Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Баев, Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 12, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 10:37:35

УДК 517.983

А. В. Баев

Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах

Рассматривается применение принципа Лагранжа для оптимального восстановления в линейной обратной задаче с априорной информацией о ее решении. Дано обобщение результатов предыдущих работ автора по оптимальному восстановлению и конечномерной аппроксимации. Доказана теорема об общих оптимальных методах восстановления для задач в бесконечномерном и конечномерном пространствах. Исследуется приближение задачи в бесконечномерном пространстве задачами в конечномерных пространствах. Приведены примеры применения изложенной теории.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена задаче восстановления решения линейного уравнения по неточной информации о параметрах уравнения. Эта задача заключается в следующем. Пусть Z и U – действительные линейные пространства, $A: Z \rightarrow U$ – линейный оператор, M – подмножество Z , $\bar{u} \in U$ и существует такое $\bar{z} \in M$, что $A\bar{z} = \bar{u}$. Требуется найти элемент $\bar{z}$ по приближенной информации об операторе A и элементе $\bar{u}$. Эта информация такова: вместо A известен линейный оператор $F: Z \rightarrow \mathbb{R}^m$, а вместо $\bar{u}$ известны элемент $v \in \mathbb{R}^m$ и выпуклое уравновешенное множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ такие, что $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$. В частности, если $\mathcal{O}$ является шаром радиуса ε с центром в нуле, то последнее включение означает, что $\|v - F\bar{z}\| \leq \varepsilon$. Включение $\bar{z} \in M$ также рассматривается как часть информации относительно $\bar{z}$. Далее поиск элемента $\bar{z}$ сводится к решению конечного набора задач оптимального восстановления линейного функционала по информации описанного типа.

Исследованию задач оптимального восстановления линейного функционала посвящено множество работ. Ссылки на них можно найти в библиографии к работам [1]–[5]. Но лишь недавно были получены результаты, позволяющие эффективно решать линейные задачи оптимального восстановления с выпуклым уравновешенным множеством априорных ограничений [6]. Речь идет о так называемом *принципе Лагранжа для задач оптимального восстановления*. Уже имеется большое количество работ по его применению. Однако все они посвящены частным задачам. До сих пор не было предложено ни одного алгоритма, который можно эффективно применять к достаточно обширному классу задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-92103-ГФЕН_а, 08-01-00160-а).

Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе [7]. Основная идея метода, разработанного в ней, заключается в применении конечномерной аппроксимации к исходной задаче. В [7] была предложена схема решения задачи оптимального восстановления для конкретного функционала. В этой работе описана и обоснована схема решения задачи для общего случая. Эта схема использует конечномерную аппроксимацию. Вместе с алгоритмами решения задач оптимального восстановления в конечномерных пространствах предлагаемая схема образует многоэтапный алгоритм решения задач оптимального восстановления, который можно реализовать на компьютере.

§ 2. Постановка задачи

В прикладной математической физике используется понятие *обратной задачи*. Этим термином называют класс задач, в которых имеется исследуемый объект, известна некоторая информация о нем и требуется найти либо сам объект, либо некоторую желаемую информацию о нем. Строгая математическая формулировка той или иной обратной задачи может быть различной. Сначала рассмотрим одну из простейших математических формулировок. Пусть Z и U – действительные линейные пространства, $A: Z \rightarrow U$ – линейный оператор. Рассмотрим множество $M \subset Z$ и элемент $\bar{z} \in M$. Обозначим $\bar{u} := A\bar{z}$. Элемент $\bar{z}$ является решением следующей задачи:

$$Az = \bar{u}, \quad z \in M. \quad (1)$$

Во введении в общих чертах была описана исследуемая задача. Но перед тем, как приступить к ее четкой формулировке, детально опишем, как сопоставить линейной обратной задаче (1) задачу оптимального восстановления и как связаны их решения.

На практике не всегда точно известны элемент $\bar{u}$ и оператор A . Для решения конкретных прикладных задач необходимо модифицировать постановку задачи (1). Одной из особенностей этой задачи является то, что вне зависимости от размерности пространства U об элементе $\bar{u}$ известна лишь конечная информация и она является неточной, т.е. задана с какой-то погрешностью. Допустим, что информация об элементе $\bar{u}$ задается набором из m действительных чисел. Обозначим $Y := \mathbb{R}^m$. Введем линейный оператор $Q_m: U \rightarrow Y$. Зададим выпуклое уравновешенное множество $\Omega \subset Y$. Пусть в задаче приближенно известен m -мерный вектор $Q_m\bar{u}$, а именно, точно задан элемент $v \in Y$ такой, что $v - Q_m\bar{u} \in \Omega$. Также будем считать, что вместо оператора A мы умеем точно вычислять лишь линейный оператор $F: Z \rightarrow Y$, являющийся приближением для оператора Q_mA . Рассмотрим выпуклое уравновешенное подмножество $\mathcal{O} \subset Y$ такое, что (см. [7])

$$\mathcal{O} \supset \Omega + (Q_mA - F)(M). \quad (2)$$

Легко показать, что $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$. Действительно,

$$v - F\bar{z} = v - Q_mA\bar{z} + (Q_mA - F)\bar{z} \in \Omega + (Q_mA - F)(M) \subset \mathcal{O}.$$

Всю информацию о погрешности задания оператора A и правой части $\bar{u}$ объединим в множество $\mathcal{O}$, которое будем называть *окрестностью погрешности задачи* (1). Итак, считаем, что в задаче поиска элемента $\bar{z}$ известны M , F , v и $\mathcal{O}$ такие, что $\bar{z} \in M$ и $v - F\bar{z} \in \mathcal{O}$. Ответом задачи может служить лишь конечный набор чисел. Разобьем задачу поиска этого набора на несколько задач поиска одного числа, которые сформулируем в виде задачи оптимального восстановления линейного функционала.

