Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Барашарт, М. Л. Ятцелев, Мероморфные приближения комплексных преобразований Коши с полярными особенностями, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 9, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:27:20

УДК 517.53

Л. Барашарт, М. Л. Ятцелев

Мероморфные приближения комплексных преобразований Коши с полярными особенностями

Изучаются мероморфные приближения типа Адамяна–Арова–Крейна функций вида

$$F(z) = \int \frac{d\lambda(t)}{z-t} + R(z),$$

где R – рациональная функция, а λ – комплексная мера с регулярным компактным носителем, лежащим на $(-1, 1)$, и с аргументом, имеющим ограниченную вариацию на носителе. Приближения производятся в L^p -норме на единичной окружности, $p \geq 2$. Изучение основано на том, что знаменатели таких аппроксимаций удовлетворяют некоторым неэрмитовым соотношениям ортогональности с переменным весом. Они похожи на соотношения ортогональности, возникающие при изучении многоточечных аппроксимаций Паде. Однако переменная часть веса неявно зависит от самих ортогональных многочленов – это является основной новой чертой и представляет главную сложность для анализа. Доказано, что считающие меры полюсов приближений сходятся к гриновскому равновесному распределению относительно единичного круга, сосредоточенному на носителе λ , что сами приближения сходятся к F по емкости и что полюсы R притягивают полюсы приближений в количестве, не меньшем, но и не намного превосходящем их кратность.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: мероморфные приближения, теория Адамяна–Арова–Крейна, рациональные приближения, ортогональные многочлены, неэрмитова ортогональность, пространства Харди, критические точки.

§ 1. Введение

Работа посвящена изучению асимптотического поведения некоторых мероморфных приближений функций вида

$$F(z) = \int \frac{d\lambda(t)}{z-t} + R(z), \quad (1.1)$$

где R – рациональная функция, голоморфная на бесконечности, а λ – комплексная мера с регулярным компактным носителем на $(-1, 1)$.

Мы рассматриваем мероморфные приближения с фиксированным количеством полюсов в единичном круге, являющиеся оптимальными относительно L^p -нормы на единичной окружности. При их изучении мы будем считать, что $\text{supp}(\lambda)$ и все полюсы R лежат в открытом единичном круге, так что на самом деле F интегрируема в степени p на единичной окружности. Мы будем рассматривать асимптотику с ростом числа полюсов. При $p = \infty$ приближения

этого типа были введены В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном в знаменитой статье [1]. Мы будем рассматривать естественные обобщения таких приближений на L^p , хотя и ограничимся случаем $2 \leq p \leq \infty$ по техническим причинам, которые объясним ниже. Такая задача о мероморфных приближениях имеет также конформно-инвариантную форму для жордановых областей со спрямляемыми границами, и результаты настоящей статьи переносятся на этот случай с очевидными изменениями при условии, что $\text{supp}(\lambda)$ лежит на замкнутой дуге геодезической относительно гиперболической метрики, а не на отрезке прямой. Читатель без труда проведет соответствующие обобщения, используя конструкцию из [2; § 5].

Изучение наилучших мероморфных приближений началось совсем недавно. После того как Адамян, Аров и Крейн разработали теорию для $p = \infty$ в [1], она была обобщена на $1 \leq p < \infty$ Ф. Сейфером и первым автором в [3], а также независимо В. А. Прохоровым в [4]. Однако только для $p \geq 2$ в [3] удалось выразить погрешность в терминах (обобщенных) сингулярных векторов ганкелева оператора и после этого получить интегральные формулы для этой погрешности в случае, когда приближаемая функция представляется интегралом Коши. Этими формулами устанавливаются связи с неэрмитовой ортогональностью; они лежат в основе используемого здесь подхода.

Теория Адамяна–Арова–Крейна значительно повлияла на всю тематику рациональных приближений, поскольку, рассматривая только главную часть наилучшего мероморфного приближения к функции, аналитической вне круга и достаточно гладкой на граничной окружности, мы получаем почти наилучшее рациональное приближение к этой же функции (см. [5]). Это ключевой момент в данном О. Г. Парфёновым доказательстве для односвязных областей гипотезы Гончара (см. [6]) о степени рациональных приближений к голоморфным функциями на компактных подмножества области аналитичности¹, а также, например, в обратных теоремах В. В. Пеллера, где гладкость функций оценивается через скорость сходимости их рациональных приближений (см. [8], [9]). Тот же принцип реализуется в работах [10], [11] по рациональным приближениям к марковским функциям, т.е. функциям вида (1.1) с $R \equiv 0$ и положительной мерой λ .

Следует упомянуть еще об одном примере связей между мероморфными и рациональными приближениями, относящемся к случаю $p = 2$. В этом случае наилучшее мероморфное приближение к функции, аналитической вне единичного круга, на самом деле рационально и оказывается специальным случаем многоточечных аппроксимаций Паде, интерполирующих функцию с порядком касания 2 в точках, симметричных полюсам относительно единичной окружности (см. [12], [13]). Разумеется, эти точки интерполяции априори не известны, так что задача оказывается нелинейной. Однако после работы [14] это наблюдение было использовано в [15] при определении скорости сходимости L^2 -наилучших рациональных приближений к марковским функциям. Представленные нами результаты, в частности, обобщают упомянутые выше результаты на более широкий класс функций.

Как таковые наилучшие мероморфные приближения к марковским функциям исследовались Э. Саффом, В. А. Прохоровым и первым автором в [16].

¹Позже В. А. Прохоров обобщил доказательство этой гипотезы на многосвязный случай [7].

С использованием [11] для выхода на тематику ортогональности в [16] было показано (с указанием порядка остаточных членов), что такие приближения локально равномерно сходятся в $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$ для $1 \leq p \leq \infty$ при условии, что λ удовлетворяет условию Caré $\log d\lambda/dt \in L^1(I)$ (I – выпуклая оболочка $\text{supp}(\lambda)$).

По-видимому, настоящая статья является первой работой, посвященной сходимости наилучших мероморфных приближений вида (1.1) в случае комплексной меры λ (специальный случай функции F с двумя точками ветвления, но без полюсов рассматривается в [3; § 10]).

Структура статьи следующая. В § 2 рассматриваются мероморфные приближения, являющиеся решениями (или, в более общей постановке, критическими точками) задачи о мероморфных приближениях функций вида (1.1). Обсуждается асимптотика полюсов в смысле предельного распределения нулей полиномов, удовлетворяющих некоторым неэрмитовым соотношениям ортогональности относительно переменных мер. Полученные результаты применяются к сходимости этих приближений по емкости и к сходимости части их полюсов к полярным особенностям F . Доказательства излагаются в § 3. Итоги некоторых вычислений приводятся в § 4, а § 5 содержит необходимые сведения и обозначения из теории потенциала, используемые в работе.

В заключение заметим, что все приведенные ниже результаты имеют аналоги в теории многоточечных диагональных аппроксимаций Паде, причем λ там может быть менее регулярной, чем обычно требуется при использовании классических результатов (см. [17]). Мы не приводим соответствующие обсуждения, чтобы не увеличивать объем статьи, и отсылаем читателей, интересующихся этими вопросами, к работам [18; гл. III] или [19].

§ 2. Мероморфные приближения

Пусть λ – комплексная борелевская мера с носителем $S := \text{supp}(\lambda) \subset (-1, 1)$, содержащим бесконечно много точек. Обозначим через $|\lambda|$ вариацию меры. Очевидно, λ абсолютно непрерывна относительно $|\lambda|$, и мы будем предполагать, что у соответствующей производной Радона–Никодима (имеющей единичный модуль $|\lambda|$ -п.в.) ограниченная вариация. Иными словами, λ – мера вида

$$d\lambda(t) = e^{i\varphi(t)} d|\lambda|(t) \quad (2.1)$$

для некоторого вещественнозначного аргумента φ , вариация которого²

$$V(\varphi, S) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})| \right\} < \infty, \quad (2.2)$$

где верхняя грань берется по всем конечным последовательностям $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ из S , а N принимает любые значения из $\mathbb{N}$.

Для удобства продолжим φ на все $\mathbb{R}$ следующим образом. Пусть $I := [a, b]$ – выпуклая оболочка S . Легко видеть, что, проинтерполировав φ линейно во

---

²Заметим, что вариация $e^{i\varphi}$ ограничена тогда и только тогда, когда φ можно выбрать с ограниченной вариацией.

всякой компоненте $I \setminus S$ и положив $\varphi(x) := \lim_{t \rightarrow a, t \in S} \varphi(t)$ при $x < a$ и $\varphi(x) := \lim_{t \rightarrow b, t \in S} \varphi(t)$ при $x > b$ (пределы существуют в силу (2.2)), мы не изменим вариацию φ . Иными словами, можно добиться, чтобы продолжение φ , по-прежнему обозначаемое φ , удовлетворяло равенству

$$V(\varphi, S) = V(\varphi, \mathbb{R}) =: V(\varphi).$$

Среди всех борелевских мер вида (2.1), (2.2) мы будем рассматривать только подкласс **BVT**, определенный следующим образом. Будем говорить, что комплексная мера λ с носителем на $(-1, 1)$ принадлежит классу **BVT**, если:

- (1) множество $\text{supp}(\lambda)$ регулярно;
- (2) существуют такие положительные постоянные c и L , что для любых $x \in \text{supp}(\lambda)$ и $\delta \in (0, 1)$ полная вариация μ удовлетворяет оценке

$$|\lambda|([x - \delta, x + \delta]) \geq c\delta^L;$$

- (3) аргумент λ имеет ограниченную вариацию.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – пространство алгебраических полиномов степени не выше n , а $\mathcal{M}_n$ – подмножество монических полиномов степени n , все нули которых лежат в единичном круге $\mathbb{D}$.

Положим

$$F(z) := \int \frac{d\lambda(\xi)}{z - \xi} + R_s(z), \quad (2.3)$$

где $\lambda \in \mathbf{BVT}$, $R_s \in \mathcal{R}_{s-1, s}$, а

$$\mathcal{R}_{m, n} := \left\{ \frac{p_m}{q_n} : p_m \in \mathcal{P}_m, q_n \in \mathcal{M}_n, q_n \neq 0 \right\}$$

– множество рациональных функций порядка (m, n) , все полюсы которых лежат в $\mathbb{D}$. Ниже мы будем обозначать через Q_s знаменатель функции R_s (которую мы считаем неприводимой), являющийся моническим полиномом с нулями в $\mathbb{D}$ вида

$$Q_s(z) = \prod_{\eta \in S'} (z - \eta)^{m(\eta)}, \quad (2.4)$$

где S' – множество полюсов R_s , а $m(\eta)$ – кратность $\eta \in S'$. Таким образом, F – мероморфная функция в $\mathbb{C} \setminus S$ с полюсом в каждой точке из S' и потому голоморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{S}$, где

$$\tilde{S} := S \cup S'.$$

Заметим по ходу дела, что F не приводится к рациональной функции, поскольку S – бесконечное множество (ср. [2; § 5.1], где приводится подробное доказательство).

В статье мы рассматриваем поведение некоторых специальных мероморфных приближений (типа Адамыана–Арова–Крейна) к функции F вида (2.3). Для нас особый интерес представляет асимптотика полюсов этих приближений. Мы будем описывать ее в терминах *-слабой сходимости считающих мер полюсов при неограниченном возрастании числа полюсов. По определению считающая мера полюсов мероморфной функции – это дискретная вероятностная мера, приписывающая равные массы всем конечным полюсам с учетом кратностей;

*-слабая сходимость понимается в обычном смысле, когда меры с нормой, равной полной вариации, рассматриваются как пространство, двойственное финитным непрерывным функциям.

Через H^p , $p \in [1, \infty]$, будем обозначать пространство Харди в единичном круге, состоящее из голоморфных функций f , для которых

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &:= \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p |d\xi| < \infty, \quad p \in [1, \infty), \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как известно (см. [20; теорема I.5.3]), функция из H^p однозначно определяется своим следом (пределами по некасательным направлениям) на единичной окружности $\mathbb{T}$ и L^p -норма этого следа равна H^p -норме функции, где L^p – пространство функций, интегрируемых на $\mathbb{T}$ со степенью p . Таким образом, H^p можно рассматривать как замкнутое подпространство L^p . Аналогично мы можем определить пространство $\bar{H}_0^p$, $p \in [1, \infty]$, голоморфных функций в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, равных нулю на бесконечности и удовлетворяющих (2.5), на этот раз для $1 < r < \infty$.

Теперь мы можем определить рассматриваемые мероморфные приближения следующим образом. При $p \in [1, \infty]$ и $n \in \mathbb{N}$ *подклассом мероморфных функций степени n* в L^p будем называть

$$H_n^p := H^p + \mathcal{R}_{n-1,n} = H^p B_n^{-1}. \quad (2.6)$$

Это замкнутое подмножество L^p (в действительности – слабо замкнутое при $1 < p < \infty$ и *-слабо замкнутое при $p = \infty$; см. [3; лемма 5.1]). В (2.6) через B_n обозначено множество произведений Бляшке степени не выше n , состоящее из рациональных функций вида

$$b(z) = e^{ic} \frac{q(z)}{\tilde{q}(z)}, \quad q \in \mathcal{M}_k, \quad \text{где } \tilde{q}(z) := \overline{z^k q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad k \leq n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Назовем $\tilde{q}$ *обращенным полиномом* для q из $\mathcal{P}_k$. Будем также говорить, что функция b *нормализована*, если $e^{ic} = 1$. Таким образом, элементы B_n суть рациональные функции степени не выше n , голоморфные в $\mathbb{D}$ и с модулем 1 всюду на $\mathbb{T}$.

Рассматриваемую нами задачу о наилучшем мероморфном приближении в L^p теперь можно сформулировать следующим образом.

ЗАДАЧА МА(p). Для данных $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p$ и $n \in \mathbb{N}$ найти такую функцию $g_n \in H_n^p$, что

$$\|f - g_n\|_p = \inf_{g \in H_n^p} \|f - g\|_p. \quad (2.7)$$

Впервые эта задача была решена для $p = \infty$ В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном в [1]; решение было найдено посредством теории операторов. Наиболее доступный источник, излагающий этот результат, вероятно, [21]. Потом Ф. Сейфер и первый автор в [3], а также независимо В. А. Прохоров в [4] обобщили результат на $1 \leq p \leq \infty$. Однако только в [3], и причем для $p \in [2, \infty]$, были получены явные равенства для приближений. Именно на эти равенства мы будем опираться в работе, тем самым ограничиваясь случаем $p \geq 2$.

Известно, что решение задачи $\mathbf{MA}(\infty)$ единственно при условии, что f принадлежит алгебре Дугласа $H^\infty + C(\mathbb{T})$, где $C(\mathbb{T})$ – пространство непрерывных функций на $\mathbb{T}$ (см. [1]). В частности, решение задачи $\mathbf{MA}(\infty)$ единственно, если f имеет вид (2.3), поскольку такая функция аналитична в окрестности единичной окружности (т.е. в дополнении к $\tilde{S}$). При $p < \infty$ решение не обязательно единственно, даже если f очень гладкая (см. [3; § 5]). Так что когда мы говорим о последовательности $\{g_n\}$ решений $\mathbf{MA}(p)$, мы имеем в виду, что для всякого n выбрано одно из решений и что утверждение выполняется вне зависимости от этого выбора.

