Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 7, 103–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:13:58

УДК 512.722+512.723

Н. В. Тимофеева

О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности

Проводится построение новой компактификации схемы модулей стабильных по Гизекеру векторных расслоений, имеющих заданный многочлен Гильберта на гладкой проективной поляризованной поверхности (S, H) , определенной над полем $k = \bar{k}$ нулевой характеристики. Семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на поверхностях, являющихся модификациями поверхности S . Новое пространство модулей обладает бирациональным морфизмом на пространство модулей Гизекера–Маруямы. Рассматривается случай, когда пространство Гизекера–Маруямы является тонким пространством модулей.

Библиография: 12 названий.

Введение

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, H – фиксированный класс очень обильного дивизора в группе Пикара $\text{Pic } S$. Для краткости мы называем фиксированный класс дивизоров H *поляризацией* поверхности S и для любого $\mathcal{O}_S$ -пучка E обозначаем

$$E(tH) := E \otimes \mathcal{O}_S(H)^{\otimes t}.$$

Рассматриваются когерентные пучки E без кручения фиксированного ранга $\text{rank } E = r$ с фиксированным многочленом Гильберта $\chi(E(tH))$, где символ $\chi(\cdot)$ означает эйлерову характеристику. Следуя Д. Гизекеру (см. [1]), мы используем следующее понятие стабильности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subseteq E$

$$\frac{\chi(F(tH))}{\text{rank } F} < \frac{\chi(E(tH))}{\text{rank } E} \\ \left(\text{соответственно } \frac{\chi(F(tH))}{\text{rank } F} \leq \frac{\chi(E(tH))}{\text{rank } E} \right).$$

Согласно М. Маруяме (см. [2; следствие 5.9.1]), схема M_0 модулей рассматриваемых стабильных локально свободных пучков (векторных расслоений) является квазипроjektивным многообразием. Она обладает канонической

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Института Миттаг-Леффлера (г. Дьюрскольм, Швеция) во время участия автора в программе “Moduli Spaces 2006–2007” (январь–февраль 2007 г.)

компактификацией Гизекера–Маруямы $\bar{M}$, которая является схемой модулей полустабильных когерентных пучков без кручения с теми же рангом и многочленом Гильберта на поляризованной поверхности (S, H) .

Как показано Г. Эллингсрудом и Л. Гёттше (см. [3]), понятие стабильности и структура схемы модулей стабильных пучков сильно зависят от выбора поляризации H . Из определения 0.1 ясно, что пространства модулей пучков, стабильных относительно поляризаций H и H' , изоморфны, если класс H' кратен классу H .

Часть, соответствующая локально свободным пучкам $M_0 \subset \bar{M}$, образует открытое подмножество в нормальном проективном алгебраическом многообразии $\bar{M}$ (см. [2; следствия 6.7.3, 5.9.1]). Построение проводится в предположении о неприводимости схемы $\bar{M}$. Если это не так, его можно проделать для каждой из ее компонент отдельно. Введем обозначения $\Sigma := \bar{M} \times S$ и $\Sigma_0 := M_0 \times S$. Пусть $\pi: \Sigma \rightarrow \bar{M}$ – естественная проекция.

Проводится построение другой компактификации $\tilde{M}$ многообразия M_0 , в которой семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на поверхностях, являющихся модификациями поверхности S .

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда схема $\bar{M}$ – тонкое пространство модулей. Отсюда, в частности, следует, что все полустабильные пучки стабильны (см. [4; замечание 4.6.8]). Пусть $\mathbb{E}$ – универсальный пучок на схеме Σ , а E_y – пучок, соответствующий точке $y \in \bar{M}$, т.е. $E_y = \mathbb{E}|_{\{y\} \times S}$. Обозначим через $\mathbb{E}_0$ универсальное семейство локально свободных пучков: $\mathbb{E}_0 := \mathbb{E}|_{\Sigma_0}$.

Основные результаты настоящей статьи заключены в теоремах 0.2 и 0.3.

