2$ положим

$$\|P_n\|_G = \sup_{(x,y) \in G} |P_n(x,y)|.$$

Пусть

$$P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \|P_n\|_S \leq 1, \quad \max\{|x_0|, |y_0|\} \geq 1, \quad 0 \leq k + s \leq n.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|(P_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0)| \leq T_n^{(s+k)}(|x_0| + |y_0|). \quad (3)$$

Из неравенства (3) вытекают точные аналоги неравенств (1) и (2) для производных полиномов, нормированных на центрально-симметричных выпуклых телах в вещественных нормированных пространствах (см. [6]). В настоящей работе неравенство (3) распространено на точки более широкого множества $x^2 + y^2 \geq 1$. В работе [6] показано, что при $\|P_n\|_B \leq 1$ и $ks = 0$ неравенство (3) справедливо для $|x_0| + |y_0| \geq 1$. Вопрос, выполняется ли неравенство (3) при

$$\|P_n\|_B \leq 1, \quad x_0^2 + y_0^2 < 1, \quad |x_0| + |y_0| \geq 1, \quad k, s \geq 1, \quad k + s \leq n - 2,$$

остается открытым.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \|P_n\|_S \leq 1, \quad x_0^2 + y_0^2 \geq 1, \quad 0 \leq k + s \leq n.$$

Тогда выполнено неравенство (3). Если

$$0 \leq k + s \leq n - 1, \quad x_0 y_0 \neq 0, \quad x_0^2 + y_0^2 \geq 1,$$

то равенство в (3) имеет место только для полиномов $\pm T_n(\gamma_1 x + \gamma_2 y)$, где

$$\gamma_1 = \operatorname{sgn} x_0, \quad \gamma_2 = \operatorname{sgn} y_0.$$

Доказательство теоремы достаточно длинное вследствие обилия формул, поэтому вначале приведем схему доказательства. Суть доказательства в следующем. Полином P_n разлагается на сумму полиномов, каждый из которых представляется в виде интерполяционного полинома Лагранжа, построенного для соответствующей сетки точек. Затем исследуются фундаментальные полиномы этих представлений и доказывается обобщенное равенство Рисса с уже известными параметрами, что приводит к решению задачи. Приведем необходимые определения.

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(x, y) &= \frac{T_n(x+y) + T_n(x-y)}{2}, & \tilde{T}_n(x, y) &= \frac{T_n(x+y) - T_n(x-y)}{2}, \\ S_0 &= \{(x, y) \in B : |\bar{T}_n(x, y)| = 1\}, & S_1 &= \{(x, y) \in B : |\tilde{T}_n(x, y)| = 1\}. \end{aligned}$$

Множество S_0 состоит из точек пересечения прямых $x + y = \cos(i\pi/n)$ с прямыми $x - y = \cos(j\pi/n)$, $i, j = 0, \dots, n$, при $i - j \equiv 0 \pmod{2}$, а множество S_1

состоит из точек пересечения прямых того же вида, но при $i - j \equiv 1 \pmod{2}$. Множества S_0 и S_1 симметричны, каждое относительно прямых $y = 0$ и $x = 0$. Ясно, что $S = S_0 \cup S_1$.

Пусть

$$S_0^+ = \{z = (x, y) \in S_0 : y \geq 0\}, \quad S_1^+ = \{z = (x, y) \in S_1 : y > 0\}.$$

Пусть $\tilde{P}_n$ и $\bar{P}_n$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно нечетный и четный по переменной y , а $P_{n,1}$ и $P_{n,2}$ – полиномы из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, соответственно нечетный и четный по переменной x .

В работе [6] автором получены представления полиномов $\bar{P}_n$ и $\tilde{P}_n$ в виде интерполяционных полиномов Лагранжа для сеток точек S_0^+ и S_1^+ соответственно

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{z_i \in S_0^+} \bar{P}_n(x_i, y_i) \bar{F}_{n,z_i}(x, y), \quad (4)$$

$$\tilde{P}_n(x, y) = \sum_{z_i \in S_1^+} \tilde{P}_n(x_i, y_i) \tilde{F}_{n,z_i}(x, y), \quad (5)$$

где $z_i = (x_i, y_i)$ и $\bar{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot)$, $\tilde{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot)$ – фундаментальные полиномы, т.е. полином $\bar{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot)$ (соответственно $\tilde{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot)$) равен единице в точке z_i и равен нулю в точках множества $S_0^+ \setminus z_i$ (соответственно $S_1^+ \setminus z_i$). Полиномы

$$\bar{P}_{n,z_i} = T_n(x_i + y_i) \bar{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot), \quad \tilde{P}_{n,z_i}(\cdot, \cdot) = T_n(x_i + y_i) \tilde{F}_{n,z_i}(\cdot, \cdot)$$

называются (см. [6]) *элементарными*, они приведены в лемме 5. Для полиномов $P_{n,2}$ и $P_{n,1}$ имеют место представления, аналогичные (4) и (5).