Для F , выбранной, как в (2.3), мы будем ставить вопросы трех видов.

- (a) Какова асимптотика распределения полюсов наилучших мероморфных L^p -приближений к F при n , стремящемся к ∞ ?
- (b) Стремятся ли какие-то из этих полюсов к полярным особенностям F ?
- (c) Что можно сказать о сходимости этих приближений к F ?

Поскольку мы интересуемся здесь только функциями из определенного класса, мы будем обсуждать случай функции вида (2.3) и, соответственно, писать F вместо f . Заметим, что задача $\mathbf{MA}(2)$ сводится к рациональным приближениям. Действительно, L^2 разлагается в ортогональную сумму H^2 и его ортогонального дополнения $\bar{H}_0^2$, состоящего из функций из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, обращающихся в нуль на ∞ , с нормой $\sup_{r>1} \|f(r \cdot)\|_2$ (ср. (2.5)). Поскольку F – преобразование Коши меры с носителем в $\mathbb{D}$, эта функция принадлежит $\bar{H}_0^2$ и для всякой $g = (h + p_{n-1}/q_n) \in H_n^2$, где $h \in H^2$, а p_{n-1}/q_n – рациональная функция из $\bar{H}_0^2$, то в силу ортогональности мы имеем

$$\|F - g\|_2^2 = \|h\|_2^2 + \left\| F - \frac{p_{n-1}}{q_n} \right\|_2^2.$$

Теперь ясно, что если g – наилучшее приближение, то h – тождественный нуль. В этом случае оказывается также, что наилучшие приближения интерполируют F с порядком касания 2 в точках, симметричных их полюсам относительно $\mathbb{T}$, а также с порядком касания 1 на бесконечности. Таким образом, задачу $\mathbf{MA}(2)$ можно рассматривать как интерполяционную задачу типа многоточечных аппроксимаций Паде, в которой точки интерполяции неявно задаются решением. При этом мы не будем выделять случай $p = 2$, а используем общий операторный подход.

Обозначим через $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$ голоморфную и антиголоморфную проекции рядов Фурье:

$$\mathbf{P}_+ \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}, \quad \mathbf{P}_- \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta} \right) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{ik\theta}.$$

По известной теореме М. Рисса (см. [20]) операторы $\mathbf{P}_+ : L^p \rightarrow H^p$, $\mathbf{P}_- : L^p \rightarrow \bar{H}_0^p$ ограничены при $1 < p < \infty$, а при $p = 2$ они как раз и являются ортогональными проекторами, связанными с ортогональным разложением $L^2 = H^2 \oplus \bar{H}_0^2$. При $f \in L^1$ мы интерпретируем $\mathbf{P}_+(f)$ и $\mathbf{P}_-(f)$ как ряды Фурье обобщенных функций.

Для $p \in [2, \infty]$ оператором Ганкеля с символом $F \in L^p$ называется оператор

$$A_F : H^{p'} \rightarrow \bar{H}_0^2, \quad u \mapsto \mathbf{P}_-(Fu),$$

где p' и p “сопряжены по модулю 2” в том смысле, что $1/p + 1/p' = 1/2$.

При $n = 0, 1, 2, \dots$ n -м *сингулярным числом* оператора A_F называется

$$\sigma_n(A_F) := \inf \{ \|A_F - \Gamma\|, \Gamma: H^{p'} \rightarrow \overline{H}_0^2 - \text{линейный оператор ранга } \leq n \},$$

где $\|\cdot\|$ – операторная норма; при $p = 2$ мы дополнительно предполагаем, что Γ $*$ -непрерывен.

Заметим, что если $p = \infty$, то $p' = 2$, так что A_F – оператор, действующий между гильбертовыми пространствами, и поскольку он компактен,³ то $\sigma_n(A_F)$ – обычные сингулярные числа A_F , т.е. корни квадратные из собственных значений оператора $A_F^* A_F$, упорядоченные по невозрастанию (всюду в статье A_F^* – оператор, сопряженный к A_F). При $2 \leq p < \infty$ обычное уравнение на собственный вектор надо заменить на нелинейное уравнение типа Хаммерштейна, точнее, для всякого $\sigma_n(A_F)$ существует (хотя бы одна) функция $v_n \in H^{p'}$ единичной нормы, чей внутренний сомножитель⁴ является произведением Бляшке степени не выше n , для которого

$$\begin{aligned} A_F^* A_F(v_n) &= \sigma_n^2(A_F) \mathbf{P}_+(|v_n|^{p'-2} v_n), & p > 2, \\ A_F^* A_F(v_n) &= \mathbf{P}_+(|A_F(v_n)|^2 v_n), \quad \|A_F(v_n)\|_2 = \sigma_n(A_F), & p = 2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Мы будем называть такую функцию v_n n -м *сингулярным вектором* A_F . Из определения следует, что n -й сингулярный вектор можно разложить следующим образом:

$$v_n = b_n w_n, \quad (2.9)$$

где $b_n \in B_n$, а w_n – внешняя функция единичной нормы из $H^{p'}$. На самом деле, спаривая с v_n , из (2.8) получаем, что $v_n \in B_n$ при $p = 2$, так что в этом случае $w_n \equiv 1$.

Решения задачи $\mathbf{MA}(p)$ оказываются в точности функциями вида (см. [3; теорема 8.2])

$$g_n = F - \frac{A_F(v_n)}{v_n} = \frac{\mathbf{P}_+(F v_n)}{v_n}, \quad (2.10)$$

где v_n – некоторый n -й сингулярный вектор A_F . Более того, $\|F - g_n\|_p = \sigma_n(A_F)$. Такая функция g_n называется *наилучшим мероморфным L^p -приближением* порядка n функции F .

Понятие наилучшей аппроксимации можно ослабить до понятия критической точки. По определению функция g_n – *критическая точка* порядка n в задаче $\mathbf{MA}(p)$, если и только если она имеет вид

$$g_n = F - \frac{A_F(v_n)}{v_n}, \quad (2.11)$$

³Это можно вывести из включения $F \in C(\mathbb{T})$ (см. [22; теорема I.5.5]).

⁴Напомним, что функцию h из пространства Харди можно записать в виде произведения внутренней и внешней функций. Внешний сомножитель h есть экспонента преобразования Рисса–Герглотца функции $\log|h|$, а внутренняя является функцией из H^∞ с модулем, равным 1 п.в. на $\mathbb{T}$, и включает (конечное или бесконечное) произведение Бляшке и сингулярную внутреннюю функцию, представляющую собой экспоненту преобразования Рисса–Герглотца сингулярной меры на единичной окружности. Более подробно о факторизации H^p -функций написано, к примеру, в [20].

где $v_n - H^{p'}$ -функция нормы 1 (произведение Бляшке при $p = 2$) с внутренним сомножителем из $B_n \setminus B_{n-1}$ и для v_n выполнены соотношения

$$\begin{aligned} A_F^* A_F(v_n) &= \gamma_n \mathbf{P}_+(|v_n|^{p'-2} v_n), \quad \gamma_n \in \mathbb{R}, \quad p > 2, \\ A_F^* A_F(v_n) &= \mathbf{P}_+(|A_F(v_n)|^2 v_n), \quad p = 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Различие с (2.8) заключается в том, что теперь γ_n (или $\|A_F(v_n)\|_2$ при $p = 2$) не обязательно равна $\sigma_n(A_F)$. С некоторой натяжкой мы по-прежнему будем говорить, что v_n – сингулярный вектор, ассоциированный с g_n , хотя γ_n уже не обязательно сингулярное значение. Заметим, что, как и в случае наилучших мероморфных приближений, при $p = 2$ v_n сводится к произведению Бляшке. Таким образом, v_n разлагается в произведение внешней и внутренней функций вида (2.9), где степень b_n в точности равна n , а $w_n \equiv 1$ при $p = 2$.

Хотя определение критических точек технически несколько формальное, они оказываются просто функциями $g_n \in H_n^p$, для которых производная нормы $\|F - g_n\|_p$ по сомножителям $b_n \in B_n$ и $h \in H^p$ из разложения (2.6) обращается в нуль (см. [3]). Помимо наилучших приближений к наиболее важным критическим точкам относятся локально наилучшие приближения (см. [3; предложение 9.3]). По определению функция $g_n \in H_n^p$ является *локально наилучшим приближением*, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$g \in H_n^p \text{ и неравенство } \|g - g_n\|_p \leq \delta \text{ влечет } \|F - g_n\|_p \leq \|F - g\|_p.$$

Мы рассматриваем критические точки по следующей причине: максимум, что может дать численный поиск, это найти локально наилучшее приближение, а нам кажется важным, чтобы наши результаты можно было применить к вычислимым объектам.

При $p \in [2, \infty)$ у наилучших и локально наилучших приближений ровно n полюсов, считая кратности, так что они заведомо являются критическими точками порядка n (см. [3; предложения 9.2 и 9.3]); такие критические точки мы будем называть *неприводимыми*. При $p = \infty$ критические точки – это наилучшие мероморфные приближения, которые определены однозначно для каждого n . Так что в этом понятии нет ничего нового, однако у наилучшего приближения из H_n^∞ может быть меньше n полюсов. Однако всякий раз, когда число полюсов g_n увеличивается с увеличением n , оно “подскакивает” до максимально возможного значения n ; в частности, существует такая подпоследовательность натуральных чисел $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0(F)$, что при $n \in \mathbb{N}_0$ у наилучшего приближения n ровно n полюсов в $\mathbb{D}$, т.е. оно неприводимо (см. [3; с. 114]). Поскольку поведение полюсов наилучших приближений из H_n^∞ полностью характеризуется этой последовательностью, то когда в дальнейшем мы будем говорить о последовательности неприводимых критических точек порядка n , мы будем иметь в виду, что при $p = \infty$ мы переходим к подпоследовательности в случае необходимости.

Ниже мы формулируем три теоремы, являющиеся основными результатами статьи. (С определениями емкости, гриновского равновесного распределения и (гриновой) емкости конденсатора можно ознакомиться в § 5.)

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $p \in [2, \infty]$, p' сопряжено с p по модулю 2, а $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность неприводимых критических точек порядка n задачи

МА(p) для функции F , заданной соотношениями (2.3), (2.4) с $\lambda \in \mathbf{BVT}$. Тогда считающие меры полюсов g_n сходятся в $*$ -слабом смысле к $\mu_{(S, \mathbb{T})}$ – гриновскому равновесному распределению на S относительно $\mathbb{D}$.

Эта теорема в каком-то смысле отвечает на вопрос (а). Следующий результат связан с вопросом (с) и утверждает, что приближения ведут себя довольно “хорошо” по отношению к приближаемой функции: они сходятся к F по емкости⁵ в $\mathbb{D} \setminus S$, а при $p = 2$ сходимость равномерная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Более того, можно указать оценки для n -го корня из погрешности.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть F и $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие же, как в теореме 2.1. Тогда

$$|(F - g_n)(z)|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} \exp \left\{ U_{\mathbb{D}}^{\mu_{(S, \mathbb{T})}}(z) - \frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right\} \quad (2.13)$$

на компактных подмножествах $\mathbb{D} \setminus S$, где $U_{\mathbb{D}}^{\mu_{(S, \mathbb{T})}}$ – гринов потенциал $\mu_{(S, \mathbb{T})}$ относительно $\mathbb{D}$, а $\xrightarrow{\text{cap}}$ обозначает сходимость по емкости. Кроме того, в случае рациональных приближений или в случае Адамына–Арова–Крейна (т.е. соответственно при $p = 2$ или $p = \infty$) имеет место также сходимость

$$|(F - g_n)(z)|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} - U_{\mathbb{D}}^{\mu_{(S, \mathbb{T})}} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) \right\} \quad (2.14)$$

на замкнутых подмножествах $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\mathbb{D} \cup S^*)$, где S^* – множество, симметричное с S относительно $\mathbb{T}$. Более того, при $p = 2$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(F - g_n)(z)|^{1/(2n)} \leq \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} - U_{\mathbb{D}}^{\mu_{(S, \mathbb{T})}} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) \right\} \quad (2.15)$$

равномерно в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$.

Как следствие этой теоремы мы можем доказать результат (в общем-то являющийся классическим (ср. [17; теорема 1’]), но новый в случае λ , обращающихся в нуль на подмножествах положительной емкости выпуклой оболочки S) о наилучших рациональных приближениях функций вида (2.3). Ниже $\|\cdot\|_K$ обозначает суп-норму на множестве K .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть F задается (2.3), (2.4) с $\lambda \in \mathbf{BVT}$ и $\mathbb{E} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(F, \mathbb{E})^{1/(2n)} = \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(\text{supp}(\lambda), \mathbb{T})} \right\}, \quad (2.16)$$

где

$$\rho_n(F, \mathbb{E}) := \inf_{r \in \mathcal{R}_{n,n}} \|F - r\|_{\mathbb{E}}.$$

Для обсуждения вопроса (b) введем дополнительные обозначения. Для всякого $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{C}$, пусть $\text{Arg}(\xi) \in (-\pi, \pi]$ – главная ветвь аргумента, а при $\xi = 0$ положим $\text{Arg}(0) = \pi$. Таким образом определенный $\text{Arg}(\cdot)$ оказывается непрерывной слева функцией на $\mathbb{R}$. Теперь для всякого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ определим угловой размер этого отрезка относительно $\xi \in \mathbb{C}$:

$$\text{Angle}(\xi, [a, b]) := |\text{Arg}(a - \xi) - \text{Arg}(b - \xi)|.$$

⁵Определение сходимости по емкости см. в § 5.

Для набора непересекающихся отрезков этот угол будет определен аддитивно: если $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^m$ – такой набор, то его угловой размер относительно ξ определяется равенством

$$\theta(\xi) := \sum_{j=1}^m \text{Angle}(\xi, [a_j, b_j]). \quad (2.17)$$

Заметим, что $0 \leq \theta(\xi) \leq \pi$ и $\theta(\xi) = \pi$ тогда и только тогда, когда $\xi \in \bigcup [a_j, b_j]$. Обозначение $\theta(\xi)$ не содержит зависимости от набора отрезков, но она всегда будет ясна из контекста. Далее, для всякой точки $z \in \mathbb{C}$ зададим нижнюю и верхнюю характеристики сходимости полюсов $\overline{m}(z), \underline{m}(z) \in \mathbb{Z}_+$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{m}(z) &:= \inf_U \overline{m}(z, U), & \overline{m}(z, U) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{n \geq N} \#\{S_n \cap U\}, \\ \underline{m}(z) &:= \inf_U \underline{m}(z, U), & \underline{m}(z, U) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{n \geq N} \#\{S_n \cap U\}, \end{aligned}$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам U , содержащим z , а S_n – множество полюсов g_n с учетом кратностей. Ясно, что $\underline{m}(z) \leq \overline{m}(z)$, $\underline{m}(z) = \infty$ при $z \in S$ и $\overline{m}(z) = 0$ при $z \notin \mathcal{K}$.