ТЕОРЕМА 0.2. *Существуют:*

- 1) проективное многообразие $\tilde{M}$,
- 2) проективное многообразие $\tilde{\Sigma}$ с плоским морфизмом $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{M}$, слои которого образуют семейство поверхностей над многообразием $\tilde{M}$,
- 3) семейство поляризаций $\mathcal{H}$ на слоях семейства $\tilde{\Sigma}$ такое, что член Гильберта $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{y})}(t\mathcal{H}|_{\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{y})}))$ слоя $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{y})$ не зависит от точки $\tilde{y} \in \tilde{M}$,
- 4) локально свободный пучок $\tilde{\mathbb{E}}$ на схеме $\tilde{\Sigma}$,
- 5) морфизм $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$,
- 6) морфизм семейств $\Phi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$,

такие, что:

- (i) морфизм φ бирационален,
- (ii) многообразие $\tilde{M}$ содержит открытое подмножество $\tilde{M}_0$ такое, что ограничение $\varphi|_{\tilde{M}_0}: \tilde{M}_0 \rightarrow M_0$ является изоморфизмом,
- (iii) морфизм Φ бирационален,
- (iv) морфизм Φ отображает открытое подмножество $\tilde{\Sigma}_0 = \tilde{\pi}^{-1}\tilde{M}_0$ изоморфно на подмножество Σ_0 ,
- (v) имеет место равенство пучков $(\Phi_*\tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

Это означает, что строится коммутативная диаграмма плоских семейств

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\tilde{\Sigma}_0, \tilde{\mathbb{E}}_0) & \xrightarrow{\sim} & (\Sigma_0, \mathbb{E}_0) \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 (\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathbb{E}}) & \xrightarrow{\Phi} & (\Sigma, \mathbb{E}) & & \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
 & & \tilde{M}_0 & \xrightarrow{\sim} & M_0 \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} & &
 \end{array}$$

в которой все наклонные стрелки – открытые вложения, а все грани, кроме прямоугольников, расслоенные.

ТЕОРЕМА 0.3. (i) *Существует пучок идеалов $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\tilde{M} \times S}$ такой, что проекция $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M}$ может быть представлена в виде композиции*

$$\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \xrightarrow{\hat{\sigma}} \tilde{M} \times S \xrightarrow{\text{pr}_{\tilde{M}}} \tilde{M},$$

в которой $\hat{\sigma}$ – морфизм раздутия в пучке идеалов $\mathcal{I}$ и $\text{pr}_{\tilde{M}}$ – проекция на прямую сомножитель.

(ii) *Слой проекции $\tilde{\pi}$ над общей точкой $\tilde{y} \in \tilde{M}_0$ изоморфен поверхности S . Слой над специальной точкой $\tilde{y} \in \tilde{M} \setminus \tilde{M}_0$ – приводимая поверхность, содержащая компоненту, изоморфную раздутию поверхности S в пучке нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0(\mathcal{E}xt^1(E_{\varphi(\tilde{y})}, \mathcal{O}_S))$.*

Структура статьи следующая.

В §1 содержится построение раздутия $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ такого, что множество его фундаментальных точек не пересекает открытое подмножество Σ_0 . Также получен локально свободный пучок $\hat{\mathbb{E}}$ на схеме $\hat{\Sigma}$ такой, что $(\sigma_* \hat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

В §2 строится компактификация $\tilde{M}$ с плоским семейством поверхностей $\tilde{\Sigma}$ и семейством локально свободных пучков $\tilde{\mathbb{E}}$ на схеме $\tilde{\Sigma}$. Для этого используется локально свободный пучок $\hat{\mathbb{E}}$ (см. §1). Также доказывается, что имеется бирациональный морфизм компактификаций $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$, совместимый с композицией морфизмов семейств поверхностей $\Phi: \tilde{\Sigma} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \hat{\Sigma} \xrightarrow{\sigma} \Sigma$, ограничение которого на открытую подсхему $\tilde{\Sigma}_0$ является изоморфизмом. Таким образом, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 (\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathbb{E}}) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\hat{\Sigma}, \hat{\mathbb{E}}) & \xrightarrow{\sigma} & (\Sigma, \mathbb{E}) \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} & \xrightarrow{=} & \bar{M}
 \end{array}$$

Основные черты метода, используемого в §§1, 2, содержатся (в нескольких других обозначениях) в работе автора [5] для частного случая: рассматривалось многообразие модулей пучков ранга 2 с фиксированными классами Чженя,

если оно является тонким. Однако в настоящей работе ряд деталей формулировок и доказательств видоизменен согласно рассматриваемому более общему случаю.

В § 3 исследуются структура морфизма $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M}$ и его слои. Дается явная формула для пучка идеалов $\mathcal{I}$ теоремы 0.3. Использованием этого пучка идеалов доказано, что слой над точкой $\tilde{y} \in \tilde{M}$ содержит неприводимую компоненту, изоморфную поверхности S , раздутой в пучке идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(E_{\varphi(\tilde{y})}, \mathcal{O}_S)$. Общий слой изоморфен поверхности S .