Пусть

$$P_n = \tilde{P}_n + \bar{P}_n = P_{n,1} + P_{n,2}.$$

Тогда

$$P_n = \lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2} + \lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1}, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (6)$$

Подставляя в равенство (6) описанные выше представления для $\bar{P}_n$, $\tilde{P}_n$, $P_{n,1}$, $P_{n,2}$ и разложения соответствующих элементарных полиномов из леммы 5, получим равенство

$$P_n(x, y) = \sum_{z_i \in S} P_n(x_i, y_i) T_n(x_i + y_i) H_{n,z_i}(x, y, \lambda). \quad (7)$$

Из (7) следует обобщенное равенство Рисса

$$(P_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0) = \sum_{z_i \in S} P_n(x_i, y_i) T_n(x_i + y_i) (H_{n,z_i})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda), \quad (8)$$

где при $x_0 \geq \lambda$, $y_0 \geq 1 - \lambda$, $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$, $\lambda \in [0, 1]$

$$(H_{n,z_i})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda) \geq 0, \quad z_i = (x_i, y_i) \in S. \quad (9)$$

Неравенство (9) доказывается в лемме 6, оно вытекает из разложений элементарных полиномов.

Равенство (8) равносильно уравнению экстремали исследуемой выпуклой экстремальной задачи. Из (8) и (9) ясно, что при $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$ экстремалью является полином $T_n(x+y)$. В силу симметрии S относительно координатных осей получаем неравенство (3).

Доказательству теоремы предположим несколько лемм. Леммы 1, 2, 5 доказаны ранее и имеют справочный характер. Леммы 3 и 4 нужны для доказательства единственности экстремали при $k+s \leq n-1$ и $x_0 y_0 \neq 0$, а также для описания множества экстремалей при $k+s \leq n$ и $x_0 y_0 = 0$ (замечание 2). В лемме 6 (основной) попутно доказываются несколько новых точных оценок.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $\overline{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ соответственно пространства нечетных и четных полиномов по переменной y , а через $\mathfrak{P}_{n,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{P}_{n,2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ – соответственно пространства нечетных и четных по переменной x полиномов из $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_i &= \cos \frac{i\pi}{n}, \quad b_i = \sin \frac{i\pi}{n}, \quad 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \\ d_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad e_i = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor; \\ U_0(x, y) &= y; \\ U_i(x, y) &= \frac{x^2}{a_i^2} + \frac{y^2}{b_i^2} - 1 \quad \text{при } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor; \\ U_{n/2}(x, y) &= x, \quad \text{если } n \equiv 0 \pmod{2}; \\ V_i(x, y) &= \frac{x^2}{d_i^2} + \frac{y^2}{e_i^2} - 1 \quad \text{при } 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \\ V_{(n+1)/2}(x, y) &= x, \quad \text{если } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Пусть $E(a)$ – множество всех точек эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1-a^2} = 1, \quad 0 < a < 1.$$

ЛЕММА 1 (см. [6]). Пусть точка $z = (x, y)$ принадлежит $E(a)$. Тогда выполнены равенства

$$\overline{T}_n(x, y) = \cos(n\theta) \cos(n\varphi), \quad \tilde{T}_n(x, y) = \sin(n\theta) \sin(n\varphi),$$

где $\cos \theta = x/a$, $\sin \theta = y/b$, $b = \sqrt{1-a^2}$, $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = b$.

