Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Кацыло, Д. А. Тимашёв, Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 63–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:44:09

УДК 514.74+512.815.7

П. И. Кацыло, Д. А. Тимашёв

Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход

Рассматриваются естественные алгебраические дифференциальные операции, действующие на геометрические величины на гладких многообразиях. Описан метод изучения и классификации таких операций – метод ИТ-редукции. Согласно этому методу изучение естественных операций сводится к изучению эквивариантных (относительно некоторых алгебраических групп) рациональных отображений между пространствами k -струй. На основе метода ИТ-редукции доказана теорема о конечной порожденности: для тензорных расслоений $\mathcal{V}, \mathcal{W} \rightarrow M$ все естественные дифференциальные операции $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ степени не выше d можно получить алгебраически из некоторого конечного числа таких операций. Приведены концептуальные доказательства известных теорем о классификации линейных естественных операций на произвольных и на симплектических многообразиях. Доказана теорема о несуществовании на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях естественных деформационных квантований.

Библиография: 21 название.

Введение

В дифференциальной геометрии имеется много нетривиальных формул и теорем, основанных на локальных вычислениях. Таковы, например, тождества Бьянки, теорема Гилки [1], формула Вейтценбока [2; гл. 1, раздел I]. Такие локальные по своей сути теоремы и формулы образуют фундамент дифференциальной геометрии. Более того, нередко случаи, когда открытие локальных формул позволяло решать многие важные задачи. Например, теорема Гилки позволила получить новое доказательство теоремы об индексе [3], [4]. В связи с этим представляется естественным разработать универсальный подход к локальным задачам дифференциальной геометрии.

Один из таких подходов, называемый *формальной геометрией*, был предложен И. М. Гельфандом и Д. А. Кажданом в 1971 г. (см. [5]). Приблизительно в это же время Э. Б. Винберг заметил, что использование методов теории инвариантов делает локальные вычисления проще и понятнее. Это было одним из побудительных мотивов к созданию им московской школы теории инвариантов. Более того, локальные задачи дифференциальной геометрии можно свести к задачам теории инвариантов о действиях конечномерных линейных алгебраических групп. Назовем такое сведение *теоретико-инвариантной редукцией* (ИТ-редукцией).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05–01–00988).

Упрощенная версия метода ИТ-редукции изложена в [6]. В настоящей статье мы изложим этот метод в максимально общем виде, необходимом для приложений. Подчеркнем, что ИТ-редукция ориентирована на решение конкретных локальных задач дифференциальной геометрии. Например, в [7] дается весьма общее определение естественных операций и затем доказываются теоремы типа теоремы Петре о конечности порядка некоторых таких операций. В методе ИТ-редукции с самого начала рассматриваются только операции конечного порядка, так как только такие операции встречаются в приложениях.

Статья имеет следующую структуру. В § 1 приведены определения геометрических величин, естественных расслоений и естественных дифференциальных операций. Существенным обстоятельством является то, что геометрические величины (например, тензорные поля) являются сечениями расслоений, ассоциированных с расслоениями реперов, а естественные дифференциальные операции действуют на геометрические величины по формулам, которые инвариантны относительно преобразований координат. В частности, имеющие “физический смысл” дифференциальные операции должны быть естественными дифференциальными операциями, так как они не зависят от системы координат. Кроме того, в этом параграфе объяснен метод ИТ-редукции. Также изложены факты из теории представлений классических групп, которые будут использованы в последующих вычислениях.

В § 2 и далее рассматриваются алгебраические естественные дифференциальные операции, действующие на тензорные поля. В § 2 доказаны теорема о конечности и теорема о конечной порожденности. В § 3 и § 4 методом ИТ-редукции получено описание естественных линейных дифференциальных операций на произвольных (теорема Схоутена) и на симплектических многообразиях (ср. с [8]). При этом использовано понятие естественной дифференциальной операции на многообразии с дополнительной структурой (см. п. 4.1). Наконец, в § 5 доказано, что на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях не существует естественных деформационных квантований.

Примем следующее соглашение. В формулах тензорного исчисления по умолчанию подразумевается суммирование по каждой паре повторяющихся верхних и нижних индексов, которые пробегают натуральные числа от одного до размерности многообразия.

§ 1. Предварительные замечания

Мы рассматриваем гладкие $\mathbb{K}$ -многообразия, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (соответствует вещественным многообразиям) или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (соответствует комплексным многообразиям). Описываемые ниже конструкции по своей сути алгебраичны и не зависят от поля $\mathbb{K}$.

1.1. Геометрические величины. Понятие геометрической величины восходит к Риману (см. [9; гл. 6, § 1]). Например, тензорные поля и связности являются геометрическими величинами. В классической дифференциальной геометрии геометрические величины определяются следующим образом. Пусть M есть n -мерное многообразие. По классическому определению *геометрическая величина* – это правило, сопоставляющее каждой локальной системе координат $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n): U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U_\alpha \subset M$ отображение $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow F$, где F – фиксированное векторное пространство (или, в более общем случае, $\mathbb{K}$ -многообразие).

При этом для отображений $\{f_\alpha\}$ должно быть выполнено следующее правило преобразования:

$$f_\beta = \Phi \left(\left\{ \frac{\partial^l x_\beta^i}{\partial (x_\alpha^1)^{l_1} \dots \partial (x_\alpha^n)^{l_n}} \right\}_{\substack{1 \leq l \leq k, 1 \leq i \leq n, \\ l_1 + \dots + l_n = l}}, f_\alpha \right), \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}$, а Φ есть некоторое фиксированное (не зависящее от локальных систем координат) дифференцируемое отображение.

Приведем современное (формально более точное) определение геометрических величин.

Рассмотрим группу $\mathrm{GL}_n^{(k)}$, состоящую из k -струй локальных диффеоморфизмов $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ в точке нуль. Элементы группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ вида

$$\begin{aligned} x &\mapsto g(x) = g_1(x) + g_2(x, x) + \dots + g_k(x, \dots, x), \\ x &= (x^1, \dots, x^n), \quad g_l \in S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n, \quad l = 1, \dots, k, \quad \det g_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Группа $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ является линейной алгебраической группой, изоморфной группе автоморфизмов усеченной алгебры полиномов

$$J_n^{(k)} = \mathbb{K}[x^1, \dots, x^n] / (x^1, \dots, x^n)^{k+1}.$$

Унипотентный радикал $\mathrm{NGL}_n^{(k)}$ группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ определяется при помощи уравнения $g_1(x) = x$, а подгруппой Леви является подгруппа GL_n линейных преобразований.

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n^{(k)}$ группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ вида

$$\begin{aligned} x &\mapsto \xi(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x, x) + \dots + \xi_k(x, \dots, x), \\ x &= (x^1, \dots, x^n), \quad \xi_l \in S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n, \quad l = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Подалгебра Ли $\mathfrak{ngl}_n^{(k)}$ подгруппы $\mathrm{NGL}_n^{(k)}$ выделяется условием $\xi_1 = 0$.

Через $\mathrm{Fr}^k M$ будем обозначать расслоение кореперов порядка k над M [9; гл. 6, п. 1.2]. Слой проекции $\mathrm{Fr}^k M \rightarrow M$ над $z \in M$ состоит из кореперов порядка k в z (k -струй координатных функций $x = (x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки z таких, что $x(z) = 0$). Имеем естественное действие группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ на тотальном пространстве расслоения $\mathrm{Fr}^k M$. Относительно этого действия $\mathrm{Fr}^k M$ является главным $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ -расслоением.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Вместо кореперов можно рассматривать реперы порядка k , т.е. k -струи обратных координатных отображений, отправляющих окрестность $0 \in \mathbb{K}^n$ в окрестность $z \in M$. Репер порядка один задается фиксированием базиса в $T_z M$ (являющегося образом стандартного базиса в $T_0 \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^n$), т.е. обычным репером на M . Расслоения реперов и кореперов канонически изоморфны.

Напомним, что для любого главного расслоения $E \rightarrow B = E/H$ со структурной группой H с каждым H -многообразием F связано ассоциированное расслоение с типичным слоем F :

$$E \times^H F = (E \times F)/H \rightarrow B, \quad (2)$$

где H действует на $E \times F$ диагональным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Естественным расслоением* над $\mathbb{K}$ -многообразием M называется расслоение вида

$$\mathcal{F} := \mathrm{Fr}^k M \times^{\mathrm{GL}_n^{(k)}} F \rightarrow \mathrm{Fr}^k M / \mathrm{GL}_n^{(k)} = M, \quad (3)$$

где F есть $\mathbb{K}$ -многообразие с дифференцируемым действием группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$. Тотальное пространство естественного расслоения (3) называется *пространством геометрических объектов типа F над M* . Сечение естественного расслоения (3) называется *геометрической величиной типа F* . Множество геометрических величин типа F обозначается $\Gamma(\mathcal{F}) = \Gamma(M, \mathcal{F})$. Если действие $\mathrm{GL}_n^{(k)} : F$ не сводится к действию $\mathrm{GL}_n^{(k-1)} : F$, то говорят, что естественное расслоение (3) имеет порядок k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Нетрудно заметить, что отображение $\Phi : \mathrm{GL}_n^{(k)} \times F \rightarrow F$ в (1) определяет действие группы $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ на F . Тем самым геометрические величины в классическом понимании суть координатные представления сечений естественного расслоения $\mathcal{F}$. В большинстве приложений F является открытым $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ -инвариантным подмножеством векторного (соответственно аффинного) пространства, на котором группа $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ действует линейными (соответственно аффинными) преобразованиями.

