Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 7, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:50:17

УДК 519.179.1+519.157

Д. А. Шабанов

Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов

В работе исследуются обобщения классической задачи П. Эрдёша о свойстве B гиперграфов. Согласно определению Эрдёша гиперграф обладает свойством B , если существует двухцветная раскраска множества его вершин, в которой ни одно ребро гиперграфа не является одноцветным. Требуется найти величину $m(n)$, равную минимально возможному количеству ребер в n -равномерном (каждое ребро содержит ровно n вершин) гиперграфе, не обладающем свойством B . Рассматриваются более общие постановки проблемы, приводится ряд параметрических свойств гиперграфов и соответствующих им экстремальных величин. Основные результаты улучшают ранее известные нижние оценки этих экстремальных величин.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

В работе исследуется ряд задач о раскрасках равномерных гиперграфов. Напомним, что гиперграф – это пара $H = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, v\}$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а E есть совокупность каких-то подмножеств множества V , и эти подмножества мы называем *ребрами* гиперграфа. Гиперграф n -*равномерен*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. В 1960-е годы П. Эрдэш (см. [1]) поставил задачу о раскрасках равномерных гиперграфов. (Будем говорить вслед за Эрдэшем, что гиперграф $H = (V, E)$ *обладает свойством B* , если существует двухцветная раскраска множества его вершин V , в которой ни одно ребро из E не является одноцветным.) Задача состоит в отыскании величины $m(n)$, равной минимуму из таких m , что существует n -равномерный гиперграф, имеющий в точности m ребер и не обладающий свойством B . Сам П. Эрдэш (см. [1], [2]) с помощью несложного вероятностного метода показал, что

$$2^{n-1} \leq m(n) \leq (1 + o(1)) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Позднее нижняя оценка была улучшена Дж. Беком (см. [3]). В 1978 г. он установил асимптотическое неравенство $m(n) \gg 2^n n^{1/3-\delta}$, где δ может быть выбрано сколь угодно малым (знак $\gg$ означает, что существует такая константа $C = C(\delta) > 0$, при которой $m(n) \geq C 2^n n^{1/3-\delta}$). Наконец, Дж. Радхакришнан

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-691.2008.1).

и А. Сринивазан в 2000 г. обосновали следующий результат (см. [4]):

$$m(n) \gg 2^n \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2},$$

и этот результат остается наилучшим из известных на сегодняшний день.

§ 2. Формулировки результатов

В работах [5]–[8] был предложен ряд естественных обобщений классической задачи П. Эрдёша. Напомним несколько определений. Пусть k есть некоторое натуральное число. Будем говорить, что гиперграф *обладает свойством B_k* , если существует такая раскраска множества его вершин в два цвета, при которой в любом его ребре окажется не менее k вершин каждого из этих цветов. Отметим также, что параметр k , вообще говоря, зависит от n и соответственно может расти с ростом n . При этом, конечно, $k(n) \leq n/2$. Классической задаче отвечает $k = 1$. По аналогии с величиной $m(n)$ через $m_k(n)$ обозначим минимум из всех таких m , что существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством B_k .

В работах [5], [8] были получены следующие оценки величины $m_k(n)$:

$$\left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/3} \frac{2^n}{C_n^{k-1}} \ll m_k(n) \leq (1 + o(1)) \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{C_n^{k-1}}.$$

При этом нижняя оценка имела место для $k = O(\sqrt{\ln n})$, а верхняя – для $k = o(n/\ln n)$. Следующая теорема улучшает нижнюю оценку.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы целочисленная функция $k = k(n)$ и число $\delta \in (0, (\ln 2 + 1/2)^{-1})$. Пусть, кроме того, для числа $c > 0$ выполнено соотношение

$$c(1 - \delta)^{-1} + \frac{c^2}{2} < 1. \quad (1)$$

Если функция k удовлетворяет неравенству

$$k - 1 \leq \frac{\delta \ln(n/\ln n)}{2 + 4\delta n^{-1} \ln n} \quad (2)$$

для всех $n \geq N_0$, то существует такое натуральное число N_1 , что для любого $n \geq N_1$

$$m_k(n) \geq c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \frac{2^{1-k} e^{-k/2}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство (2) фактически означает, что в теореме 1 $k = O(\ln n)$. Таким образом, область возможных значений функции k в теореме 1 существенно расширяется, ведь прежде мы требовали, чтобы $k = O(\sqrt{\ln n})$. Если в теореме 1 положить $k = O(\sqrt{\ln n})$, то оценка (3) примет вид

$$m_k(n) \geq n^{1/2+o(1)} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}},$$

и это значительно лучше известного ранее результата. Более того, даже при $k = o(\ln n)$ вид оценки сохранится. Отметим, что при $k = O(\sqrt{\ln n})$ отношение между оценками в прежней и новой теоремах такое же, как между соотношениями в теоремах Бека и Радхакришнана–Сринивазана. Это обусловлено схожестью используемых методов. Заметим, далее, что простая оценка $m_k(n) \geq 2^{n-1}/C_n^{k-1}$, являющаяся прямым аналогом оценки Эрдёша $m(n) \geq 2^{n-1}$, имеет место при любых k . В теореме 1 эта тривиальная оценка заведомо улучшена, так как даже если k имеет порядок роста $\ln n$, то при заданных в теореме ограничениях на константу δ оценка (3) имеет вид

$$m_k(n) \geq n^{\delta_1 + o(1)} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}},$$

где δ_1 – положительная константа. В частности, при $k = (3 + 6 \ln 2)^{-1} \ln n$ вполне $\delta_1 = 1/3$, и мы по сути возвращаемся к оценке из работ [5], [8].

Повторим, что сам метод, с помощью которого была получена оценка, основан на применении алгоритма случайной раскраски вершин гиперграфа, основанного на идеях из работы [4]. При этом, однако, возникает ряд как содержательных, так и технических трудностей. Центральной теоремой является теорема 2, и именно в ней дается механизм раскраски вершин гиперграфа. Формулировка теоремы 2 звучит так.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы целочисленная функция $k = k(n)$, функция $p = p(n)$, принимающая значения из интервала $(0, 1)$, и число $\delta \in (0, 1)$. Пусть для всех n начиная с некоторого $n_0 \geq 18$ выполняются неравенства

$$k - 1 \leq \frac{\delta np}{1 + 2\delta p}, \quad (4)$$

$$p^2 n \leq 1. \quad (5)$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \alpha_1(n) = \frac{(n - k + 1)p}{(n - k + 1)p - k + 1},$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(n) = \frac{n - k + 1}{n - 2k + 3}(1 + p)^{k-1},$$

$$\alpha_3 = \alpha_3(n) = (1 + p)^{k-1}(1 - p)^{1-k}(1 + 2p)^{k-1},$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(n) = \max(\alpha_1\alpha_3, \alpha_2),$$

$$\beta_1 = \beta_1(n) = \frac{n - 2k + 1}{n - 4k + 3},$$

$$\beta_2 = \beta_2(n) = \left(1 - \frac{(k - 1)^2 p}{n - 3k + 2}\right)^{-1},$$

$$\beta_3 = \beta_3(n) = \frac{n - k}{n - 2k + 1},$$

$$\gamma_2 = \gamma_2(n) = \max\left(\beta_1\beta_2^2\alpha_3k, \beta_1\beta_2^2\beta_3\alpha_3 \exp\left(\frac{k + p(k - 1)}{1 - p}\right)\right).$$

Если некоторая целочисленная функция $x = x(n)$ удовлетворяет неравенству

$$xC_n^{k-1}2^{1-n}((1-p)^n + p(k-1))\gamma_1 + x^2(C_{n-1}^{k-1})^2p(2k-1)2^{2k-2n}\gamma_2 < 1 \quad (6)$$

для всех n начиная с некоторого n_1 , то для всех $n > \max(n_0, n_1)$ выполнено $m_k(n) > x(n)$.