Точки множества S_0^+ имеют представление

$$z = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Количество точек множества S_0^+ равно размерности пространства $\overline{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Соответственно точки из множества S_1^+ имеют представление

$$z = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0} e_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

число точек множества S_1^+ равно размерности пространства $\tilde{\mathfrak{P}}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

ЛЕММА 2 (см. [7]). Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $n \geq 2$, и $P_n(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$. Тогда существует $P_{n-2} \in \mathfrak{P}_{n-2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ такой, что

$$P_n(x, y) = (1 - x^2 - y^2)P_{n-2}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

ЛЕММА 3. Пусть $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Если $P_n(x, y) = 0$ во всех точках $(x, y) \in S_0$, то

$$P_n = \tilde{P}_{n,1} \quad \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \quad P_n = \tilde{P}_{n,2} \quad \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}.$$

Если $P_n(x, y) = 0$ во всех точках $(x, y) \in S_1$, то

$$P_n = \bar{P}_{n,2} \quad \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \quad P_n = \bar{P}_{n,1} \quad \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$ и $P_n(x, y) = 0$ во всех точках $(x, y) \in S_0$. Тогда из леммы 1 следует, что при $(x, y) \in E(a_i)$, $1 \leq i \leq n/2 - 1$

$$R_n(\theta) = P_n(x, y) = P_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta) = c_i \sin(n\theta), \quad (10)$$

поскольку тригонометрический полином $R_n(\cdot)$ равен нулю в точках $j\pi/n$, $j = 0, \dots, 2n - 1$.

Пусть $P_n = \bar{P}_n + \tilde{P}_{n,1} + \tilde{P}_{n,2}$. Тогда

$$\bar{P}_n(x, y) = \tilde{P}_{n,1}(x, y) = \tilde{P}_{n,2}(x, y) = 0 \quad \text{при } (x, y) \in S_0. \quad (11)$$

Из равенства (10) следует, что

$$\bar{P}_n(x, y) = \tilde{P}_{n,2}(x, y) = 0 \quad \text{при } (x, y) \in E(a_i), \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1. \quad (12)$$

Поскольку при четном n точки $(0, \cos(j\pi/n))$ и $(\cos(j\pi/n), 0)$, $0 \leq j \leq n$, принадлежат S_0 , то из равенств (11), (12) и леммы 2 следуют представления

$$\bar{P}_n(x, y) = \lambda_1 xy^2 \prod_{1 \leq i \leq n/2-1} U_i(x, y), \quad (13)$$

$$\tilde{P}_{n,2}(x, y) = \lambda_2 x^2 y \prod_{1 \leq i \leq n/2-1} U_i(x, y). \quad (14)$$

В правых частях равенств (13) и (14) полиномы степени $n + 1$, поэтому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Напомним, что множество точек $G \subset \mathbb{R}^2$ называется *интерполяционной системой* точек для полиномов P_n из некоторого пространства полиномов $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, если число точек в G равно размерности пространства $\mathcal{P}_n$, и из равенства $P_n(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in G$ следует равенство $P_n = 0$.

Положим

$$T_{n,1}(x, y) = \frac{T_n(x+y) - T_n(y-x)}{2}, \quad T_{n,2}(x, y) = \frac{T_n(x+y) + T_n(y-x)}{2},$$

$$M_0 = \{(x, y) \in B : |T_{n,2}(x, y)| = 1\}, \quad M_1 = \{(x, y) \in B : |T_{n,1}(x, y)| = 1\}.$$

При $n \equiv 0 \pmod{2}$ имеем

$$\bar{T}_n = T_{n,2}, \quad \tilde{T}_n = T_{n,1}, \quad S_0 = M_0, \quad S_1 = M_1,$$

при $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$\bar{T}_n = T_{n,1}, \quad \tilde{T}_n = T_{n,2}, \quad S_0 = M_1, \quad S_1 = M_0.$$

Пусть $M_0^+ \{(x, y) \in M_0 : x \geq 0\}$, $M_1^+ \{(x, y) \in M_1 : x > 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 1 и леммы 3 следует, что множества S_0^+ , S_1^+ , M_0^+ , M_1^+ являются интерполяционными системами точек соответственно для полиномов $\bar{P}_n$, $\tilde{P}_n$, $P_{n,2}$, $P_{n,1}$.

Пусть $D_0 = \{(x, 0) \in S : x \geq 0\}$, $D_1 = \{(0, y) \in S : y \geq 0\}$.