ПРИМЕР 1.4. Рассмотрим пространство $F = (\mathbb{K}^n)^{\otimes p} \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes q}$ с естественным действием группы $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n^{(1)}$. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{T}^{p,q}$ есть расслоение тензоров типа (p, q) . Всякое естественное расслоение $\mathcal{F}$ порядка один такое, что F есть линейное пространство, а действие $\mathrm{GL}_n : F$ является рациональным линейным представлением, вкладывается в сумму расслоений вида $\mathcal{T}^{p,q}$ для некоторых p, q . По этой причине такие расслоения называют *тензорными расслоениями*.

ПРИМЕР 1.5 (см. [9; гл. 6, § 4]). Для естественного расслоения $\mathcal{F} \rightarrow M$ порядка k l -струи его локальных сечений образуют расслоение l -струй $\mathcal{F}^{(l)}$. Расслоение $\mathcal{F}^{(l)}$ является естественным расслоением порядка $k+l$. Всякое сечение $f : M \rightarrow \mathcal{F}$ расслоения $\mathcal{F}$ определяет сечение $J^l f : M \rightarrow \mathcal{F}^{(l)}$ расслоения $\mathcal{F}^{(l)}$. А именно, значение сечения $J^l f$ в точке $z \in M$ есть l -струя $J_z^l f$ сечения f в z . Формулы перехода для локальных представлений сечений расслоения $\mathcal{F}$ определяют действие группы $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$ на типичном слое $F^{(l)}$ расслоения $\mathcal{F}^{(l)}$. А именно, для ростка диффеоморфизма g в $0 \in \mathbb{K}^n$ и ростка сечения $f : \mathbb{K}^n \rightarrow F$ в $0 \in \mathbb{K}^n$ имеем

$$J_0^{k+l} g \cdot J_0^l f = J_0^l (J_{g^{-1}(x)}^k g \cdot f(g^{-1}(x))). \quad (4)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда типичный слой F является векторным пространством. В этом случае $F^{(l)} = J_n^{(l)} \otimes F$. Отметим, что представление $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : F^{(l)}$ не является тензорным произведением представлений $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : J_n^{(l)}$ и $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} : F$. Элементы пространства $F^{(l)}$ естественным образом идентифицируются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n \rightarrow F$ вида

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x) = f_1(x) + f_2(x, x) + \cdots + f_l(x, \dots, x), \\ x &= (x^1, \dots, x^n), \quad f_p \in S^p \mathbb{K}^{n*} \otimes F, \quad p = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Заметим, что пространство геометрических объектов фиксированного типа определено над любым n -мерным многообразием. Это позволяет определить

геометрические объекты, используя язык теории категорий [10]. А именно, рассмотрим категорию $\mathcal{Man}_n$ n -мерных многообразий и категорию $\mathcal{Fib}_n$ расслоений над n -мерными многообразиями. Морфизмами в категории $\mathcal{Man}_n$ являются открытые вложения, а морфизмами в категории $\mathcal{Fib}_n$ являются дифференцируемые отображения расслоений, для которых соответствующие отображения баз являются открытыми вложениями (т.е. морфизмами в категории $\mathcal{Man}_n$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Тип геометрических объектов – это функтор

$$\mathfrak{F}: \mathcal{Man}_n \rightsquigarrow \mathcal{Fib}_n$$

такой, что

- 1) для любого многообразия M расслоение $\mathfrak{F}(M)$ является расслоением над M ;
- 2) для любого открытого подмногообразия M' многообразия M расслоение $\mathfrak{F}(M')$ является ограничением на M' расслоения $\mathfrak{F}(M)$;
- 3) если $M' \rightarrow M$ есть открытое вложение, то соответствующий морфизм расслоений $\mathfrak{F}(M') \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ есть индуцированное вложение.

Пусть $\mathfrak{F}$ – такой функтор. Тогда $\mathfrak{F}(M) \rightarrow M$ является естественным расслоением для любого многообразия M . Действительно, из определения типа геометрических объектов вытекает, что существует многообразие F (типичный слой) такое, что для всякого многообразия M все слои расслоения $\mathfrak{F}(M) \rightarrow M$ изоморфны F . Рассмотрим произвольный росток диффеоморфизма g окрестности $0 \in \mathbb{K}^n$ на окрестность $0 \in \mathbb{K}^n$. Для достаточно малой окрестности $0 \in U \subset \mathbb{K}^n$ росток g определяет диффеоморфизм

$$\mathfrak{F}(g|_U): \mathfrak{F}(U) \simeq U \times F \rightarrow \mathfrak{F}(g(U)) \simeq g(U) \times F.$$

Согласованное семейство диффеоморфизмов $\{\mathfrak{F}(g|_U)\}$ определяет диффеоморфизм $\mathfrak{F}(g): F \simeq \{0\} \times F \rightarrow F$. Пале и Чу-Лян Тэн в [10] доказали, что диффеоморфизм $\mathfrak{F}(g)$ полностью определяется k -струей $J_0^k g$ для некоторого k , зависящего только от $\mathfrak{F}$. Используя это, мы можем определить действие $\mathrm{GL}_n^{(k)}: F$ и изоморфизм $\mathfrak{F}(M) \simeq (\mathrm{Gr}^k(M) \times F)/\mathrm{GL}_n^{(k)}$.

ЛЕММА 1.7. Рассмотрим представление $R: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{GL}(F)$ и пусть $\rho: \mathfrak{gl}_n \rightarrow \mathfrak{gl}(F)$ – соответствующее представление алгебры Ли. Тогда действия $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}: F^{(k)}$ и $\mathfrak{gl}_n^{(k+1)}: F^{(k)}$ задаются следующими формулами:

$$(g \cdot f)(x) = J_0^k \left(R \left(\sum_{l=1}^{k+1} l \cdot g_l(g^{-1}(x), \dots, g^{-1}(x), \cdot) \right) f(g^{-1}(x)) \right),$$

$$(\xi \cdot f)(x) = J_0^k \left(\sum_{l=1}^{k+1} l \cdot \rho(\xi_l(x), \dots, x, \cdot) f(x) - \sum_{l=1}^k l \cdot f_l(x, \dots, x, \xi(x)) \right),$$

где $g \in \mathrm{GL}_n^{(k+1)}$, $\xi \in \mathfrak{gl}_n^{(k+1)}$, $f \in F^{(k)}$, а $g_l, \xi_l \in S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$ и $f_l \in S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes F$ являются однородными компонентами тензоров g, ξ и f .

Лемма получается из (4) непосредственными вычислениями. Прямым вычислением получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.8. *Имеет место формула*

$$(\xi \cdot f)_k = \sum_{l=1}^{k+1} l\gamma(\xi_l \otimes f_{k+1-l}) - (k+1-l)\sigma(\xi_l \otimes f_{k+1-l}), \quad (5)$$

где линейные отображения

$$\gamma, \sigma: S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \otimes S^{k+1-l} \mathbb{K}^{n*} \otimes F \rightarrow S^k \mathbb{K}^{n*} \otimes F$$

определяются следующим образом. Для вычисления γ рассмотрим $S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$ как подпространство пространства $S^{l-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathfrak{gl}_n$, применим тензорный множитель из $\mathfrak{gl}_n$ к тензорному множителю из F посредством ρ и перемножим тензорные множители из $S^{l-1} \mathbb{K}^{n*}$ и $S^{k+1-l} \mathbb{K}^{n*}$ в симметрической алгебре. Отображение σ есть свертка тензорных множителей из $\mathbb{K}^n$ и $S^{k+1-l} \mathbb{K}^{n*}$ с последующим перемножением тензорных множителей из $S^l \mathbb{K}^{n*}$ и $S^{k-l} \mathbb{K}^{n*}$ в симметрической алгебре.

1.2. Дифференциальные операции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Пусть $\mathcal{V}, \mathcal{W} \rightarrow M$ – естественные расслоения. Отображение

$$D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(W)$$

называется дифференциальной операцией порядка не выше k , если в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$, определенных в окрестности $U \subset M$, над которой расслоения $\mathcal{V}, \mathcal{W} \rightarrow M$ тривиальны, имеем

$$D(s)_U(x) = \delta_U(x, J_x^k s_U),$$

где $s_U: U \rightarrow V$ – локальный представитель в U сечения $s \in \Gamma(\mathcal{V})$, $D(s)_U: U \rightarrow W$ – локальный представитель в U сечения $D(s) \in \Gamma(\mathcal{W})$, а $\delta_U: U \times V^{(k)} \rightarrow W$ – дифференцируемое отображение.

Таким образом, дифференциальная операция порядка не выше k – это отображение $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$, соответствующее морфизму $D: \mathcal{V}^{(k)} \rightarrow \mathcal{W}$ (который обозначают той же буквой). А именно, $(Ds)(z) = D(J_z^k s)$ для любого $s \in \Gamma(\mathcal{V})$, $z \in M$ [9; гл. 6, п. 4.6]. Порядок операции D равен k , если D не пропускается через каноническую проекцию $\mathcal{V}^{(k)} \rightarrow \mathcal{V}^{(k-1)}$. Операция D естественным образом определяет серию дифференциальных операций $D: \mathcal{V}^{(k+l)} \rightarrow \mathcal{W}^{(l)}$ (которые обозначают той же буквой).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Рассмотрим случай, когда V, W являются открытыми (в топологии Зариского) $\mathrm{GL}_n^{(l)}$ -инвариантными подмножествами аффинных $\mathrm{GL}_n^{(l)}$ -инвариантных подмногообразий $V' \subseteq V'', W' \subseteq W''$, где V'', W'' являются векторными или аффинными пространствами, в которых определены линейные или аффинные представления $\mathrm{GL}_n^{(l)}: V'', W''$. В этом случае дифференциальная операция $D: \mathcal{V}^{(k)} \rightarrow \mathcal{W}$ называется *алгебраической*, если в определении 1.9 при фиксированном $x \in X$ отображение $\delta_X(x, \cdot): V^{(k)} \rightarrow W$ рационально, причем степени числителей и знаменателей ограничены на M .