Теорема 2 носит достаточно универсальный характер. Ее можно применить, например, к задаче о двухпараметрическом свойстве $B_{k,\varepsilon}$, сформулированной в [6] и [8]. Напомним, что гиперграф $H = (V, E)$ обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$, если существует такой гиперграф $H' = (V, E')$, обладающий свойством B_k , что $E' \subseteq E$ и $|E'| \geq (1 - \varepsilon)|E|$. Требуется найти величину $m_{k,\varepsilon}(n)$, равную минимуму из всех таких m , для которых существует n -равномерный гиперграф, имеющий m ребер и не обладающий свойством $B_{k,\varepsilon}$. Из определения видно, что параметр $\varepsilon = \varepsilon(n)$ лежит в пределах от 0 до 1. В работах [6] и [8] было показано следующее.

1. Если $\varepsilon \geq 2^{1-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j$, то любой n -равномерный гиперграф обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$, и, стало быть, величина $m_{k,\varepsilon}(n)$ бесконечна.
2. Если $\varepsilon \leq (m_k(n))^{-1}$, то $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$, и задача сводится к предыдущей.
3. Рассмотрим случай, когда

$$\varepsilon \in \left(m_k^{-1}(n), 2^{1-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right).$$

В силу верхней оценки $m_k(n) \ll n^2 2^n / C_n^{k-1}$ можно заключить, что

$$\varepsilon \in \left(an^{-2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) 2^{1-n}, \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) 2^{1-n} \right)$$

для некоторой константы a . Тогда имеет место оценка

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq \frac{c - c^2}{8} \frac{\lambda^2 n}{-\ln(c\lambda)} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}, \quad (7)$$

где c – некоторая константа из интервала $(0, 1)$, а $\lambda = \varepsilon 2^{n-1} / \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i$.

Случаи 1 и 2 очень просты, а случай 3 нетривиален. С помощью теоремы 2 можно доказать следующую общую теорему о нижней оценке величины $m_{k,\varepsilon}(n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы целочисленная функция $k = k(n)$, функция $p = p(n)$, принимающая значения из интервала $(0, 1)$, и число $\delta \in (0, 1)$. Пусть для всех n начиная с некоторого $n_2 \geq 18$ выполняются неравенства (4) и (5) из условия теоремы 2. Далее, пусть величины $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(n)$ те же, что и в условии теоремы 2. Если некоторая целочисленная функция $x = x(n)$ удовлетворяет неравенству

$$C_n^{k-1}2^{1-n}((1-p)^n + p(k-1))\gamma_1 + x(C_{n-1}^{k-1})^2p(2k-1)2^{2k-2n}\gamma_2 \leq \varepsilon \quad (8)$$

для всех n начиная с некоторого n_3 , то для любого $n > \max(n_2, n_3)$ выполняется неравенство $m_{k,\varepsilon}(n) > x(n)$.

Явную зависимость нижней оценки величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ от параметров k и ε дает теорема 4.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\lambda = \lambda(n) = \varepsilon \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Пусть даны число $\delta \in (0, 1)$ и число $c \in (0, (1 - \delta)/2)$. Пусть также для всех $n \geq N_2$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} k - 1 &\leq -\frac{\delta \ln(c\lambda)}{1 - 2\delta \ln(c\lambda)/n}, \\ |\ln(c\lambda)| &\leq \ln n - 3 \ln \ln n = \varphi(n) = \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда существует такое натуральное число N_3 , что для всех $n \geq N_3$ выполняется неравенство

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq (1 - 2c(1 - \delta)^{-1}) \frac{\lambda n}{-\ln(c\lambda)} \frac{e^{-k} 2^{2-2k}}{2k - 1} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы знаем, что в единственной нетривиальной ситуации

$$\varepsilon \in \left(\text{const} \cdot n^{-2} \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) 2^{1-n}, \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) 2^{1-n} \right).$$

Это соотношение равносильно следующему условию на λ :

$$\text{const} \cdot n^{-2} \leq \lambda < 1.$$

Для любых ε и k выполнено неравенство $m_{k,\varepsilon}(n) \geq m_k(n)$, поэтому (7) дает лучшую, чем (3), оценку величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ при $\lambda \gg n^{-1/4}$. Если $\lambda \rightarrow 0$ и $k = o(\ln \lambda)$, то оценка (10) лучше оценки (7) в λ^{-1} раз. Более того, она нетривиальна для более широкого интервала значений λ . Если $\lambda \geq n^{-\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1/2)$ и $k = o(\ln n)$, то оценка (10) принимает вид

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geq n^{1-\alpha+o(1)} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i},$$

что лучше оценки величины $m_k(n)$ (см. (3)).

В следующих параграфах мы докажем теоремы 1–4: в § 3 докажем теорему 2; § 4 будет посвящен доказательству теоремы 1; в § 5 и § 6 будут доказаны соответственно теоремы 3 и 4.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Чтобы доказать теорему 2, необходимо и достаточно показать, что произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$ с условием $|E| \leq x(n)$ обладает свойством B_k . Зафиксируем любой такой гиперграф H .

Введем несколько определений. Будем обозначать двухцветные раскраски множества V вершин гиперграфа H через $\chi: V \rightarrow \{0, 1\}$. Назовем ребро e

плохим в некоторой раскраске χ , если в этой раскраске в ребре e число вершин одного из цветов меньше чем k . При этом другой цвет назовем *доминирующим* в ребре e относительно χ . Остальные ребра, не являющиеся плохими в этой раскраске, назовем *хорошими* относительно χ . Используя новые определения, утверждение о том, что гиперграф H обладает свойством B_k , можно переформулировать так: существует такая двухцветная раскраска множества V , в которой нет плохих ребер.

Для доказательства используем (рандомизированный) *алгоритм построения искомой раскраски* множества V . Он состоит из двух шагов.

На первом шаге покрасим вершины гиперграфа согласно схеме Бернулли: с вероятностью $1/2$ независимо присваиваем каждой вершине синий или красный цвет. Назовем получившуюся случайную раскраску *первой раскраской*.

После получения первой раскраски выделим опасные вершины. Вершину v назовем *опасной*, если существует содержащее вершину v ребро f , являющееся плохим в первой раскраске, и при этом v имеет доминирующий цвет ребра f . Множество опасных вершин обозначим через D .

На втором этапе мы случайным образом “подправим” первую раскраску путем частичного перекрашивания опасных вершин. Для этого сначала случайно занумеруем вершины гиперграфа. Вероятность каждой нумерации равна $1/|V|!$. Пусть $v_1, v_2, \dots$ – опасные вершины, записанные согласно полученной случайной нумерации, т.е. $D = \{v_1, v_2, \dots\}$. Рассмотрим их последовательно одну за другой. Пусть некоторые операции перекрашивания были совершены по отношению к вершинам $v_1, \dots, v_{i-1}$ и рассматривается опасная вершина v_i , имеющая в первой раскраске цвет A . Тогда существует некоторый набор ребер $f_1, f_2, \dots$, содержащих вершину v_i и плохих в первой раскраске, причем доминирующим цветом у этих ребер является цвет A . В каждом ребре f_j множество вершин, покрашенных в цвет A на первом этапе алгоритма, обозначим через V_j . Ясно, что $|V_j| > n - k$. Все вершины из V_j являются опасными, поэтому до рассмотрения v_i часть из них могла поменять цвет. Если хотя бы в одном из множеств V_j число вершин, не поменявших цвет на момент рассмотрения v_i , по-прежнему больше $n - k$, то вершина v_i называется *по-прежнему опасной*, и мы пытаемся ее перекрасить: с вероятностью p меняем ее цвет, а с вероятностью $1 - p$ не меняем. Если же вершина v_i не является по-прежнему опасной, то эту вершину пропускаем и переходим к v_{i+1} . Результат такого последовательного перекрашивания назовем *второй раскраской*.