Из нижеследующей теоремы видно, что каждый полюс F притягивает не меньше (но и не многим больше) полюсов мероморфных приближений, чем его кратность. Это частично отвечает на вопрос (b).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть F и $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие же, как в теореме 2.1. Тогда

$$\underline{m}(\eta) \geq m(\eta), \quad \eta \in S', \quad (2.18)$$

и

$$\sum_{\eta \in S' \setminus S} (\overline{m}(\eta) - m(\eta))(\pi - \theta(\eta)) \leq V, \quad (2.19)$$

где

$$V := V(\varphi) + V_{\mathcal{W}} + (m + 2s' - 1)\pi + 2 \sum_{\eta \in S' \setminus S} m(\eta)\theta(\eta), \quad (2.20)$$

s' – число полюсов R_s на S с учетом кратностей,

$$V_{\mathcal{W}} := \sup_{n \in \mathbb{N}} V(\text{Arg}(w_n), S), \quad (2.21)$$

а $\theta(\cdot)$ – угловой размер набора из m отрезков, покрывающих S .

В свое время мы покажем, что в действительности $V_{\mathcal{W}} < +\infty$.

Получим теперь несколько интегральных представлений, необходимых для доказательства сформулированных теорем. Чтобы не усложнять обозначения, удобно формально переписать правую часть (2.3) в виде одного интеграла Коши. С этой целью для $\eta = x_\eta + iy_\eta \in \mathbb{C}$ введем обобщенную функцию $\Phi_\eta = \chi(x - x_\eta) \otimes \delta(y - y_\eta)$, где δ – функция Дирака в нуле, а χ – характеристическая функция неотрицательной полуоси. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ (множество неотрицательных целых чисел) частная производная $\partial_x^{k+1} \Phi_\eta$ является аналитическим функционалом (хотя само Φ_η таковым не является), действующим на функции h , голоморфные в окрестности η , по формуле

$$\langle \partial_x^{k+1} \Phi_\eta, h \rangle = h^{(k)}(\eta),$$

где $h^{(k)}$ – k -я производная. Итак, определив $\Delta_\eta^{(k)}$ как $\partial_x^k \Phi_\eta / k!$, мы можем формально записать

$$\int \frac{d\Delta_\eta^{(k)}(t)}{z-t} = \frac{1}{(z-\eta)^{k+1}},$$

и переписав $R_s(z)$ как

$$R_s(z) = \sum_{\eta \in S'} \sum_{k=0}^{m(\eta)-1} \frac{r_{\eta,k}}{(z-\eta)^{k+1}}, \quad r_{\eta,k} \in \mathbb{C},$$

получим

$$R_s(z) = \int \frac{d\lambda'(\xi)}{z-\xi},$$

где λ' определяется как

$$\lambda' := \sum_{\eta \in S'} \sum_{k=0}^{m(\eta)-1} r_{\eta,k} \Delta_\eta^{(k)}, \quad \text{supp}(\lambda') = S'. \quad (2.22)$$

Теперь выражение для F приводится к удобному виду

$$F(z) = \int \frac{d\tilde{\lambda}(\xi)}{z-\xi},$$

где

$$\tilde{\lambda} := \lambda + \lambda', \quad \text{supp}(\tilde{\lambda}) = \tilde{S} = S \cup S'. \quad (2.23)$$

Пусть $\{g_n\}$ – последовательность неприводимых критических точек задачи $\mathbf{MA}(p)$ при некотором $p \in [2, \infty]$ (ср. с (2.12)). Тогда (см. [3; предложение 9.1])

$$\begin{aligned} A_F(v_n)(\xi) &= \gamma_n^{1/2} \overline{\xi} (b_n j_n w_n^{p'/2})(\xi) = \gamma_n^{1/2} (b_n j_n w_n^{p'/2})^\sigma(\xi), \quad p > 2, \\ A_F(v_n)(\xi) &= \overline{\xi} (b_n u_n)(\xi) = (b_n u_n)^\sigma(\xi), \quad p = 2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

для п.в. $\xi \in \mathbb{T}$, где j_n – внутренняя функция, $u_n \in H^2$, а $h^\sigma(z) := z^{-1} \overline{h(1/\bar{z})}$. Заметим, что если $h \in H^2$, то $h^\sigma \in \bar{H}_0^2$, и наоборот. При $p = 2$ уравнение (2.24) является условием интерполяции, утверждающим, что g_n интерполирует F с порядком касания 2 в точках, симметричных ее полюсам. То же можно было бы сказать и при $p \in (2, \infty]$, если бы g_n была голоморфна в точках, симметричных ее полюсам; однако это не гарантировано, поскольку g_n уже не обязательно рациональна.

Как обычно, обозначим через v_n сингулярный вектор, ассоциированный с g_n . Согласно (2.6) каждую функцию g_n можно факторизовать:

$$g_n = b_n^{-1} \cdot h_n,$$

где $h_n \in H^p$. Более того, можно представить b_n как $q_n/\tilde{q}_n$, где $q_n \in \mathcal{M}_n$, а $\tilde{q}_n$ – обращенный полином для q_n . Рассуждая, как в работе [3; § 10] (где не было R_s), из (2.24) легко вывести следующие условия ортогональности:

$$\int t^k q_n(t) \frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} d\tilde{\lambda}(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (2.25)$$

где w_n – внешняя компонента v_n , а $\tilde{\lambda}$ задано в (2.23). Перепишав (2.25) в виде

$$\int P_{n-1}(t)q_n(t)\frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)}d\lambda(t) + \sum_{\eta \in S'} \sum_{k=0}^{m(\eta)-1} \frac{r_{\eta,k}}{k!} \left(P_{n-1}(t)q_n(t)\frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \right)^{(k)} \Big|_{t=\eta} = 0$$

для произвольного $P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ и взяв P_{n-1} кратным Q_s , при $n > s$ из этих соотношений мы выводим

$$\int t^k Q_s(t)q_n(t)\frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)}d\lambda(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n-s-1, \quad (2.26)$$

где Q_s был определен в (2.4).

Следующая теорема относится к распределению нулей полиномов, удовлетворяющих некоторым нелинейным соотношениям ортогональности. Как нетрудно понять из (2.26), она будет существенно использоваться в нашем подходе к асимптотическому поведению полюсов неприводимых критических точек, в частности полюсов локально наилучших приближений. (Мы по-прежнему будем обозначать через I выпуклую оболочку $S = \text{supp}(\lambda)$.)

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность полиномов степени в точности n с нулями в $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\int t^k q_n(t)\frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)}d\tilde{\lambda}(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (2.27)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda + \lambda'$ задается (2.1) и (2.22), причем $S \subset (-1, 1)$, $S' \subset \mathbb{D}$, а $\mathcal{W} = \{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ – набор комплекснозначных измеримых функций на объединении S' и I , равномерно ограниченных сверху и снизу по абсолютной величине абсолютными константами, аргументы которых гладкие и с равномерно ограниченными производными на I . Также предположим, что $\lambda \in \mathbf{BVT}$. Тогда считающие меры нулей $q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - \xi_{j,n})$, имеющие вид $\nu_n := (1/n) \sum_{j=1}^n \delta_{\xi_{j,n}}$, *-слабо сходятся к $\mu_{(S,T)}$.

Это обобщает теорему 5.1 и следствие 6.2 из [23]. Основное отличие здесь заключается в добавлении распределения вида (2.22) к мере (2.27), так что у F могут быть полюсы внутри единичного круга. По сравнению с упомянутой работой мы несколько упрощаем доказательство, используя теорему о двух константах вместо теории потенциалов с весом. Насколько известно авторам, это первые опубликованные результаты по распределению нулей у полиномов, удовлетворяющих нелинейным соотношениям ортогональности, подобным (2.27) и типичным для рациональных и мероморфных приближений со свободными полюсами. В диссертации Р. Кюстнера [24] приводится результат, аналогичный [23; теорема 5.1], в котором мера λ вместо принадлежности к $\mathbf{BVT}$ имеет аргумент ограниченной вариации и удовлетворяет так называемому Λ -критерию, введенному в [25; § 4.2]:

$$\text{cap} \left(\left\{ t \in S : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1/\mu[t-r, t+r])}{\text{Log}(1/r)} < +\infty \right\} \right) = \text{cap}(S).$$

Рассуждая, как в [24], мы могли бы получить все результаты этого параграфа и при таком, более слабом предположении, однако изложение получилось бы более громоздким, так что мы оставляем детали читателям.

§ 3. Доказательства

Доказательство теоремы 2.5 опирается на несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.1. *Во введенных выше обозначениях верны следующие результаты.*

(а) Пусть ν – положительная мера с носителем, содержащим бесконечное множество точек и покрытым конечным числом непересекающихся отрезков: $\text{supp}(\nu) \subseteq \bigcup_{j=1}^m [a_j, b_j]$. Пусть ψ – функция ограниченной вариации на $\text{supp}(\nu)$. Если для некоторого l выполнено

$$\int P_{l-1}(t) e^{i\psi(t)} d\nu(t) = 0 \quad \forall P_{l-1} \in \mathcal{P}_{l-1},$$

то

$$\sum_{j=1}^m V(\psi, [a_j, b_j]) \geq (l - m + 1)\pi.$$

(b) Пусть $[a, b] \subset (-1, 1)$ и $\xi \in \mathbb{D}$. Положим

$$g(\xi, t) := \text{Arg}(t - \xi) - 2 \text{Arg}\left(t - \frac{1}{\bar{\xi}}\right), \quad (3.1)$$

где слагаемое $2 \text{Arg}(t - 1/\bar{\xi})$ опускается при $\xi = 0$. Тогда

$$V(g(\xi, \cdot), [a, b]) \leq \text{Angle}(\xi, [a, b]). \quad (3.2)$$

(с) Пусть ψ – вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, $\{a_n(x)\}$ – последовательность непрерывно дифференцируемых функций с равномерно ограниченными производными на $[a, b]$, а Q – многочлен. Тогда существуют многочлен $T \neq 0$ и постоянная $\beta \in (0, \pi/32)$ такие, что

$$|\text{Arg}(e^{i(\psi(x) + a_n(x))} Q(x) T(x))| \leq \frac{\pi}{2} - 2\beta \quad (3.3)$$

при всех $x \in [a, b]$, для которых $T(x)Q(x) \neq 0$, и при всех n из некоторой бесконечной последовательности $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$.

(d) Пусть $I \subset (0, 1)$ и $\{q_n\}$ – последовательность многочленов степени m_n с нулями $\{\xi_{1,n}, \dots, \xi_{m_n,n}\}$ из $\mathbb{D}$, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{j=1}^{m_n} (\pi - \text{Angle}(\xi_{j,n}, I)) \leq C,$$

где константа C не зависит от n . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое целое l , что при достаточно больших n имеется многочлен $T_{l,n}$ степени не выше l , для которого

$$\left| \frac{\tilde{q}_n(x)}{|\tilde{q}_n(x)|} - T_{l,n}(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in I.$$

В частности, для больших n аргумент $T_{l,n}(x)/\tilde{q}_n(x)$ лежит в интервале $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Это утверждение следует из доказательства леммы 3.2 из [23], если положить $d_n = l$.

(б) При $\xi \notin I$ это утверждение покрывается доказательством леммы 5.2 из [23]. В прочих случаях можно убедиться непосредственно, что (3.2) сводится к неравенству $0 \leq \pi$ для $\xi = b$ и к $\pi \leq \pi$ для $\xi \in [a, b]$.

(с) Заметим, что $\varphi(x) = \psi(x) + \text{Arg}(Q(x))$ – вещественнозначная функция ограниченной вариации на I , поэтому по лемме 3.4 из [23] существуют многочлен $T^* \neq 0$ и константа $\beta^* \in (0, \pi/16)$ такие, что

$$|\text{Arg}(e^{i\psi(x)}Q(x)T^*(x))| = |\text{Arg}(e^{i\varphi(x)}T^*(x))| \leq \frac{\pi}{2} - 2\beta^*$$

при $x \in I$, $Q(x)T^*(x) \neq 0$. Отметим также для дальнейшего, что по конструкции T^* в упомянутой лемме нули этого полинома лежат на I и являются точками разрыва φ .

Пусть K – константа, для которой $|a'_n(x)| \leq K$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in I$ (знаком $'$ мы обозначаем производную). По теореме Джексона (см., например, [26]) существуют константа $C > 0$ и многочлены $\{T_{n,l}\}$ степени не выше l , для которых

$$|e^{-ia_n(x)} - T_{n,l}(x)| \leq \frac{CK}{l}.$$

Зафиксируем такое достаточно большое l , чтобы $CK/l \leq \beta^*/3$. Последовательность $\{T_{n,l}\}$ ограничена по модулю и по степени; она содержит подпоследовательность, равномерно на I сходящуюся к многочлену T_l степени не выше l . Значит, для некоторой последовательности $\mathbb{N}_1$ получим

$$|1 - e^{ia_n(x)}T_l(x)| \leq \frac{\beta^*}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

откуда

$$|\text{Arg}(e^{ia_n(x)}T_l(x))| \leq \frac{\beta^*\pi}{4} < \beta^*, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Теперь мы можем вывести (3.3), взяв $T = T^*T_l$, $\beta = \beta^*/2$ и используя неравенство $|\text{Arg}(\xi_1 + \xi_2)| \leq |\text{Arg}(\xi_1)| + |\text{Arg}(\xi_2)|$, верное для $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$.

(д) Это утверждение – в точности лемма 5.4 из [23].

ЛЕММА 3.2. Пусть $q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - \xi_{j,n})$ удовлетворяет условию ортогональности (2.27) при $|\xi_{j,n}| < 1$, $j = 1, \dots, n$, где $\tilde{\lambda} = \lambda + \lambda'$ задается (2.1), (2.2), и (2.22) с $S \subset (-1, 1)$ и $S' \subset \mathbb{D}$, а ω_n – измеримая комплекснозначная функция на $S \cup S'$. Рассмотрим покрытие S конечным набором непересекающихся отрезков $S \subseteq I_m := \bigcup_{j=1}^m [a_j, b_j]$. Тогда⁶

$$\sum_{j=1}^n (\pi - \theta(\xi_{j,n})) \leq V(\varphi) + V(\arg(\omega_n), S) + \sum_{\eta \in S'} m(\eta)\theta(\eta) + (m + s - 1)\pi, \quad (3.4)$$

где $\arg(\omega_n)$ – произвольно выбранная ветвь аргумента ω_n на S , а $m(\eta)$ – кратность η .

⁶Заметим, что условие $\lambda \in \mathbf{BVT}$ в этой лемме не требуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если у ω_n нельзя выбрать аргумент ограниченной вариации на S , то и доказывать нечего. В противном случае выберем такой аргумент и продолжим его до функции на $\mathbb{R}$, не увеличивая вариацию, как было объяснено в §2. В частности, получим

$$V(\arg(\omega_n), S) = \sum_{j=1}^m V(\arg(\omega_n), [a_j, b_j]).$$

Как и в случае (2.26), уравнение (2.27) дает

$$\int P_{n-s-1}(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} d\lambda(t) = 0, \quad (3.5)$$

где P_{n-s-1} – произвольный многочлен из $\mathcal{P}_{n-s-1}$.