Всякую алгебраическую дифференциальную операцию D можно рассматривать как геометрический объект. Объясним это в простейшем случае, когда V

и W являются векторными пространствами. В этом случае все отображения $\delta_X(x, \cdot)$ являются полиномиальными отображениями степени не выше d . Множество $\text{Mor}_d(V^{(k)}, W)$ полиномиальных отображений $V^{(k)} \rightarrow W$ степени не выше d является векторным пространством с естественным действием группы $\text{GL}_n^{(k+l)}$. Таким образом, операция D естественным образом идентифицируется с сечением естественного расслоения

$$\text{Fr}^{k+l}(M) \times^{\text{GL}_n^{(k+l)}} \text{Mor}_d(V^{(k)}, W) \rightarrow M.$$

ПРИМЕР 1.11. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ – векторные расслоения. Тогда множество линейных дифференциальных операций вида $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ и порядка не выше k идентифицируется с множеством сечений расслоения

$$\mathcal{D}^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := (\text{Fr}^{k+l}(M) \times (V^{(k)*} \otimes W)) / \text{GL}_n^{(k+l)} \rightarrow M.$$

ПРИМЕР 1.12. Линейные связности на многообразии M являются геометрическими объектами порядка два. Действительно, рассмотрим касательное расслоение $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{1,0}$ над M и пусть $\mathcal{C}$ есть подрасслоение расслоения $\mathcal{D}^1(\mathcal{T}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^*)$, состоящее из гомоморфизмов ∇ , расщепляющих следующую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^* \xrightarrow{\quad} \mathcal{T}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0.$$

$\nwarrow$
 ∇

Тогда сечение $\nabla \in \Gamma(\mathcal{C})$ действует на векторных полях как ковариантное дифференцирование, т.е. определяет связность. А именно,

$$\nabla \xi(z) = \nabla(\xi_0^i \partial_i) + \nabla(\xi_j^i x^j \partial_i) = \Gamma_{ij}^k \xi_0^i \partial_k \otimes dx^j + \xi_j^i \partial_i \otimes dx^j, \quad (6)$$

где $\xi(x) = \xi_0 + \xi_j x^j + \dots$. И наоборот, связность ∇ определяет сечение расслоения $\Gamma(\mathcal{C})$ по формуле (6).

1.3. Естественные дифференциальные операции. Грубо говоря, естественная дифференциальная операция – это операция, которая задается одной (универсальной) формулой во всех локальных системах координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Пусть $\mathcal{V}, \mathcal{W} \rightarrow M$ – естественные расслоения. Дифференциальная операция $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ порядка не выше k называется *естественной*, если в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$, определенных в окрестности $U \subset M$, над которой расслоения $\mathcal{V}, \mathcal{W} \rightarrow M$ тривиальны, имеем

$$D(s)_U(x) = \delta(J_x^k s_U),$$

где s_U – локальный представитель сечения $s \in \Gamma(\mathcal{V})$ в X , $D(s)_U$ – локальный представитель сечения $D(s) \in \Gamma(\mathcal{W})$ в U , а $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$ – дифференцируемое отображение, не зависящее от x .

Из определения вытекает, что отображение $\delta: \text{GL}_n^{(k+l)}$ -эквивариантно в предположении, что расслоения $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ имеют порядок не выше l .

Рассмотрим, например, случай, когда V, W – линейные пространства, $\text{GL}_n: V, W$ – линейные представления. В этом случае отображение $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$

определяет естественную дифференциальную операцию тогда и только тогда, когда оно $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -эquivариантно.

Из определения следует, что всякая естественная дифференциальная операция D определена на геометрических величинах данного типа на всех n -мерных многообразиях. Это обстоятельство позволяет дать функториальное определение естественных дифференциальных операций. А именно, пусть $\mathfrak{F}$ – тип геометрических объектов. Для всякого многообразия M рассмотрим пространство сечений $\Gamma(\mathfrak{F}(M))$ как топологическое пространство (топология задается локально равномерной сходимостью сечений со всеми их частными производными). Тип $\mathfrak{F}$ определяет контравариантный функтор

$$\Gamma_F: \mathcal{Man}_n \rightsquigarrow \mathcal{Top}, \quad M \mapsto \Gamma(\mathfrak{F}(M)),$$

где $\mathcal{Top}$ – категория топологических пространств. Тогда естественная дифференциальная операция $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ определяет естественное преобразование функторов: для любого открытого вложения $M' \hookrightarrow M$ имеем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, \mathcal{V}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(M, \mathcal{W}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(M', \mathcal{V}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(M', \mathcal{W}). \end{array}$$

И наоборот, при некоторых условиях естественное преобразование функторов геометрических величин задается естественной дифференциальной операцией (теорема Петре, см. [7; гл. 5]).

Рассмотрим естественные алгебраические дифференциальные операции порядка не выше k (см. определение 1.10). Они задаются всюду определенными $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -эquivариантными рациональными отображениями $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$. Изучение таких операций является чисто алгебраической задачей, которую можно решать методами теории инвариантов. Такой подход к изучению алгебраических дифференциальных операций мы называем *методом ИТ-редукции*. В настоящей работе мы рассматриваем естественные алгебраические дифференциальные операции, действующие на сечения тензорных расслоений. Они задаются рациональными отображениями $\delta: J_n^{(k)} \otimes V \rightarrow W$, которые GL_n -эquivариантны и $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ -инвариантны. Здесь V, W – рациональные представления GL_n , а $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ действует на $J_n^{(k)} \otimes V = V^{(k)}$ естественным образом (см. лемму 4).

ПРИМЕР 1.14. Классическим примером естественной алгебраической дифференциальной операции является внешний дифференциал $d: \Gamma(\Omega^m) \rightarrow \Gamma(\Omega^{m+1})$, где $\Omega^m = \bigwedge^m \mathcal{T}^*$ есть расслоение внешних m -форм. Соответствующее отображение

$$\delta: J_n^{(1)} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} = \left(\mathbb{K} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \right) \oplus \left(\mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \right) \rightarrow \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \rightarrow \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть композиция проекции и альтернирования.

ПРИМЕР 1.15. Пусть $\mathcal{T}$ – касательное расслоение, $\mathcal{V}$ – произвольное тензорное расслоение, соответствующее линейному представлению $\mathrm{GL}_n: V$. Производная Ли есть естественная билинейная дифференциальная операция вида

$D: \Gamma(\mathcal{T} \times \mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{V})$ порядка один. Она соответствует отображению

$$\begin{aligned} \delta: (\mathbb{K}^n \oplus (\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n)) \times (V \oplus (\mathbb{K}^{n*} \otimes V)) &\rightarrow V, \\ (\xi_0 + \xi_1, v_0 + v_1) &\mapsto \rho(\xi_1)v_0 - \sigma(\xi_0 \otimes v_1), \end{aligned}$$

где ρ есть представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n \simeq \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$ в V , а σ есть свертка $\mathbb{K}^n$ с $\mathbb{K}^{n*}$.

1.4. Представления и инварианты классических групп. Напомним некоторые факты теории представлений классических групп (см. [11], [12]).

Разбиением называется нестрогое убывающая последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. *Длина разбиения* – это количество $\lambda_i \neq 0$, а $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Фрагменты вида $d, \dots, d$ (s раз) в λ часто записываются в виде d^s . Определение *виртуального разбиения* получается, если опустить условие $\lambda_n \geq 0$.

Функтор Шура, отвечающий разбиению λ , обозначается через $\mathbb{S}^\lambda$. Он сопоставляет каждому векторному пространству V подпространство $\mathbb{S}^\lambda V \subset V^{\otimes |\lambda|}$, которое строится следующим образом. Можно считать, что тензорные сомножители $V^{\otimes |\lambda|}$ нумеруются клетками диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ . Тогда $\mathbb{S}^\lambda V$ получается из $V^{\otimes |\lambda|}$ применением сначала симметризации по каждой строке диаграммы Юнга (обозначаемой через Sym_λ), а затем альтернирования по каждому столбцу диаграммы Юнга (обозначаемого через Alt_λ).

$\mathbb{S}^\lambda V$ – неприводимый полиномиальный $\text{GL}(V)$ -модуль, линейно порожденный тензорами вида

$$\text{Alt}_\lambda(v_1^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes v_n^{\otimes \lambda_n}), \quad v_1, \dots, v_n \in V.$$

Всякий рациональный $\text{GL}(V)$ -модуль разлагается в прямую сумму неприводимых подмодулей, изоморфных $\mathbb{S}^\lambda V \otimes \det^d$, $d \in \mathbb{Z}$.

В наших рассуждениях будет удобнее реализовывать неприводимые рациональные GL_n -модули в виде $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^d$. Такой модуль однозначно с точностью до изоморфизма определяется виртуальным разбиением $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$, $\bar{\lambda}_i = \lambda_i - d$. Он содержит единственные с точностью до пропорциональности собственные векторы по отношению к противоположным нижне- и верхнетреугольным борелевским подгруппам $B^-, B^+ \subset \text{GL}_n$, а именно,

$$\begin{aligned} v_\lambda^- &= \text{Alt}_\lambda((x^1)^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes (x^n)^{\otimes \lambda_n}), \\ v_\lambda^+ &= \text{Alt}_\lambda((x^n)^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes (x^1)^{\otimes \lambda_n}). \end{aligned}$$

Вектор v_λ^- (соответственно v_λ^+) называется младшим (соответственно старшим) весовым вектором. Заметим, что $v_\lambda^\pm$ порождает $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^d$ как $B^\mp$ -модуль.