Скажем, что алгоритм *не привел к успеху*, если во второй раскраске есть плохие ребра. Обозначим такое событие через $\mathcal{F}$. Покажем, что при $n \geq \max(n_0, n_1)$ вероятность $\mathcal{F}$ меньше единицы и что, стало быть, существует раскраска, в которой у H нет плохих ребер, т.е. H обладает свойством B_k . Из этого будет следовать утверждение теоремы.

Ребро e может быть плохим в двух случаях: либо e было плохим уже в первой раскраске и осталось плохим в процессе перекраски, либо e не было плохим в первой раскраске, но стало таковым во второй.

Через A_e обозначим такое событие: ребро e имело доминирующий красный цвет в первой раскраске и осталось плохим ребром с красным доминирующим цветом (или просто красным) во второй.

Через C_e обозначим другое событие: e имеет доминирующий красный цвет во второй раскраске, а в первой раскраске оно либо было хорошим, либо имело доминирующий синий цвет.

Тогда в силу симметричности первой раскраски (с точки зрения вероятности ничего не изменится, если в определении A_e и C_e красный цвет заменить на синий) имеем

$$P(\mathcal{F}) = 2P\left(\bigcup_{e \in E} A_e \cup \bigcup_{e \in E} C_e\right) \leq 2 \sum_{e \in E} P(A_e) + 2 \sum_{e \in E} P(C_e). \quad (11)$$

Далее мы оценим вероятности этих событий.

3.1. Вспомогательные утверждения. Здесь мы сформулируем две леммы и одно неравенство, которые имеют технический характер и понадобятся при оценке различных вероятностей.

Сначала докажем, что в условиях нашей теоремы выполнены соотношения

$$k - 1 < \sqrt{n} \leq \frac{n - 1}{4}. \quad (12)$$

Из (4) следует, что $k - 1 < np$, из (5) вытекает, что $p \leq (\sqrt{n})^{-1}$, поэтому выполнено неравенство $k - 1 < \sqrt{n}$. Осталось заметить, что неравенство $4\sqrt{n} \leq n - 1$ выполняется для всех $n \geq 18$. Соотношения (12) доказаны. Теперь перейдем к формулировкам лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $\xi \sim \text{Bin}(n, q)$, т.е. ξ – биномиальная случайная величина с параметрами n и q .

- 1) Если $r > nq$, то $P(\xi \geq r) \leq C_n^r q^r (1 - q)^{n-r} \frac{r(1 - q)}{r - nq}$.
- 2) Если $r < nq$, то $P(\xi \leq r) \leq C_n^r q^r (1 - q)^{n-r} \frac{(n - r)q}{nq - r}$.

Доказательство леммы 1 можно найти, например, в работе [9].

ЛЕММА 2. Пусть даны натуральные числа n, k, h и число $p \in (0, 1)$. Пусть выполнены соотношения (4), (5) из условия теоремы 2 и неравенство $h < 2k$. Тогда для любых натуральных чисел $a < k, b < k$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=0}^{\min(a, b)} C_a^i p^i (1 + p)^{b-i} C_{n-h}^{b-i} \leq (1 + p)^b C_{n-h}^b \left(1 - \frac{(k - 1)^2 p}{n - 3k + 2}\right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем максимальное слагаемое в сумме, рассматривая отношения соседних слагаемых. Отношение слагаемых при i и $i + 1$ есть

$$\frac{(i + 1)(n - h - b + i + 1)(1 + p)}{(a - i)(b - i)p} \geq \frac{n - h - b}{abp} \geq \frac{n - 3k + 2}{(k - 1)^2 p} > 1.$$

Последнее неравенство следует из неравенств (5) и (12). Действительно, из (5) следует, что $p \leq (\sqrt{n})^{-1}$, поэтому из (12) вытекает соотношение $p(k - 1) < 1$. Отсюда получаем, что $(k - 1)^2 p < k - 1$. Осталось показать, что $k - 1 < n - 3k + 2$.

Это неравенство равносильно неравенству $4(k-1) < n-1$, которое следует из (12).

В итоге получаем, что максимальному слагаемому в сумме отвечает $i=0$, причем вся сумма оценивается сверху этим слагаемым, умноженным на

$$\beta_2 = \left(1 - \frac{(k-1)^2 p}{n-3k+2}\right)^{-1}$$

(здесь мы суммируем геометрическую прогрессию). Лемма 2 доказана.

3.2. Оценка вероятности события A_e . Предположим, что событие A_e выполнено для ребра e . Тогда в первой раскраске это ребро имело $s < k$ синих вершин, и либо в процессе перекраски среди красных вершин перекрасилось не более чем $k-1-s$, либо одна из первоначально синих вершин поменяла цвет. Причем в первом случае все изначально красные вершины будут являться по-прежнему опасными на момент их рассмотрения, и, значит, для них должна проводиться случайная перекраска. Таким образом, имеет место неравенство

$$P(A_e) \leq \sum_{s=0}^{k-1} C_n^s 2^{-n} \left(\sum_{i=0}^{k-1-s} C_{n-s}^i p^i (1-p)^{n-s-i} + \sum_{t=1}^s C_s^t p^t \right).$$

Оценим правую часть соотношения. Первая внутренняя сумма оценивается с помощью случая 2) леммы 1 с параметрами $(n-s, p, k-1-s)$. Условие леммы $k-1-s < (n-s)p$ напрямую следует из условия (4) теоремы 2. Действительно,

$$k-1-s \leq k-1 \leq \frac{\delta np}{1+\delta p}.$$

Последнее неравенство равносильно следующему: $k-1 \leq \delta(n-k+1)p$. Далее, $\delta(n-k+1)p < (n-s)p$. Таким образом, $k-1-s < (n-s)p$, и лемма 1 применима. Согласно лемме

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=0}^{k-1-s} C_{n-s}^i p^i (1-p)^{n-s-i} \\ &\leq C_{n-s}^{k-1-s} p^{k-1-s} (1-p)^{n-k+1} \frac{(n-k+1)p}{(n-s)p - k + 1 + s} \\ &\leq C_{n-s}^{k-1-s} p^{k-1-s} (1-p)^{n-k+1} \alpha_1. \end{aligned}$$

Вторую внутреннюю сумму, а именно

$$A_2 = \sum_{t=1}^s C_s^t p^t,$$

оценим сверху выражением $sp(1+p)^{s-1}$, поскольку для всех $t \geq 1$ выполнено неравенство $C_s^t \leq s C_{s-1}^{t-1}$. Остается оценить сумму по s :

$$A_3 = \sum_{s=0}^{k-1} C_n^s 2^{-n} (C_{n-s}^{k-1-s} p^{k-1-s} (1-p)^{n-k+1} \alpha_1 + sp(1+p)^{s-1}).$$

Первая часть суммы легко вычисляется. Без учета множителей, не зависящих от s , получаем равенства

$$\sum_{s=0}^{k-1} C_n^s C_{n-s}^{k-1-s} p^{k-1-s} = \sum_{s=0}^{k-1} C_n^{k-1} C_{k-1}^s p^{k-1-s} = C_n^{k-1} (1+p)^{k-1}.$$

Вторая часть суммы есть

$$\sum_{s=0}^{k-1} C_n^s 2^{-n} s p (1+p)^{s-1} \leq n p (1+p)^{k-1} \sum_{s=0}^{k-2} C_{n-1}^s 2^{-n}.$$

Последняя сумма оценивается с помощью части 2) леммы 1 с параметрами $(n-1, 1/2, k-2)$. Условие леммы, очевидно, выполнено. Отметим, что если $k=1$, то эта сумма равна нулю, и лемму применять не надо. Возникает оценка

$$\sum_{s=0}^{k-2} C_{n-1}^s 2^{-n} \leq C_{n-1}^{k-2} 2^{-n} \frac{n-k+1}{n-2k+3}.$$