Пусть $\psi_n(t)$ – аргумент $e^{i\varphi(t)} Q_s(t) q_n(t) \omega_n(t) / \tilde{q}_n^2(t)$, а именно,

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \varphi(t) + \arg(\omega_n(t)) + \sum_{\eta \in S'} m(\eta) \operatorname{Arg}(t - \eta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Arg}(t - \xi_{i,n}) - 2 \operatorname{Arg}\left(t - \frac{1}{\bar{\xi}_{i,n}}\right) \right), \end{aligned}$$

где мы опускаем слагаемое $\operatorname{Arg}(t - 1/\bar{\xi}_{i,n})$ при $\xi_{i,n} = 0$. Легко видеть, что вариация ψ_n ограничена. Теперь из леммы 3.1, (а) и

$$\psi = \psi_n, \quad d\nu(t) = \left| \frac{Q_s(t) q_n(t) \omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \right| d|\lambda|(t), \quad l = n - s$$

вытекает, что

$$\sum_{j=1}^m V(\psi_n, [a_j, b_j]) \geq (n - s - m + 1)\pi.$$

Теперь осталось показать, что

$$\sum_{j=1}^m V(\psi_n, [a_j, b_j]) \leq V(\varphi) + \sum_{j=1}^m V(\arg(\omega_n), [a_j, b_j]) + \sum_{\eta \in S'} m(\eta) \theta(\eta) + \sum_{i=1}^n \theta(\xi_{i,n}).$$

По определению ψ_n имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m V(\psi_n, [a_j, b_j]) &\leq \sum_{j=1}^m V(\varphi, [a_j, b_j]) + \sum_{j=1}^m V(\arg(\omega_n), [a_j, b_j]) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{\eta \in S'} m(\eta) V(\operatorname{Arg}(\cdot - \eta), [a_j, b_j]) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n V(g(\xi_{i,n}, \cdot), [a_j, b_j]), \end{aligned}$$

где $g(\xi, t)$ определена в (3.1). Утверждение леммы следует теперь из леммы 3.1, (b) и того факта, что $V(\operatorname{Arg}(\cdot - \xi), [a, b]) = \operatorname{Angle}(\xi, [a, b])$ в силу монотонности.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть φ и $\arg(\omega_n)$ – функции ограниченной вариации на S , а также пусть $V(\arg(\omega_n), S) < C$ с C , не зависящим от n . Тогда для всякой окрестности U носителя S существует такая константа $k_U \in \mathbb{N}$, что при достаточно больших n у каждого из многочленов q_n не более k_U нулей вне U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как U открыта, ее пересечение с $(-1, 1)$ состоит из счетного числа интервалов. По свойству компактности их конечная подсистема покрывает S ; пусть $\bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j)$. Применим лемму 3.2 к замыканию этих интервалов и заметим, что всякий нуль q_n , лежащий вне U , вносит в левую часть (3.4) вклад, превосходящий некоторую положительную постоянную, зависящую только от U . Поскольку правая часть (3.4) конечна и не зависит от n , таких нулей – конечное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Ниже мы используем уравнение (3.5) вместо (2.27), и пусть $q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - \xi_{j,n})$.

Прежде всего заметим, что можно считать, что $S \subset (0, 1)$. Действительно, в противном случае рассмотрим отрицательное w , $-1 < w < a$, где $[a, b] = I$ – выпуклая оболочка S . Тогда $M_w(S)$ – образ S относительно преобразования Мёбиуса $M_w(z) := (z-w)/(1-zw)$ – является подмножеством $(0, 1)$. Более того, равновесная гринова мера инвариантна относительно преобразования Мёбиуса, т.е. для всякого борелевского множества $E \subset M_w(S)$ имеем

$$\mu_G^{M_w(S)}(E) = \mu_G^S(M_{-w}(E))$$

(M_{-w} – функция, обратная к M_w). Значит, $*$ -слабая сходимость ν_n к $\mu_{(S,T)}$ эквивалентна такой же сходимости ν_n^w к $\mu_G^{M_w(S)}$, где ν_n^w – считающая мера M_w -образов нулей q_n . Положив теперь

$$\begin{aligned} \ell_n(\tau) &= q_n(M_{-w}(\tau))(1+w\tau)^n, & L_s(\tau) &= Q_s(M_{-w}(\tau))(1+w\tau)^s, \\ p_{n-s-1}(\tau) &= P_{n-s-1}(M_{-w}(\tau))(1+w\tau)^{n-s-1}, & \omega_n^*(\tau) &= \omega_n(M_{-w}(\tau)), \end{aligned}$$

мы получим многочлен ℓ_n степени n с нулями в $M_w(\xi_{j,n})$, $j = 1, \dots, n$. Вдобавок, поскольку $M_x(1/\bar{\xi}) = 1/\overline{M_x(\xi)}$, $x \in (-1, 1)$, имеем

$$\tilde{\ell}_n(\tau) = \tilde{q}_n(M_{-w}(\tau))(1+w\tau)^n.$$

Аналогично, L_s – многочлен степени s с нулями в $M_w(\eta)$, $\eta \in S'$, а p_{n-s-1} – произвольный многочлен степени не выше $n-s-1$. Покажем, что ℓ_n удовлетворяет соотношениям ортогональности типа (3.5) с новой мерой, сконцентрированной в этом случае на $(0, 1)$ и по-прежнему принадлежащей **BVT**.

В наших обозначениях мы можем переписать (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S P_{n-s-1}(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} e^{i\varphi(t)} d|\lambda|(t) \\ &= \int_{M_w(S)} (P_{n-s-1} Q_s q_n)(M_{-w}(\tau)) \frac{\omega_n(M_{-w}(\tau))}{\tilde{q}_n^2(M_{-w}(\tau))} e^{i\varphi(M_{-w}(\tau))} d|\lambda|(M_{-w}(\tau)) \\ &= \int_{M_w(S)} p_{n-s-1}(\tau) L_s(\tau) \ell_n(\tau) \frac{\omega_n^*(\tau)}{\tilde{\ell}_n^2(\tau)} e^{i\varphi^*(\tau)} d|\lambda^*(\tau), \end{aligned}$$

где $d|\lambda^*|(\tau) = (1+w\tau) d|\lambda|(M_{-w}(\tau))$ – положительная мера с носителем в $M_w(S)$, $\varphi^*(\tau) = \varphi(M_{-w}(\tau))$ – функция ограниченной вариации, а $\{\omega_n^*\}$ – последовательность измеримых функций, модули которых равномерно ограничены сверху и снизу и аргументы которых имеют равномерно ограниченные производные. Теперь, поскольку функции Грина конформно инвариантны, $M_w(S)$ регулярно, так что ясно, что $\lambda^* \in \mathbf{BVT}$. Поэтому мы можем предполагать, что $S \subset (0, 1)$.

Допустим сначала, что все нули полиномов q_n лежат вне некоторой фиксированной окрестности нуля.

Для каждого n пусть σ_n – считающая мера нулей $\tilde{q}_n$. По только что сделанному предположению существует такое компактное множество K , $0 \notin K$, что $\text{supp}(\nu_n) \subset K$. Тогда $\text{supp}(\sigma_n) \subset \overline{K}^{-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\overline{K}^{-1}$ тоже компактно. По теореме Хелли о выборе (см. [27; теорема 0.1.3]) существует такая последовательность натуральных чисел $\mathbb{N}_1$, что $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ при $n \in \mathbb{N}_1$, где $\xrightarrow{*}$ обозначает $*$ -слабую сходимость. Обозначим через σ результат отражения ν относительно единичной окружности, так что $d\sigma(t) = d\nu \circ (1/\bar{t})$. Легко видеть, что $\sigma_n \xrightarrow{*} \sigma$. Заметим, что наши предположения относительно ω_n означают, что вариация ее аргумента на I , а значит, и на S ограничена равномерно по n . Теперь из следствия 3.3 видно, что ν и σ – вероятностные меры, для которых выполнено $\text{supp}(\nu) \subset S \subset (0, 1)$ и $\text{supp}(\sigma) \subset \overline{S}^{-1} = S^{-1}$ соответственно.

Покажем, что достаточно доказать, что логарифмический потенциал $\nu - \sigma$ постоянен кв.в. (квазивсюду) на S . Действительно, пусть $U^{\nu-\sigma} = D_1$ кв.в. на S , где

$$U^{\nu-\sigma} = \int \log \frac{1}{|z-t|} d(\nu - \sigma)(t).$$

Поскольку U^σ гармонична вне S^{-1} , то U^ν ограничен квазивсюду, а потому и всюду на S в силу полунепрерывности потенциала снизу. Таким образом, у ν конечная энергия и по симметрии то же верно для σ . Более того, для квазивсех $z \in S^{-1}$

$$\begin{aligned} U^{\nu-\sigma}(z) &= \int \log \frac{1}{|z-t|} d(\nu - \sigma)(t) = \int \log \frac{1}{|z-1/\bar{x}|} d\left[(\nu - \sigma) \circ \left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \int \log \left| \frac{x/z}{x-1/\bar{z}} \right| d(\sigma - \nu)(x) = \int \log \left| \frac{x}{z} \right| d(\sigma - \nu)(x) - U^{\nu-\sigma}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \int \log |x| d(\sigma - \nu)(x) - D_1 =: D_2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где мы используем, что полная мера заряда $\nu - \sigma$ равна нулю. Обозначим через $\hat{\sigma}$ выметание σ на S . Тогда

$$U^{\hat{\sigma}}(t) = U^\sigma(t) + c(\sigma; \mathbb{C} \setminus S)$$

для квазивсех t из S . Так что, поскольку $(\nu - \hat{\sigma})(\mathbb{C}) = 0$ и поскольку энергия ν и $\hat{\sigma}$ конечна,

$$\begin{aligned} 0 &= \int D_1 d(\nu - \hat{\sigma})(z) = \int U^{\nu-\sigma}(z) d(\nu - \hat{\sigma})(z) = \int U^{\nu-\hat{\sigma}}(z) d(\nu - \hat{\sigma})(z) \\ &= \int \int \log \frac{1}{|z-t|} d(\nu - \hat{\sigma})(t) d(\nu - \hat{\sigma})(z). \end{aligned}$$

Однако у заряда, являющегося разностью двух положительных мер конечной энергии, энергия может быть нулевой, только если он сам тривиален (см. [27; лемма I.1.8]), так что $\nu = \hat{\sigma}$. Используя (3.6) мы аналогично покажем, что $\sigma = \hat{\nu}$, где $\hat{\nu}$ – выметание ν на S^{-1} . Таким образом, $\sigma - \nu$ – равновесный

заряд конденсатора (S, S^{-1}) (см. [27; теорема VIII.2.6]). Теперь предложение (пп. (b) и (e)) из § 5 гарантирует, что $\nu = \mu_{(S, \mathbb{T})}$ – гриново равновесное распределение как относительно $\mathbb{D}$, так и $\mathbb{C} \setminus S^{-1}$. Поскольку $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ – произвольная $*$ -слабо сходящаяся подпоследовательность, то и вся последовательность $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $*$ -слабо сходится к μ_G^S .

Теперь осталось доказать только, что $U^{\nu-\sigma}$ постоянен квазिवсюду на S . Предположим, что это не так. Тогда имеются неполярные борелевские подмножества S , которые мы обозначим E_- и E_+ , и константы d и $\tau > 0$ такие, что

$$U^{\nu-\sigma}(x) \geq d + \tau, \quad x \in E_+; \quad U^{\nu-\sigma}(x) \leq d - 2\tau, \quad x \in E_-.$$

В этом случае можно утверждать, что существует точка $y_0 \in \text{supp}(\nu)$, в которой

$$U^{\nu-\sigma}(y_0) > d. \quad (3.7)$$

Действительно, в противном случае

$$U^\nu(x) \leq U^\sigma(x) + d, \quad x \in \text{supp}(\nu). \quad (3.8)$$

Тогда по принципу мажорации (см. [27; теорема II.3.2]) оказывается, что (3.8) выполнено для всех $z \in \mathbb{C}$ в противоречии с существованием подмножества E_+ .

Поскольку носители всех σ_n лежат вне замкнутого единичного круга, то последовательность потенциалов $\{U^{\sigma_n}\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ сходится к U^σ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}$. Следовательно, для всякой последовательности точек $\{y_n\} \subset \mathbb{D}$ такой, что $y_n \rightarrow y_0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}_1$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}_1} U^{\sigma_n}(y_n) = U^\sigma(y_0). \quad (3.9)$$

С другой стороны, у всех ν_n , $n \in \mathbb{N}_1$, носители лежат в $\mathbb{D}$, так что, применив к последовательности $\{y_n\}$ принцип понижения (см. [27; теорема I.6.8]), получим

$$\liminf_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}_1} U^{\nu_n}(y_n) \geq U^\nu(y_0). \quad (3.10)$$

Объединяя (3.7), (3.9) и (3.10), мы видим, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}_1} U^{\nu_n - \sigma_n}(y_n) \geq U^{\nu-\sigma}(y_0) > d. \quad (3.11)$$

Поскольку $\{y_n\}$ – произвольная последовательность точек $\mathbb{D}$, сходящаяся к y_0 , то из (3.11) выводится существование такого $\rho > 0$, что для любых $y \in [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$ и достаточно большого $n \in \mathbb{N}_1$ выполнено неравенство

$$U^{\nu_n - \sigma_n}(y) \geq d. \quad (3.12)$$

Поскольку

$$U^{\nu_n - \sigma_n}(y) = \frac{1}{n} \log \left| \frac{1}{\alpha_n} \frac{\tilde{q}_n(y)}{q_n(y)} \right|,$$

где $\alpha_n := \prod_{j=1}^n |\xi_{j,n}|$, то мы можем переписать (3.12) как неравенство

$$\left| \alpha_n \frac{q_n(y)}{\tilde{q}_n(y)} \right| \leq e^{-nd} \quad (3.13)$$

для всех $y \in [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}_1$.

Отметим для дальнейшего, что в проведенных рассуждениях нам не требовалось, чтобы степень многочленов q_n была в точности равна n . Пусть $\{p_n\}$ – последовательность монических многочленов степеней $d_n = n + o(n)$, где o – символ Ландау “о малое”. Вдобавок допустим, что считающие меры нулей этих полиномов нормализованы коэффициентом $1/n$ вместо $1/d_n$ (так что это не обязательно вероятностные меры) и сосредоточены на фиксированном компакте в комплексной плоскости. Обозначим их μ_n и предположим, что они сходятся к ν в $*$ -слабой топологии. Тогда неравенства (3.10) и (3.11) продолжают выполняться для μ_n вместо ν_n , возможно, после отбрасывания нескольких членов последовательности $\mathbb{N}_1$ и с меньшим ρ . Таким образом,

$$\left| \alpha_n \frac{p_n(y)}{\tilde{q}_n(y)} \right| \leq e^{-nd} \quad (3.14)$$

для всякого $y \in [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}_1$.