Всякий неприводимый SL_n -модуль изоморфен $\mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*}$, где $\lambda_n = 0$.

Пусть $n = 2m$ четно. Мы рассматриваем группу Sp_n как подгруппу в GL_n , являющуюся стабилизатором 2-формы

$$\omega_0 = x^1 \wedge x^n + x^2 \wedge x^{n-1} + \dots + x^m \wedge x^{m+1}. \quad (7)$$

Неприводимые представления Sp_n параметризуются разбиениями λ длины $l \leq m$ и реализуются в подпространствах $\mathbb{S}^{(\lambda)} \mathbb{K}^{n*} \subset \mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*}$, порожденных тензорами вида

$$\text{Alt}_\lambda((y_1)^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes (y_l)^{\otimes \lambda_l}),$$

где $y_1, \dots, y_l$ порождают изотропное подпространство в $\mathbb{K}^{n*}$. Векторы $v_\lambda^\pm$ являются собственными для борелевских подгрупп $B^\pm \cap \mathrm{Sp}_n$. Вектор v_λ^- (соответственно v_λ^+) называется *младшим* (соответственно *старшим*) *весовым вектором*, причем $v_\lambda^\pm$ порождает $\mathbb{S}^{(\lambda)}\mathbb{K}^{n*}$ как $B^\mp \cap \mathrm{Sp}_n$ -модуль.

ФОРМУЛЫ ПЬЕРИ.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{S}^k \mathbb{K}^{n*} &\simeq \bigoplus_{\substack{\lambda', |\lambda'|=|\lambda|+k \\ \lambda'_i \geq \lambda_i \geq \lambda'_{i+1}}} \mathbb{S}^{\lambda'} \mathbb{K}^{n*} && (\text{как } \mathrm{GL}_n\text{-модули}), \\ \mathbb{S}^{(\lambda)} \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{S}^k \mathbb{K}^{n*} &\simeq \bigoplus_{\substack{\lambda', \mu, |\mu|=|\lambda|-p \\ |\lambda'|=|\mu|+k-p, p \leq k \\ \lambda_i, \lambda'_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}, \lambda'_{i+1}}} \mathbb{S}^{(\lambda')} \mathbb{K}^{n*} && (\text{как } \mathrm{Sp}_n\text{-модули}). \end{aligned}$$

В более наглядных терминах диаграммы Юнга всевозможных λ' получают-ся из диаграммы Юнга λ вначале удалением p клеток справа из некоторых строк ($p = 0$ в случае GL_n), а затем добавлением $k - p$ клеток справа в некоторые строки так, чтобы горизонтальные положения убранных или добавленных клеток в каждой строке не перекрывались с аналогичными в других строках и с нижними строками.

Алгебраическое исследование естественных дифференциальных операций на тензорных расслоениях использует полиномиальные отображения между различными пространствами тензоров, эквивариантные по отношению к классическим группам. Эти отображения могут быть описаны с помощью классической теории инвариантов.

ТЕОРЕМА 1.16. Пусть $V_1, \dots, V_s, W$ – тензорные пространства над $\mathbb{K}^n$, $G \subset \mathrm{GL}_n$ – одна из классических подгрупп (т.е. G есть GL_n , SL_n , O_n , SO_n , или Sp_n), $\Phi: V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$ – полиномиальное G -отображение. Тогда Φ является линейной комбинацией отображений вида

$$\varphi(v_1, \dots, v_s) = P(C(v_1^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes v_s^{\otimes d_s} \otimes T_1^{\otimes a_1} \otimes \dots \otimes T_l^{\otimes a_l})),$$

где $T_1, \dots, T_l$ – базисные инвариантные тензоры группы G , $d_1, \dots, d_s, a_1, \dots, a_l$ – целые неотрицательные числа, C – свертка по некоторым индексам, P – перестановка индексов.

Для группы GL_n базисным тензором является тензор $\delta = e_i \otimes x^i$, а для группы Sp_n базисными тензорами являются ω_0 и двойственный ему тензор

$$\omega_0^* = e_1 \wedge e_n + \dots + e_m \wedge e_{m+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы сводится к описанию G -инвариантных полиномиальных функций на $V_1 \times \dots \times V_s \times W^*$, которые линейны по W^* . В этом случае утверждение следует из символического метода классической теории инвариантов [12; п. 9.5]: всякая инвариантная функция получается полной сверткой достаточного количества копий аргументов с базисными тензорами. Свертки по парам индексов из W^* отвечают тензорным умножениям на δ Кронекера, а свертки индексов W^* с индексами $V_1, \dots, V_s$ в различном порядке – перестановкам индексов.

Мы будем использовать следующие линейные Sp_n -эквивариантные отображения

$$(\cdot) * \omega_0 : S^q \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \rightarrow S^q \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*}$$

(тензорное умножение справа на ω_0 с последующей сверткой по первому верхнему и последнему нижнему индексам) и

$$(\cdot) * \omega_0^* : S^q \mathbb{K}^{n*} \rightarrow S^{q-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n$$

(тензорное умножение справа на ω_0^* с последующей сверткой по первому верхнему и последнему нижнему индексам). Нетрудно проверить, что

$$(\xi * \omega_0^*) * \omega_0 = \xi \quad (8)$$

для любого $\xi \in S^q \mathbb{K}^{n*}$.

§ 2. Теоремы о конечности и конечной порожденности

Пусть $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W . В этом параграфе мы рассматриваем естественные алгебраические дифференциальные операции вида

$$D : \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}). \quad (9)$$

Они соответствуют полиномиальным $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -отображениям $\delta : V^{(k)} \rightarrow W$, где $k \geq \mathrm{ord}(D)$. Для таких операций мы докажем теорему конечности и теорему о конечной порожденности.

Определим степень $\deg(D)$ операции (9) как степень соответствующего ей полиномиального отображения δ .

Рассмотрим подгруппу гомотетий $\mathbb{K}^\times \subset \mathrm{GL}_n$. Назовем GL_n -модуль U *однородным степени* $[U] = d$, если $t\mathbb{E} \cdot u = t^{-d}u$ для всех $t \in \mathbb{K}^*$, $u \in U$, где $\mathbb{E}$ – единичная матрица. Ясно, что $S^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^p$ однороден, причем $[S^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^p] = |\lambda| - np$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для данных тензорных расслоений $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ существуют вещественные числа A, B такие, что порядок любой естественной алгебраической дифференциальной операции (9) не превосходит $A + B \deg(D)$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (см. [13; § 4]). *Для данных тензорных расслоений $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ и $d \in \mathbb{N}$ линейное пространство естественных алгебраических дифференциальных операций (9) степени не выше d конечномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Можно считать, что GL_n -модуль W неприводим. Разложим GL_n -модуль V в прямую сумму неприводимых подмодулей:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Из этого разложения получаем разложение $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -модуля

$$V^{(k)} = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \left(\bigoplus_{0 \leq j \leq k} S^j \mathbb{K}^{n*} \otimes V_i \right). \quad (10)$$

Пусть отображение $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$ имеет степень d . Из разложения (10) следует, что δ разлагается в сумму GL_n -отображений вида

$$\begin{aligned} \delta_I: V^{(k)} &\rightarrow W, \\ (v_{1,0} + \dots + v_{1,k}, \dots, v_{m,0} + \dots + v_{m,k}) &\mapsto \Delta_I(v_{i_1,j_1}, \dots, v_{i_p,j_p}), \end{aligned}$$

где $1 \leq p \leq d$, $I = (i_1, j_1; \dots; i_p, j_p)$, $1 \leq i_l \leq m$, $0 \leq j_l \leq k$, $v_{i,j} \in S^j \mathbb{K}^{n*} \otimes V_i$, а

$$\Delta_I: (S^{j_1} \mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_1}) \times \dots \times (S^{j_p} \mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_p}) \rightarrow W$$

есть полилинейное GL_n -отображение. Рассмотрим отображение Δ_I . Так как Δ_I является $\mathbb{K}^\times$ -эквивариантным отображением, то

$$\sum_{l=1}^p [S^{j_l} \mathbb{K}^{n*} \otimes V_{i_l}] = [W]$$

или

$$j_1 + \dots + j_p = [W] - \sum_{l=1}^p [V_{i_l}]. \quad (11)$$

Положим $A = |[W]|$, $B = \max_l |[V_l]|$. Тогда из (11) получаем, что

$$\max_{\Delta_I \neq 0} \{j_1, \dots, j_m\} \leq A + Bd$$

и, следовательно, $k \leq A + Bd$. Теорема доказана.

Для GL_n -модуля V положим

$$V_+^{(k)} := \bigoplus_{1 \leq i \leq k} S^i \mathbb{K}^{n*} \otimes V.$$

Имеем разложение в прямую сумму $V^{(k)} = V \oplus V_+^{(k)}$. Для полиномиального отображения $\varphi: V^{(k)} \rightarrow W$ определим $\deg_+(\varphi)$ как степень отображения φ по координатам, соответствующим прямому слагаемому $V_+^{(k)}$. Для естественной дифференциальной операции $D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ определим ее степень по частным производным $\deg_+(D) := \deg_+(\delta)$, где δ есть соответствующее операции D полиномиальное отображение.