ЛЕММА 4. Множества $S_1 \cup D_0$, $S_1 \cup D_1$ при $n \equiv 0 \pmod{2}$ и множества $S_1 \cup D_0$, $S_0 \cup D_1$ при $n \equiv 1 \pmod{2}$ являются интерполяционными системами точек для полиномов P_n из пространства $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число точек в этих множествах равно $(n+1)(n+2)/2$, что совпадает с размерностью пространства $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Пусть $n \equiv 1 \pmod{2}$ и полином $P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ равен нулю во всех точках множества $S_0 \cup D_1$. Тогда из леммы 3 следует, что $P_n = \tilde{P}_{n,2}$, и поскольку точки $(0, \cos(j\pi/n))$, $j = 0, \dots, (n-1)/2$, принадлежат D_1 , то полином $\tilde{P}_{n,2}$ равен нулю на прямой $x = 0$. Как показано в лемме 3,

$$\tilde{P}_{n,2}(x, y) = \tilde{P}_{n,2}(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta) = c_i \sin(n\theta) \quad \text{при } (x, y) \in E(a_i).$$

Но при n нечетном $\sin(n\pi/2) \neq 0$, поэтому $c_i = 0$, $1 \leq i \leq (n-1)/2$, и из леммы 2 следует, что

$$P_n(x, y) = \tilde{P}_{n,2}(x, y) = cx^2y \prod_{1 \leq i \leq (n-1)/2} U_i(x, y). \quad (15)$$

Если $c \neq 0$, то в правой части представления (15) стоит полином степени $n+2$, а в левой части – полином степени не выше n . Поэтому $P_n = 0$. Для остальных множеств доказательство аналогично.

Пусть множество G равно какому-либо из множеств S_0^+ , S_1^+ , M_0^+ , M_1^+ и пространство $\mathcal{P}_n(G)$ обозначает соответствующее из пространств $\bar{\mathfrak{P}}_n$, $\tilde{\mathfrak{P}}_n$, $\mathfrak{P}_{n,2}$, $\mathfrak{P}_{n,1}$.

Полином $P_{n,z_*}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_n(G)$ называется (см. [6]) элементарным полиномом на G с носителем в точке $z_* = (x_*, y_*) \in G$, если $P_{n,z_*}(x, y) = 0$ для точек $(x, y) \in G \setminus z_*$ и $P_{n,z_*}(x_*, y_*) = T_n(x_* + y_*)$.

ЛЕММА 5 (см. [6]). Для элементарных полиномов P_{n,z_*} имеют место представления

$$\bar{P}_{n,z_*}(x, y) = c_{i_0, i_1} y^\gamma (x^\alpha + x_*) R_{i_0, i_1}(x, y) \prod_{\substack{0 \leq i \leq [n/2] \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y),$$

где

$$z_* = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad c_{i_0, i_1} > 0, \\ \alpha = \operatorname{sgn}(|x_*|), \quad \gamma = \operatorname{sgn}(|y_*|), \quad R_{i_0, i_1}(x, y) \equiv 1,$$

и при $i_0 < i_1$

$$R_{i_0, i_1}(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{2 - d}, \\ b^2 = \frac{d - 2a_{i_0}^2 a_{i_1}^2}{d}, \quad d = a_{i_0}^2 + a_{i_1}^2, \quad a^2 \leq 1, \quad b^2 \leq 1;$$

$a = 1$ только при $i_0 = 0$, $a = b = 1$ только при $i_1 = n/2$. Эллипс $R_{i_0, i_1}(x, y) = 0$ пересекает прямую $x + y = 1$ в точках $(a_{i_0}^2, 1 - a_{i_0}^2)$ и $(a_{i_1}^2, 1 - a_{i_1}^2)$.

Соответственно для полинома $\tilde{P}_{n, z_*}$ имеем

$$\tilde{P}_{n, z_*}(x, y) = \lambda_{i_0, i_1} y(x^\alpha + x_*) R_{i_0, i_1}^*(x, y) \prod_{\substack{1 \leq i \leq [(n+1)/2] \\ i \neq i_0, i_1}} V_i(x, y),$$

где

$$z_* = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, e_{i_0} e_{i_1}), \quad 1 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \\ \lambda_{i_0, i_1} > 0, \quad \alpha = \operatorname{sgn}(|x_*|), \quad R_{i_0, i_1}^*(x, y) \equiv 1,$$

и при $i_0 < i_1$

$$R_{i_0, i_1}^*(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2}{2 - d}, \\ b^2 = \frac{d - 2d_{i_0}^2 d_{i_1}^2}{d}, \quad d = d_{i_0}^2 + d_{i_1}^2, \quad a^2 < d_1^2, \quad b^2 \leq 1;$$

$b = 1$ только при $i_1 = (n+1)/2$. Эллипс $R_{i_0, i_1}^*(x, y) = 0$ пересекает прямую $x + y = 1$ в точках $(d_{i_0}^2, 1 - d_{i_0}^2)$ и $(d_{i_1}^2, 1 - d_{i_1}^2)$.