Рассмотрим линейный функционал ℓ на пространстве Z . Образ элемента z при отображении линейным функционалом ℓ будем обозначать $\langle \ell, z \rangle$. Скалярное произведение в гильбертовых пространствах будем обозначать так же. Вместо задачи поиска элемента $\bar{z}$ из уравнения (1) будем решать следующую задачу оптимального восстановления функционала ℓ на множестве M по информации $(F, \mathcal{O})$ (см. [7], [6]):

$$\sup_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\langle \ell, z \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in Y^*. \quad (3)$$

Иными словами, считаем, что известны ℓ , M , F и $\mathcal{O}$, а требуется найти функционал, на котором достигается минимум в задаче (3). Оператор F называется *информационным оператором*, множество M называется *множеством априорных ограничений*. Любое отображение $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *методом восстановления в задаче (3)*. *Погрешностью метода восстановления* φ называется величина

$$\mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi) := \sup_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\langle \ell, z \rangle - \varphi(y)|.$$

Элемент $\hat{\varphi}$, на котором достигается минимум в задаче (3), назовем *методом оптимального восстановления*, а значение минимума в этой задаче назовем *погрешностью оптимального восстановления* и обозначим ее через $E(\ell, M, F, \mathcal{O})$. Если ℓ и F линейны, а M и $\mathcal{O}$ выпуклы и уравновешены, то $E(\ell, M, F, \mathcal{O}) = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^Y} \mathcal{E}(\ell, M, F, \mathcal{O}, \varphi)$, где $\mathbb{R}^Y$ – множество всех отображений из Y в $\mathbb{R}$. Это следует, например, из [8]. Пусть $\hat{\varphi}$ – экстремаль задачи (3). В качестве приближения для числа $\langle \ell, \bar{z} \rangle$ возьмем число $\langle \hat{\varphi}, v \rangle$. Покажем, что погрешностью этого приближения будет число $E(\ell, M, F, \mathcal{O})$:

$$|\langle \ell, \bar{z} \rangle - \langle \hat{\varphi}, v \rangle| \leq \sup_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} |\langle \ell, z \rangle - \langle \hat{\varphi}, y \rangle| = E(\ell, M, F, \mathcal{O}).$$

Целью настоящей работы является обобщение результатов автора, изложенных в [7]. В упомянутой статье описана схема решения задачи (3) для случая, когда Z – некоторое пространство функций на отрезке $[a, b]$, а $\langle \ell, z \rangle \stackrel{\text{def}}{=} z(\theta)$, где θ – некоторая фиксированная точка из $[a, b]$. В настоящей работе рассматривается более общий случай без конкретизации пространства Z и функционала ℓ . А именно, предложена схема решения задачи (3) для случая, когда ℓ и F линейны, а M и $\mathcal{O}$ выпуклы и уравновешены. Эта схема позволяет реализовать достаточно эффективный численный алгоритм решения сформулированной выше задачи.

§ 3. Принцип Лагранжа

Сопоставим задаче (3) другую экстремальную задачу, называемую *ассоциированной* к (3) (см. [6]):

$$\langle \ell, z \rangle \rightarrow \max_{(z, y)}, \quad (z, y) \in Z \times Y, \quad z \in M, \quad y - Fz \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \quad (4)$$

Сформулируем основную теорему.

ТЕОРЕМА 1 (Принцип Лагранжа для задачи оптимального восстановления; см. [6], [7]). Пусть M и $\mathcal{O}$ выпуклы и уравновешены, функционал ℓ и оператор F линейны. Определим функцию Лагранжа $\mathcal{L}: (Z \times Y) \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ так:

$$\mathcal{L}((z, y), \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -\langle \ell, z \rangle + \langle \lambda, y \rangle.$$

Если элемент $(\hat{z}, 0) \in Z \times Y$ является допустимой точкой в задаче (4) (т.е. $\hat{z} \in M$ и $-F\hat{z} \in \mathcal{O}$), то

1) следующие два условия эквивалентны:

а) $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (4);

б) существует такое $\hat{\lambda} \in Y^*$, что

$$\mathcal{L}((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}) = \inf_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Fz \in \mathcal{O}}} \mathcal{L}((z, y), \hat{\lambda});$$

2) при выполнении этих двух эквивалентных условий $\varphi = \hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (3) и его погрешность такова:

$$E(\ell, M, F, \mathcal{O}) = \langle \ell, \hat{z} \rangle \equiv -\mathcal{L}((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}).$$

Теорема 1 позволяет свести задачу оптимального восстановления к поиску решения ассоциированной задачи и поиску множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$, при котором функция Лагранжа достигает минимума на решении ассоциированной задачи. В дальнейшем будем считать, что решение ассоциированной задачи существует. В теореме 4 будут приведены достаточные условия существования решения ассоциированной задачи для случая, когда на пространстве Z введена норма.

В конкретной задаче пространство Z может быть бесконечномерным. Поэтому для реализации численных алгоритмов необходимо свести исходную задачу к задаче, где вместо пространства Z и его подмножества M присутствуют их конечномерные аналоги. При этом желательно установить связь решений исходной задачи и ее конечномерного аналога. Анализ этой связи для конкретного функционала ℓ проведен в [7]. В настоящей работе мы исследуем более общий случай.