Конструкция, проводимая в § 2, зависит от обильного обратимого пучка $\hat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ на промежуточном раздутии $\hat{\Sigma}$. В § 4 доказано, что при $m \gg 0$ компактификация $\hat{M}$ не зависит от выбора пучка $\hat{\mathcal{L}}$.

§ 1. Промежуточное раздутие

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Существует пучок идеалов $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\Sigma}$ такой, что соответствующее раздутие $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ обладает локально свободным пучком $\hat{\mathbb{E}}$, имеющим свойство $(\sigma_* \hat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.*

Перед доказательством предложения напомним две леммы.

ЛЕММА 1.2 (см. [5; предложение 1]). *Пусть $\mathbb{E}$ – плоское семейство стабильных пучков без кручения на гладкой поверхности S , параметризованное равноразмерной схемой T . Тогда пучок $\mathbb{E}$ имеет гомологическую размерность, равную $\mathrm{hd} \mathbb{E} = 1$.*

Для любого $\mathcal{O}_X$ -модуля $\mathcal{F}$ на алгебраической схеме X обозначим через $\mathrm{Sing} \mathcal{F}$ множество точек схемы X , в которых пучок $\mathcal{F}$ не локально свободен.

ЛЕММА 1.3 (см. [5; предложение 2]). *Если пучок $\mathbb{E}$ на гладкой схеме X удовлетворяет условиям:*

- (i) $\mathrm{hd} \mathbb{E} = 1$,
- (ii) $\mathrm{codim} \mathrm{Sing} \mathbb{E} > 2$,

то $\mathbb{E}$ рефлексивен, т.е. $\mathbb{E}^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

Зафиксируем локально свободную резольвенту пучка $\mathbb{E}$:

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow 0. \quad (1.1)$$

Если схема Гизекера–Маруямы неособа (как, например, для пучков на поверхности $S = \mathbb{P}^2$ или на рациональных поверхностях; см. [2; пример 6.8]), то применим две предыдущие леммы непосредственно к универсальному семейству $\mathbb{E}$. Если схема $\bar{M}$ особа, возьмем ее разрешение особенностей $\xi: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}$ согласно Хиронаке (см. [6]) с семейством пучков $(\xi, \mathrm{id}_S)^* \mathbb{E}$. Будем использовать обозначение $\bar{M}$ и для гладкой тонкой схемы модулей стабильных пучков, и, если необходимо, для разрешения особенностей схемы модулей. Также мы заменяем полное обозначение $(\xi, \mathrm{id}_S)^* \mathbb{E}$ для обратного образа универсального семейства пучков символом $\mathbb{E}$, как для семейства пучков в гладком случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для особого случая утверждение теоремы 0.2 должно быть записано как $(\Phi_* \mathbb{E})^{\vee\vee} = (\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E}$. Но нетрудно видеть, что поскольку пучки плоски над базой $\bar{M}$, то $(\xi, \text{id}_S)_*(\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E} = \mathbb{E}$, следовательно, имеем равенство $(\xi, \text{id}_S)_*(\Phi_* \mathbb{E})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

Для доказательства предложения 1.1 необходимо следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 (пучковый аналог данного в [7; п. 20.2]). Пусть X – алгебраическая схема, F_0, F_1 – локально свободные $\mathcal{O}_X$ -пучки, $\psi: F_1 \rightarrow F_0$ – гомоморфизм $\mathcal{O}_X$ -модулей. Обозначим $\mathcal{F} := \text{coker } \psi$, $r = \text{rank } F_0$. Пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{O}_X$ -модуля $\mathcal{F}$ – это пучок

$$\mathcal{Fitt}^0(\mathcal{F}) = \text{image} \left(\psi': \bigwedge^r F_1 \otimes \bigwedge^r F_0^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X \right),$$

где ψ' – морфизм, ассоциированный с морфизмом ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.1. Образует пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{I} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)$. Пусть $\sigma: \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ – морфизм раздутия схемы Σ в пучке идеалов $\mathcal{I}$. Применим обратный образ σ^* к последовательности, двойственной к (1.1):

$$\sigma^* \mathbb{E}^\vee \longrightarrow \sigma^* E_0^\vee \longrightarrow \sigma^* R \longrightarrow 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma^* R \longrightarrow \sigma^* E_1^\vee \longrightarrow \sigma^* \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma) \longrightarrow 0. \quad (1.3)$$