ЛЕММА 6. Пусть

$$P_n \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad P_n = P_{n,1} + P_{n,2} = \tilde{P}_n + \bar{P}_n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \\ |x_0| \geq \lambda, \quad |y_0| \geq 1 - \lambda, \quad x_0^2 + y_0^2 \geq 1, \quad 0 \leq k + s \leq n.$$

Тогда справедливы следующие неравенства: при $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$|(\lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0)| \leq (\bar{T}_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(|x_0|, |y_0|) \|P_n\|_{S_0}, \quad (16)$$

$$|(\lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0)| \leq (\tilde{T}_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(|x_0|, |y_0|) \|P_n\|_{S_1}, \quad (17)$$

а при $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$|(\lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0)| \leq (\bar{T}_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(|x_0|, |y_0|) \|P_n\|_{S_0}, \quad (18)$$

$$|(\lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0)| \leq (\tilde{T}_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(|x_0|, |y_0|) \|P_n\|_{S_1}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии множеств S_0 и S_1 относительно координатных осей достаточно рассмотреть случай $x_0 \geq \lambda$, $y_0 \geq 1 - \lambda$, $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$. Пусть $n \equiv 0 \pmod{2}$. Докажем неравенство (16).

Из замечания 1 следует представление для полинома $\bar{P}_n$

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{j=1}^r \bar{P}_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) \bar{P}_{n, (x_j, y_j)}(x, y), \quad (20)$$

где

$$(x_j, y_j) \in S_0^+, \quad (x_j, y_j) = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, b_{i_0} b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

r – число точек множества S_0^+ , и элементарный полином $\bar{P}_{n, (x_j, y_j)}$ согласно лемме 5 имеет представление

$$\bar{P}_{n, (x_j, y_j)}(x, y) = c_{i_0, i_1} y^\gamma (x^\alpha + x_j) R_{i_0, i_1}(x, y) \prod_{\substack{0 \leq i \leq [n/2] \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y). \quad (21)$$

Поскольку $\bar{P}_n(x_j, y_j) = (P_n(x_j, y_j) + P_n(x_j, -y_j))/2$ и $T_n(x + y) = \bar{T}_n(x, y)$ при $(x, y) \in S_0$, то из (20) получаем

$$\bar{P}_n(x, y) = \sum_{j=1}^e \nu_j P_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) \bar{P}_{n, (x_j, y_j)}(x, y), \quad (22)$$

где e – число точек множества S_0 ;

$$(x_j, y_j) \in S_0, \quad (x_j, y_j) = (\pm a_{i_0} a_{i_1}, \pm b_{i_0} b_{i_1}), \quad 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$\bar{P}_{n, (x_j, -y_j)} = \bar{P}_{n, (x_j, y_j)};$$

$\nu_j = 1$, если $y_j = 0$, и $\nu_j = 1/2$, если $y_j \neq 0$.

Аналогично, для полинома $P_{n,2}$ имеем представление

$$P_{n,2}(x, y) = \sum_{j=1}^e \eta_j P_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) P_{n,2, (x_j, y_j)}(x, y), \quad (23)$$

где $(x_j, y_j) \in S_0$; $\eta_j = 1$, если $x_j = 0$, и $\eta_j = 1/2$, если $x_j \neq 0$; $P_{n,2, (-x_j, y_j)} = P_{n,2, (x_j, y_j)}$ и

$$P_{n,2, (x_j, y_j)}(x, y) = \mu_{i_0, i_1} x^\alpha (y^\gamma + y_j) R_{i_0, i_1}(x, y) \prod_{\substack{0 \leq i \leq [n/2] \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y). \quad (24)$$