С другой стороны, поскольку $U^{\nu-\sigma}(x) \leq d - 2\tau$ на E_- , то, применяя теорему о регуляризации (см. [27; теорема I.6.9]), получим

$$\liminf_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}_1} U^{\nu_n - \sigma_n}(x) = U^{\nu - \sigma}(x) \leq d - 2\tau \quad \text{для квазिवсех } x \in E_-. \quad (3.15)$$

Пусть Z – конечный набор точек $(-1, 1)$, которые мы уточним ниже. По [28], [29] существует⁷ такое подмножество $S_0 \subset S$, что S_0 регулярно, $\text{cap}(E_- \cap S_0) > 0$ и $\text{dist}(Z, S_0) > 0$, где $\text{dist}(Z, S_0) := \min_{z \in Z} \text{dist}(z, S_0)$. Положим для простоты $b_n(x) = q_n(x)/\tilde{q}_n(x)$. Это конечное произведение Бляшке. Тогда

$$U^{\nu_n - \sigma_n}(x) = -\frac{1}{n} \log |\alpha_n b_n(x)|$$

и по (3.15), поскольку $|\alpha_n| < 1$, существуют такие $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ и $x \in E_- \cap S_0$, что

$$|b_n(x)| \geq |\alpha_n b_n(x)| \geq e^{-n(d-\tau)}$$

для всех $n \in \mathbb{N}_2$. Пусть x_n – точка, в которой $|b_n|$ достигает максимума на S_0 . Тогда

$$M_n := \max_{x \in S_0} |b_n(x)| = |b_n(x_n)| \geq |\alpha_n| M_n = |\alpha_n b_n(x_n)| \geq e^{-n(d-\tau)}. \quad (3.16)$$

Заметим, что $M_n < 1$, и потому $d - \tau$ с необходимостью положительно. Для простоты будем обозначать $\mathbb{D} \setminus S_0$ через D . Поскольку в единичном круге произведение Бляшке по модулю не превосходит единицы, а $\log |b_n|$ – субгармоническая функция, то теорема о двух константах (см. [30; теорема 4.3.7]) дает следующую поточечную оценку:

$$\log |b_n(z)| \leq \omega_D(z, S_0) \log |M_n| \quad (3.17)$$

для любого $z \in D$, где $\omega_D(z, S_0)$ – гармоническая мера D (см. [30; § 4.3]). Объединяя два последних соотношения, получим

$$|b_n(z)| \leq M_n^{\omega_D(z, S_0)} = M_n \left(\frac{1}{M_n} \right)^{1 - \omega_D(z, S_0)} \leq M_n \exp \{ n(d - \tau)(1 - \omega_D(z, S_0)) \} \quad (3.18)$$

⁷В [23] S_0 не вводится, из-за чего в этой работе доказательство теоремы 3.1 не вполне корректно. Его можно было бы исправить, применив теорему о регуляризации к Tq_n вместо q_n , поскольку это не влияет на асимптотику нулей.

для $z \in D$ и, очевидно, также для $z \in S_0$, где $\omega_D(\cdot, S_0) = 1$, так как S_0 регулярно. Более того, опять-таки в силу регулярности S_0 известно (см. [30; теорема 4.3.4]), что для всех $x \in S_0$

$$\lim_{z \rightarrow x} \omega_D(z, S_0) = 1$$

равномерно по $x \in S_0$. Итак, для всякого $\delta > 0$ существует такое $r(\delta) < \text{dist}(S_0, \mathbb{T})$, что при z , удовлетворяющих условию $\text{dist}(z, S_0) \leq r(\delta)$,

$$1 - \omega_D(z, S_0) \leq \frac{\delta}{d - \tau}.$$

Вместе с (3.18) это означает, что для фиксированного δ , выбор которого будет уточнен позже,

$$|b_n(z)| \leq M_n e^{n\delta}, \quad |x_n - z| \leq r(\delta).$$

Заметим, что b_n аналитична в $\mathbb{D}$; в частности, это показывает, что при $|z - x_n| < r(\delta)$ выполняется

$$b'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - x_n| = r(\delta)} \frac{b_n(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Итак, если $|z - x_n| \leq r(\delta)/2$, то

$$|b'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{4M_n e^{n\delta}}{r^2(\delta)} 2\pi r(\delta) = \frac{4M_n e^{n\delta}}{r(\delta)}.$$

Теперь при

$$|x - x_n| \leq \frac{r(\delta)}{8e^{n\delta}} \tag{3.19}$$

из теоремы о среднем получаем, что

$$|b_n(x) - b_n(x_n)| \leq \frac{4M_n e^{n\delta}}{r(\delta)} |x - x_n| = \frac{M_n}{2}.$$

Значит, для x , удовлетворяющих (3.19), получаем

$$|b_n(x)| \geq |b_n(x_n)| - |b_n(x) - b_n(x_n)| \geq M_n - \frac{M_n}{2} = \frac{M_n}{2},$$

и в силу (3.16)

$$|\alpha_n b_n(x)| \geq \frac{|\alpha_n| M_n}{2} \geq \frac{1}{2} e^{-n(d-\tau)}. \tag{3.20}$$

Оценки (3.14) и (3.20) вместе с соотношением (3.5) являются основными элементами доказательства того, что $U^{\nu-\sigma}$ постоянен квазигсюду на S . Чтобы связать их друг с другом, мы выберем P_{n-s-1} в (3.5) специальным образом.

Прежде всего, возьмем такой многочлен T , что лемма 3.1, (с) выполнена для $\psi = \varphi$, $a_n = \text{Arg}(\omega_n)$, $Q = Q_s$ и $[a, b] = I$ при $n \in \mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2$. Пусть k – степень T . Далее, для всякого $n \in \mathbb{N}_3$ выберем $T_{l,n}$, как в лемме 3.1, (d), с $\varepsilon = \delta/9$. Заметим, что мы вправе применять лемму 3.1, (d) в силу леммы 3.2 и наших предположений относительно S , φ и ω_n . Поскольку все $T_{l,k}$ по определению ограничены на I и степень их не выше l , не зависящего от n , то существует последовательность $\mathbb{N}_4 \subset \mathbb{N}_3$, по которой $\{T_{l,n}\}_{n \in \mathbb{N}_4}$ равномерно сходятся к некоторому многочлену T_l на I . В частности, $\deg(T_l) \leq l$ и аргумент $T_l(x)/\tilde{q}_n(x)$

лежит в $(-\delta/4, \delta/4)$ при достаточно больших $n \in \mathbb{N}_4$. Через 2α обозначим наименьшее четное число, строго превосходящее $2l + k + s$. Если n достаточно большое, то, поскольку $y_0 \in \text{supp}(\nu)$, у полинома q_n есть нули $\beta_{1,n}, \dots, \beta_{2\alpha,n}$, лежащие в области

$$O_\gamma([y_0 - \rho, y_0 + \rho]) := \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, [y_0 - \rho, y_0 + \rho]) \leq \gamma\},$$

где величину γ , $0 < \gamma < \rho$, мы уточним ниже. Положим

$$P_n^*(z) = \frac{\overline{q_n(\bar{z})}T(z)T_l^2(z)}{\prod_{j=1}^{2\alpha}(z - \bar{\beta}_{j,n})}.$$

Степень полинома P_n^* равна $n - s - 1$ или $n - s - 2$ в зависимости от четности $k + s$.

Пусть $I_n \subset (0, 1)$ — отрезок, определенный в (3.19). Сравнивая (3.13) и (3.20), мы видим, что при больших $n \in \mathbb{N}_4$ отрезки I_n и $[y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$ не пересекаются.

Выберем $\gamma = \gamma(\rho)$ настолько малым, чтобы

$$\left| \sum_{j=1}^{2\alpha} \text{Arg} \left(\frac{1}{x - \bar{\beta}_{j,n}} \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{2\alpha} \text{Arg}(x - \bar{\beta}_{j,n}) \right| \leq \frac{\delta}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho].$$

Взяв $\delta < \beta$, в силу нашего выбора T , T_l и P_n^* получим

$$\begin{aligned} & \left| \text{Arg} \left(P_n^*(x)Q_s(x)q_n(x) \frac{\omega_n(x)}{\tilde{q}_n^2(x)} e^{i\varphi(x)} \right) \right| \\ &= \left| \text{Arg} \left(|q_n(x)|^2 \prod_{j=1}^{2\alpha} \frac{1}{(x - \bar{\beta}_{j,n})} \cdot \frac{T_l^2(x)}{\tilde{q}_n^2(x)} T(x)Q_s(x)\omega_n(x) e^{i\varphi(x)} \right) \right| \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta \end{aligned}$$

для $x \in I \setminus [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$, за возможным исключением точек, в которых T или Q_s обращается в нуль. Это означает, что для таких x

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left(|\alpha_n|^2 (P_n^* Q_s q_n)(x) \frac{\omega_n(x)}{\tilde{q}_n^2(x)} e^{i\varphi(x)} \right) \geq \sin \delta \left| \alpha_n^2 (P_n^* Q_s q_n)(x) \frac{\omega_n(x)}{\tilde{q}_n^2(x)} e^{i\varphi(x)} \right| \\ &\geq \sin \delta \left| \frac{\alpha_n^2 (b_n^2 Q_s T T_l^2 \omega_n)(x)}{\prod_{j=1}^{2\alpha} (x - \bar{\beta}_{j,n})} \right| \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Более того, если $x \in S \setminus [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]$ удовлетворяет (3.19), то в силу (3.16) и (3.20) эта величина снизу ограничена числом

$$\begin{aligned} & |T(x)Q_s(x)| \frac{\sin \delta \min_{x \in [a,b]} |T_l(x)|^2 \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|}{4(\text{diam}(S) + 2\rho)^{2\alpha}} e^{-2nd+2n\tau} \\ &= c_1 |T(x)Q_s(x)| e^{-2nd+2n\tau}, \end{aligned}$$

где $\text{diam}(S) := \max_{x,y \in S} |x - y|$ и

$$c_1 := \frac{\sin \delta \min_{x \in [a,b]} |T_l(x)|^2 \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|}{4(\text{diam}(S) + 2\rho)^{2\alpha}} > 0$$

по построению T_l и в силу равномерной отделенности $\{|\omega_n|\}$ от нуля. Итак,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\int_{S \setminus [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]} |\alpha_n|^2 P_n^*(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} e^{i\varphi(t)} d|\lambda|(t) \right) \\ & \geq \sin \delta \int_{S \setminus [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]} \left| \alpha_n^2 P_n^*(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} e^{i\varphi(t)} \right| d|\lambda|(t) \\ & \geq c_1 e^{-2nd + 2n\tau} \int_{S \cap I_n} |T(t) Q_s(t)| d|\lambda|(t) \geq c_2 e^{-2nd + n(2\tau - L\delta)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Последнее неравенство доказывается следующим образом. Заметим сначала, что для достаточно больших n в силу (3.20) и 3.13) мы имеем $I_n \cap [y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho] = \emptyset$. Теперь вспомним, что x_n — середина I_n — лежит в S_0 , где $\operatorname{dist}(S_0, Z) > 0$, а Z — конечный набор точек, в качестве которых мы выберем нули TQ_s на $(-1, 1)$, если таковые имеются. Тогда модуль TQ_s , который не зависит от n , равномерно ограничен снизу на I_n , что дает нам (3.22) в силу определения **BVT**, п. (2). С другой стороны, неравенства (3.13) и (3.14) с $p_n = P_n^*/(\text{старший коэффициент в } TT_l^2)$ показывают, что

$$\left| \int_{[y_0 - 2\rho, y_0 + 2\rho]} |\alpha_n|^2 P_n^*(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} e^{i\varphi(t)} d|\lambda|(t) \right| \leq c_3 e^{-2nd}, \quad (3.23)$$

где мы используем равномерную ограниченность $\{|\omega_n|\}$ сверху. Мы можем выбрать δ столь малым, что $2\tau - L\delta > 0$; тогда нижняя грань в (3.22) оказывается больше оценки в (3.23) для больших n . Однако это невозможно, поскольку в силу (3.5) сумма этих двух интегралов равна нулю.

Мы завершили обсуждение случая, когда все нули q_n отделены от нуля. Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $U := \mathbb{D} \setminus \{z : |z| \leq \varepsilon\}$ — окрестность S . По следствию 3.3 существует такая постоянная $k_U \in \mathbb{N}$, что у q_n не более k_U нулей вне U , т.е. нулей, больших ε по абсолютной величине. Теперь из всякой последовательности натуральных чисел можно извлечь такую подпоследовательность $\mathbb{N}_0$, что для некоторого $m \leq k_U$ у всякого q_n с $n \in \mathbb{N}_0$ ровно m нулей вне U . Пусть $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{m,n}$ — эти нули. Рассмотрим многочлены

$$q_n^*(z) := \frac{\tilde{q}_n(z)}{\prod_{j=1}^m (1 - z\bar{\xi}_{j,n})}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда последовательность $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяет следующим взвешенным соотношениям ортогональности:

$$\int P_{n-s-1}(t) Q_s(t) q_n(t) \frac{\omega_n^*(t)}{(q_n^*(t))^2} d\lambda(t) = 0, \quad P_{n-s-1} \in \mathcal{P}_{n-s-1},$$

где

$$\omega_n^*(t) := \omega_n(t) \prod_{j=1}^m (1 - t\bar{\xi}_{j,n})^{-2}, \quad t \in I.$$

Теперь мы особо отметим изменения, требующиеся для использования приведенного выше доказательства в настоящем случае. Как и выше, пусть $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_0$ — последовательность натуральных чисел, по которой $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$, $n \in \mathbb{N}_1$. Поскольку

мы отбросили только фиксированное число нулей $\tilde{q}_n(z)$, чтобы получить q_n^* , то считающие меры σ_n^* нулей q_n^* (с коэффициентом нормализации $1/n$) опять-таки *-слабо сходятся к σ . У функции $U^{\sigma_n^*}$ есть все требуемые свойства U^{σ_n} , поэтому неравенства (3.13) и (3.14) выполняются также для q_n вместо $\tilde{q}_n^*$.

Теперь пусть $b_n(x)$ равно $q_n(x)/q_n^*(x)$. Тогда b_n уже не просто произведение Бляшке, а произведение Бляшке, умноженное на многочлен $\prod_{j=1}^m (z - \xi_{j,n})$. Вместо (3.17) мы теперь получаем

$$\log|b_n(z)| \leq \omega_D(z, S_0) \log|M_n| + (1 - \omega_D(z, S_0))m \log 2,$$

и (3.18) можно заменить на соотношение

$$\begin{aligned} |b_n(z)| &\leq M_n \exp \left\{ n \left(d - \tau + \frac{m \log 2}{n} \right) (1 - \omega_D(z, S_0)) \right\} \\ &\leq M_n \exp \{ n(d - \tau + 1)(1 - \omega_D(z, S_0)) \} \end{aligned}$$

при достаточно больших n . Это незначительно меняет $r(\delta)$ (нам нужно добиться, чтобы $1 - \omega_D(z, S_0)$ было меньше, чем $\delta/(d - \tau + 1)$, а не только меньше, чем $\delta/(d - \tau)$). Лемму 3.1, (d) можно с таким же успехом использовать применительно к многочленам q_n^* вместо $\tilde{q}_n$.

Таким образом, осталось показать, что $\{\omega_n^*\}$ равномерно ограничены сверху и снизу на I и что их аргументы – гладкие функции с производными на I , равномерно ограниченными по n . Равномерная ограниченность $\{\omega_n^*\}$ видна из оценок

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{2m} \leq \prod_{j=1}^m \left| \frac{1}{1 - t\bar{\xi}_{j,n}} \right|^2 \leq \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right)^{2m}.$$

Поскольку точки $\xi_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$, не могут подходить близко к I^{-1} , то $\text{Arg}(1 - t\bar{\xi}_{j,n})$ – гладкая функция на I и ее производная $\text{Im}(\xi_{j,n}/(1 - t\bar{\xi}_{j,n}))$ равномерно ограничена там по j и n . Остальные условия на $\{\omega_n^*\}$ следуют из представления

$$\arg(\omega_n^*(t)) = \arg(\omega_n(t)) - 2 \sum_{j=1}^m \text{Arg}(1 - t\bar{\xi}_{j,n}).$$

Теорема 2.5 доказана.