Отображение $\Phi: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ называется *тензорной операцией*, если Φ соответствует линейному GL_n -отображению $\varphi: V \rightarrow W$ (другими словами, Φ является естественной линейной дифференциальной операцией нулевого порядка). Всякая тензорная операция есть линейная комбинация композиций свертки, перестановок индексов и тензорного умножения на дельту Кронекера.

Назовем тензорное расслоение $\mathcal{V}$ *неразложимым*, если его слой V – неприводимый GL_n -модуль.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{V}$ – тензорное расслоение, d, k – натуральные числа. Существует конечное число неразложимых тензорных расслоений $\mathcal{W}_i$ и естественных дифференциальных операций $D_i: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}_i)$ порядка не выше k и степени по частным производным не выше d таких, что для любого тензорного расслоения $\mathcal{W}$ всякая естественная дифференциальная операция

$D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ порядка не выше k и степени по частным производным не выше d может быть представлена в виде

$$D(v) = \sum_{i,p} \Phi_{ip}(v^{\otimes p} \otimes D_i(v)),$$

где каждое $\Phi_{ip}: \Gamma(S^p \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}_i) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$ есть тензорная операция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, переходя к струям, мы переформулируем эту теорему следующим образом.

Существует конечное число GL_n -модулей W_i и полиномиальных $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -отображений

$$\delta_i: V^{(k)} \rightarrow W_i, \quad \deg_+(\delta_i) \leq d,$$

таких, что всякое полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -эквивариантное отображение $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$, $\deg_+(\delta) \leq d$, может быть представлено в виде

$$\delta(v) = \sum_{i,p} \varphi_{ip}(v_0^{\otimes p} \otimes \delta_i(v)), \quad v = v_0 + v_+ \in V \oplus V_+^{(k)}, \quad (12)$$

где

$$\varphi_{ip}: V^{\otimes p} \otimes W_i \rightarrow W$$

есть линейное GL_n -отображение для всех i, p .

Докажем это утверждение.

Обозначим через $\mathbb{K}[V]$ алгебру многочленов от координат на пространстве V . Все полиномиальные функции на $V^{(k)}$ степени не выше d по координатам $V_+^{(k)}$ образуют свободный $\mathbb{K}[V]$ -модуль конечного ранга $\mathbb{K}[V] \otimes \mathrm{Mor}_d(V_+^{(k)}, \mathbb{K})$. Функции, инвариантные относительно $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$, образуют GL_n -инвариантный подмодуль $\mathcal{M}$. Всякому отображению δ соответствует линейное GL_n -отображение $\delta': W^* \rightarrow \mathcal{M}$.

Модуль $\mathcal{M}$ конечно порожден (как подмодуль конечно порожденного модуля). Выберем конечное число неприводимых GL_n -модулей W'_i и линейных GL_n -отображений $\delta'_i: W'_i \rightarrow \mathcal{M}$ таких, что $\mathrm{Im} \delta'_i$ порождают $\mathcal{M}$ как $\mathbb{K}[V]$ -модуль. Таким образом, канонически определенный гомоморфизм $\mathbb{K}[V]$ -модулей

$$\pi: \bigoplus_i (\mathbb{K}[V] \otimes W'_i) = \bigoplus_{i,p} (S^p V^* \otimes W'_i) \rightarrow \mathcal{M}$$

эпиморфен. Каждое линейное отображение δ'_i естественным образом определяет полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -отображение

$$\delta_i: V^{(k)} \rightarrow (W'_i)^* =: W_i,$$

причем $\deg_+(\delta_i) \leq d$. Убедимся, что построенные W_i и δ_i удовлетворяют условию теоремы, переформулированному выше на языке струй.

Пусть $\delta: V^{(k)} \rightarrow W$ — полиномиальное $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -отображение такое, что $\deg_+(\delta) \leq d$. Наша задача — найти линейные GL_n -отображения φ_{ip} так, чтобы

было выполнено (12). Рассмотрим соответствующее линейное GL_n -отображение $\delta': W^* \rightarrow \mathfrak{M}$. Так как группа GL_n редуктивна, то отображение δ' можно поднять до линейного GL_n -отображения

$$\varphi' = \bigoplus_{i,p} \varphi'_{ip}: W^* \rightarrow \bigoplus_{i,p} (S^p V^* \otimes W'_i)$$

такого, что $\delta' = \pi \circ \varphi'$. Каждое отображение φ'_{ip} канонически определяет линейное GL_n -отображение $\varphi_{ip}: V^{\otimes p} \otimes W_i \rightarrow W$. Нетрудно заметить, что для отображений φ_{ip} выполнено (12).

§ 3. Естественные линейные операции

В этом и следующем параграфах мы приведем основанные на методе ИТ-редукции доказательства известных теорем о классификации естественных линейных дифференциальных операций на произвольных и на симплектических многообразиях. Оказывается, такие операции по существу сводятся к внешнему дифференцированию.

Пусть $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W ,

$$D: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}) \quad (13)$$

– естественная линейная дифференциальная операция порядка k . Операция D соответствует линейному $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$ -отображению

$$\delta: V^{(k)} \rightarrow W. \quad (14)$$

В случае $k = 0$ операция D является тензорной. В случае $k > 0$ такие операции описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для всякой операции (13) порядка $k > 0$ имеется разложение*

$$D = I \circ d \circ P + T,$$

где

$$P: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Omega^*(M), \quad I: \Omega^*(M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$$

и T – тензорные операции.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Обычно эту теорему называют теоремой Схоутена, хотя сам Схоутен сформулировал ее в 1951 году без доказательства. В дальнейшем доказательство было получено сначала для дифференциальных форм (Пале, 1959), затем для произвольных ковариантных тензоров (Лейхер, 1973) и, наконец, в общем случае (Рудаков, 1974; Чу-Лян Тэн, 1976; Кириллов, 1977), см. [13]. Для операций порядка один основанное на ИТ-редукции доказательство получено Смирновым [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение (14), соответствующее операции (13). Поскольку вложения и проекции на неразложимые слагаемые задаются тензорными операциями, то можно считать, что GL_n -модули V, W неприводимы и $V = S^\lambda \mathbb{K}^{n*} \otimes \det^d$ соответствует виртуальному разбиению $\bar{\lambda} = \lambda - (d^n)$.

Так как подалгебра $\mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \subset \mathfrak{gl}_n^{(k+1)}$ действует на W тривиально, то

$$\mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \cdot V^{(k)} \subset \text{Ker}(\delta).$$

Кроме того, $(x^n)^k \otimes v_\lambda^-$ (что равно тензорному произведению старшего вектора GL_n -модуля $S^k \mathbb{K}^{n*}$ и младшего вектора GL_n -модуля V) порождает GL_n -модуль $S^k \mathbb{K}^{n*} \otimes V$. Поскольку операция имеет порядок k , то

$$(x^n)^k \otimes v_\lambda^- \notin \mathfrak{ngl}_n^{(k+1)} \cdot V^{(k)}. \quad (15)$$

Если $k > 1$, то, используя (5), находим

$$((x^n)^k \otimes e_n) \cdot (x^n \otimes v_\lambda^-) = -(k\bar{\lambda}_n + 1)(x^n)^k \otimes v_\lambda^-.$$

Но это противоречит (15). Следовательно, $k = 1$.

Если $k = 1$ и $\bar{\lambda}_n \neq 0$, то, используя (5), находим

$$((x^n)^2 \otimes e_n) \cdot v_\lambda^- = -2\bar{\lambda}_n x^n \otimes v_\lambda^-.$$

Но это противоречит (15). Следовательно, $\bar{\lambda}_n = 0$.

Если $k = 1$ и $\bar{\lambda}_n = 0$, то, используя (5), находим

$$\begin{aligned} (x^1 x^n \otimes e_1) \cdot v_\lambda^- &= -\bar{\lambda}_1 x^n \otimes v_\lambda^- - x^1 \otimes v, \\ ((x^1)^2 \otimes e_1) \cdot v &= -2(\bar{\lambda}_1 - 1)x^1 \otimes v, \end{aligned}$$

где

$$v = \sum_{p=1}^{\lambda_1} \text{Alt}_\lambda((x^1)^{\otimes(p-1)} \otimes x^n \otimes (x^1)^{\otimes(\lambda_1-p)} \otimes (x^2)^{\otimes \lambda_2} \otimes \dots \otimes (x^n)^{\otimes \lambda_n}).$$

При $\bar{\lambda}_1 > 1$ это противоречит (15). Следовательно, $\bar{\lambda}_1 = 0$ или $\bar{\lambda}_1 = 1$.

Остался случай $k = 1$ и $V \simeq \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}$, где $m < n$. В этом случае

$$\mathbb{K}^{n*} \otimes V = \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*}.$$

Так как

$$((x^1)^2 \otimes e_1) \cdot (x^1 \wedge \dots \wedge x^m) = 2x^1 \otimes x^1 \wedge \dots \wedge x^n \in \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*},$$

то для δ остается единственная возможность. А именно,

$$\delta: V^{(1)} = \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \oplus \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{(2,1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*} \rightarrow \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть каноническая проекция. Такое δ соответствует операции d внешнего дифференцирования (см. пример 1.14).

§ 4. Естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях

4.1. Геометрические структуры. Многообразия часто снабжены дополнительными геометрическими структурами и важно изучать дифференциальные операции, “естественные” по отношению к этим структурам. Есть несколько возможных способов формализовать это понятие. Здесь мы будем использовать следующий способ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Тип геометрических структур* – это функтор на $\mathcal{Man}_n$, сопоставляющий каждому n -мерному многообразию M подпучок $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$ в пучке сечений естественного расслоения $\mathcal{F} \rightarrow M$ так, что для любого открытого вложения $M' \hookrightarrow M$ пучок $\mathcal{A}(M')$ есть ограничение пучка $\mathcal{A}(M)$. *Геометрическая структура* (данного типа) – это сечение $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Как правило, $\mathcal{A}$ состоит из локальных сечений, удовлетворяющих некоторой системе естественных дифференциальных уравнений. При этом l -струи локальных сечений из $\mathcal{A}$ образуют $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$ -инвариантное подмногообразие $A^{(l)} \subseteq F^{(l)}$, где k – порядок расслоения $\mathcal{F}$.