Из определения элементарных полиномов, леммы 5 и равенств (21) и (24) имеем

$$\nu_j c_{i_0, i_1} = \eta_j \mu_{i_0, i_1} = k_j > 0. \quad (25)$$

Из равенств (21)–(25) получаем представления

$$\lambda \bar{P}_n(x, y) + (1 - \lambda) P_{n,2}(x, y) = \sum_{j=1}^e P_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) Q_{n, z_j}(x, y, \lambda), \quad (26)$$

где $z_j = (x_j, y_j) \in S_0$ и

$$Q_{n,z_j}(x, y, \lambda) = k_j (x^\alpha y^\gamma + \lambda x_j y^\gamma + (1 - \lambda) y_j x^\alpha) R_{i_0, i_1}(x, y) \prod_{\substack{0 \leq i \leq [n/2] \\ i \neq i_0, i_1}} U_i(x, y). \quad (27)$$

Зафиксируем j и λ . Пусть $\Phi(x, y) = x^\alpha y^\gamma + \lambda x_j y^\gamma + (1 - \lambda) y_j x^\alpha$. Тогда $\Phi(\lambda, 1 - \lambda) \geq 0$; $\Phi'_x(x, y) \geq 0$ при $y \geq 1 - \lambda$; $\Phi'_y(x, y) \geq 0$ при $x \geq \lambda$. Отсюда имеем

$$\Phi(x, y) \geq 0 \quad \text{при } x \geq \lambda, \quad y \geq 1 - \lambda.$$

Все сомножители в разложении (27) полинома Q_{n,z_j} и их частные производные любого порядка по переменным x и y неотрицательны при $x \geq \lambda$, $y \geq 1 - \lambda$, $x^2 + y^2 \geq 1$. Поэтому из формулы для производных произведения функций

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \prod_{i=1}^m \varphi_i(u, v), \\ F_{u^s v^k}^{(s+k)}(u, v) &= \sum_{s_1 + \dots + s_m = s} \sum_{k_1 + \dots + k_m = k} C(s, s_1, \dots, s_m) \\ &\quad \times C(k, k_1, \dots, k_m) \varphi_{1_{u^{s_1} v^{k_1}}}^{(s_1+k_1)}(u, v) \dots \varphi_{m_{u^{s_m} v^{k_m}}}^{(s_m+k_m)}(u, v), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$C(k, k_1, \dots, k_m) = \frac{k!}{k_1! \dots k_m!},$$

получаем неравенства

$$(Q_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda) \geq 0 \quad \text{при } x_0 \geq \lambda, \quad y_0 \geq 1 - \lambda, \quad x_0^2 + y_0^2 \geq 1, \quad z_j \in S_0. \quad (29)$$

Из формулы (26) имеем равенство

$$(\lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^e P_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) (Q_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda). \quad (30)$$

Если максимум правой части (30) в точке (x_0, y_0, λ) при $\|P_n\|_{S_0} \leq 1$, $x_0 \geq \lambda$, $y_0 \geq 1 - \lambda$ и $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$ не равен нулю, то в силу (29) он достигается только на тех полиномах P_n , для которых выполнено равенство

$$P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j)$$

во всех точках $z_j = (x_j, y_j) \in S_0$, где $(Q_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda) > 0$.

Поскольку полином $T_n(x + y)$ удовлетворяет этим условиям, то отсюда следует неравенство (16). Неравенства (17)–(19) доказываются аналогично.

При $n \equiv 0 \pmod{2}$ полином $\lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1}$ имеет представление

$$\lambda \tilde{P}_n(x, y) + (1 - \lambda) P_{n,1}(x, y) = \sum_{j=1}^m P_n(x_j, y_j) T_n(x_j + y_j) G_{n,z_j}(x, y, \lambda), \quad (31)$$

где m – число точек множества S_1 ; $z_j = (x_j, y_j) \in S_1$, $(x_j, y_j) = (\pm d_{i_0} d_{i_1}, \pm e_{i_0} e_{i_1})$, $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq [(n+1)/2]$, и

$$G_{n,z_j}(x, y, \lambda) = c_j (x^\alpha y + \lambda x_j y + (1 - \lambda) y_j x^\alpha) R_{i_0, i_1}^*(x, y) \prod_{\substack{1 \leq i \leq [(n+1)/2] \\ i \neq i_0, i_1}} V_i(x, y),$$

$$c_j > 0. \quad (32)$$

При $n \equiv 1 \pmod{2}$ полином $\lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1}$ равен правой части (26), а полином $\lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2}$ равен правой части (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$, то существует $\lambda \in [0, 1]$ такое, что $|x_0| \geq \lambda$ и $|y_0| \geq 1 - \lambda$. Поскольку

$$P_n = \lambda \bar{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,2} + \lambda \tilde{P}_n + (1 - \lambda) P_{n,1},$$

то при $n \equiv 0 \pmod{2}$ неравенство (3) вытекает из суммы неравенств (16) и (17), а при $n \equiv 1 \pmod{2}$ – из суммы неравенств (18) и (19).