Следующая лемма нужна для доказательства теоремы 2.1. Напомним, что семейство голоморфных функций $\mathcal{H}$ в фиксированной области комплексной плоскости называется *нормальным*, если любая последовательность функций из $\mathcal{H}$ содержит локально равномерно сходящуюся подпоследовательность.

ЛЕММА 3.4. Для $p \in (2, \infty]$ пусть $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность неприводимых критических точек порядка n задачи **МА**(p) для функции F , заданной формулами (2.3) и (2.4) с λ , удовлетворяющей⁸ (2.1) и (2.2). Далее, пусть v_n – ассоциированный с g_n сингулярный вектор, разложенный в произведение внутренней и внешней функций: $v_n = b_n \cdot w_n$, где b_n – некоторое произведение Бляшке, а w_n – внешняя функция из $H^{p'}$. Тогда семейства $\mathcal{W} := \{w_n\}$ и

⁸Заметим, что мы не требуем, чтобы $\lambda \in \text{BVT}$. В лемме достаточно, чтобы у меры был аргумент ограниченной вариации, а носитель содержал бесконечное множество точек.

$\mathscr{W}_{p'} := \{w_n^{p'/2}\}$ нормальны соответственно в $\mathbb{D}$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{S}^*$, где $\tilde{S}^*$ – множество, симметричное $\tilde{S}$ относительно $\mathbb{T}$. Более того, ни у какой предельной точки $\mathscr{W}$ нет нулей в $\mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства содержится в [3; теорема 10.1]. Для комплексных мер с аргументом ограниченной вариации соответствующие модификации были приведены в [2; предложение 6.3]. В настоящем случае требуются только небольшие изменения, поскольку у приближаемой функции могут быть полюсы внутри $\mathbb{D}$. А именно, поскольку в [2; предложение 6.3, уравнение (6.12)] выбран многочлен T , нужно воспроизвести рассуждения из этого предложения для TQ^2 вместо T . Еще одно необходимое изменение заключается в том, чтобы определить G_n из [3; теорема 10.1] как

$$G_n(z) := \overline{(b_n Q w_n^{1/2})(\bar{z})};$$

это дает нужную оценку из [2; уравнение (6.13)].

При желании полное доказательство леммы можно найти в [18; лемма 3.11].

Заметим, что в предыдущей лемме из формулы Коши было заранее ясно, что семейство $\mathscr{W}$ в $\mathbb{D}$ нормально, поскольку $\|w_n\|_{p'} = 1$, но отсутствие нулей у предельных точек не было очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть v_n – ассоциированный с g_n сингулярный вектор, имеющий факторизацию $v_n = b_n \cdot w_n$ с некоторым произведением Бляшке $b_n = q_n/\tilde{q}_n$ и внешней функцией $w_n \in H^{p'}$, $\|w_n\|_{p'} = 1$, где $w_n \equiv 1$ при $p = 2$. Полюсы g_n в точности совпадают с нулями q_n . Более того, $\{q_n\}$ – последовательность полиномов, удовлетворяющих неэрмитовым взвешенным соотношениям ортогональности (2.25). Таким образом, теорема 2.1 будет следовать из теоремы 2.5, только если семейство $\mathscr{W} = \{w_n\}$ равномерно ограничено сверху и снизу на I (выпуклой оболочке S) и если функции из этого семейства имеют гладкие аргументы с равномерно ограниченными производными на I . При $p = 2$ это тривиально, поскольку $w_n \equiv 1$. При $p \in (2, \infty]$ лемма 3.4 утверждает, что $\mathscr{W}$ – нормальное семейство и, следовательно, равномерно ограничено сверху на I . Более того, так как предельные точки $\mathscr{W}$ не имеют нулей в $\mathbb{D}$, то это семейство равномерно ограничено снизу на I (в действительности – на всяком компактном подмножестве $\mathbb{D}$). Далее, производные тоже образуют нормальное семейство, как и логарифмические производные w'_n/w_n в $\mathbb{D}$. Поскольку мнимая часть логарифмической производной есть $d \arg(w_n)/dt$ на I , мы видим, что $\mathscr{W}$ удовлетворяет требуемым условиям.

Теорема 2.1 доказана.

Перед доказательством теоремы 2.2 нам потребуется вспомогательный результат.

ЛЕММА 3.5. Пусть D – область в $\overline{\mathbb{C}}$ с неполярной границей, K' – компакт в D , а $\{u_n\}$ – последовательность субгармонических функций в D , удовлетворяющих неравенствам

$$u_n(z) \leq M - \varepsilon_n, \quad z \in D,$$

с некоторой константой M и положительными числами $\{\varepsilon_n\}$, убывающими к нулю. Более того, пусть существуют компактное множество K' и

положительные постоянные ε' и δ' , не зависящие от n , для которых

$$u_n(z) \leq M - \varepsilon', \quad z \in K_n \subset K', \quad \text{cap}(K_n) \geq \delta'.$$

Тогда для всякого компакта $K \subset D \setminus K'$ существует такая положительная постоянная $\varepsilon(K)$, что

$$u_n(z) \leq M - \varepsilon(K), \quad z \in K,$$

при достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_n – гармоническая мера для $D_n := D \setminus K_n$. Тогда по теореме о двух константах (см. [30; теорема 4.3.7])

$$u_n(z) \leq (M - \varepsilon')\omega_n(z, K_n) + (M - \varepsilon_n)(1 - \omega_n(z, K_n)) \leq M - (\varepsilon' - \varepsilon_n)\omega_n(z, K_n), \\ z \in D_n.$$

Итак, нужно показать, что для всякого $K \subset D \setminus K'$ существует постоянная $\delta(K) > 0$, для которой

$$\omega_n(z, K_n) \geq \delta(K), \quad z \in K.$$

Предположим противное: имеется последовательность точек $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}_1} \subset K$, $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, на которой

$$\omega_n(z_n, K_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}_1. \quad (3.24)$$

По [30; теорема 4.3.4] $\omega_n(\cdot, K_n)$ – единственная ограниченная гармоническая функция, для которой равенство

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(z, K_n) = \mathbb{1}_{K_n}(\zeta)$$

выполнено во всякой регулярной точке $\zeta \in \partial D_n$, где $\mathbb{1}_{K_n}$ – характеристическая функция ∂K_n . Теперь из формулы (5.8) (см. § 5) следует, что

$$\text{cap}(K_n, \partial D) U_D^{\mu(K_n, \partial D)} \equiv \omega_n(\cdot, K_n), \quad (3.25)$$

где $\mu_{(K_n, \partial D)}$ – гринова равновесная мера на K_n относительно D . Поскольку все меры $\mu_{(K_n, \partial D)}$ сконцентрированы на компакте K' , то существует такая вероятностная мера μ , что

$$\mu_{(K_n, \partial D)} \xrightarrow{*} \mu \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $z_n \rightarrow z^* \in K$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathbb{N}_2$. Как обычно, пусть $g_D(\cdot, t)$ – функция Грина в D с полюсом в $t \in D$. Тогда в силу равномерной равностепенной непрерывности $\{g_D(\cdot, t)\}_{t \in K'}$ на K получаем

$$U_D^{\mu(K_n, \partial D)}(z_n) \rightarrow U_D^{\mu}(z^*) \neq 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Итак, (3.24) и (3.25) с необходимостью приводят к сходимости

$$\text{cap}(K_n, \partial D) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}_2. \quad (3.26)$$

По определению $1/\text{cap}(K_n, \partial D)$ – минимум гриновых энергий вероятностных мер с носителем в K_n . Таким образом, последовательность μ_{K_n} гриновых энергий равновесных логарифмических мер на K_n расходится к бесконечности в силу (3.26). Более того, поскольку

$$\{g(\cdot, t) + \log|\cdot - t|\}_{t \in K'}$$

– семейство гармонических функций в D , абсолютные величины которых равномерно ограничены сверху на K' , то логарифмические энергии μ_{K_n} расходятся к бесконечности. Иными словами,

$$\text{cap}(K_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathbb{N}_2,$$

что невозможно в силу исходных предположений.

Лемма 3.5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Для доказательства сходимости по емкости найдем сначала интегральное представление для погрешности $F - g_n$. Как обычно, пусть $v_n = b_n w_n$ – ассоциированный с g_n сингулярный вектор, где b_n – произведение Бляшке степени n , а w_n – внешняя функция. По (2.11) и теореме Фубини–Тонелли для $z \in \mathbb{D} \setminus \tilde{S}$ получаем

$$\begin{aligned} r_n(z) &:= (F - g_n)(z) = \frac{A_F(v_n)(z)}{v_n(z)} = \frac{\mathbf{P}_-(Fv_n)(z)}{v_n(z)} \\ &= \frac{1}{v_n(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{(Fv_n)(\xi)}{z - \xi} \frac{d\xi}{2\pi i} = \frac{1}{v_n(z)} \int_{\mathbb{T}} \int \frac{v_n(\xi)}{(z - \xi)(\xi - t)} d\tilde{\lambda}(t) \frac{d\xi}{2\pi i} \\ &= \frac{1}{v_n(z)} \int \frac{v_n(t)}{z - t} d\tilde{\lambda}(t) = \frac{\tilde{q}_n(z)}{q_n(z)w_n(z)} \int \frac{q_n(t)}{z - t} \frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n(t)} d\tilde{\lambda}(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

С другой стороны, из соотношений ортогональности (2.25) имеем

$$\int \frac{\tilde{q}_n(z) - \tilde{q}_n(t)}{z - t} q_n(t) \frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} d\tilde{\lambda}(t) = 0.$$

В свою очередь это означает, что (3.27) можно переписать следующим образом:

$$r_n(z) = \frac{\tilde{q}_n^2(z)}{q_n(z)w_n(z)} \int \frac{q_n(t)}{z - t} \frac{w_n(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} d\tilde{\lambda}(t), \quad z \in \mathbb{D} \setminus \tilde{S}. \quad (3.28)$$

Поскольку основная часть нулей q_n стремится к S по следствию 3.3, то всегда можно найти такие s нулей $\xi_{1,n}, \dots, \xi_{s,n}$, что модули величин

$$l_{s,n}(z) := \prod_{j=1}^s (z - \xi_{j,n}), \quad \tilde{l}_{s,n}(z) := \overline{z^s l_{s,n}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad (3.29)$$

равномерно ограничены сверху и снизу соответственно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus S$ и $\mathbb{D}$ для всех достаточно больших n . Снова используя соотношения ортогональности (2.25) и то, что Q_s равно нулю с кратностью $m(\eta)$ в каждой точке $\eta \in S'$, мы можем переписать (3.28) как

$$r_n(z) = \frac{\tilde{q}_n^2(z)}{(q_n q_n^* Q_s w_n)(z)} \int \frac{(q_n q_n^* Q_s w_n)(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \frac{d\lambda(t)}{z - t}, \quad (3.30)$$

где $q_n^*(z) := \overline{q_n(\bar{z})}/\overline{l_{s,n}(\bar{z})}$. Положим

$$B_n(z) := \int \frac{(|q_n^*|^2 Q_s l_{s,n} w_n)(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \frac{d\lambda(t)}{z - t}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus S, \quad (3.31)$$

так что

$$r_n(z) = \frac{\tilde{q}_n^2(z) B_n(z)}{(q_n q_n^* Q_s w_n)(z)}.$$

Покажем сначала, что

$$|B_n|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right\} \quad (3.32)$$

на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus S$. Как обычно, пусть $b_n = q_n/\tilde{q}_n$. Тогда для всякого компакта $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ имеется константа $c(K)$, не зависящая от n , для которой

$$|B_n(z)| \leq c(K) \|b_n\|_S^2, \quad z \in K, \quad (3.33)$$

в силу выбора $l_{s,n}$ и леммы 3.4. Пусть ν_n – считающие меры нулей b_n . Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n(t)|^{1/n} &= \limsup \exp\{-U_{\mathbb{D}}^{\nu_n}(t)\} = \exp\{-\liminf U_{\mathbb{D}}^{\nu_n}(t)\} \\ &= \exp\{-U_{\mathbb{D}}^{\mu(S, \mathbb{T})}(t)\} = \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\} \quad \text{для квазивсех } t \in S \end{aligned} \quad (3.34)$$

по теореме 2.1, теореме о регуляризации (см. [27; теорема I.6.9]) и формуле 5.8. Более того, по принципу понижения (см. [27; теорема I.6.8]) мы получаем оценку

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n(t)|^{1/n} \leq \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right\}, \quad (3.35)$$

равномерную на S . Из (3.34) и (3.35) сразу видно, что на самом деле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|_S^{1/n} = \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\}. \quad (3.36)$$

Теперь допустим, что (3.32) неверно. Тогда существуют компакт $K' \subset \mathbb{C} \setminus S$ и число $\varepsilon' > 0$ такие, что

$$\text{cap}\left\{z \in K' : \left| |B_n(z)|^{1/(2n)} - \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\} \right| \geq \varepsilon' \right\} \neq 0. \quad (3.37)$$

Из (3.37), (3.36) и (3.33) мы видим, что должна существовать последовательность компактов $K_n \subset K'$, $\text{cap}(K_n) \geq \delta' > 0$, на которых

$$|B_n(z)|^{1/(2n)} \leq \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\} - \varepsilon', \quad z \in K_n, \quad (3.38)$$

при достаточно больших n . Пусть теперь Γ – такая замкнутая жорданова кривая, разделяющая S и K' , что S лежит в ограниченной компоненте дополнения к ней. Заметим, что $(1/(2n)) \log |B_n|$ – субгармоническая функция в $\mathbb{C} \setminus S$. Тогда

(3.33), (3.36) и (3.38) позволяют использовать лемму 3.5 с $M = -1/\text{cap}(S, \mathbb{T})$, а потому существует такое $\varepsilon(\Gamma) > 0$, что

$$|B_n(z)|^{1/(2n)} \leq \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} - \varepsilon(\Gamma) \right\} \quad (3.39)$$

равномерно на Γ для всех достаточно больших n . Положим

$$J_n := \left| \int_{\Gamma} T_l^2(z) T(z) \overline{l_{s,n}(\bar{z})} B_n(z) \frac{dz}{2\pi i} \right|,$$

где многочлены T_l и T выбираются как в теореме 2.1 (см. обсуждение после формулы (3.20)). Теперь если сходимости в (3.32) нет, то мы получим (3.39), откуда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_n^{1/(2n)} \leq \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} - \varepsilon(\Gamma) \right\}. \quad (3.40)$$

С другой стороны, по интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} J_n &= \left| \int_{\Gamma} T_l^2(z) T(z) \overline{l_{s,n}(\bar{z})} \left(\int \frac{(|q_n^*|^2 Q_s l_{s,n} w_n)(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \frac{d\lambda(t)}{z-t} \right) \frac{dz}{2\pi i} \right| \\ &= \left| \int |q_n^2(t)| \frac{T_l^2(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} (T Q_s w_n)(t) e^{i\varphi(t)} d|\lambda|(t) \right|. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В точности, как и в (3.21),

$$\text{Re} \left(\frac{(T_l^2 T Q_s w_n)(t) e^{i\varphi(t)}}{\tilde{q}_n^2(t)} \right) \geq \sin(\delta) \left| \frac{(T_l T Q_s w_n)(t)}{\tilde{q}_n^2(t)} \right|, \quad t \in I, \quad (3.42)$$