Собирая вместе полученные оценки, получаем неравенство

$$\begin{aligned} A_3 &\leq C_n^{k-1} 2^{-n} (1+p)^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \alpha_1 + C_n^{k-1} 2^{-n} \frac{n-k+1}{n-2k+3} (k-1) p (1+p)^{k-1} \\ &\leq C_n^{k-1} 2^{-n} ((1-p)^n \alpha_1 \alpha_3 + p(k-1) \alpha_2). \end{aligned}$$

Верхняя оценка для A_3 является верхней оценкой и для вероятности события A_e . В итоге выполнено неравенство

$$P(A_e) \leq C_n^{k-1} 2^{-n} ((1-p)^n + p(k-1)) \gamma_1. \quad (13)$$

3.3. Оценка вероятности события C_e . Скажем, что для плохого в первой раскраске ребра f *перекраска не удалась*, если среди вершин, имевших доминирующий цвет ребра f в первой раскраске, не менее чем $n-k+1$ вершин не поменяли цвет в процессе перекраски. Из определения события C_e следует, что в ребре e найдутся вершины, сменившие в процессе перекраски синий цвет на красный. Среди таких вершин найдется последняя по нумерации. Обозначим ее, например, через v . Эта вершина должна принадлежать некоторому ребру f , имевшему доминирующий синий цвет в первой раскраске, и на момент рассмотрения v перекраска в f еще не удалась. Может ли f совпадать с e ? Не может, потому что ребро e должно быть красным во второй раскраске, а после рассмотрения вершины v синее ребро f не может стать красным, и больше синие вершины в ребре e цвет не поменяют. Значит, ребро f отлично от e . Введем событие $B_{ef,v}$, состоящее в том, что для некоторого ребра $f \neq e$ и некоторой вершины v выполнены следующие свойства:

- 1) e и f пересекаются по h ($h \geq 1$) вершинам;
- 2) f имеет в первой раскраске синий доминирующий цвет, а e – красный доминирующий цвет во второй раскраске;
- 3) $v \in e \cap f$ – последняя вершина в e , поменявшая цвет с синего на красный;
- 4) в ребре f в момент рассмотрения v перекраска еще не удалась.

Из всего сказанного вытекает, что событие C_e влечет за собой событие $B_{ef,v}$ для некоторого ребра f и некоторой вершины v из пересечения ребер e и f . Получаем неравенство

$$P(C_e) \leq P\left(\bigcup_{f \neq e} \bigcup_{v \in f \cap e} B_{ef,v}\right) \leq \sum_{f \neq e} \sum_{v \in f \cap e} P(B_{ef,v}).$$

Из определения события $B_{ef,v}$ видно, что оно может иметь место только в случае $h < 2k$. Действительно, пусть $h \geq 2k$. Свойство 4) означает, что после перекрашивания вершины v число красных вершин в пересечении ребер не больше чем k . Новые красные вершины в пересечении появиться не могут, так как v – последняя по нумерации вершина в e , поменявшая цвет с синего на красный. Следовательно, во второй раскраске в ребре e будет не менее k синих вершин, что невозможно в силу свойства 2). Итак, событие $B_{ef,v}$ имеет ненулевую вероятность только в случае $h < 2k$. Получаем неравенство

$$P(C_e) \leq P\left(\bigcup_{f \neq e} \bigcup_{v \in f \cap e} B_{ef,v}\right) \leq \sum_{f \neq e: |e \cap f| < 2k} \sum_{v \in f \cap e} P(B_{ef,v}). \quad (14)$$

Оценим условную вероятность события $B_{ef,v}$ при фиксированной нумерации вершин гиперграфа σ . Если σ фиксирована, то оба ребра без учета вершины v разбиваются на четыре части: f – на части f_1, f_2, f_3, f_4 , а e – соответственно на части e_1, e_2, e_3, e_4 .

В f_1 входят вершины, не содержащиеся в $f \cap e$ и предшествующие вершине v в нумерации σ ; число таких вершин обозначим через $t = |f_1|$. В f_2 войдут вершины, содержащиеся в $f \cap e$ и предшествующие v в нумерации σ ; число таких вершин обозначим через $x = |f_2|$. Часть f_3 составят вершины, содержащиеся в $f \cap e$, но следующие за v по нумерации σ ; число таких вершин обозначим через $y = |f_3| = h - 1 - x$. Наконец, f_4 – это оставшиеся вершины, которые не принадлежат $f \cap e$ и следуют за v в нумерации σ ; число таких вершин равно $n - h - t$.

Для ребра e части e_2 и e_3 совпадают соответственно с f_2 и f_3 . Множество e_1 составляют вершины $e \setminus f$, предшествующие вершине v в нумерации σ , а e_4 составляют все оставшиеся вершины ребра e . Введем обозначение для мощности e_1 : $|e_1| = s$.

С помощью новых обозначений можно вывести следующее неравенство:

$$\begin{aligned} P(B_{ef,v}|\sigma) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{a_1=0}^{\min(t,j)} \sum_{a_2=0}^{\min(x,j-a_1)} \sum_{a_3=\max(0,y-k+1)}^{\min(y,j-a_1-a_2)} C_t^{a_1} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} \\ &\times 2^{-n} \sum_{c_1=0}^{a_1} C_{a_1}^{c_1} p^{c_1} \sum_{b_1=0}^{\min(t-a_1,k-1-j)} C_{t-a_1}^{b_1} p^{b_1} (1-p)^{t-a_1-b_1} \\ &\times \sum_{c_2=0}^{\min(a_2,k-1-y+a_3)} C_{a_2}^{c_2} p^{c_2} \sum_{b_2=\max(0,h-k-a_2-a_3+c_2)}^{\min(x-a_2,k-1-j-b_1)} C_{x-a_2}^{b_2} p^{b_2} (1-p)^{x-a_2-b_2} \\ &\times p \sum_{c_3=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2,a_3)} C_{a_3}^{c_3} p^{c_3} \sum_{d_1=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3,s)} C_s^{d_1} \left(\frac{1+p}{2}\right)^s \end{aligned}$$

$$\times \sum_{d_2=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3-d_1, n-s-h)} C_{n-s-h}^{d_2} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{d_2} 2^{-n+h+s+d_2}. \quad (15)$$

Поясним смысл параметров. В первой раскраске в ребре f число красных вершин должно быть меньше k , за это отвечает параметр j . Число красных вершин в f_i обозначим через a_i для $i = 1, 2, 3$. Оставшиеся $j - a_1 - a_2 - a_3$ красных вершин находятся в части f_4 . Заметим, однако, что число красных вершин в f_3 не может быть меньше чем $y - k + 1$. В самом деле, ни одна из тех вершин в f_3 , которые оказались синими в первой раскраске, не поменяла цвет в процессе перекраски. Значит, чтобы e могло быть красным во второй раскраске, этих вершин должно быть меньше k .

Далее, некоторые красные вершин в f_1 могли изменить цвет в процессе перекраски; число подобных вершин обозначим через c_1 . Свойство 4) в определении события $B_{ef,v}$ говорит о том, что все синие вершины f_1 и f_2 подвергались случайной перекраске. В части f_1 перекрасилось b_1 синих вершин, но это число не превосходит $k - 1 - j$, иначе на момент рассмотрения вершины v перекраска в ребре f удалась бы. Среди красных вершин части f_2 перекрасилось c_2 , причем

$$c_2 \leq k - 1 - y + a_3,$$

иначе ребро e во второй раскраске не сможет быть красным.