§ 4. Сведение задачи оптимального восстановления к задаче в конечномерном пространстве

Если пространство Z является конечномерным, то никакого сведения не требуется. В дальнейшем будем рассматривать лишь случай $\dim Z = \infty$. Замена пространства Z на некоторый конечномерный аналог может быть представлена

в виде действия линейного оператора. Рассмотрим пару линейных пространств Z и $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, и пару линейных операторов $P_n: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $L_n: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$. Оператор P_n сопоставляет элементу из Z его конечномерный аналог, а оператор L_n по конечномерному вектору строит бесконечномерный вектор пространства Z . Рассмотрение произвольных операторов P_n и L_n является бессмысленным, поэтому введем следующие условия, связывающие эти операторы с другими параметрами задачи:

$$\exists \varkappa^n \in (\mathbb{R}^n)^*: \ell = \varkappa^n \circ P_n, \quad (5)$$

$$L_n P_n(M) \subset M, \quad (6)$$

$$P_n L_n = \hat{1}_{\mathbb{R}^n}, \quad (7)$$

где $\hat{1}_{\mathbb{R}^n}$ – единичный оператор в $\mathbb{R}^n$. Функционал $\varkappa^n$ будем представлять в виде n -мерного вектора, т.е. будем считать, что $\varkappa^n \in \mathbb{R}^n$. Рассматриваемые отображения и множества изображены на рис. 1.

Рис. 1. Схема задачи

ЛЕММА 1. Если выполнены условия (5) и (7), то

$$\langle \ell, L_n P_n z \rangle = \langle \ell, z \rangle \quad \forall z \in Z. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\langle \ell, L_n P_n z \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle \varkappa^n, P_n L_n P_n z \rangle \stackrel{(7)}{=} \langle \varkappa^n, P_n z \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle \ell, z \rangle$.

Для целых чисел i и j обозначим $\{i, \dots, j\} := \{k \in \mathbb{Z} \mid i \leq k \leq j\}$.

Введем ортонормированные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$: $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, $\{g_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^m$. Для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим $x_k := \langle e_k, x \rangle$. Аналогично будем обозначать и координаты векторов из пространства $\mathbb{R}^m$ в базисе $\{g_j\}_{j=1}^m$. Далее будем любой линейный оператор, действующий из пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$,

отождествлять с его матрицей относительно введенных базисов, векторы конечномерных пространств представлять в виде столбцов из координат в этих базисах, а действие оператора на вектор представлять в виде произведения матрицы оператора на этот столбец.

Предположим, что мы умеем вычислять линейный оператор $A_0: Z \rightarrow U$, являющийся приближением для оператора A . Обозначим $B \stackrel{\text{def}}{=} Q_m A_0 L_n$ и $M_n \stackrel{\text{def}}{=} P_n(M)$, т.е. $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $M_n \subset \mathbb{R}^n$. Это – конечномерные аналоги оператора F и множества M . Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального восстановления функционала на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ (напомним, что $Y = \mathbb{R}^m$):

$$\sup_{\substack{x \in M_n, y \in Y: \\ y - Bx \in \mathcal{O}}} |\langle \varkappa^n, x \rangle - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi}, \quad \varphi \in Y^*. \quad (9)$$

Ассоциированной к ней является следующая задача

$$\langle \varkappa^n, x \rangle \rightarrow \max_{(x, y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad x \in M_n, \quad y - Bx \in \mathcal{O}, \quad y = 0. \quad (10)$$

Функция Лагранжа задачи (9) такова:

$$\mathcal{L}_n: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n((x, y), \lambda) = -\langle \varkappa^n, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle.$$

ТЕОРЕМА 2 (О сведении к конечномерной задаче). *Положим в задачах (3) и (4) $F := Q_m A_0 L_n P_n$. Пусть выполнено условие (5).*

1) *Если $(\hat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ – решение задачи (4), а $\hat{\lambda}$ – множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа для задачи (3) достигается на $(\hat{z}, 0)$, т.е.*

$$-\langle \ell, \hat{z} \rangle = \inf_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-\langle \ell, z \rangle + \langle \hat{\lambda}, y \rangle),$$

то $(P_n \hat{z}, 0)$ является решением задачи (10), $\hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления задачи (9) и его погрешность равна $\langle \ell, \hat{z} \rangle$.

2) *Если $(\hat{x}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – решение задачи (10), а $\hat{\lambda}_n$ – множитель Лагранжа, при котором минимум функции Лагранжа $\mathcal{L}_n$ задачи (9) достигается на $(\hat{x}, 0)$, т.е.*

$$-\langle \varkappa^n, \hat{x} \rangle = \inf_{\substack{x \in M_n, y \in Y: \\ y - Bx \in \mathcal{O}}} (-\langle \varkappa^n, x \rangle + \langle \hat{\lambda}_n, y \rangle),$$

то при любом $\hat{z} \in M$ таком, что $P_n \hat{z} = \hat{x}$, точка $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (4), $\hat{\lambda}_n$ является методом оптимального восстановления задачи (3) и его погрешность равна $\langle \varkappa^n, \hat{x} \rangle$. Если при этом выполнены условия (6) и (7), то элемент $L_n \hat{x}$ удовлетворяет условиям на $\hat{z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим любые $z_1, z_2 \in Z$ такие, что $P_n z_1 = P_n z_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell, z_1 \rangle &= \langle \varkappa^n, P_n z_1 \rangle = \langle \varkappa^n, P_n z_2 \rangle = \langle \ell, z_2 \rangle, \\ \{y \in Y \mid y - Q_m A_0 L_n P_n z_1 \in \mathcal{O}\} &= \{y \in Y \mid y - Q_m A_0 L_n P_n z_2 \in \mathcal{O}\}. \end{aligned}$$

Отсюда при помощи замены $x = P_n z$ получим

$$\inf_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-\langle \ell, z \rangle + \langle \hat{\lambda}, y \rangle) = \inf_{\substack{x \in P_n(M), y \in Y: \\ y - Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} (-\langle \mathcal{K}^n, x \rangle + \langle \hat{\lambda}, y \rangle), \quad (11)$$

причем левый инфимум достигается в точке $(z, y) = (\hat{z}, 0)$, а правый инфимум – в точке $(x, y) = (P_n \hat{z}, 0)$. Это следует из условий теоремы. Действуя аналогичным образом, получим

$$\sup_{\substack{z \in M: \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle = \sup_{\substack{z \in M: \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, P_n z \rangle = \sup_{\substack{x \in P_n(M): \\ -Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, x \rangle, \quad (12)$$