где I – выпуклая оболочка S , а $\delta > 0$ имеет тот же смысл, что и в теореме 2.1 (см. конструкцию после (3.18)). Итак, из (3.41) и (3.42) мы выводим

$$J_n \geq \sin(\delta) \int |b_n^2(t)| |(T_l^2 T Q_s w_n)(t)| d|\lambda|(t). \quad (3.43)$$

Пусть S_0 – замкнутое подмножество S положительной емкости, лежащее на положительном расстоянии от нулей $T Q_s$ на I (по поводу существования такого множества см. теорему 2.1). Далее, пусть $x_n \in S_0$ – точка, в которой

$$\|b_n\|_{S_0} = |b_n(x_n)|.$$

Из (3.34) и (3.36) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\|_{S_0}^{1/n} = \exp \left\{ -\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right\},$$

поэтому

$$\|b_n\|_{S_0} \geq \exp \left\{ -n \left(\varepsilon + \frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right) \right\}$$

для всякого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n . Действуя, как в теореме 2.1 (см. (3.19) и (3.20)), мы получим

$$|b_n(t)| \geq \frac{1}{2} \exp \left\{ -n \left(\varepsilon + \frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})} \right) \right\}, \quad t \in I_n, \quad (3.44)$$

где

$$I_n := \{x \in S_0 : |x - x_n| \leq r_\delta e^{-n\delta}\},$$

а r_δ – непрерывная функция δ , равная нулю в нуле. Объединяя (3.43) и (3.44) в точности, как в (3.22), мы докажем, что существует константа c_1 , не зависящая от n , для которой

$$J_n \geq \sin(\delta) \int_{I_n} |b_n^2(t)| |(T_l^2 T Q_s w_n)(t)| d\lambda|(t) \geq c_1 \exp\left\{-2n\left(\varepsilon + \frac{L\delta}{2} + \frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right)\right\}.$$

Итак,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J_n^{1/(2n)} \geq \exp\left\{-\varepsilon - \frac{L\delta}{2} - \frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\}. \quad (3.45)$$

Выбрав теперь достаточно малые ε и δ так, чтобы $\varepsilon + L\delta < \varepsilon(\Gamma)$, мы приходим к противоречию между (3.40) и (3.45). Значит, в (3.32) имеет место сходимость.

Покажем теперь, что

$$\left| \frac{\tilde{q}_n^2(z) l_{s,n}(\bar{z})}{q_n(z) q_n(\bar{z}) Q_s(z) w_n(z)} \right|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} \exp\{U_{\mathbb{D}}^{\mu(S, \mathbb{T})}(z)\} \quad (3.46)$$

на компактных подмножествах $\mathbb{D} \setminus S$. Пусть $K \subset \mathbb{D} \setminus S$ – компакт, а U – ограниченное открытое множество, симметричное относительно вещественной оси, содержащее K и не пересекающееся с S . Положим

$$b_{n,1}(z) := \prod_{\zeta \in U: b_n(\zeta)=0} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad b_{n,2}(z) := \frac{b_n(z)}{b_{n,1}(z)}.$$

Далее, пусть $q_{n,1}$ и $q_{n,2}$ – числители соответственно $b_{n,1}$ и $b_{n,2}$. По следствию 3.3 для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ у всякого $b_{n,1}$ не больше m нулей. Теперь

$$|b_{n,2}(z)|^{1/n} \rightarrow \exp\{-U_{\mathbb{D}}^{\mu(S, \mathbb{T})}(z)\}, \quad \left| \frac{q_{n,2}(z)}{q_{n,2}(\bar{z})} \right|^{1/n} \rightarrow 1$$

равномерно на K по теореме 2.1. Более того, из выбора $l_{s,n}$, нормальности $\{w_n\}$ в $\mathbb{D}$ (лемма 3.4) и равномерной оценки числа нулей $q_{n,1}(z)q_{n,1}(\bar{z})Q_s(z)$ по теореме о лемнискате (см. [30; теорема 5.2.5]) непосредственно следует, что

$$\left| \frac{\tilde{q}_{n,1}^2(z) l_{s,n}(\bar{z})}{q_{n,1}(z) q_{n,1}(\bar{z}) Q_s(z) w_n(z)} \right|^{1/(2n)} \xrightarrow{\text{cap}} 1, \quad z \in K.$$

Итак, мы получили (3.46). Теперь ясно, что (2.13) следует из (3.30), (3.32) и (3.46).

Наконец, фиксируем $p = 2$ и $p = \infty$. Во втором случае $w_n \equiv 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а в первом $\{w_n\}$ – нормальное семейство в $\mathbb{C} \setminus S^*$ по лемме 3.4, и потому $r_n(z)$ определены всюду вне $S \cup S^*$. Сходимость в (2.14) – простое следствие (2.13), (3.30), (3.32) и (3.46), поскольку $|b_n(z)| = |b_n(1/\bar{z})|^{-1}$ в $\mathbb{C}$. Остается доказать (2.15) для $p = 2$ (в этом случае погрешность определена в $\mathbb{C} \setminus S$). Принимая во внимание (3.36), (3.33) и вышеуказанную симметрию, достаточно показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n(z)|^{1/n} \leq \exp\{-U_{\mathbb{D}}^{\mu(S, \mathbb{T})}(z)\}$$

равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$. Последнее следует из теоремы 2.1, принципа понижения и следующего факта. Пусть $a \in (0, 1)$ такое, что $S \subset \mathbb{D}_a$, и пусть $b_{n,a}$ – произведение Бляшке с теми из нулей b_n , которые лежат в $\mathbb{D}_a$. Тогда $|b_n| \leq |b_{n,a}|$ в $\mathbb{D}$, и у нулей $b_{n,a}$ то же самое предельное поведение $(\mu_{(S, \mathbb{T})})$, что и у нулей b_n , по следствию 3.3. Итак, $|b_{n,a}|^{1/n}$ локально равномерно сходятся в $\{z : a < |z| < 1/a\}$ к функции, совпадающей с $\exp\{-U_{\mathbb{D}}^{\mu_{(S, \mathbb{T})}}(z)\}$ на $\{z : a < |z| \leq 1\}$.

Теорема 2.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.3. Пусть $\{r_n\}$ – последовательность решений задачи МА(2) (см. (2.7)). Тогда $\{r_n\}$ – последовательность рациональных функций с полюсами в $\mathbb{D}$, для которых выполнено (2.15). Таким образом,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n(F, \mathbb{E})^{1/(2n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|F - r_n\|_{\mathbb{T}}^{1/(2n)} \leq \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\},$$

поскольку $F - r_n$ голоморфны на $\mathbb{E}$. С другой стороны, по теории Адамыана–Арова–Крейна

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n(F, \mathbb{E})^{1/(2n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{g \in H_n^\infty} \|F - g\|_\infty \right)^{1/(2n)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(A_F)^{1/(2n)}.$$

В силу (2.11) и (2.24) для всякого g_n – наилучшего приближения порядка n по Адамыану–Арову–Крейну – выполнено равенство

$$|F - g_n| = \sigma_n(A_F) \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}.$$

Итак, из (3.30) получаем

$$\sigma_n(A_F) = \left| \frac{q_n(\xi)}{q_n(\bar{\xi})} \frac{l_{s,n}(\bar{\xi})B_n(\xi)}{Q_s(\xi)w_n(\xi)} \right| \quad \text{для п.в. } \xi \in \mathbb{T},$$

где $l_{s,n}$ и B_n были определены соответственно в (3.29) и (3.31). Поскольку по теореме 2.1

$$\left(\frac{|q_n(z)|}{|q_n(\bar{z})|} \right)^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} 1$$

на компактных подмножествах $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$, то из (3.32) и леммы 3.4 сразу видно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(A_F)^{1/(2n)} = \exp\left\{-\frac{1}{\text{cap}(S, \mathbb{T})}\right\},$$

и доказательство следствия завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Неравенство (2.18) очевидно для всех $\eta \in S' \cap S$. Пусть теперь $\eta \in S' \setminus S$, и пусть $\underline{m}(\eta) < m(\eta)$. Это значит, что существует открытое множество U , $U \cap \bar{S} = \{\eta\}$, для которого $\underline{m}(\eta, U) < m(\eta)$, и потому существует такая последовательность $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, что

$$\#\{S_n \cap U\} < m(\eta), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

В теореме 2.2 было показано, что $\{g_n\}$ сходится по емкости на компактных подмножествах $\mathbb{D} \setminus S$ к F . Таким образом, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ – последовательность мероморфных функций в U с не более чем $m(\eta)$ полюсами в U , сходящаяся в U

по емкости к мероморфной функции $F|_U$, имеющей ровно один полюс порядка $m(\eta)$. По лемме Гончара (см. [31; лемма 1]) у каждого из g_n ровно $m(\eta)$ полюсов в U и эти полюсы сходятся к η . Тем самым, (2.18) доказано.

Теперь для любого $\eta \in S' \setminus S$ верхняя характеристика сходимости $\bar{m}(\eta)$ конечна по следствию 3.3. Значит, существуют такие области D_η , $D_\eta \cap \tilde{S} = \{\eta\}$, что $\bar{m}(\eta) = \bar{m}(\eta, D_\eta)$, $\eta \in S' \setminus S$. Пусть теперь $\theta(\cdot)$ – угловой размер системы m отрезков, покрывающих S , определенный в (2.17), и пусть $S_n = \{\xi_{1,n}, \dots, \xi_{n,n}\}$. Тогда по лемме 3.2 получаем

$$\sum_{j=1}^n (\pi - \theta(\xi_{j,n})) \leq V(\varphi) + V_{\mathcal{W}} + (m + s - 1)\pi + \sum_{\zeta \in S'} m(\zeta)\theta(\zeta), \quad (3.47)$$

где $V_{\mathcal{W}}$ была определена в (2.21). То, что $V_{\mathcal{W}}$ конечна, было установлено в ходе доказательства теоремы 2.1. Теперь для достаточно больших n соотношение (3.47) показывает, что

$$\sum_{\eta \in S' \setminus S} \left(\sum_{\xi_{j,n} \in D_\eta} (\pi - \theta(\xi_{j,n})) - m(\eta)(\pi - \theta(\eta)) \right) \leq V,$$

где V была определена в (2.20). Итак,

$$\sum_{\eta \in S' \setminus S} (\#\{S_n \cap D_\eta\} - m(\eta))(\pi - \theta(\eta)) \leq \sum_{\eta \in S' \setminus S} \#\{S_n \cap D_\eta\} \left(\max_{\xi \in D_\eta} \theta(\xi) - \theta(\eta) \right) + V \quad (3.48)$$

для всех достаточно больших n . Однако $\{\max_{n \geq N} \#\{S_n \cap D_\eta\}\}_{N \in \mathbb{N}}$ – убывающая последовательность целых чисел, и поэтому $\bar{m}(\eta) = \bar{m}(\eta, D_\eta) = \#\{S_n \cap D_\eta\}$ для бесконечного множества $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (3.48) мы получаем неравенство

$$\sum_{\eta \in S' \setminus S} (\bar{m}(\eta) - m(\eta))(\pi - \theta(\eta)) \leq V + \sum_{\eta \in S' \setminus S} \bar{m}(\eta) \left(\max_{\xi \in D_\eta} \theta(\xi) - \theta(\eta) \right). \quad (3.49)$$

Заметим, что в (3.49) левая часть и первый член справа постоянны. Более того, второй член в правой части (3.49) может быть сколь угодно мал, если выбрать малые окрестности D_η . Отсюда следует (2.19).

§ 4. Численные эксперименты

Оператор Ганкеля A_F с символом $F \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ имеет конечный ранг, если и только если F – рациональная функция (см. [32; теорема 3.11]). На практике вычислять можно только операторы конечного ранга, поскольку сингулярные числа приходится упорядочивать, а потому, если F не рациональна, ее нужно предварительно аппроксимировать рациональной функцией. Один из путей решения этой проблемы – обрезание ряда Фурье F на некотором высоком порядке N . Это дает рациональную функцию F_N , аппроксимирующую F в норме Винера, которая, в частности, мажорирует всякую L^p -норму на единичной окружности, $p \in [1, \infty]$. В [33] доказано, что оператор наилучшей аппроксимации из H_n^∞ (переводящий F в g_n в соответствии с (2.10)) непрерывен

Рис. 1. Приближения к F по Адамян–Арову–Крейну (слева) и рациональные (справа) степени 8

Рис. 2. Приближения к F по Адамян–Арову–Крейну (слева) и рациональные (справа) степени 13

в норме Винера, если $(n + 1)$ -е сингулярное число оператора Ганкеля простое. Как было показано в [34; следствие 2], последнее выполняется для операторов Ганкеля с символами из некоторого открытого всюду плотного подмножества $H^\infty + C(\mathbb{T})$. Используя ту же технику, можно доказать аналогичный результат для специального подкласса (2.3). Таким образом, хотя простоту сингулярных чисел и нельзя обеспечить заранее, она имеет место в общем положении. Если это действительно так в нашем случае, то можно аппроксимировать F_N вместо F и при достаточно большом N получить приближение, близкое к g_n . Надо только выполнить для A_{F_N} разложение по сингулярным числам (см. [21; гл. 16]). При $2 \leq p < \infty$ непрерывность не представляет проблемы, но g_n находятся численным подбором. Для вычисления рациональных приближений

при $p = 2$ мы использовали описанную выше технику обрезания, а также пакет программ Nupregion, описанный в [35].

В численных экспериментах, результаты которых приведены ниже, мы аппроксимируем функцию F , заданную формулой

$$F(z) = 7 \int_{[-6/7, -1/8]} \frac{e^{it} dt}{z - t} - (3 + i) \int_{[2/5, 1/2]} \frac{1}{t - 2i} \frac{dt}{z - t} + (2 - 4i) \int_{[2/3, 7/8]} \frac{\ln(t) dt}{z - t} + \frac{2}{(z + 3/7 - 4i/7)^2} + \frac{6}{(z - 5/9 - 3i/4)^3} + \frac{24}{(z + 1/5 + 6i/7)^4}.$$

На рис. 1 и рис. 2 сплошные линии показывают носитель меры, ромбы указывают на полярные особенности F , а кружочки обозначают полюсы соответствующих приближений. Заметим, что полюсы F , по-видимому, притягивают особенности в первую очередь.

§ 5. Приложение

Здесь мы кратко изложим сведения из теории логарифмического потенциала, широко использованной в работе. Полное изложение можно найти в [27], [30].

Логарифмический потенциал и логарифмическая энергия конечной положительной меры μ с компактным носителем в $\mathbb{C}$ определяются соответственно формулами

$$U^\mu(z) := \int \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.1)$$

и

$$I[\mu] := \int U^\mu(z) d\mu(z) = \iint \log \frac{1}{|z - t|} d\mu(t) d\mu(z). \quad (5.2)$$

Функция U^μ супергармонична и принимает значения в $(-\infty, +\infty]$, но не тождественно равна $+\infty$. Она ограничена снизу на $\text{supp}(\mu)$, так что $I[\mu] \in (-\infty, +\infty]$.