Следующий параметр b_2 – число перекрасившихся синих вершин в части f_2 – имеет более нетривиальные ограничения на область возможных значений. Поскольку перекраска в f до рассмотрения вершины v не удалась, то $b_2 \leq k - 1 - j - b_1$. С другой стороны, количество синих вершин в пересечении ребер после перекраски вершины v должно быть меньше k , ведь v – последняя синяя вершина, поменявшая цвет, а e – красное во второй раскраске ребро. Подсчитаем число синих вершин в $e \cap f$ после перекраски вершины v . Несложно понять, что оно равно $x - a_2 - b_2 + c_2 + y - a_3$. Отсюда, учитывая, что $x + y = h - 1$, получаем нижнее ограничение на возможное значение b_2 :

$$b_2 \geq h - k - a_2 - a_3 + c_2.$$

Следующий за суммой по b_2 множитель p отвечает вероятности перекраски вершины v . Среди красных вершин части f_3 перекрасилось c_3 , следовательно, они добавились к уже имеющимся $h - 1 - a_2 - b_2 + c_2 - a_3$ синим вершинам в пересечении ребер. Число синих вершин в пересечении, как и во всем ребре e , должно быть меньше k во второй раскраске. Отсюда получается верхнее ограничение на величину c_3 :

$$c_3 \leq k - h + a_2 + a_3 + b_2 - c_2.$$

В частях e_1 и e_4 ребра e общее число синих вершин во второй раскраске не должно превышать величины $k - h + a_2 + a_3 + b_2 - c_2 - c_3$. Параметры d_1 и d_2 равны количествам синих вершин соответственно в e_1 и e_2 . Каждая вершина в e_1 принимает во второй раскраске произвольный фиксированный цвет с вероятностью, не превосходящей $(1+p)/2$. В части e_4 вершины принимают во

второй раскраске синий цвет также с вероятностью, не превосходящей $(1+p)/2$. Красный цвет они могут принять только в том случае, если уже в первой раскраске они были красными, поскольку вершина v поменяла цвет последней из синих вершин, а вершины из e_4 следуют за вершиной v в нумерации σ . Таким образом, вероятность появления ровно d_2 синих вершин в части e_4 не превосходит

$$C_{n-s-h}^{d_2} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{d_2} 2^{-n+h+s+d_2}.$$

В итоге доказано неравенство (15).

3.4. Оценка вероятности события $B_{ef,v}$. Для удобства введем следующие обозначения для сумм, стоящих в правой части неравенства (15):

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{d_1=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3, s)} C_s^{d_1} \left(\frac{1+p}{2} \right)^s \\ &\quad \times \sum_{d_2=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3-d_1, n-s-h)} C_{n-s-h}^{d_2} \left(\frac{1+p}{2} \right)^{d_2} 2^{-n+h+s+d_2}, \\ S_2 &= \sum_{c_3=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2, a_3)} C_{a_3}^{c_3} p^{c_3} S_1, \\ S_3 &= \sum_{b_2=\max(0, h-k-a_2-a_3+c_2)}^{\min(x-a_2, k-1-j-b_1)} C_{x-a_2}^{b_2} p^{b_2} (1-p)^{x-a_2-b_2} p S_2, \\ S_4 &= \sum_{c_2=0}^{\min(a_2, k-1-y+a_3)} C_{a_2}^{c_2} p^{c_2} S_3, \\ S_5 &= \sum_{b_1=0}^{\min(t-a_1, k-1-j)} C_{t-a_1}^{b_1} p^{b_1} (1-p)^{t-a_1-b_1} S_4, \\ S_6 &= \sum_{c_1=0}^{a_1} C_{a_1}^{c_1} p^{c_1} S_5, \\ S_7 &= \sum_{a_2=0}^{\min(x, j-a_1)} \sum_{a_3=\max(0, y-k+1)}^{\min(y, j-a_1-a_2)} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} S_6, \\ S_8 &= \sum_{a_1=0}^{\min(t, j)} C_t^{a_1} S_7, \\ S_9 &= \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-n} S_8. \end{aligned}$$

Будем последовательно оценивать все эти суммы. Начнем с S_1 . Параметр d_2 не превосходит $k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3$, поэтому выполнено неравенство

$$S_1 \leq (1+p)^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3+s} 2^{h-n} \sum_{d_1+d_2 \leq k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3} C_s^{d_1} C_{n-s-h}^{d_2}.$$

Последняя сумма, очевидно, равна сумме

$$\sum_{d=0}^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3} C_{n-h}^d,$$

которая оценивается с помощью части 2) леммы 1 с параметрами $(n-h, 1/2, k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3)$. Условие леммы следует из неравенств

$$k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3 \leq k-1, \quad k-1 < \frac{1}{2}(n-h).$$

Первое неравенство очевидно из ограничений на значения параметров a_2, a_3, b_2, c_2, c_3 . Второе неравенство следует из (12) и условия $h < 2k$. В итоге величина S_1 оценивается сверху следующим выражением:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq (1+p)^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3} \\ &\quad \times \frac{n-h-(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3)}{n-h-2(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3)} \\ &\leq (1+p)^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3} \beta_1. \end{aligned}$$

Поясним последнее неравенство. Поскольку

$$0 \leq k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3 \leq k-1,$$

то выполнена оценка

$$\frac{n-h-(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3)}{n-h-2(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3)} \leq \frac{n-h}{n-h-2k+2}.$$

Последнее выражение возрастает по $h \leq 2k-1$, а потому не превосходит

$$\frac{n-2k+1}{n-4k+3} = \beta_1.$$

Перейдем к оцениванию величины S_2 . Из оценки величины S_1 получаем

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{c_3=0}^{\min(k-h+a_2+a_3+b_2-c_2, a_3)} C_{a_3}^{c_3} p^{c_3} (1+p)^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3+s} \\ &\quad \times 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2-c_3} \beta_1. \end{aligned}$$

Применим лемму 2 с параметрами $a = a_3, b = k-h+a_2+a_3+b_2-c_2$. Условия $a < k, b < k$, очевидно, выполнены. По лемме 2

$$S_2 \leq (1+p)^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+a_2+a_3+b_2-c_2} \beta_1 \beta_2.$$

Заметим, что значение выражения в правой части неравенства растет с ростом параметра b_2 , который не превосходит величины $x-a_2$. Подставив эту оценку в выражение вместо b_2 , поскольку из (12) вытекает, что

$$k-h+a_2+a_3+b_2-c_2 \leq k-1 \leq \frac{1}{2}(n-2k+1) \leq \frac{1}{2}(n-h),$$

а потому биномиальный коэффициент только увеличится, мы легко получаем неравенство уже для S_3 :

$$S_3 \leq (1+p)^{k-h+x+a_3-c_2+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+x+a_3-c_2} p \beta_1 \beta_2.$$

Саму сумму по b_2 в выражении для S_3 мы тривиальным образом оценили сверху единицей.

Далее получаем соотношение

$$S_4 \leq \sum_{c_2=0}^{\min(a_2, k-1-y+a_3)} C_{a_2}^{c_2} p^{c_2} (1+p)^{k-h+x+a_3-c_2+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+x+a_3-c_2} p \beta_1 \beta_2.$$

Снова воспользуемся леммой 2 с параметрами $a = a_2$, $b = k-1-y+a_3 = k-h+x+a_3$. Из нее следует, что

$$S_4 \leq (1+p)^{k-h+x+a_3+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-h+x+a_3} p \beta_1 \beta_2^2.$$

Параметр a_3 не превосходит y , а $x+y = h-1$, значит, мы получаем следующую оценку для S_4 :

$$S_4 \leq (1+p)^{k-1+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-1} p \beta_1 \beta_2^2 = R. \quad (16)$$

Эта величина не зависит от всех оставшихся параметров суммирования в неравенстве (15). Дальнейшее оценивание будет зависеть от значения параметра t .