причем левый супремум достигается в $\hat{z}$, а правый супремум достигается в $P_n \hat{z}$. Из формулы (12) и комментария после нее следует, что $(P_n \hat{z}, 0)$ является решением задачи (10). Задача минимизации функции Лагранжа $\mathcal{L}_n$ для задачи (9) с множителем Лагранжа $\hat{\lambda}$ выглядит так:

$$-\langle \mathcal{K}^n, x \rangle + \langle \hat{\lambda}, y \rangle \rightarrow \min_{(x, y)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad x \in M_n, \quad y - Bx \in \mathcal{O}.$$

Из формулы (11) и комментария после нее следует, что в этой задаче минимум достигается на элементе $(x, y) = (P_n \hat{z}, 0)$, т.е. на решении ассоциированной задачи (10). Используя это и принцип Лагранжа, получаем, что $\hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (9) и его погрешность равна $\langle \mathcal{K}^n, P_n \hat{z} \rangle = \langle \ell, \hat{z} \rangle$.

2) Так же как и при выводе формул (11) и (12), получим равенство максимумов для задач (10) и (4):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}^n, \hat{x} \rangle &= \sup_{\substack{x \in P_n(M): \\ -Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, x \rangle = \sup_{\substack{z \in M: \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, P_n z \rangle \\ &= \sup_{\substack{z \in M: \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим любой элемент $\hat{z} \in M$ такой, что $P_n \hat{z} = \hat{x}$. Убедимся, что он удовлетворяет обоим условиям, ограничивающим множество, по которому ищется последний супремум в (13), и что на $\hat{z}$ достигается этот максимум (из чего будет следовать, что $(\hat{z}, 0)$ является решением задачи (4)). Имеем $\hat{z} \in M$ по построению,

$$-Q_m A_0 L_n P_n \hat{z} = -Q_m A_0 L_n \hat{x} = -B\hat{x} \in \mathcal{O}$$

(вложение следует из того, что $(\hat{x}, 0)$ является решением задачи (10)), а из (13) получаем, что

$$\langle \ell, \hat{z} \rangle = \langle \mathcal{K}^n, P_n \hat{z} \rangle = \langle \mathcal{K}^n, \hat{x} \rangle = \sup_{\substack{z \in M: \\ -Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle.$$

Итак, $(\hat{z}, 0)$ является решением ассоциированной задачи (4). Как и при выводе формулы (11), для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m$ получим следующее равенство минимумов функций Лагранжа для задач (9) и (3):

$$\inf_{\substack{x \in P_n(M), y \in Y: \\ y - Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} (-\langle \mathcal{K}^n, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle) = \inf_{\substack{z \in M, y \in Y: \\ y - Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} (-\langle \ell, z \rangle + \langle \lambda, y \rangle). \quad (14)$$

Слева ищется минимум функции $\mathcal{L}_n$, справа – функции $\mathcal{L}$. По условию при $\lambda = \hat{\lambda}_n$ левый инфимум в (14) равен $-\langle \mathcal{K}^n, \hat{x} \rangle$ и достигается на элементе $(x, y) = (\hat{x}, 0)$. Поскольку $-\langle \mathcal{K}^n, \hat{x} \rangle = -\langle \mathcal{K}^n, P_n \hat{z} \rangle = -\langle \ell, \hat{z} \rangle = \mathcal{L}((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}_n)$, то минимум функции Лагранжа $\mathcal{L}$ достигается на элементе $(\hat{z}, 0)$, если множитель Лагранжа равен $\hat{\lambda}_n$. Элемент $(\hat{z}, 0)$ является решением ассоциированной задачи (4). Из этого по принципу Лагранжа получаем, что $\hat{\lambda}_n$ является методом оптимального восстановления в задаче (3) и его погрешность равна $\langle \ell, \hat{z} \rangle = \langle \mathcal{K}^n, P_n \hat{z} \rangle = \langle \mathcal{K}^n, \hat{x} \rangle$. Покажем, наконец, что при выполнении условий (6) и (7) элемент $z_0 := L_n \hat{x}$ принадлежит множеству M и $P_n z_0 = \hat{x}$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{x} \in P_n(M) &\implies L_n \hat{x} \in L_n P_n(M) \subset M, \\ P_n z_0 &= P_n L_n \hat{x} = \hat{1}_{\mathbb{R}^n} \hat{x} = \hat{x}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет решать вместо исходной задачи поиска метода и погрешности оптимального восстановления задачу оптимального восстановления в конечномерном пространстве.

§ 5. Приближение бесконечномерной задачи конечномерными задачами

Было бы естественным рассматривать информационный оператор в виде $F = Q_m A_0$. Но мы модифицировали его умножением справа на $L_n P_n$, что позволяет свести задачу (3) к задаче оптимального восстановления в конечномерном пространстве (теорема 2). В этом параграфе мы изучим следствия такой модификации.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательности операторов, где $P_n: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $L_n: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть для любого оператора P_n выполнено (5), т.е. условие (5) задает последовательность векторов $\{\mathcal{K}^n\}_{n=1}^\infty$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ элемент $(\tilde{x}_n, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является решением задачи (10), $\tilde{z}_n := L_n \tilde{x}_n$, выполнены условия (7) и

$$L_n P_n(M) \subset L_{(n+1)} P_{(n+1)}(M) \subset M. \quad (15)$$

Пусть $(\hat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ – решение задачи (4) при $F = Q_m A_0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\langle \ell, \tilde{z}_n \rangle = \langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle, \quad (16)$$

$$0 \leq \langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle \leq \langle \mathcal{K}^{n+1}, \tilde{x}_{n+1} \rangle \leq \langle \ell, \hat{z} \rangle. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) получим, что $\tilde{x}_n = P_n L_n \tilde{x}_n = P_n \tilde{z}_n$. Из этого по определению $\mathcal{K}^n$ следует, что $\langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle = \langle \mathcal{K}^n, P_n \tilde{z}_n \rangle = \langle \ell, \tilde{z}_n \rangle$. Первое равенство