Пусть $0 \leq k + s \leq n - 1$, $x_0 \geq \lambda$, $y_0 \geq 1 - \lambda$, $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$, $\lambda \in (0, 1)$, $\|P_n\|_S \leq 1$ и

$$(P_n)_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0) = T_n^{(s+k)}(x_0 + y_0).$$

Покажем, что $P_n(x, y) \equiv T_n(x + y)$. Рассмотрим различные случаи. Пусть $1 \leq k + s \leq n - 1$, $k \leq n - 2$, $s \leq n - 2$. Тогда из формул (27), (32) и (28) следуют неравенства

$$(Q_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda) > 0, \quad z_j \in S_0, \quad (33)$$

$$(G_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, y_0, \lambda) > 0, \quad z_j \in S_1. \quad (34)$$

Из неравенств (33), (34) и равенств (30), (31) вытекает $P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j)$ при $(x_j, y_j) \in S$. Следовательно, $P_n(x, y) \equiv T_n(x + y)$. Если $k = s = 0$ и $x_0^2 + y_0^2 > 1$, то неравенства (33) и (34) также имеют место. Если $k = s = 0$ и $x_0^2 + y_0^2 = 1$, то выполнены неравенства (34) и $Q_{n,z_j}(x_0, y_0, \lambda) > 0$ при $z_j \in S_0 \setminus (0, 0)$.

Поэтому $P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j)$ при $(x_j, y_j) \in S_0 \setminus (0, 0)$. Отсюда $P_n(x, y) \equiv T_n(x + y)$. Пусть $s = n - 1$, $k = 0$. Тогда выполнены неравенства (34), (29) и

$$(Q_{n,z_j})_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x_0, y_0, \lambda) > 0 \quad \text{при } z_j = (x_j, 0) \in S_0.$$

Отсюда $P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j)$, если $(x_j, y_j) \in S_1 \cup D_0$, и в силу леммы 4 $P_n(x, y) \equiv T_n(x + y)$. Пусть $k = n - 1$, $s = 0$. Аналогично предыдущему случаю показывается, что при $n \equiv 0 \pmod{2}$

$$P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j), \quad (x_j, y_j) \in S_1 \cup D_1,$$

а при $n \equiv 1 \pmod{2}$

$$P_n(x_j, y_j) = T_n(x_j + y_j), \quad (x_j, y_j) \in S_0 \cup D_1.$$

Применив лемму 4, получим $P_n(x, y) \equiv T_n(x + y)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [8] для $\|P_n\|_B \leq 1$, $y_0 = 0$, $|x_0| \geq \cos(\{k\}_2\pi/(2n))$, где $\{k\}_2$ – остаток от деления k на 2, получено неравенство (3) и показано, что равенство при $y_0 = 0$, $n-1 \geq k \geq 1$, $k+s \geq 2$ и $|x_0| \geq \cos(\{k\}_2\pi/(2n))$ либо при $k=1$, $s=0$, $y_0=0$, $|x_0| > \cos(\pi/(2n))$ достигается только на полиномах

$$\beta\{\mu T_n(x+y) + (1-\mu)(-1)^k T_n(x-y)\}, \quad |\beta| = 1, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Покажем, что при тех же условиях для k , s , x_0 , y_0 и $\|P_n\|_S \leq 1$ неравенство (3) также имеет место, и опишем множество экстремальных полиномов.