Первый случай: $(t-k+1)p \geq k$. Из данного неравенства следует, что для оценивания суммы в выражении для S_5 применима часть 2) леммы 1 с параметрами $(t-a_1, p, k-1-j)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_5 &\leq \sum_{b_1=0}^{\min(t-a_1, k-1-j)} C_{t-a_1}^{b_1} p^{b_1} (1-p)^{t-a_1-b_1} R \\ &\leq C_{t-a_1}^{k-1-j} p^{k-1-j} (1-p)^{t-a_1-k+1+j} R \frac{(t-a_1-k+1+j)p}{(t-a_1)p-k+1+j}. \end{aligned}$$

Рассмотрим последний множитель. Максимизируя его сначала по a_1 ($a_1 \leq j$), затем по j ($j \geq 0$), и, наконец, по t ($tp \geq (k-1)(1+p)+1$), можно показать, что он не превосходит величины k . Значит,

$$S_5 \leq C_{t-a_1}^{k-1-j} p^{k-1-j} (1-p)^{t-a_1-k+1+j} k R.$$

Поскольку правая часть этой оценки не зависит от c_1 , сразу возникает следующее неравенство для S_6 :

$$S_6 = \sum_{c_1=0}^{a_1} C_{a_1}^{c_1} p^{c_1} S_5 \leq (1+p)^{a_1} C_{t-a_1}^{k-1-j} p^{k-1-j} (1-p)^{t-a_1-k+1+j} k R.$$

Далее,

$$\begin{aligned} S_7 &= \sum_{a_2=0}^{\min(x, j-a_1)} \sum_{a_3=\max(0, y-k+1)}^{\min(y, j-a_1-a_2)} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} S_6 \\ &\leq C_{n-1-t}^{j-a_1} (1+p)^{a_1} C_{t-a_1}^{k-1-j} p^{k-1-j} (1-p)^{t-a_1-k+1+j} k R. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из тождества для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{a_2=0}^{\min(x, j-a_1)} \sum_{a_3=0}^{\min(y, j-a_1-a_2)} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} = C_{n-1-t}^{j-a_1}.$$

Осталось оценить S_8 и S_9 . В силу оценки для S_7 имеем соотношение

$$S_8 \leq \sum_{a_1=0}^{\min(t, j)} C_t^{a_1} C_{n-1-t}^{j-a_1} (1+p)^{a_1} C_{t-a_1}^{k-1-j} p^{k-1-j} (1-p)^{t-a_1-k+1+j} kR.$$

В нашем случае $\min(t, j) = j$. Используем следующее тождество для биномиальных коэффициентов:

$$C_t^{a_1} C_{t-a_1}^{k-1-j} = C_t^{k-1-j+a_1} C_{k-1-j+a_1}^{k-1-j}.$$

Далее, выполнены неравенства

$$(1+p)^{a_1} (1-p)^{-a_1} \leq (1+p)^j (1-p)^{-j}, \quad C_{k-1-j+a_1}^{k-1-j} \leq C_{k-1}^{k-1-j}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$S_8 \leq p^{k-1-j} (1-p)^{t-k+1} kR (1+p)^j C_{k-1}^{k-1-j} \sum_{a_1=0}^j C_t^{k-1-j+a_1} C_{n-1-t}^{j-a_1}.$$

Последняя сумма, очевидно, не превосходит C_{n-1}^{k-1} . Таким образом,

$$S_8 \leq p^{k-1-j} (1-p)^{t-k+1} kR (1+p)^j C_{k-1}^{k-1-j} C_{n-1}^{k-1}.$$

Из полученной оценки сразу вытекает следующее неравенство для S_9 :

$$S_9 \leq (1+2p)^{k-1} 2^{-n} (1-p)^{t-k+1} kR C_{n-1}^{k-1}.$$

В силу выражения (16) для величины R мы получаем следующую оценку условной вероятности события $B_{ef,v}$ при условии фиксированной нумерации вершин гиперграфа в первом случае:

$$\begin{aligned} P(B_{ef,v}|\sigma) &\leq (1+p)^{k-1+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-1} p \beta_1 \beta_2^2 (1+2p)^{k-1} 2^{-n} (1-p)^{t-k+1} k C_{n-1}^{k-1} \\ &\leq (1+p)^s (1-p)^t p 2^{h-2n} C_{n-h}^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \beta_1 \beta_2^2 \alpha_3 k. \end{aligned} \quad (17)$$

Второй случай: $(t-k+1)p < k$. На сей раз сумму по b_1 в выражении для S_5 оценим тривиальным образом единицей, т.е.

$$S_5 \leq \sum_{b_1=0}^{\min(t-a_1, k-1-j)} C_{t-a_1}^{b_1} p^{b_1} (1-p)^{t-a_1-b_1} R \leq R.$$

Эта оценка сразу дает следующее неравенство для S_6 :

$$S_6 \leq \sum_{c_1=0}^{a_1} C_{a_1}^{c_1} p^{c_1} R \leq (1+p)^{k-1} R.$$

Далее,

$$\begin{aligned} S_8 &\leq \sum_{a_1=0}^{\min(t,j)} \sum_{a_2=0}^{\min(x,j-a_1)} \sum_{a_3=\max(0,y-k+1)}^{\min(y,j-a_1-a_2)} C_t^{a_1} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} (1+p)^{k-1} R \\ &\leq C_{n-1}^j (1+p)^{k-1} R. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из тождества для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{a_1=0}^{\min(t,j)} \sum_{a_2=0}^{\min(x,j-a_1)} \sum_{a_3=0}^{\min(y,j-a_1-a_2)} C_t^{a_1} C_x^{a_2} C_y^{a_3} C_{n-h-t}^{j-a_1-a_2-a_3} = C_{n-1}^j.$$

Осталось оценить S_9 :

$$S_9 \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-n} C_{n-1}^j (1+p)^{k-1} R.$$

Для этого используем случай 2) леммы 1 с параметрами $(n-1, 1/2, k-1)$. Тогда

$$S_9 \leq 2^{-n} C_{n-1}^{k-1} (1+p)^{k-1} R \frac{n-k}{n-2k+1} = 2^{-n} C_{n-1}^{k-1} (1+p)^{k-1} R \beta_3.$$

Отметим, что в данном случае

$$(1-p)^{-t} \leq \exp\left(\frac{k+p(k-1)}{1-p}\right).$$

Это следует из соотношения $(1-x)^{-1} \leq e^{x/(1-x)}$ при $x \in (0,1)$. Используя полученное выше неравенство для S_9 , а также выражение (16) для величины R , мы получаем следующую оценку условной вероятности события $B_{ef,v}$ при условии фиксированной нумерации во втором случае:

$$\begin{aligned} P(B_{ef,v}|\sigma) &\leq (1+p)^{k-1+s} 2^{h-n} C_{n-h}^{k-1} p \beta_1 \beta_2^2 2^{-n} C_{n-1}^{k-1} (1+p)^{k-1} \beta_3 \\ &\leq (1+p)^s (1-p)^t p 2^{h-2n} C_{n-h}^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 \alpha_3 \exp\left(\frac{k+p(k-1)}{1-p}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношений (17) и (18) следует, что для любой фиксированной нумерации σ искомая условная вероятность события $B_{ef,v}$ оценивается сверху выражением

$$P(B_{ef,v}|\sigma) \leq (1+p)^s (1-p)^t p 2^{h-2n} C_{n-h}^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \gamma_2,$$

где $s = s(\sigma)$, $t = t(\sigma)$ – функции от случайной нумерации. Тогда по формуле полной вероятности получаем

$$P(B_{ef,v}) = \sum_{\sigma} P(B_{ef,v}|\sigma) P(\sigma) \leq p 2^{h-2n} C_{n-h}^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \gamma_2 M[(1+p)^s (1-p)^t].$$

Здесь математическое ожидание не превосходит единицы (см. [4]). В итоге для произвольных ребер e, f и вершины $v \in e \cap f$ с условием $1 \leq h = |e \cap f| \leq 2k - 1$ выполнена следующая оценка вероятности события $B_{ef,v}$:

$$P(B_{ef,v}) \leq p 2^{h-2n} C_{n-h}^{k-1} C_{n-1}^{k-1} \gamma_2. \quad (19)$$

Если же количество вершин в пересечении не удовлетворяет указанному условию, то вероятность события $B_{ef,v}$ равна нулю.