ПРИМЕР 4.3. Риманова структура задается сечением расслоения $(S^2 \mathcal{T}^*)^+$ положительно определенных квадратичных форм на касательном расслоении.

ПРИМЕР 4.4. Симплектическая структура задается сечением ω расслоения $(\Omega^2(M))^{\mathrm{reg}}$ невырожденных 2-форм таким, что $d\omega = 0$. Многообразие M называется *симплектическим*, если на M задана симплектическая структура.

ПРИМЕР 4.5. Пуассонова структура задается сечением β расслоения $\bigwedge^2 \mathcal{T}$ бивекторов таким, что $[\beta, \beta] = 0$, где $[\beta, \beta] = \beta^{ij} \partial_i \beta^{kl} \partial_j \wedge \partial_k \wedge \partial_l$ есть скобка Схоутена. Многообразие M называется *многообразием Пуассона*, если на M задана структура Пуассона.

Симплектическое многообразие является многообразием Пуассона (бивектором Пуассона является двойственный к симплектической 2-форме бивектор). Четномерное многообразие Пуассона с невырожденным в каждой точке бивектором Пуассона является симплектическим многообразием (симплектической 2-формой является двойственная к бивектору Пуассона 2-форма).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. *Естественная дифференциальная операция* на многообразиях с геометрической структурой типа $\mathcal{A}$ – это операция вида

$$D: \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}),$$

где $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ – естественные расслоения, задаваемая в локальных координатах $x = (x^1, \dots, x^n)$ формулой

$$D(s, \alpha)(x) = \delta(J_x^k s, J_x^l \alpha),$$

где $\delta: V^{(k)} \times A^{(l)} \rightarrow W - \mathrm{GL}_n^{(r)}$ -эквивариантное (при подходящем r) не зависящее от x дифференцируемое отображение.

Другими словами, Ds зависит от $s \in \Gamma(\mathcal{V})$ и от $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A})$ (как от параметра), а также их частных производных (до некоторого порядка) одинаковым образом во всех локальных системах координат.

Мы будем рассматривать алгебраические естественные дифференциальные операции на тензорных расслоениях над многообразиями с естественной геометрической структурой. В этом случае отображение δ полиномиально по $V^{(k)}$ и рационально по $A^{(l)}$. В частном случае, когда $k = 0$ и δ линейно по первому аргументу, такая операция D называется *естественным линейным отображением*.

ПРИМЕР 4.7. Ковариантное дифференцирование тензорных полей является естественной дифференциальной операцией на римановых многообразиях. Скобка Пуассона функций является естественной дифференциальной операцией на пуассоновых многообразиях.

В присутствии дополнительной геометрической структуры группа координатных преобразований, которые должны сохранять координатное выражение естественной дифференциальной операции, часто может быть уменьшена при помощи следующего стандартного теоретико-инвариантного приема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Пусть группа Ли G действует на многообразии X , $H \subset G$ – подгруппа Ли и Y – некоторое H -инвариантное подмногообразие в X . Подмногообразие Y называется (G, H) -сечением, если естественное отображение $G \times^H Y \rightarrow X$ является диффеоморфизмом.

В этом случае для любого многообразия Z с действием G мы имеем взаимно однозначное соответствие между G -отображениями $\varphi: X \rightarrow Z$ и H -отображениями $\psi: Y \rightarrow Z$. А именно, при этом соответствии $\psi = \varphi|_Y$.

Пусть для геометрических структур типа $\mathcal{A}$ существует $(\mathrm{GL}_n^{(r)}, G^{(r)})$ -сечение $A_0^{(l)}$ многообразия $A^{(l)}$. Тогда согласно вышесказанному естественные дифференциальные операции на многообразиях с геометрическими структурами типа $\mathcal{A}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $G^{(r)}$ -отображениями

$$\tilde{\delta}: V^{(k)} \times A_0^{(l)} \rightarrow W.$$

ПРИМЕР 4.9 (см. [6; §3]). В пространстве k -струй римановых метрик

$$A^{(k)} = (S^2 \mathbb{R}^{n*})^+ \oplus \bigoplus_{l=1}^k S^l \mathbb{R}^{n*} \otimes S^2 \mathbb{R}^{n*}$$

имеется $(\mathrm{GL}_n^{(k+1)}, \mathrm{GL}_n)$ -сечение

$$A_0^{(k)} = (S^2 \mathbb{R}^{n*})^+ \oplus \bigoplus_{l=2}^k \mathrm{Ker} \mathrm{Sym}_{l+1},$$

где $\mathrm{Sym}_{l+1}: S^l \mathbb{R}^{n*} \otimes S^2 \mathbb{R}^{n*} \rightarrow S^{l+1} \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*}$ есть симметризация по первым $l+1$ индексам. Отметим, что $\mathrm{Ker} \mathrm{Sym}_{l+1} \simeq \mathbb{S}^{(l,2)} \mathbb{R}^{n*}$, а перевод метрики в $A_0^{(k)}$ преобразованием координат есть не что иное как запись метрики в геодезических координатах с центром в данной точке.

4.2. Симплектические структуры. По теореме Дарбу струи симплектических структур образуют однородное пространство, т.е. в качестве сечения может быть взята одна точка. Поучительно дать чисто алгебраическое доказательство этого факта методом ИТ-редукции.

ФОРМАЛЬНАЯ ЛЕММА ПУАНКАРЕ. *Комплекс де Рама*

$$\dots \xrightarrow{d} S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} S^{l-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} \dots$$

точен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формулам Пъери имеем

$$S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \simeq S^{(l+1, 1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*} \oplus S^{(l, 1^m)} \mathbb{K}^{n*}.$$

(А именно, $S^{(l+1, 1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*} \subset S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*}$, а $S^{(l, 1^m)} \mathbb{K}^{n*}$ вкладывается в тензорное произведение слева как Ker Sym_{l+1} .) Отображение

$$d: S^l \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^m \mathbb{K}^{n*} \rightarrow S^{l-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$$

есть не что иное как альтернирование по последним $m+1$ индексам. Оно изоморфно отображает $S^{(l, 1^m)} \mathbb{K}^{n*}$ в $S^{l-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m+1} \mathbb{K}^{n*}$, в то время как его ядро $S^{(l+1, 1^{m-1})} \mathbb{K}^{n*}$ — это в точности образ $S^{l+1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^{m-1} \mathbb{K}^{n*}$.

ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДАРБУ. *Всякая струя $\omega(x) = \omega_0 + \omega_1(x) + \dots + \omega_k(x, \dots, x) \in J_n^{(k)} \otimes \bigwedge^2 \mathbb{K}^{n*}$ такая, что форма ω_0 невырождена и $d\omega = 0$, является $GL_n^{(k+1)}$ -эквивалентной ω_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразования $x \mapsto x + g_m(x, \dots, x)$ из $\text{NGL}_n^{(k+1)}$ к $\omega(x)$ последовательно при $m = 2, \dots, k+1$, добьемся исчезновения непостоянных членов $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$ струи $\omega(x)$. Допустим, что $\omega_l(x) = 0$ для всех $1 \leq l \leq m-2$, где $2 \leq m \leq k$. Для $g = x + g_m(x, \dots, x)$ имеем

$$\begin{aligned} (g \cdot \omega)(x) &= \omega(x) + m\rho(g_m(x, \dots, x, \cdot))\omega_0 \\ &= \omega(x) + m\gamma(g_m \otimes \omega_0) = \omega(x) + d(g_m * \omega_0) \end{aligned}$$

(мы используем лемму 1.7 и следствие из нее). Таким образом, ω_{m-1} можно преобразовать, прибавив к нему любой элемент образа сквозного отображения

$$S^m \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^n \xrightarrow{* \omega_0} S^m \mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*} \xrightarrow{d} S^{m-1} \mathbb{K}^{n*} \otimes \bigwedge^2 \mathbb{K}^{n*}. \quad (16)$$

Согласно формальной лемме Пуанкаре образ сквозного отображения (16) состоит из замкнутых форм. Следовательно, ω_{m-1} можно преобразовать в нуль.

Действуя группой GL_n , можно привести форму ω_0 к виду (7). Ее стабилизатором в группе $GL_n^{(k)}$ является группа $\text{Sp}_n^{(k)}$ k -струй симплектоморфизмов $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ в нуль. Ее разложение Леви имеет вид $\text{Sp}_n^{(k)} = \text{Sp}_n \ltimes \text{NSp}_n^{(k)}$, где Sp_n — подгруппа Леви, а $\text{NSp}_n^{(k)} = \text{Sp}_n^{(k)} \cap \text{NGL}_n^{(k)}$ — унипотентный радикал.

Согласно формальной теореме Дарбу $\{\omega_0\}$ является $(GL_n^{(k+1)}, \text{Sp}_n^{(k+1)})$ -сечением многообразия k -струй симплектических форм. Следовательно, естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях находят-ся во взаимно однозначном соответствии с $\text{Sp}_n^{(k+1)}$ -отображениями $\delta: V^{(q)} \rightarrow W$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, описывающая алгебру Ли $\mathfrak{sp}_n^{(k)}$ группы $\text{Sp}_n^{(k)}$.