в (16) доказано. Докажем второе, используя определение $\tilde{x}_n$ и уравни-
 вешенность окрестности погрешности $\mathcal{O}$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle &= \sup_{\substack{x \in M_n: \\ -Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, x \rangle = \sup_{\substack{x \in P_n(M): \\ Q_m A_0 L_n x \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, x \rangle = \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \mathcal{K}^n, P_n z \rangle \\ &= \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle \stackrel{(8)}{=} \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 L_n P_n z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, L_n P_n z \rangle = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle. \end{aligned}$$

Формула (16) доказана для любого $n \in \mathbb{N}$. В (16) супремум берется от линей-
 ного функционала по уравнишенному множеству. Следовательно, он неотри-
 цателен, т.е. $\langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle \geq 0$. Для любых $M', M'' \subset M$ таких, что $M' \subset M''$, вы-
 полнено вложение множеств $\{z \in M' \mid Q_m A_0 z \in \mathcal{O}\} \subset \{z \in M'' \mid Q_m A_0 z \in \mathcal{O}\}$.
 Из этого вложения следует неравенство

$$\sup_{\substack{z \in M': \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle \leq \sup_{\substack{z \in M'': \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle.$$

Пользуясь этим, из (15) получаем

$$\sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle \leq \sup_{\substack{z \in L_{n+1} P_{n+1}(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}}} \langle \ell, z \rangle.$$

Из определения $\hat{z}$ и равенств (16) для $\langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle$ и $\langle \mathcal{K}^{n+1}, \tilde{x}_{n+1} \rangle$ следует, что эти
 неравенства равносильны следующим:

$$\langle \mathcal{K}^n, \tilde{x}_n \rangle \leq \langle \mathcal{K}^{n+1}, \tilde{x}_{n+1} \rangle \leq \langle \ell, \hat{z} \rangle.$$

Теорема доказана.

Неравенства (17) дают оценку снизу для величины $\langle \ell, \hat{z} \rangle$, которая является
 погрешностью оптимального восстановления для задачи (3) при $F = Q_m A_0$.
 Найдем оценку сверху, модифицировав окрестность погрешности для конечно-
 мерной задачи (9).

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим вектор дополнительной погрешности $\Delta^{(n,0)} \in \mathbb{R}^m$:

$$(\Delta^{(n,0)})_j \equiv \Delta_j^{(n,0)} := \sup_{z \in M} |(Q_m A_0(z - L_n P_n z))_j| \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Будем считать, что в задаче известны не сами векторы $\Delta^{(n,0)}$, а лишь оценки
 сверху для их координат. Эти оценки мы объединим в векторы $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$:

$$(\Delta^n)_j \equiv \Delta_j^n \geq \Delta_j^{(n,0)} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}. \quad (18)$$

Обозначим через $\mathcal{O}_0 \subset Y$ выпуклое уравнишенное множество такое, что (ср.
 с (2))

$$\mathcal{O}_0 \supset \Omega + Q_m(A - A_0)(M), \quad (19)$$

$$\mathcal{O}'_n := \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y_j| \leq \Delta_j^n \forall j \in \{1, \dots, m\}\}, \quad \mathcal{O}_n := \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_n. \quad (20)$$

Считаем, что множества $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}'_n$ и $\mathcal{O}_n$ известны. Множество $\mathcal{O}_0$ назовем *невозмущенной окрестностью погрешности*, множество $\mathcal{O}_n$ назовем *возмущенной окрестностью погрешности* в задаче (9). Из обозначений следует, что $\mathcal{O}_n$ выпукло и уравновешено и для любого $z \in M$ выполнено $Q_m A_0(z - L_n P_n z) \in \mathcal{O}'_n$. Проверим, что при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ выполнено вложение (2), если $F = Q_m A_0 L_n P_n$. Имеем

$$\begin{aligned} \Omega + (Q_m A - Q_m A_0 L_n P_n)(M) &\subset \Omega + Q_m(A - A_0)(M) + Q_m A_0(\hat{1}_Z - L_n P_n)(M) \\ &\subset \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n. \end{aligned}$$

Если рассматривать оператор F в виде $F = Q_m A_0$, то вложение (2) выполнено и при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательности операторов, где $P_n: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $L_n: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть для операторов P_n и L_n выполнено (5) и существует вектор $\Delta^n \in \mathbb{R}^m$ такой, что выполнено (18) и при любом $j \in \{1, \dots, m\}$ последовательность $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ сходится к нулю, монотонно не возрастая. Пусть $(\hat{z}, 0) \in Z \times \mathbb{R}^m$ – решение задачи (4) при $F = Q_m A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (6) и (7), и элемент $(\hat{x}_n, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является решением задачи (10) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$. Пусть Z является нормированным пространством, линейный функционал ℓ непрерывен, множество M слабо секвенциально компактно в Z , оператор $Q_m A_0$ непрерывен, $\mathcal{O}_0$ замкнуто. Тогда

$$\langle \mathcal{K}^n, \hat{x}_n \rangle \geq \langle \ell, \hat{z} \rangle, \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{K}^n, \hat{x}_n \rangle = \langle \ell, \hat{z} \rangle. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\hat{z}$ является экстремалью такой задачи:

$$\langle \ell, z \rangle \rightarrow \max_z, \quad z \in M, \quad Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0. \quad (23)$$

Пусть $\hat{z}_n := L_n \hat{x}_n$. Тогда из определения $\hat{x}_n$ и условий (6) и (7) получаем (теорема 3, равенства (16)), что

$$\langle \mathcal{K}^n, \hat{x}_n \rangle = \langle \ell, \hat{z}_n \rangle = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} \langle \ell, z \rangle. \quad (24)$$