3.5. Оценка вероятности события $\mathcal{F}$. Теперь можно собрать воедино накопленную в предыдущих частях информацию. Действительно, в силу доказанных неравенств (11), (13), (14) и (19) мы получаем следующую оценку для $P(\mathcal{F})$ при любом $n \geq \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2 \sum_{e \in E} P(A_e) + 2 \sum_{e \in E} P(C_e) \\ &\leq 2|E| \max_e P(A_e) + 2|E| \max_e P(C_e) \\ &\leq 2|E| \max_e P(A_e) + 2|E|^2 \max_{\substack{f \neq e: \\ 1 \leq |e \cap f| \leq 2k-1}} \sum_{v \in e \cap f} P(B_{ef,v}) \\ &\leq |E| C_n^{k-1} 2^{1-n} ((1-p)^n + p(k-1)) \gamma_1 + |E|^2 (2k-1) p 2^{2k-2n} (C_{n-1}^{k-1})^2 \gamma_2 \\ &\leq x C_n^{k-1} 2^{1-n} ((1-p)^n + p(k-1)) \gamma_1 + x^2 (C_{n-1}^{k-1})^2 p (2k-1) 2^{2k-2n} \gamma_2 < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство есть в точности условие (6). Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

При доказательстве воспользуемся теоремой 2 следующим образом: подберем функции $p = p(n)$ и $x = x(n)$ так, чтобы они удовлетворяли условиям (4), (5) и (6) теоремы 2 начиная с некоторого N_1 ; тогда теорема 2 даст оценку $m_k(n) > x(n)$. Положим

$$x = x(n) = \left\lceil c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \frac{2^{1-k} e^{-k/2}}{\sqrt{2k-1}} \frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}} \right\rceil.$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть числа. В качестве параметра возьмем

$$p = p(n) = \frac{\ln(n/\ln n)}{2n}.$$

Проверим выполнение условий. Условие (4) обеспечивается соотношением (2) при всех n начиная с некоторого. Условие (5) также очевидным образом выполняется при больших n . Остается проверить условие (6).

Выясним, что в наших условиях представляют собой величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Величина α_1 оценивается сверху так:

$$\alpha_1 = \frac{(n-k+1)p}{(n-k+1)p - k + 1} \leq (1-\delta)^{-1},$$

поскольку из условия (4) получаем $k - 1 \leq \delta(n - k + 1)p$. Далее,

$$\alpha_2 = \frac{n - k + 1}{n - 2k + 3}(1 + p)^{k-1} \leq \frac{n}{n - 2 \ln n + 1} \exp\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) = \psi_2(n)$$

в силу того, что из условия (2) получаем $k - 1 \leq \ln n$. Наконец,

$$\alpha_3 = (1 + p)^{k-1}(1 - p)^{1-k}(1 + 2p)^{k-1} \leq \exp\left(\left(3 + \frac{1}{1 - \ln n/n}\right)\frac{\ln^2 n}{n}\right) = \psi_3(n).$$

Неравенство вытекает из соотношений $e^{x/(1+x)} \leq 1 + x \leq e^x$ для $x > -1$.

Из приведенных оценок следует, что

$$\gamma_1 = \max(\alpha_1 \alpha_3, \alpha_2) \leq (1 - \delta)^{-1} \psi_0(n), \quad (20)$$

где $\psi_0(n) = \max(\psi_2(n), \psi_3(n))$. Отметим, что $\psi_0(n)$ стремится к 1 и не зависит от вида функции k и значения константы δ .

Теперь перейдем к оцениванию величин β_i , $i = 1, 2, 3$. Выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{n - 2k + 1}{n - 4k + 3} \leq \frac{n}{n - 4 \ln n - 1} = \xi_1(n) = \xi_1, \\ \beta_2 &= \left(1 - \frac{(k - 1)^2 p}{n - 3k + 2}\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{\ln^3 n}{n(n - 3 \ln n - 1)}\right)^{-1} = \xi_2(n) = \xi_2, \\ \beta_3 &= \beta_3(n) = \frac{n - k}{n - 2k + 1} \leq \frac{n}{n - 2 \ln n - 1} = \xi_3(n) = \xi_3. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{k + p(k - 1)}{1 - p} - k = \frac{p(2k - 1)}{1 - p} \leq 4 \frac{\ln^2 n}{n} = \xi_4(n) = \xi_4,$$

так как при нашем выборе функции $p(n)$ она не превосходит $1/2$. Из последнего неравенства и оценок величин β_i , $i = 1, 2, 3$, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \max\left(\beta_1 \beta_2^2 \alpha_3 k, \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 \alpha_3 \exp\left(\frac{k + p(k - 1)}{1 - p}\right)\right) \\ &\leq e^k \xi_1 \xi_2^2 \psi_3 \xi_3 e^{\xi_4} = e^k \xi_0(n), \end{aligned} \quad (21)$$

так как $k \leq e^k$ и $\beta_3 \geq 1$. Отметим, что, как и $\psi_0(n)$, величина $\xi_0(n)$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$, а также не зависит от вида функции k и значения константы δ .

В итоге первое слагаемое в левой части неравенства (6) с помощью (20) оценивается сверху следующим выражением:

$$\begin{aligned} x(n) C_n^{k-1} 2^{1-n} ((1 - p)^n + p(k - 1)) \gamma_1 &\leq c \psi_0(n) (1 - \delta)^{-1} (1 + p(k - 1) e^{pn}) \\ &\leq c \psi_0(n) (1 - \delta)^{-1} \left(1 + \frac{\ln^{5/2} n}{n^{1/2}}\right) = c \psi(n) (1 - \delta)^{-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

причем $\psi(n)$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$ и не зависит от k и δ .

Второе слагаемое в левой части неравенства (6) с помощью (21) оценивается сверху так:

$$x^2 (C_{n-1}^{k-1})^2 p(2k - 1) 2^{2k-2n} \gamma_2 \leq \frac{1}{2} c^2 \xi_0(n). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что для обоснования условия (6) достаточно показать, что при всех n начиная с некоторого N_1 выполняется неравенство

$$c\psi(n)(1-\delta)^{-1} + \frac{1}{2}c^2\xi_0(n) < 1.$$

Условие (1) и стремление к 1 функций $\psi(n)$ и $\xi_0(n)$ обеспечивают существование такого числа N_1 . Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Чтобы доказать теорему 3, необходимо и достаточно показать, что произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$ с условием $|E| \leq x(n)$ обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$. Зафиксируем любой такой гиперграф H .

Дальнейшие рассуждения основаны на оценке математического ожидания случайной величины $X(\chi)$, равной количеству хороших ребер в случайной раскраске вершин гиперграфа χ . Здесь под случайной раскраской мы понимаем раскраску, получающуюся с помощью рандомизированного алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2 (см. § 3).

Пусть $e \in E$ – ребро гиперграфа. Введем случайную величину $X_e(\chi)$, равную 1, если ребро e является хорошим в раскраске χ , и 0 в противном случае. Тогда MX_e , очевидно, равно вероятности того, что e является хорошим во второй раскраске. Оценим вероятность p_e противоположного события, состоящего в том, что ребро e является плохим во второй раскраске.

Как и в § 3, введем события A_e и C_e . Тогда

$$p_e = 2P(A_e) + 2P(C_e).$$

При доказательстве теоремы 2 были приведены оценки вероятностей событий A_e и C_e . Эти оценки верны и в нынешней ситуации, поскольку выполнены неравенства (4) и (5) теоремы 2. Согласно теореме 2 при всех $n \geq n_2$ для произвольного ребра $e \in E$ выполнены неравенства (12), (13) и (18). Следовательно,

$$p_e \leq C_n^{k-1}2^{1-n}((1-p)^n + p(k-1))\gamma_1 + x(2k-1)p2^{2k-2n}(C_{n-1}^{k-1})^2\gamma_2.$$

Отсюда получаем следующую оценку снизу для MX_e :

$$\begin{aligned} MX_e &= 1 - p_e = 1 - 2P(A_e) - 2P(C_e) \\ &\geq 1 - C_n^{k-1}2^{1-n}((1-p)^n + p(k-1))\gamma_1 + x(2k-1)p2^{2k-2n}(C_{n-1}^{k-1})^2\gamma_2 \\ &\geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Предпоследнее неравенство следует из условия (8) теоремы 3.