Пусть $k \equiv 1 \pmod{2}$, $y_0 = 0$ и либо $k+s \geq 2$ и $x_0 \geq \cos(\pi/(2n))$, либо $k=1$, $s=0$ и $x_0 > \cos(\pi/(2n))$. Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} (Q_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, 0, 1) &= (\bar{P}_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, 0) = 0, & z_j \in S_0, \\ (G_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, 0, 1) &= (\tilde{P}_{n,z_j})_{x^s y^k}^{(s+k)}(x_0, 0) > 0, & z_j \in S_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (3), а из замечания 1 и леммы 3 вытекает, что равенство достигается только на полиномах $\pm\{\bar{T}_n + \bar{P}_n\}$, где

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_n(x, y)| + |\bar{P}_n(x, y)| &\leq 1, & (x, y) \in S, \\ \bar{P}_n &= \bar{P}_{n,2} & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{P}_n &= \bar{P}_{n,1} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \bar{P}_n(x, y) &= \bar{P}_n(d_i \cos \theta, e_i \sin \theta) = c_i \cos(n\theta) & \text{при } (x, y) \in E(d_i). \end{aligned}$$

Пусть $k \equiv 0 \pmod{2}$, $2 \leq k \leq n-1$, $k+s \leq n$, $y_0 = 0$ и либо $s \geq 1$ и $|x_0| \geq 1$, либо $s=0$ и $|x_0| > 1$. Аналогично предыдущему случаю показывается, что экстремальными полиномами будут только полиномы $\pm\{\bar{T}_n + \tilde{P}_n\}$, где

$$\begin{aligned} |\bar{T}_n(x, y)| + |\tilde{P}_n(x, y)| &\leq 1, & (x, y) \in S, \\ \tilde{P}_n &= \tilde{P}_{n,1} & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \tilde{P}_n &= \tilde{P}_{n,2} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \tilde{P}_n(x, y) &= \tilde{P}_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta) = c_i \sin(n\theta) & \text{при } (x, y) \in E(a_i). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $y_0 = 0$, $|x_0| = 1$, $k \equiv 0 \pmod{2}$, $2 \leq k \leq n-1$, $s=0$. Здесь аналогично показывается, что экстремальные полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} P_n &= \beta \bar{T}_n + c \bar{P}_{n,(-x_0,0)} + \tilde{P}_n, & \text{где } |\beta| = 1, \quad |\beta + c| \leq 1, \\ |\beta \bar{T}_n(x, y) + c \bar{P}_{n,(-x_0,0)}(x, y)| + |\tilde{P}_n(x, y)| &\leq 1, & (x, y) \in S, \\ \tilde{P}_n &= \tilde{P}_{n,1} & \text{при } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \tilde{P}_n &= \tilde{P}_{n,2} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \tilde{P}_n(x, y) &= \tilde{P}_n(a_i \cos \theta, b_i \sin \theta) = c_i \sin(n\theta) & \text{при } (x, y) \in E(a_i). \end{aligned}$$

Если $k=n$, то равенство в (3) достигается только на полиномах, для которых

$$P_n(0, y) = \pm T_n(y), \quad \|P_n\|_S = 1.$$

Список литературы

- [1] В. А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Тип. Имп. АН, СПб, 1892.
- [2] А. А. Марков, “Об одном вопросе Д. И. Менделеева”, *Записки Петербургской Академии Наук*, **62** (1889), 1–24.
- [3] С. А. Теляковский, “О работах по теории приближения функций, выполненных в МИАН”, *Теория вероятностей, теория функций, механика*, Тр. МИАН, **182**, Наука, М., 1988, 128–179; англ. пер.: S. A. Telyakovskij, “Research in the theory of approximation of functions at the Mathematical Institute of the Academy of Sciences”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **182**:1 (1990), 141–197.
- [4] A. V. Andrianov, “On some open problems for algebraic polynomials on bounded convex bodies”, *East J. Approx.*, **5**:1 (1999), 117–123.
- [5] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [6] В. И. Скалыга, “Границы производных от полиномов на центрально-симметричных выпуклых телах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 179–192; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Bounds for the derivatives of polynomials on centrally symmetric convex bodies”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 607–621.
- [7] G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos, “Bernstein and Markov-type inequalities for polynomials on real Banach spaces”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **133**:3 (2002), 515–530.
- [8] В. И. Скалыга, “Условия точности в многомерных аналогах неравенства В. А. Маркова”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 950–953; англ. пер.: V. I. Skalyga, “Sharpness conditions in multidimensional analogs of V. A. Markov’s inequality”, *Math. Notes*, **80**:5–6 (2006), 893–897.

В. И. Скалыга (V. I. Skalyga)

Конструкторское бюро “Аметист”, г. Москва

E-mail: kb_ametist@mail.ru

Поступила в редакцию

11.07.2007 и 17.04.2008