Докажем, что элемент $L_n P_n \hat{z} \in Z$ является допустимой точкой в этой экстремальной задаче. Очевидно, что $L_n P_n \hat{z} \in L_n P_n(M)$. Остается проверить, что $Q_m A_0 L_n P_n \hat{z} \in \mathcal{O}_n$. Имеем

$$Q_m A_0 L_n P_n \hat{z} = Q_m A_0 \hat{z} + Q_m A_0(\hat{z} - L_n P_n \hat{z}) \in \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n.$$

Из свойства (8) и из того факта, что элемент $L_n P_n \hat{z}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче (24), следует неравенство (21):

$$\langle \ell, \hat{z} \rangle = \langle \ell, L_n P_n \hat{z} \rangle \leq \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} \langle \ell, z \rangle = \langle \mathcal{K}^n, \hat{x}_n \rangle.$$

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$\langle \ell, z \rangle \rightarrow \max_z, \quad z \in M, \quad Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n. \quad (25)$$

Докажем, что в этой задаче максимум существует и достигается. Поскольку оператор $Q_m A_0$ линеен и непрерывен, то прообраз выпуклого замкнутого множества $\mathcal{O}_n$ при отображении этим оператором является выпуклым и замкнутым. Любое выпуклое замкнутое подмножество нормированного пространства является слабо замкнутым (см. [9; теорема V.3.13]), т.е. множество $(Q_m A_0)^{-1}(\mathcal{O}_n)$ слабо замкнуто. Его пересечение со слабо секвенциально компактным множеством M является слабо секвенциально компактным. Так как ℓ линейный и непрерывный, то он является слабо непрерывным. Мы получили, что в задаче (25) максимизируется слабо непрерывный функционал на слабо секвенциально компактном множестве. Из этого следует, что максимум существует и достигается. (Аналогично доказывается, что решение ассоциированной задачи (4) существует, если пространство Z является нормированным, M слабо секвенциально компактно в Z , F и ℓ линейны и непрерывны, $\mathcal{O}$ замкнуто.) Пусть $\hat{\zeta}_n$ – экстремаль вспомогательной задачи (25). Имеем

$$\langle \ell, \hat{z} \rangle \leq \langle \mathfrak{x}^n, \hat{x}_n \rangle = \sup_{\substack{z \in L_n P_n(M): \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} \langle \ell, z \rangle \stackrel{(6)}{\leq} \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} \langle \ell, z \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle. \quad (26)$$

Из монотонного невозрастания последовательностей $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$. Из этого следует монотонное невозрастание последовательности $\{\langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle\}_{n=1}^\infty$. Убедимся в этом. Имеем

$$\langle \ell, \hat{\zeta}_{n+1} \rangle = \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_{n+1}}} \langle \ell, z \rangle \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_n}} \langle \ell, z \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle.$$

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle = \langle \ell, \hat{z} \rangle$. (С учетом оценок в (26) из этого будет следовать (22) и тогда теорема будет полностью доказана.) По построению $\{\hat{\zeta}_n\}_{n=1}^\infty \subset M$. Это – последовательность в слабом секвенциальном компакте M . У нее существует слабо сходящаяся подпоследовательность, слабый предел которой принадлежит M . Обозначим эту подпоследовательность через $\{\hat{\zeta}_{p_n}\}_{n=1}^\infty$, а ее слабый предел – через $\hat{\zeta}$. Здесь $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \ell, \hat{\zeta}_{p_n} \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta} \rangle$. Но учитывая монотонность последовательности $\{\langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle\}_{n=1}^\infty$, получаем, что она сходится тоже и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta} \rangle. \quad (27)$$

Докажем, что оператор $Q_m A_0$ компактен. Обозначим $S_1 := \{z \in Z \mid \|z\| \leq 1\}$. По условию линейный оператор $Q_m A_0: Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ является непрерывным, т.е. множество $Q_m A_0(S_1)$ ограничено. Следовательно, замыкание $\overline{Q_m A_0(S_1)}$ является замкнутым ограниченным подмножеством конечномерного пространства, т.е. оно компактно. Компактность оператора $Q_m A_0$ доказана. Докажем, что $\hat{\zeta}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче (23). Точка $\hat{\zeta} \in M$ по построению. Проверим, что $Q_m A_0 \hat{\zeta} \in \mathcal{O}_0$. Последовательность $\{\hat{\zeta}_{p_n} - \hat{\zeta}\}_{n=1}^\infty$

слабо сходится к нулю. Следовательно, линейный компактный оператор $Q_m A_0$ переводит ее в последовательность, сходящуюся по норме к нулю, т.е.

$$Q_m A_0(\hat{\zeta}_{p_n} - \hat{\zeta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (28)$$

Из определения $\hat{\zeta}_{p_n}$ получаем, что $Q_m A_0 \hat{\zeta}_{p_n} \in \mathcal{O}_{p_n} = \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}'_{p_n}$, т.е. существуют $w_n \in \mathcal{O}_0$ и $w'_n \in \mathcal{O}'_{p_n}$ такие, что $Q_m A_0 \hat{\zeta}_{p_n} = w_n + w'_n$. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_j^{p_n} = 0$ получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n = 0$. Учитывая (28), имеем

$$w_n = -w'_n + Q_m A_0(\hat{\zeta}_{p_n} - \hat{\zeta}) + Q_m A_0 \hat{\zeta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_m A_0 \hat{\zeta}.$$

Поскольку $w_n \in \mathcal{O}_0$, то мы получили, что $Q_m A_0 \hat{\zeta}$ является предельной точкой замкнутого множества $\mathcal{O}_0$. Следовательно, $Q_m A_0 \hat{\zeta} \in \mathcal{O}_0$. Таким образом, $\hat{\zeta}$ является допустимой точкой в экстремальной задаче (23). Отсюда получаем, что

$$\langle \ell, \hat{\zeta} \rangle \leq \sup_{\substack{z \in M: \\ Q_m A_0 z \in \mathcal{O}_0}} \langle \ell, z \rangle = \langle \ell, \hat{z} \rangle. \quad (29)$$