Рассмотрим случайную величину $X = X(\chi)$, равную сумме всех величин X_e . Тогда значение величины $X(\chi)$ – это количество хороших ребер в раскраске χ . Оценим среднее значение X :

$$MX = \sum_{e \in E} EX_e = \sum_{e \in E} (1 - p_e).$$

В силу полученной выше оценки вероятности p_e имеет место неравенство

$$MX \geq x(1 - \varepsilon).$$

Значит, существует такая раскраска вершин гиперграфа, что в ней H имеет не менее $|E|(1 - \varepsilon)$ хороших ребер. Обозначим через E' это множество ребер. Тогда гиперграф $H' = (V, E')$ обладает свойством B_k , а значит, гиперграф H обладает свойством $B_{k,\varepsilon}$. Теорема 3 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 4

При доказательстве воспользуемся теоремой 3 следующим образом: определим функции $p = p(n)$, $x = x(n)$ и покажем, что при таких значениях p и x выполняются условия теоремы 3. Положим

$$p(n) = \frac{-\ln(c\lambda)}{n}, \quad x(n) = \left[(1 - 2c(1 - \delta)^{-1}) \frac{\lambda n}{-\ln(c\lambda)} \frac{e^{-k} 2^{2-2k}}{2k-1} \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i} \right].$$

Проверим выполнение условий теоремы 3. Необходимое неравенство (4) есть в точности условие (9) при нашем выборе параметра p . Условие (5) выполняется при больших n в силу соотношения $p \leq \varphi/n \leq \ln n/n$. Остается проверить выполнение неравенства (8).

Как и в теореме 1, необходимо выяснить, что в наших условиях представляют собой величины α_1 , α_2 , α_3 и β_1 , β_2 , β_3 . Величина α_1 оценивается так же, как и в теореме 1:

$$\alpha_1 = \frac{(n - k + 1)p}{(n - k + 1)p - k + 1} \leq (1 - \delta)^{-1},$$

поскольку выполнено условие (4). Далее,

$$\alpha_2 = \frac{n - k + 1}{n - 2k + 3} (1 + p)^{k-1} \leq \frac{n}{n - 2\varphi + 1} e^{\varphi^2/n} = \psi_2(n)$$

в силу того, что из условия (9) получаем $k - 1 \leq -\ln(c\lambda) \leq \varphi$. Наконец,

$$\alpha_3 = (1 + p)^{k-1} (1 - p)^{1-k} (1 + 2p)^{k-1} \leq \exp\left(\left(3 + \frac{1}{1 - \varphi/n}\right) \frac{\varphi^2 n}{n}\right) = \psi_3(n).$$

Из приведенных оценок следует, что

$$\gamma_1 = \max(\alpha_1 \alpha_3, \alpha_2) \leq (1 - \delta)^{-1} \psi_0(n), \quad (24)$$

где $\psi_0(n) = \max(\psi_2(n), \psi_3(n))$. Отметим, что $\psi_0(n)$ стремится к 1 и не зависит от вида функции k и значения констант δ , c .

Теперь перейдем к оцениванию величин β_i , $i = 1, 2, 3$. Выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{n - 2k + 1}{n - 4k + 3} \leq \frac{n}{n - 4\varphi - 1} = \xi_1(n) = \xi_1, \\ \beta_2 &= \left(1 - \frac{(k-1)^2 p}{n - 3k + 2}\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{\varphi^3}{n(n - 3\varphi - 1)}\right)^{-1} = \xi_2(n) = \xi_2, \\ \beta_3 &= \beta_3(n) = \frac{n - k}{n - 2k + 1} \leq \frac{n}{n - 2\varphi - 1} = \xi_3(n) = \xi_3. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{k + p(k-1)}{1-p} - k = \frac{p(2k-1)}{1-p} \leq \frac{2\varphi^2}{n-\varphi} = \xi_4(n) = \xi_4.$$

Из последнего соотношения и оценок величин β_i , $i = 1, 2, 3$, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \max \left(\beta_1 \beta_2^2 \alpha_3 k, \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 \alpha_3 \exp \left(\frac{k + p(k-1)}{1-p} \right) \right) \\ &\leq e^k \xi_1 \xi_2^2 \psi_3 \xi_3 e^{\xi_4} = e^k \xi_0(n), \end{aligned} \quad (25)$$

так как $k \leq e^k$ и $\beta_3 \geq 1$. Отметим, что, как и $\psi_0(n)$, величина $\xi_0(n)$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$, а также не зависит от вида функции k и значения констант δ , c .

В итоге первое слагаемое в левой части неравенства (8) с помощью (24) оценивается сверху следующим выражением:

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} 2^{1-n} ((1-p)^n + p(k-1)) \gamma_1 \\ \leq c \lambda C_n^{k-1} 2^{1-n} \psi_0(n) (1-\delta)^{-1} (1 + p(k-1) e^{pn}) \\ \leq c \varepsilon \psi_0(n) (1-\delta)^{-1} \left(1 + \frac{\varphi^2}{n} e^\varphi \right) = c \varepsilon \psi(n) (1-\delta)^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

причем $\psi(n)$ стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$ и не зависит от k , δ , c . Действительно,

$$\frac{\varphi^2}{n} e^\varphi \leq \frac{\ln^2 n}{n} \frac{n}{\ln^3 n} = \ln^{-1} n = o(1).$$

Второе слагаемое в левой части неравенства (8) с помощью (25) оценивается сверху так:

$$\begin{aligned} x(C_{n-1}^{k-1})^2 p(2k-1) 2^{2k-2n} \gamma_2 \\ \leq x(C_{n-1}^{k-1})^2 \frac{-\ln(c\lambda)}{n} (2k-1) 2^{2k-2n} e^k \xi_0(n) \\ \leq (1 - 2c(1-\delta)^{-1}) \lambda C_{n-1}^{k-1} 2^{1-n} \xi_0 \leq (1 - 2c(1-\delta)^{-1}) \varepsilon \xi_0(n). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) и (27) следует, что для обоснования условия (8) достаточно показать, что при всех n начиная с некоторого N_3 выполняется неравенство

$$c(1-\delta)^{-1} \psi(n) + (1 - 2c(1-\delta)^{-1}) \xi_0(n) < 1.$$

Оно выполняется для всех n начиная с некоторого N_3 поскольку функции $\psi(n)$ и $\xi_0(n)$ стремятся к 1 при $n \rightarrow \infty$. Значит, при больших n применима теорема 3, которая и дает искомую оценку (10). Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] P. Erdős, "On a combinatorial problem", *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10.
- [2] P. Erdős, "On a combinatorial problem. II", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3–4 (1964), 445–447.
- [3] J. Beck, "On 3-chromatic hypergraphs", *Discrete Math.*, **24**:2 (1978), 127–137.

- [4] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, “Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring”, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32.
- [5] Д. А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдёша”, *Докл. РАН*, **396**:2 (2004), 166–169; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On one combinatorial problem of Erdős”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 359–362.
- [6] Д. А. Шабанов, “О раскрасках гиперграфов”, *Докл. РАН*, **402**:5 (2005), 605–608; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On colorings of hypergraphs”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **71**:3 (2005), 438–442.
- [7] Д. А. Шабанов, “О числе вершин в гиперграфах, близких к двудольным”, *Докл. РАН*, **412**:1 (2007), 31–34; англ. пер.: D. A. Shabanov, “On the vertex number of almost bipartite hypergraphs”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **75**:1 (2007), 25–27.
- [8] Д. А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222; англ. пер.: D. A. Shabanov, “Extremal problems for colourings of uniform hypergraphs”, *Izv. Math.*, **71**:6 (2007), 1253–1290.
- [9] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, Wiley, New York–London–Sydney, 1968.

Д. А. Шабанов (D. A. Shabanov)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gold-amber@yandex.ru

Поступила в редакцию
06.08.2007