ЛЕММА 4.10. Элемент $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \in \mathfrak{sp}_n^{(k)}$ тогда и только тогда, когда $\xi_l * \omega_0 \in S^{l+1}\mathbb{K}^{n*}$ для $l = 1, \dots, k$ (в частности, $\xi_1 \in \mathfrak{sp}_n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие леммы 1.7, получаем

$$\xi \cdot \omega_0 = d(\xi * \omega_0) = \sum_{l=1}^k d(\xi_l * \omega_0) = 0$$

тогда и только тогда, когда $d(\xi_l * \omega_0) = 0$ для $l = 1, \dots, k$. Теперь лемма следует из того, что $\xi_l * \omega_0 \in S^l\mathbb{K}^{n*} \otimes \mathbb{K}^{n*} \simeq S^{l+1}\mathbb{K}^{n*} \oplus S^{(l,1)}\mathbb{K}^{n*}$, где первое прямое слагаемое есть в точности $\text{Ker } d$.

Из этой леммы и (8) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.11. Отображение

$$\bigoplus_{l=2}^k S^{l+1}\mathbb{K}^{n*} \rightarrow \mathfrak{ns}\mathfrak{p}_n^k, \quad f_3 + \dots + f_{k+1} \mapsto f_3 * \omega_0^* + \dots + f_{k+1} * \omega_0^*$$

является изоморфизмом векторных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Имеется другой подход к изучению естественных дифференциальных операций на симплектических многообразиях. При этом подходе сначала определяются (главные) расслоения $\text{SFr}^k(M) \rightarrow M$ симплектических кореперов порядка k . Эти расслоения состоят из k -струй локальных систем координат $x = (x^1, \dots, x^n)$, в которых $\omega(x) = \omega_0$. Затем определяют ассоциированные (симплектические) расслоения $\mathcal{F} = \text{SFr}^k(M) \times_{\text{Sp}_n^{(k)}} F$, где $\text{Sp}_n^{(k)} : F \rightarrow M$ — дифференцируемое действие. (Заметим, что если действие $\text{Sp}_n^{(k)} : F \rightarrow M$ расширяется до действия $\text{GL}_n^{(k)} : F \rightarrow M$, то $\mathcal{F} \simeq \text{SFr}^k(M) \times_{\text{Sp}_n^{(k)}} \text{GL}_n^{(k)} \times_{\text{GL}_n^{(k)}} F \simeq \text{Fr}^k(M) \times_{\text{GL}_n^{(k)}} F$ является естественным расслоением в смысле 1.1.) Наконец, естественные дифференциальные операции на симплектических многообразиях определяются как операции вида $D : \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$, где $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ — симплектические расслоения, причем D одинаково записывается во всех симплектических локальных системах координат. Это эквивалентно тому, что отображение струй $\delta : V^{(k)} \rightarrow W$ является $\text{Sp}_n^{(k)}$ -отображением.

4.3. Линейные операции. Теперь на основе метода ИТ-редукции мы получим описание естественных линейных дифференциальных операций на симплектических многообразиях. Впервые это описание было получено более сложным методом Рудаковым (см. [8]) в процессе изучения неприводимых представлений некоторых бесконечномерных алгебр Ли.

Напомним, что на n -мерном симплектическом многообразии имеется канонический изоморфизм $i_m : \Omega^m \rightarrow \Omega^{n-m}$. Положим

$$d^* = i_{n-m+1} \circ d \circ i_m : \Gamma(\Omega^m) \rightarrow \Gamma(\Omega^{m-1}).$$

Рассмотрим естественную линейную дифференциальную операцию

$$D : \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}) \quad (17)$$

порядка q на n -мерных симплектических многообразиях, где $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ – тензорные расслоения с типичными слоями V, W . Операция D соответствует линейному $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$ -отображению $\delta: V^{(q)} \rightarrow W$, где $k > q$. В случае $q = 0$ операция D является тензорной (т.е. δ является линейным Sp_n -отображением $V \rightarrow W$, см. теорему 1.16). В случае $q > 0$ такие операции описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4.13. *Для операции (17) порядка $q > 0$ имеется разложение*

$$D = I_1 \circ d \circ P_1 + I_2 \circ dd^* \circ P_2 + T,$$

где

$$P_i: \Gamma(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\Omega^\bullet), \quad I_i: \Gamma(\Omega^\bullet) \rightarrow \Gamma(\mathcal{W})$$

и T – тензорные операции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $V = \mathbb{S}^{(\lambda)} \mathbb{K}^{n*}$. Так же как в доказательстве теоремы 3.1, имеем включение

$$\mathrm{nsp}_n^{(k)} \cdot V^{(q)} \subset \mathrm{Ker}(\delta). \quad (18)$$

Рассмотрим случай $q > 1$, $\lambda_1 \neq 1$. Для

$$\begin{aligned} \xi &= (x^n)^{q+1}, & v &= x^1 \otimes v_\lambda^-, \\ \xi' &= (q+1)x^1(x^n)^q, & v' &= x^n \otimes v_\lambda^-, \end{aligned}$$

используя (5), вычисляем

$$\begin{aligned} (\xi * \omega_0^*) \cdot v &= (x^n)^q \otimes v_\lambda^- + qx^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \\ (\xi' * \omega_0^*) \cdot v' &= (q\lambda_1 - 1)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + q(q-1)x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{v} = \sum_{p=1}^{\lambda_1} \mathrm{Alt}_\lambda((x^1)^{\otimes(p-1)} \otimes x^n \otimes (x^1)^{\otimes(\lambda_1-p)} \otimes (x^2)^{\otimes \lambda_2} \dots \otimes (x^{n/2})^{\otimes \lambda_{n/2}}).$$

Отсюда получаем $0 \neq q(\lambda_1 - 1)x^n \otimes v_\lambda^- \in ((S^{q+1}\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (\mathbb{K}^{n*} \otimes V)$. Но это противоречит (18), так как $x^n \otimes v_\lambda^-$ (тензорное произведение старшего и младшего векторов) порождает $S^q\mathbb{K}^{n*} \otimes V$ как Sp_n -модуль.

Рассмотрим случай, когда $q = 1$, $\lambda_1 > 1$ или $q > 2$, $\lambda_1 = 1$. Для

$$\begin{aligned} \xi &= 3x^1(x^n)^2, & v &= (x^n)^{q-1} \otimes v_\lambda^-, \\ \xi' &= 3(x^1)^2x^n, & v' &= (x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \end{aligned}$$

используя (5), вычисляем

$$\begin{aligned} (\xi * \omega_0^*) \cdot v &= (2\lambda_1 + 1 - q)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + 2x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}, \\ (\xi' * \omega_0^*) \cdot v' &= -2\lambda_1(x^n)^q \otimes v_\lambda^- + 2(\lambda_1 - 1 - q)x^1(x^n)^{q-1} \otimes \bar{v}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $(\lambda_1 + 1 - q)(2\lambda_1 - 1 - q)(x^n)^q \otimes v_\lambda^- \in ((S^3\mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (S^{q-1}\mathbb{K}^{n*} \otimes V)$. Аналогично предыдущему, этот случай также невозможен.

Остался случай $\lambda = (1^m)$, $q \leq 2$.

Для $q = 1$ имеем

$$\mathbb{K}^{n*} \otimes V \simeq \mathbb{S}^{\langle 1^{m-1} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 1^{m+1} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-1} \rangle} \mathbb{K}^{n*}.$$

Проекция на первое прямое слагаемое соответствует оператору d^* , проекция на второе – оператору d . Нетрудно проверить, что третье прямое слагаемое совпадает с $((S^3 \mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot V$.

Для $q = 2$ Sp_n -модуль $S^2 \mathbb{K}^{n*} \otimes V$ изоморфен

$$\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^m \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 1^m \rangle} \mathbb{K}^{n*}.$$

Докажем, что

$$\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^m \rangle} \mathbb{K}^{n*} \oplus \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle} \mathbb{K}^{n*} \subset ((S^3 \mathbb{K}^{n*}) * \omega_0^*) \cdot (\mathbb{K}^{n*} \otimes V). \quad (19)$$

Действительно, для $i < n$ имеем

$$((x^1)^3 * \omega_0^*) \cdot (x^i \otimes (x^n \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^m)) = -2x^1 x^i \otimes (x^1 \wedge \cdots \wedge x^m) =: w.$$

При $i = 1$ элемент w является младшим вектором в $\mathbb{S}^{\langle 3, 1^{m-1} \rangle} \mathbb{K}^{n*}$. Отсюда следует включение (19) для первого прямого слагаемого. При $i = m + 1$ инвариантный проектор $\text{Alt}_{(2, 1^m)}$ отображает w в младший вектор

$$(-1)^{m+1} x^1 \otimes x^1 \wedge \cdots \wedge x^{m+1} \in \mathbb{S}^{\langle 2, 1^m \rangle} \mathbb{K}^{n*}.$$

Отсюда следует включение (19) для второго прямого слагаемого. Для $i = n + 1 - m$ свертка w с ω_0^* по первому и последнему индексам даст

$$x^1 \otimes x^1 \wedge \cdots \wedge x^{m-1} \in \mathbb{S}^{\langle 2, 1^{m-2} \rangle} \mathbb{K}^{n*}.$$

Отсюда следует включение (19) для третьего прямого слагаемого. Проекция на четвертое прямое слагаемое соответствует оператору dd^* .

§ 5. Деформационное квантование

В этом параграфе мы докажем теорему о несуществовании на многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях естественных деформационных квантований.