Из (26) и (27) следует, что $\langle \ell, \hat{z} \rangle \leq \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle$ и $\langle \ell, \hat{z} \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta} \rangle$. Объединяя это с (29), получаем $\langle \ell, \hat{z} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle = \langle \ell, \hat{\zeta} \rangle$. Из (26) имеем $\langle \ell, \hat{z} \rangle \leq \langle \varkappa^n, \hat{x}_n \rangle \leq \langle \ell, \hat{\zeta}_n \rangle$. Правая часть сходится к $\langle \ell, \hat{z} \rangle$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, предел последовательности $\{\langle \varkappa^n, \hat{x}_n \rangle\}_{n=1}^\infty$ существует и равен $\langle \ell, \hat{z} \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ. Теорема верна и для компактного множества M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Оказывается, что условие монотонности последовательностей $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ в теореме 4 можно опустить. Для этого в условии надо заменить сходящиеся к нулю последовательности $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ на последовательности $\{\hat{\Delta}_j^n\}_{n=1}^\infty$, где $\hat{\Delta}_j^n := \max_{l \in \mathbb{N}: l \geq n} \Delta_j^l$. Тогда $\Delta_j^n \leq \hat{\Delta}_j^n$. Новые последовательности будут удовлетворять всем условиям для последовательностей $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$ и будут монотонно не возрастать.

Пусть $\hat{\varphi}_n \in Y^*$ – решение задачи (9) при $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$. По определению $\hat{\varphi}_n$ является методом восстановления в задаче (3) при $F = Q_m A_0$ и $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0$. Но какова его погрешность в этой задаче? В [7] доказано, что

$$E(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0) \leq \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \hat{\varphi}_n) \leq E(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n),$$

а условие (22) равносильно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\varkappa^n, M_n, B, \mathcal{O}_n) = E(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0).$$

Получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0, \hat{\varphi}_n) = E(\ell, M, Q_m A_0, \mathcal{O}_0).$$

Теорема 4 позволяет выбрать аппроксимирующие операторы L_n и P_n так, чтобы ошибки, вносимые конечномерной аппроксимацией, были бы значительно меньше ошибок, задаваемых невозмущенной окрестностью погрешности.

Иными словами, конечномерную аппроксимацию следует выбирать так, чтобы (см. (20))

$$\mathcal{O}_n \approx \mathcal{O}_0. \quad (30)$$

Такое правило выбора было предложено в [7].

Сформулируем достаточные условия сходимости к нулю последовательностей дополнительных погрешностей $\{\Delta_j^{(n,0)}\}_{n=1}^\infty$.

ЛЕММА 2. Пусть $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательности операторов, где $P_n: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $L_n: \mathbb{R}^n \rightarrow Z$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\hat{1}_Z$ – единичный оператор в пространстве Z . Если оператор $Q_m A_0$ непрерывен и $\sup_{z \in M} \|(\hat{1}_Z - L_n P_n)z\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_j^{(n,0)} = 0$ для любого $j \in \{1, \dots, m\}$.

Доказательство этой леммы основано только на определениях.

§ 6. Примеры обратных задач

Проведенные исследования позволяют решать линейные обратные задачи с выпуклым уравновешенным множеством априорных ограничений, если оно слабо секвенциально компактно. Решение можно проводить по следующей схеме.

1. Сначала сформулировать задачу в виде задачи (3). Для этого надо зафиксировать линейный функционал ℓ и найти окрестность погрешности $\mathcal{O}_0$, удовлетворяющую (19).
2. Свести задачу к конечномерной, введя операторы P_n и L_n , удовлетворяющие (5)–(7), (30).
3. Вычислить элементы матрицы $B = Q_m A_0 L_n$, вектора $\varkappa^n$ и найти множества M_n и $\mathcal{O}_n$.
4. Решить конечномерную задачу оптимального восстановления функционала $\varkappa^n$ на множестве M_n по информации $(B, \mathcal{O}_n)$. Алгоритмы решения задачи оптимального восстановления в конечномерном пространстве можно найти в [10].

Приведем примеры использования изложенной теории.

6.1. Задача поиска непрерывной функции на отрезке. Пусть $T := [a, b]$ – отрезок из множества $\mathbb{R}$, $Z := C(T)$, U – нормированное пространство, $A, A_0: Z \rightarrow U$ и $Q_m: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные непрерывные операторы. Рассмотрим множество априорных ограничений в виде

$$M := \{z \in C(T) \mid |z(t) - z(\bar{t})| \leq N|t - \bar{t}|, |z(t)| \leq \gamma \forall t, \bar{t} \in T\}.$$

Здесь $N, \gamma \in (0; \infty)$. Из теоремы Арцела следует компактность этого множества в пространстве $C(T)$. Положим $\langle \ell, z \rangle \stackrel{\text{def}}{=} z(\theta)$, где θ – некоторая фиксированная точка из T . Такой функционал является линейным и непрерывным на пространстве $C(T)$. Рассмотрим сетку $\{\tau_i\}_{i=1}^n \subset T$, $n \in \mathbb{N}$, такую что

$$a \leq \tau_i < \tau_{i+1} \leq b \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \exists q \in \{1, \dots, n\} : \tau_q = \theta.$$

Заметим, что q зависит от множества $\{\tau_i\}_{i=1}^n$. Определим аппроксимирующие операторы следующим образом:

$$P_n z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n z(\tau_i) e_i,$$

$$(L_n x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_1, & t \in [a, \tau_1], \\ x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} (t - \tau_i), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ x_n, & t \in [\tau_n, b]. \end{cases}$$

Тогда $\varkappa^n = e_q$ и (5) выполнено. В [11] доказаны условия (6) и (7). Там же показано, что выбором сетки $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ можно добиться выполнения условия (30). Это следует из теоремы 4, если выполнены ее условия на последовательность $\{\Delta_j^n\}_{n=1}^\infty$. Конечномерным аналогом множества M является множество

$$M_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_{i+1} - x_i| \leq N|\tau_{i+1} - \tau_i| \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ |x_i| \leq \gamma \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Это – многогранник в $\mathbb{R}^n$.