Пусть теперь $E \subset \mathbb{C}$ – компакт, а $\Lambda(E)$ – множество вероятностных мер с носителем в E . Если логарифмическая энергия всякой меры из $\Lambda(E)$ бесконечна, то говорят, что E *полярное*. В противном случае существует единственная мера $\mu_E \in \Lambda(E)$, минимизирующая логарифмическую энергию по всем мерам из $\Lambda(E)$. Эта мера называется *равновесным распределением* на E . *Логарифмическая емкость* (или просто *емкость*) E определяется формулой

$$\text{cap}(E) = \exp\{-I[\mu_E]\}.$$

По определению емкость произвольного подмножества $\mathbb{C}$ равна точной верхней грани емкостей его компактных подмножеств. Условимся, что емкость полярного множества равна нулю. Скажем, что последовательность функций $\{h_n\}$ *сходится по емкости* к функции h на компакте K , если для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(\{z \in K : |h_n(z) - h(z)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Еще одно важное понятие – регулярность компакта. Мы ограничимся случаем, когда дополнение E связно. Пусть $g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus E}(\cdot, t)$ – функция Грина $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ с полюсом в $t \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, т.е. единственная функция со следующими свойствами:

- (i) $g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus E}(z, t)$ – положительная гармоническая функция в $(\overline{\mathbb{C}} \setminus E) \setminus \{t\}$, ограниченная вне любой окрестности t ;
- (ii) $g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus E}(z, t) = \begin{cases} \log|z|, & t = \infty, \\ -\log|z - t|, & t \neq \infty, \end{cases}$ ограничена вблизи t ;
- (iii) $\lim_{z \rightarrow \xi, z \in D} g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus E}(z, t) = 0$ для квазивсех $\xi \in E$.

Точки непрерывности $g_{\overline{\mathbb{C}} \setminus E}(\cdot, t)$ на $\partial_e E$ (внешней границе E) называются *регулярными*, а прочие точки $\partial_e E$ называются *нерегулярными* – они образуют полярное множество. Если все точки $\partial_e E$ регулярны, то и множество E называют *регулярным*.

В статье используется понятие выметания меры (см. [27; § II.4]). Пусть D – область (открытое связное множество) с компактной границей ∂D , дополнение к которой имеет положительную емкость, и пусть μ – конечная борелевская мера с компактным носителем в D . Тогда существует единственная борелевская мера $\hat{\mu}$ с носителем в ∂D и с той же вариацией, что и μ : $\|\mu\| = \|\hat{\mu}\|$, потенциал которой $U^{\hat{\mu}}$ ограничен на ∂D и для некоторой константы $c(\mu; D)$ удовлетворяет равенству

$$U^{\hat{\mu}}(z) = U^{\mu}(z) + c(\mu; D) \quad \text{для квазивсех } z \in \mathbb{C} \setminus D. \quad (5.3)$$

Тогда обязательно $c(\mu; D) = 0$, если D ограничена, и $c(\mu; D) = \int g_D(t, \infty) d\mu(t)$ в противном случае. Равенство в (5.3) выполнено для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и во всех регулярных точках ∂D . Мера $\hat{\mu}$ называется *выметанием* μ на ∂D . Она обладает следующим свойством:

$$U^{\hat{\mu}}(z) \leq U^{\mu}(z) + c(\mu; D) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}, \quad (5.4)$$

а также

$$\int h d\mu = \int h d\hat{\mu} \quad (5.5)$$

для всякой гармонической в D функции h , непрерывной в $\overline{D}$ (в том числе и на бесконечности, если D не ограничена). По самому определению энергия $\hat{\mu}$ конечна, так что эта мера тривиальна на полярных подмножествах. Следовательно, решив обобщенную задачу Дирихле (см. [30; теорема 4.1.5]) для произвольной положительной непрерывной функции на ∂D , из (5.5) получим, что выметание вероятностной меры является вероятностной мерой.

Задача о минимуме энергии может быть поставлена и для знаконеопределенных зарядов (см. [27; теорема VIII.1.4]). В частности, если E_1, E_2 – непересекающиеся компакты положительной емкости, то существует единственный заряд $\mu^* = \mu_1^* - \mu_2^*$, у которого $\mu_1^* \in \Lambda(E_1)$, $\mu_2^* \in \Lambda(E_2)$ и который минимизирует интеграл энергии

$$I[\mu_1 - \mu_2] = \int \log \frac{1}{|z - t|} d(\mu_1 - \mu_2)(t) d(\mu_1 - \mu_2)(z), \quad \mu_j \in \Lambda(E_j), \quad j = 1, 2. \quad (5.6)$$

Можно показать (см. [27; лемма 1.8]), что $I[\mu^*]$ положителен и конечен. Величина $\text{cap}(E_1, E_2) = 1/I[\mu^*]$ называется *емкостью конденсатора* для пары

(E_1, E_2) . Более того, выполнены равенства $\mu_1^* = \hat{\mu}_2^*$ и $\mu_2^* = \hat{\mu}_1^*$, где $\hat{\mu}_1^*$ (соответственно $\hat{\mu}_2^*$) – выметание μ_1^* (соответственно μ_2^*) на $\partial(\mathbb{C} \setminus E_2)$ (соответственно на $\partial(\mathbb{C} \setminus E_1)$); по существу это свойство характеризует μ^* ; см. [27; теорема VIII.2.6].

По аналогии с логарифмическим случаем можно определить *гринов потенциал* и *гринову энергию* положительной меры μ с носителем в области D , имеющей компактную неполярную границу. Различие только в том, что теперь в (5.1), (5.2) нужно заменить логарифмическое ядро $\log(1/|z - t|)$ на функцию Грина $g_D(z, t)$ области D с полюсом в точке $t \in D$. *Гринов потенциал* относительно области D конечной положительной меры μ с компактным носителем в D задается формулой

$$U_D^\mu(z) = \int g_D(z, t) d\mu(t).$$

Его также можно выразить через логарифмические потенциалы меры μ и ее выметания $\hat{\mu}$ на ∂D по формуле (см. [27; теорема II.4.7 и теорема II.5.1])

$$U^{\hat{\mu}-\mu}(z) = c(\mu; D) - U_D^\mu(z), \quad z \in D, \quad (5.7)$$

где определение $c(\mu; D)$ дано после равенства (5.3). Более того, (5.7) по-прежнему выполнено в каждой регулярной точке ∂D ; в частности, оно верно всюду на ∂D .

Точно так же, как в логарифмическом случае, если E – компактное неполярное подмножество D , то существует единственная мера $\mu_{(E, \partial D)} \in \Lambda(E)$, минимизирующая гринову энергию среди всех мер в $\Lambda(E)$. Она называется *равновесным гриновским распределением* на E относительно D . В силу (5.7) получаем

$$U_D^{\mu_{(E, \partial D)}}(z) = U^{\mu_{(E, \partial D)}}(z) - U^{\hat{\mu}_{(E, \partial D)}}(z) + c(\mu_{(E, \partial D)}; D)$$

для $z \in D$ и квазивсех $z \in \partial D$,

где $\hat{\mu}_{(E, \partial D)}$ – выметание $\mu_{(E, \partial D)}$ на ∂D . Вдобавок для равновесного гриновского распределения выполнено равенство

$$U_D^{\mu_{(E, \partial D)}}(z) = \frac{1}{\text{cap}(E, \partial D)} \quad \text{для квазивсех } z \in E, \quad (5.8)$$

где $\text{cap}(E, \partial D)$ – *гринова емкость (конденсатора) E* относительно D , являющаяся обратной величиной к минимуму гриновой энергии по всем мерам из $\Lambda(E)$. Более того, равенство в (5.8) выполнено во всех регулярных точках E .

Теперь сформулируем предложение, которым мы существенно воспользовались. Оно связано с особенностями геометрии круга, и мы не нашли подходящих ссылок в литературе для этого результата. Его доказательство можно найти в [18; предложение A.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $E \subset \mathbb{D}$ – компакт положительной емкости со связным дополнением, не содержащий точку $z = 0$, и пусть E^* – множество, симметричное ему относительно единичной окружности: $E^* := \{z \in \mathbb{C} : 1/\bar{z} \in E\}$. Пусть меры $\mu \in \Lambda(E)$ и $\sigma \in \Lambda(E^*)$ решают задачу о минимуме энергии для конденсатора (E, E^*) . Тогда:

- (a) σ получается отражением μ относительно единичной окружности, т.е. $\sigma(B) = \mu(B^*)$ для всякого борелевского множества B ; аналогично, μ есть отражение σ ;
- (b) μ является равновесным гриновским распределением на E относительно $\overline{\mathbb{C}} \setminus E^*$, а σ – равновесное гриновское распределение на E^* относительно $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$;
- (c) $\tilde{\mu} = \tilde{\sigma}$, где $\tilde{\lambda}$ – выметание меры λ на $\mathbb{T}$; более того, выметание $\tilde{\mu}$ на E равно μ , а выметание $\tilde{\mu}$ на E^* равно σ ;
- (d) $\tilde{\mu}$ – равновесное гриновское распределение на $\mathbb{T}$ как относительно $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, так и относительно $\mathbb{C} \setminus E^*$;
- (e) μ – равновесное гриновское распределение на E относительно $\mathbb{D}$, а σ – равновесное гриновское распределение на E^* относительно $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

Список литературы

- [1] В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн, “Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 34–75; англ. пер.: V. M. Adamjan, D. Z. Arov, M. G. Krein, “Analytic properties of schmidt pairs for a hankel operator and the generalized Schur–Takagi problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 31–73.
- [2] L. Baratchart, F. Mandréa, E. B. Saff, F. Wielonsky, “2-D inverse problems for the Laplacian: A meromorphic approximation approach”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **86**:1 (2006), 1–41.
- [3] L. Baratchart, F. Seyfert, “An L^p analog to AAK theory for $p \geq 2$ ”, *J. Funct. Anal.*, **191**:1 (2002), 52–122.
- [4] V. A. Prokhorov, “On L^p -generalization of a theorem of Adamyan, Arov, and Krein”, *J. Approx. Theory*, **116**:2 (2002), 380–396.
- [5] K. Glover, “All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds”, *Internat. J. Control*, **39**:6 (1984), 1115–1193.
- [6] А. А. Гончар, “Рациональная аппроксимация аналитических функций”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, Записки науч. сем. ЛОМИ, **81**, Наука, Л., 1978, 182–185; англ. пер.: A. A. Gonchar, “Rational approximation of analytic functions”, *J. Soviet Math.*, **26**:5 (1984), 2218–2220.
- [7] В. А. Прохоров, “Об одной теореме Адамыана–Арова–Крейна”, *Матем. сб.*, **184**:1 (1993), 89–104; англ. пер.: V. A. Prokhorov, “On a theorem of Adamyan, Arov, and Krein”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:1 (1994), 77–90.
- [8] В. В. Пеллер, “Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов)”, *Матем. сб.*, **113(155)**:4(12) (1980), 538–581; англ. пер.: V. V. Peller, “Hankel operators of class and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majorizing operators)”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 443–479.
- [9] В. В. Пеллер, “Описание операторов Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения”, *Матем. сб.*, **122(164)**:4(12) (1983), 481–510; англ. пер.: V. V. Peller, “A description of Hankel operators of class $\mathfrak{S}_p$ for $p > 0$, an investigation of the rate of rational approximation, and other applications”, *Math. USSR-Sb.*, **50**:2 (1985), 465–494.
- [10] D. Braess, “Rational approximation of Stieltjes functions by the Carathéodory–Fejér method”, *Constr. Approx.*, **3**:1 (1987), 43–50.
- [11] J. E. Andersson, “Best rational approximation to Markov functions”, *J. Approx. Theory*, **76**:2 (1994), 219–232.

- [12] А. Л. Левин, “Расположение полюсов рациональных функций наилучшего приближения и смежные вопросы”, *Матем. сб.*, **80(122)**:2(10) (1969), 281–289; англ. пер.: A. L. Levin, “The distribution of poles of rational functions of best approximation and related questions”, *Math. USSR-Sb.*, **9**:2 (1969), 267–274.
- [13] L. Baratchart, E. B. Saff, F. Wielonsky, “A criterion for uniqueness of a critical point in H_2 rational approximation”, *J. Anal. Math.*, **70**:1 (1996), 225–266.
- [14] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105(147)**:4 (1978), 512–524; англ. пер.: A. A. Gončar, G. L. Lopes, “On Markov’s theorem for multipoint Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 449–459.
- [15] L. Baratchart, H. Stahl, F. Wielonsky, “Asymptotic error estimates for L^2 best rational approximants to Markov functions”, *J. Approx. Theory*, **108**:1 (2001), 53–96.
- [16] L. Baratchart, V. A. Prokhorov, E. B. Saff, “Best meromorphic approximation of Markov functions on the unit circle”, *Found. Comput. Math.*, **1**:4 (2001), 385–416.
- [17] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [18] M. Yattselev, *Meromorphic approximation and non-Hermitian orthogonality*, Ph. D. Thesis, Nashville, TN, 2007.
- [19] L. Baratchart, M. Yattselev, “Multipoint Padé approximants to complex Cauchy transforms with polar singularities”, *J. Approx. Theory*, **156**:2 (2009), 187–211.
- [20] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, New York–London, 1981.
- [21] N. Young, *An introduction to Hilbert space*, Cambridge Math. Textbooks, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [22] V. V. Peller, *Hankel operators and their applications*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2003.
- [23] L. Baratchart, R. Küstner, V. Totik, “Zero distributions via orthogonality”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **55**:5 (2005), 1455–1499.
- [24] R. Küstner, *Asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with respect to complex measures having argument of bounded variation*, Ph. D. Thesis, Sophia Antipolis France, 2003.
- [25] H. Stahl, V. Totik, *General orthogonal polynomials*, Encyclopedia Math. Appl., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [26] M. J. D. Powell, *Approximation theory and methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1981.
- [27] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [28] A. Ancona, “Démonstration d’une conjecture sur la capacité et l’effilement”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **297**:7 (1983), 393–395.
- [29] A. Ancona, *Sur une conjecture concernant la capacité et l’effilement*, Théorie du potentiel (Orsay, 1983), Lecture Notes in Math., **1096**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [30] Th. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Math. Soc. Stud. Texts, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [31] А. А. Гончар, “О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **98(140)**:4(12) (1975), 564–577; англ. пер.: A. A. Gončar, “On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:4 (1975), 503–514.

- [32] J. R. Partington, *An introduction to Hankel operators*, London Math. Soc. Stud. Texts, **13**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [33] E. Hayashi, L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “The CF table”, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 195–223.
- [34] L. Baratchart, J. Leblond, J. R. Partington, “Problems of Adamjan–Arov–Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions”, *Constr. Approx.*, **16**:3 (2000), 333–358.
- [35] J. Grimm, *Rational approximation of transfer functions in the hyperion software*, 2000; INRIA report no. 4002

Л. Барашарт (L. Baratchart)

Institut National de Recherche en Informatique et en
Automatique, Sophia Antipolis–Méditerranée
E-mail: laurent.baratchart@sophia.inria.fr

Поступила в редакцию
02.08.2007 и 02.07.2008

М. Л. Ятцелев (M. L. Yattselev)

Institut National de Recherche en Informatique et en
Automatique, Sophia Antipolis–Méditerranée
E-mail: myattsel@sophia.inria.fr

Перевод с английского.