Обозначим в (1.3)

$$A := \ker(\sigma^* E_1^\vee \rightarrow \sigma^* \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)).$$

Пучок $\mathcal{Fitt}^0(\sigma^* \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma))$ обратим по функториальному свойству $\mathcal{Fitt}$:

$$\mathcal{Fitt}^0(\sigma^* \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Sigma}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)) = (\sigma^{-1} \mathcal{Fitt}^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Sigma}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma))) \cdot \mathcal{O}_{\hat{\Sigma}} = (\sigma^{-1} \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\hat{\Sigma}},$$

где Σ – целая схема. Теперь необходима лемма, принадлежащая А. С. Тихомирову.

ЛЕММА 1.6 (см. [8; лемма 1]). Пусть X – целая нётерова схема и F – ненулевой когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок кручения. Тогда пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0(F)$ обратим тогда и только тогда, когда гомологическая размерность пучка F равна 1.

Применение леммы 1.6 дает

$$\text{hd } \sigma^* \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Sigma}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma) = 1,$$

и пучок $A = \sigma^* R / \text{torsion}(\sigma^* R)$ локально свободен. Отсюда $A^\vee = (\sigma^* R)^\vee$.

Согласно (1.2) получаем точную тройку

$$0 \longrightarrow \sigma^* \mathbb{E}^\vee / \text{torsion}(\sigma^* \mathbb{E}^\vee) \longrightarrow \sigma^* E_0^\vee \longrightarrow \sigma^* R \longrightarrow 0. \quad (1.4)$$

Пусть $\widehat{\mathbb{E}} := (\ker(\sigma^* E_0^\vee \rightarrow A))^\vee$. Этот пучок локально свободен. Согласно (1.4) и лемме о змее имеем точную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \sigma^* \mathbb{E}^\vee / \text{torsion}(\sigma^* \mathbb{E}^\vee) & \longrightarrow & \sigma^* E_0^\vee & \longrightarrow & \sigma^* R \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{E}}^\vee & \longrightarrow & \sigma^* E_0^\vee & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \text{torsion}(\sigma^* R) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Дуализация левой вертикальной тройки и применение прямого образа при морфизме σ приводят к вложению рефлексивных оболочек

$$(\sigma_* \widehat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} \hookrightarrow (\sigma_*(\sigma^* \mathbb{E}^\vee)^\vee)^{\vee\vee}.$$

Теперь напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 (см. [9]). Когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок F *нормален*, если отображение ограничения $F(U) \rightarrow F(U \setminus A)$ биективно для каждого открытого по Зарискому подмножества $U \subset X$ и каждого замкнутого подмногообразия $A \subset U$ коразмерности ≥ 2 .

ЛЕММА 1.8 (см. [10; предложение 1.6.]). *Когерентный пучок на нормальной целой схеме X рефлексивен тогда и только тогда, когда он нормален и не имеет кручения.*

СЛЕДСТВИЕ 1.9. *Пусть $A \subset X$ – замкнутое подмногообразие коразмерности ≥ 2 , $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – когерентные рефлексивные пучки. Если $\mathcal{F}|_{X \setminus A} = \mathcal{G}|_{X \setminus A}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого открытого подмножества $U \subset X$ имеем по нормальности пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ изоморфизмы

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \setminus (A \cap U)) = \mathcal{G}(U \setminus (A \cap U)) = \mathcal{G}(U)$$

и, следовательно, равенство $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.1. Пучки

$$(\sigma_* \widehat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} \hookrightarrow (\sigma_*(\sigma^* \mathbb{E}^\vee)^\vee)^{\vee\vee}$$

и универсальный пучок $\mathbb{E}$ совпадают вне подмножества коразмерности ≥ 3 . Следовательно,

$$(\sigma_* \hat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = (\sigma_*(\sigma^* \mathbb{E}^\vee)^\vee)^{\vee\vee} = \mathbb{E},$$

как и требовалось.

§ 2. Основная конструкция. Доказательство теоремы 0.2

В этом параграфе конструируется новая компактификация схемы модулей как база плоского семейства $\tilde{\Sigma}$ поверхностей. Семейство $\tilde{\Sigma}$ строится с использованием промежуточного раздутья $\hat{\Sigma}$ с локально свободным пучком $\hat{\mathbb{E}}$.