Рассмотрим многообразие Пуассона M с бивектором Пуассона β . На пучке $\mathcal{O}$ дифференцируемых функций на M определена скобка Пуассона $\{f, g\} = \beta(df, dg) = \beta^{ij} \partial_i f \partial_j g$. По определению деформационное квантование – это ассоциативное $\mathbb{K}[[\hbar]]$ -линейное по отношению к бесконечным суммам умножение $\star$ на пучке $\mathcal{O}[[\hbar]]$, имеющее на $\mathcal{O}$ следующий вид:

$$f \star g = fg + \hbar \{f, g\} + \cdots + \hbar^l \beta_l(f, g) + \cdots,$$

где β_l , $l = 1, 2, \dots$, суть билинейные дифференциальные операции [15]. Операцию умножения $\star$ можно рассматривать как некоммутативную деформацию с параметром $\hbar$ обычного коммутативного умножения функций, так что член первого порядка коммутатора $f \star g - g \star f$ равен $2\{f, g\}$.

Известно несколько конструкций деформационных квантований (см., например, де Вильд–Лекомт [16], Федосов [17], [18], Концевич [19]). В этих конструкциях для построения деформационных квантований используются дополнительные геометрические структуры. Возникает естественный вопрос: существуют ли естественные деформационные квантования на многообразиях Пуассона (на симплектических многообразиях)? Естественность квантования понимается как естественность всех дифференциальных операций β_i . Ответ на этот вопрос отрицателен.

ТЕОРЕМА 5.1. *На многообразиях Пуассона и на симплектических многообразиях не существует естественных деформационных квантований.*

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 5.2. *Пусть $A: \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ – билинейная естественная дифференциальная операция на симплектических многообразиях. Тогда $A(f, g) = bfg + c\{df, dg\}$, где $b, c \in \mathbb{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операция A определяется линейным $\mathrm{Sp}_n^{(k)}$ -отображением

$$\alpha: J_n^{(p)} \otimes J_n^{(q)} \rightarrow \mathbb{K},$$

где $k > \max\{p, q\}$. Заметим, что Sp_n -модули $S^p\mathbb{K}^{n*}$ неприводимы и попарно неизоморфны, причем $(S^p\mathbb{K}^{n*})^* \simeq S^p\mathbb{K}^{n*}$. Этому изоморфизму соответствует ненулевое линейное Sp_n -отображение

$$\psi_p: S^p\mathbb{K}^{n*} \otimes S^p\mathbb{K}^{n*} \rightarrow \mathbb{K},$$

а именно, полная свертка с $(\omega_0^*)^{\otimes k}$. При $p \neq q$ ненулевых эквивариантных линейных отображений $S^p\mathbb{K}^{n*} \otimes S^q\mathbb{K}^{n*} \rightarrow \mathbb{K}$ не существует. Отсюда и из Sp_n -эквивариантности отображения α следует, что

$$\alpha(f \otimes g) = \sum_{p \geq 0} a_p \psi_p(f_p \otimes g_p),$$

где $a_p \in \mathbb{K}$. Осталось проверить, что $a_p = 0$ при $p \geq 2$. Для этого берем $\xi = 3(x^1)^2 x^n$, $v = (x^1)^{p-1} \otimes (x^n)^p$ и вычисляем

$$\begin{aligned} \alpha((\xi * \omega_0^*) \cdot v) &= \alpha((p-1)(x^1)^p \otimes (x^n)^p - 2p(x^1)^{p-1} \otimes x^1(x^n)^p) \\ &= (p-1)a_p \psi_p((x^1)^p \otimes (x^n)^p) = (p-1)a_p. \end{aligned} \quad (20)$$

С другой стороны, поскольку α $\mathrm{NSp}_n^{(k)}$ -инвариантно, то выражение (20) равно нулю, откуда следует, что $a_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1.

Мы последовательно проверим, что не существует естественных квантований 1) симплектических, 2) четномерных и 3) нечетномерных многообразий Пуассона.

- 1) Если естественное квантование $\star$ существует, то согласно лемме 5.2 имеем $\beta_p(f, g) = b_p fg + c_p \beta(df, dg)$, $p = 2, 3, \dots$. Нетрудно проверить, что такая операция $\star$ не может быть ассоциативной даже по модулю $\hbar^3$.

- 2) Естественное квантование четномерных многообразий Пуассона определяет естественное квантование симплектических многообразий. Согласно 1) это невозможно.
- 3) Достаточно доказать, что естественное квантование многообразий Пуассона размерности $n + l$ определяет естественное квантование многообразий Пуассона размерности n .

Пусть M есть n -мерное многообразие Пуассона с бивектором Пуассона β . На многообразии $M \times \mathbb{R}^l$ определим бивектор Пуассона $\tilde{\beta}$ такой, что

$$\tilde{\beta}_{(x,t)} \in \bigwedge^2 T_{(x,t)}(M \times \{t\}), \quad dp|_{(x,t)}(\tilde{\beta}_{(x,t)}) = \beta_x$$

для всех $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^l$, где $p: M \times \mathbb{R}^l \rightarrow M$ – проекция. Теперь на M определим операцию $\star'$:

$$(f \star' g)(x) = (p^* f \star p^* g)(x, t),$$

где $\star$ – квантование структуры Пуассона $\tilde{\beta}$. Нетрудно заметить, что операция $\star'$ определена корректно и является квантованием структуры Пуассона β . Очевидно, так определенное квантование n -мерных многообразий Пуассона является естественным.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Теорема 5.1 аналогична теореме Ван Хова о несуществовании канонического геометрического квантования [20; п. 5.2.2]. В [21] доказан близкий к теореме 5.1 результат о деформационном квантовании.

Список литературы

- [1] P. B. Gilkey, “Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes”, *Advances in Math.*, **10**:3 (1973), 344–382.
- [2] А. Л. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: A. L. Besse, *Einstein manifolds*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] M. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, “On the heat equation and the index theorem”, *Invent. Math.*, **19**:4 (1973), 279–330.
- [4] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem*, *Math. Lecture Ser.*, **11**, Publish or Perish, Wilmington, DE, 1984.
- [5] И. М. Гельфанд, Д. А. Каждан, “Некоторые задачи дифференциальной геометрии и вычисление кохомологий алгебр Ли векторных полей”, *Докл. АН СССР*, **200** (1971), 269–272; англ. пер.: I. M. Gel’fand, D. A. Kazhdan, “Some problems of differential geometry and the calculation of cohomologies of Lie algebras of vector fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1367–1370.
- [6] P. I. Katsylo, “On curvatures of sections of tensor bundles”, *Lie groups and invariant theory*, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 129–140.
- [7] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993; рус. пер.: И. Колар, П. В. Мичор, Я. Словак, *Естественные операции в дифференциальной геометрии*, Тимпани, Киев, 2001.
- [8] А. Н. Рудаков, “Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли типов **S** и **H**”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 496–511; англ. пер.: A. N. Rudakov, “Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of types **S** and **H**”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 465–480.

- [9] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, “Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии”, *Геометрия I*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **28**, ВИНТИ, М., 1988, 5–289; англ. пер.: D. V. Alekseevskij, A. M. Vinogradov, V. V. Lychagin, “Basic ideas and concepts of differential geometry”, *Geometry I*, Encyclopaedia Math. Sci., **28**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–264.
- [10] R. S. Palais, Ch.-L. Terng, “Natural bundles have finite order”, *Topology*, **16**:3 (1977), 271–277.
- [11] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [12] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия. 4*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, Eh. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV: Linear algebraic groups, invariant theory*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.
- [13] А. А. Кириллов, “Инвариантные операторы над геометрическими величинами”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **16**, ВИНТИ, М., 1980, 3–29; англ. пер.: A. A. Kirillov, “Invariant operators on geometric quantities”, *J. Math. Sci.*, **18**:1 (1982), 1–21.
- [14] Е. Ю. Смирнов, *О естественных дифференциальных операциях*, дипломная работа, МГУ, М., 2004.
- [15] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization, I, II”, *Ann. Physics*, **111**:1 (1978), 61–151.
- [16] M. de Wilde, P. B. A. Lecomte, “Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds”, *Lett. Math. Phys.*, **7**:6 (1983), 487–496.
- [17] B. V. Fedosov, “A simple geometrical construction of deformation quantization”, *J. Differential Geom.*, **40**:2 (1994), 213–238.
- [18] C. Emmrich, A. Weinstein, “The differential geometry of Fedosov’s quantization”, *Lie theory and geometry*, Progr. Math., **123**, Birkhäuser, Boston, MA, 1994, 217–239.
- [19] M. Kontsevich, “Deformation quantization of Poisson manifolds”, *Lett. Math. Phys.*, **66**:3 (2003), 157–216; [arXiv: q-alg/9709040](https://arxiv.org/abs/q-alg/9709040).
- [20] Н. Е. Харг, *Геометрическое квантование в действии: приложения гармонического анализа в квантовой статистической механике и в квантовой теории поля*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: N. E. Hurt, *Geometric quantization in action. Applications of harmonic analysis in quantum statistical mechanics and quantum field theory*, Math. Appl. (East European Ser.), **8**, Reidel Publ., Dordrecht–Boston, MA, 1983.
- [21] X. Tang, “A counter example of invariant deformation quantization”, *Proceedings of the 4th conference on Poisson geometry* (Luxembourg, 2004), Trav. Math., **16**, Univ. Luxembourg, Luxembourg, 2005, 273–283; [arXiv: math/0411626](https://arxiv.org/abs/math/0411626).

П. И. Кацыло (P. I. Katsylo)

Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН, г. Москва
E-mail: katsylo@gmail.com

Поступила в редакцию

12.08.2007

Д. А. Тимашёв (D. A. Timashev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: timashev@mech.math.msu.su