Для решения конечномерной задачи оптимального восстановления для описанного случая можно применить схему, описанную в [7] и [11].

6.2. Задача поиска истокорепредставимого решения. Пусть Z – сепарабельное гильбертово пространство, $V: Z \rightarrow Z$ – линейный компактный инъективный самосопряженный оператор, $S_r := \{z \in Z \mid \|z\| \leq r\}$, где $r \in (0, \infty)$, $M := V(S_r)$. Шар S_r в гильбертовом пространстве Z слабо секвенциально компактен [9], поэтому $V(S_r)$ компактно. Это следует из определений. Пусть $\{\psi_i\}_{i \in I}$ – полная ортонормированная система собственных векторов оператора V . Здесь I – это множество индексов. Оно может быть как конечным, так и бесконечным. Пусть ν_i – собственное значение, соответствующее вектору ψ_i , т.е. $V\psi_i = \nu_i \psi_i$, $i \in I$ ($\nu_i \neq 0$, поскольку V инъективен). Пусть $A, A_0: Z \rightarrow U$ и $Q_m: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейные непрерывные операторы. Положим $\langle \ell, z \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle z, \psi_q \rangle$, $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим любое $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \geq q$. Будем считать, что $\{1, \dots, n\} \subset I$. Определим аппроксимирующие операторы следующим образом:

$$P_n z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \langle z, \psi_i \rangle e_i, \quad L_n x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \psi_i.$$

Эти операторы непрерывны. Если положить $\varkappa^n = e_q$, то

$$(5) \quad \Longleftarrow \quad \langle \ell, z \rangle = \langle z, \psi_q \rangle = \langle e_q, P_n z \rangle = \langle \varkappa^n, P_n z \rangle.$$

Рассмотрим любой $z \in V(S_r)$. Для него существует $w \in Z$ такой, что $\|w\| \leq r$ и $z = Vw = V \sum_{i \in I} \langle w, \psi_i \rangle \psi_i = \sum_{i \in I} \nu_i \langle w, \psi_i \rangle \psi_i$. Докажем, что $L_n P_n z \in V(S_r)$. Имеем

$$L_n P_n z = L_n \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w, \psi_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w, \psi_i \rangle \psi_i = V \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Остается доказать, что $\left\| \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle \psi_i \right\| \leq r$. Имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle \psi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle^2 \leq \sum_{i \in I} \langle w, \psi_i \rangle^2 = \|w\|^2 \leq r^2.$$

Свойство (6) доказано.

$$(7) \quad \Leftarrow \quad P_n L_n x = P_n \sum_{i=1}^n x_i \psi_i = \sum_{k=1}^n \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \psi_i, \psi_k \right\rangle e_k = \sum_{k=1}^n x_k e_k = x.$$

Условие (30) выполнено при достаточно большом n . Это следует из теоремы 4, если выполнены ее условия.

По построению множество M является компактным. Найдем множество $M_n = P_n(M)$. Рассмотрим любой $w \in S_r$. Определим вспомогательный вектор из линейной оболочки векторов $\psi_1, \dots, \psi_n$: $w^n := \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle \psi_i$. Для него выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} \|w^n\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle w, \psi_i \rangle^2 \leq \sum_{i \in I} \langle w, \psi_i \rangle^2 = \|w\|^2 \leq r^2, \\ P_n V w &= \sum_{i=1}^n \langle V w, \psi_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle w, V \psi_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w, \psi_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w^n, \psi_i \rangle e_i = \dots = P_n V w^n. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} M_n &= P_n(V(S_r)) = \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w, \psi_i \rangle e_i \mid w \in Z : \|w\| \leq r \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i \langle w^n, \psi_i \rangle e_i \mid w^n \in \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\} : \|w^n\| \leq r \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i \xi_i e_i \mid \xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \leq r \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i^2} x_i^2 \leq r^2 \right\}. \end{aligned}$$

Итак, конечномерным аналогом множества M является множество

$$M_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{1}{\nu_i^2} x_i^2 \leq r^2 \right\}.$$

Это – эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для решения конечномерной задачи оптимального восстановления для описанного случая можно применить алгоритм, описанный в [10].

Список литературы

- [1] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.
- [2] Дж. Трауб, Х. Вожняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, New York–London, 1980.

- [3] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Всесоюзная школа по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, “Optimal recovery of operators, and related problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 1–20.
- [4] С. А. Micchelli, Т. J. Rivlin, “Lectures on optimal recovery”, *Numerical analysis* (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1985, 21–93.
- [5] G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, V. M. Tikhomirov, “Optimal recovery and extremum theory”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **2**:1 (2002), 87–112.
- [6] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [7] А. В. Баев, “Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов”, *Выч. методы и программирование*, **7**:2 (2006), 323–336; <http://www.srcc.msu.su/num-meth>.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functionals based on inaccurate data”, *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.
- [9] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [10] А. В. Баев, “Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении”, *ЖВМ и МФ*, **47**:9 (2007), 1512–1523; англ. пер.: A. V. Bayev, “The Lagrange principle in the problem of optimal inversion of linear operators in finite-dimensional spaces with a priori information about its solution”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:9 (2007), 1452–1463.
- [11] A. V. Bayev, A. G. Yagola, “Optimal recovery in problems of solving linear integral equations with *a priori* information”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **15**:6 (2007), 569–586.

А. В. Баев (A. V. Bayev)

Физический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: andrewbayev@newmail.ru

Поступила в редакцию

16.07.2007 и 20.05.2008