Зафиксируем $\hat{\mathcal{L}}$ – обильный обратимый пучок на схеме $\hat{\Sigma}$. Теперь построим замкнутое вложение схемы $\hat{\Sigma}$ в подходящее многообразие Грассмана G , определенное с помощью локально свободного пучка $\hat{\mathbb{E}}$.

ЛЕММА 2.1. *Существует целое число $m \gg 0$ такое, что:*

- (i) *пучок $\bigwedge^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})$ очень обильен;*
- (ii) *естественное отображение умножения*

$$\bigwedge^r H^0(\hat{\Sigma}, \hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m}) \rightarrow H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigwedge^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right)$$

– эпиморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (i) дается теоремой Серра. Для доказательства пункта (ii) рассмотрим естественное отображение умножения сечений

$$\mu: \bigotimes^r H^0(\hat{\Sigma}, \hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m}) \rightarrow H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigotimes^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right).$$

Согласно [11; пример 1.8.13] для достаточно больших значений m отображение μ – эпиморфизм. Теперь рассмотрим эпиморфизм пучков

$$\bigotimes^r \hat{\mathbb{E}} \twoheadrightarrow \bigwedge^r \hat{\mathbb{E}},$$

и пусть K – его ядро.

Для достаточно большого m имеем $H^1(\hat{\Sigma}, K \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes mr}) = 0$, и отображение

$$H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigotimes^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right) \twoheadrightarrow H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigwedge^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right)$$

сюрьективно. Теперь имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^r H^0(\hat{\Sigma}, \hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m}) & \xrightarrow{\mu} & H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigotimes^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge^r H^0(\hat{\Sigma}, \hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m}) & \longrightarrow & H^0\left(\hat{\Sigma}, \bigwedge^r (\hat{\mathbb{E}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^{\otimes m})\right) \end{array}$$

где все стрелки, кроме нижней, – эпиморфизмы. Следовательно, нижнее отображение – эпиморфизм.

Следующий результат принадлежит Г. Траутманну (не опубликовано).

ЛЕММА 2.2 (см. [5; лемма 5]). *Если локально свободный пучок $\mathcal{E}$ ранга r на проективной схеме X удовлетворяет условиям:*

- (i) *пучок $\bigwedge^r \mathcal{E}$ очень обилен,*
- (ii) *естественное отображение умножения*

$$\bigwedge^r H^0(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^0\left(\widehat{\Sigma}, \bigwedge^r \mathcal{E}\right)$$

– эпиморфизм,

то имеет место замкнутое вложение $j: X \rightarrow G(r, H^0(X, \mathcal{E})^\vee)$ в многообразие Грассмана r -подпространств векторного пространства $H^0(X, \mathcal{E})^\vee$.

Теперь возьмем $\mathcal{E} = \widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ и $X = \widehat{\Sigma}$. Из леммы 2.2 получаем

$$G = G(r, H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m})^\vee)$$

и замкнутое вложение $j: \widehat{\Sigma} \hookrightarrow G$.

Пусть $\mathcal{S}$ – тавтологическое подрасслоение ранга r на грассманиане G . Имеет место равенство пучков

$$\widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m} = j^* \mathcal{S}. \quad (2.1)$$

Пусть $\mathcal{O}(1)$ – положительная образующая в группе Пикара пространства $P(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m})^\vee)$. Образует плюккерovo вложение

$$\text{Pl}: G \hookrightarrow P\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m})^\vee\right).$$

Тогда положительная образующая $\mathcal{O}_G(1)$ группы Пикара грассманиана G дается равенством $\mathcal{O}_G(1) = \text{Pl}^* \mathcal{O}(1)$. Вложение $j: \widehat{\Sigma} \rightarrow G$ индуцирует равенство пучков $\bigwedge^r (\widehat{\mathbb{E}} \otimes \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}) = j^* \mathcal{O}_G(1)$.

Обозначим символом $\mathbb{H}$ схему Гильберта $\text{Hilb}^{p(k)} G$ подсхем в многообразии G , многочлен Гильберта которых равен $p(k)$. Будем говорить, что подсхема $j: Z \hookrightarrow G$ имеет многочлен Гильберта, равный $p(k)$, если и только если $\chi(j^* \mathcal{O}_G(k)) = p(k)$. Согласно общей теории схем Гильберта существует универсальная подсхема $\text{Univ}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H} \times G$. Универсальная подсхема $\text{Univ}(\mathbb{H})$ снабжена двумя проекциями $G \xleftarrow{\text{pr}_G} \text{Univ}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} \mathbb{H}$, индуцированными соответствующими проекциями прямого произведения $\mathbb{H} \times G$. Проекция $\text{pr}_{\mathbb{H}}: \text{Univ}(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}$ – плоский морфизм.

Рассмотрим слой композиции $\widehat{\Sigma} \xrightarrow{\sigma} \Sigma \xrightarrow{\bar{\pi}} \bar{M}$ над точкой $y \in M_0 \subset \bar{M}$. Согласно изоморфизму $\widehat{\Sigma} \supset \widehat{\Sigma}_0 \cong M_0 \times S$ этот слой изоморфен исходной поверхности S и будет обозначаться как $\{y\} \times S$. Заметим, что для любой точки $y \in M_0$ многочлен Гильберта $p(k) = \chi(j^* \mathcal{O}_G(k)|_{\{y\} \times S})$ образа слоя $\{y\} \times S$ при морфизме j не зависит от выбора точки $y \in M_0$. Следовательно, по универсальному свойству схем Гильберта имеет место сохраняющее слои вложение семейства $\widehat{\Sigma}_0$ в универсальную подсхему схемы Гильберта подсхем в многообразии G с тем же многочленом Гильберта $p(k)$:

$$H_0: \widehat{\Sigma}_0 \hookrightarrow \text{Univ}(\mathbb{H}).$$

Обозначим $\tilde{\Sigma}_0 = H_0(\hat{\Sigma}_0)$. Тогда имеется такое локально замкнутое вложение $h_0: M_0 \rightarrow \mathbb{H}$ схемы M_0 в схему Гильберта $\mathbb{H}$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G & \xleftarrow{\text{pr}_G} & \text{Univ}(\mathbb{H}) & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \\ j \uparrow & & \uparrow H_0 & & \uparrow h_0 \\ \hat{\Sigma}_0 & \xleftarrow{\sim} & \tilde{\Sigma}_0 & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & M_0 \end{array} \quad (2.2)$$

коммутативна, и правый квадрат расслоенный.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Существуют:*

- 1) подсемейство $\tilde{\Sigma} \subset \text{Univ}(\mathbb{H})$,
- 2) замкнутая подсхема $\tilde{M} \subset \mathbb{H}$,

такие, что:

- (i) имеет место коммутативная диаграмма с правым расслоенным квадратом

$$\begin{array}{ccccc} G & \xleftarrow{\text{pr}_G} & \text{Univ}(\mathbb{H}) & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H} \\ j \uparrow & & \uparrow \tilde{H} & & \uparrow \tilde{h} \\ \hat{\Sigma} & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{M} \end{array} \quad (2.3)$$

- (ii) схема $\tilde{\Sigma}$ содержит открытое подмножество $\tilde{\Sigma}_0$, изоморфное подсхеме Σ_0 ,
- (iii) диаграмма (2.3) ограничивается на подсхему $\tilde{\Sigma}_0$ до (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{M}$ – замыкание образа схемы M_0 в схеме Гильберта $\mathbb{H}$. Семейство $\tilde{\Sigma}$ – это расслоенное произведение $\tilde{\Sigma} = \text{Univ}(\mathbb{H}) \times_{\mathbb{H}} \tilde{M}$. Этим обеспечивается правый расслоенный квадрат диаграммы (2.3). Теперь нужна следующая

ЛЕММА 2.4. $\tilde{\Sigma}$ – приведенная неприводимая схема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что схема $\tilde{\Sigma}$ изоморфна теоретико-схемному замыканию образа $H_0(\tilde{\Sigma}_0)$. Пусть C_0 – гладкая пунктированная кривая в подсхеме $\tilde{M}_0 \subset \tilde{M}$, C – ее теоретико-схемное замыкание в схеме $\tilde{M}$. Тогда $\tilde{\pi}^{-1}C_0$ – обратный образ в схеме $\text{Univ}(\mathbb{H})$. В силу [12; гл. III, предложение 9.8] его теоретико-схемное замыкание $\tilde{\pi}^{-1}C_0$ – плоская над базой C подсхема в $\text{Univ}(\mathbb{H})$ и $\tilde{\pi}^{-1}C_0 = \tilde{\pi}^{-1}C$. Теперь имеется композиция замкнутых вложений $\tilde{\pi}^{-1}C \hookrightarrow \overline{H_0(\Sigma_0)} \hookrightarrow \tilde{H}(\tilde{\Sigma})$, и слои схемы $\tilde{\pi}^{-1}C$ совпадают с соответствующими слоями образа $\tilde{H}(\tilde{\Sigma})$. Следовательно, схемы $\overline{H_0(\Sigma_0)}$ и $\tilde{H}(\tilde{\Sigma})$ послойно равны. Пусть $\iota: \overline{H_0(\Sigma_0)} \hookrightarrow \tilde{H}(\tilde{\Sigma})$ – замкнутое вложение. Возьмем ассоциированную точную $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}$ -тройку

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}} \longrightarrow \iota_* \mathcal{O}_{\overline{H_0(\Sigma_0)}} \longrightarrow 0.$$

Многочлены Гильберта слоев схем $\overline{H_0(\Sigma_0)}$ и $\tilde{H}(\tilde{\Sigma})$ равны, и, следовательно, схема $\overline{H_0(\Sigma_0)}$ является плоской на $\tilde{M}$. Тогда оба пучка $\mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}$ и $\iota_* \mathcal{O}_{\overline{H_0(\Sigma_0)}}$ плоски над схемой $\tilde{M}$. Значит, пучок $\mathcal{K}$ плоский с общим слоем, равным нулю. Теперь имеем $\mathcal{K} = 0$, и ι – изоморфизм.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.3. Очевидно, поскольку морфизм pr_G собственный, то образ $\mathrm{pr}_G(\tilde{H}(\tilde{\Sigma}))$ замкнут в $j(\hat{\Sigma})$. Также имеет место равенство на открытых подмножествах $\mathrm{pr}_G(H_0(\tilde{\Sigma}_0)) = j(\hat{\Sigma}_0)$. В силу леммы 2.4 имеем равенство полных образов $\mathrm{pr}_G(\tilde{H}(\tilde{\Sigma})) = j(\hat{\Sigma})$, следовательно, индуцированный морфизм $\hat{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$, что и доказывает предложение.

Обозначим через $(\tilde{h}, j): \tilde{M} \times \tilde{\Sigma} \hookrightarrow \mathbb{H} \times G$ морфизм вложения, индуцированный вложениями на сомножителях.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Подсхема $\tilde{H}(\tilde{\Sigma})$ в семействе $\mathrm{Univ}(H)$ может быть представлена следующим образом:

$$\tilde{H}(\tilde{\Sigma}) = (\tilde{h}(\tilde{M}) \times G) \cap \mathrm{Univ}(\mathbb{H}) = (\tilde{h}, j)(\tilde{M} \times \tilde{\Sigma}) \cap \mathrm{Univ}(\mathbb{H}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует непосредственно из построения схемы $\tilde{\Sigma}$. Второе равенство следует из первого в силу $\mathrm{pr}_G(\tilde{H}(\tilde{\Sigma})) = j(\hat{\Sigma})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 (см. [5; предложение 9]). Имеет место бирациональный морфизм компактификаций $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{\Sigma} & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \tilde{\pi} \downarrow & & & & \downarrow \bar{\pi} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} & & \end{array}$$

коммутативна.

Рассмотрим замкнутое вложение $\delta: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M} \times \tilde{\Sigma}$, определенное как композиция диагонального вложения $\tilde{\Sigma} \hookrightarrow \tilde{\Sigma} \times \tilde{\Sigma}$ и проекции $\tilde{\pi}$ на первом сомножителе, и композицию

$$d: \tilde{M} \times \tilde{\Sigma} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \hat{\pi})} \tilde{M} \times \hat{\Sigma} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma)} \tilde{M} \times \Sigma,$$

индуцированную морфизмами $\hat{\pi}$ и σ и тождественным отображением на первом сомножителе. Напомним (см. [12; гл. II, упражнение 3.11, (d)]), что теоретико-схемный образ приведенной неприводимой схемы при морфизме есть приведенная схемная структура на замыкании ее теоретико-множественного образа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Теоретико-схемный образ $(d \circ \delta)(\tilde{\Sigma})$ изоморфен произведению $\tilde{M} \times S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим по определению $\tilde{\Delta} := \delta(\tilde{\Sigma})$, $\hat{\Delta} := (\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \hat{\pi})(\tilde{\Delta})$, $\Delta := (\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma)(\hat{\Delta}) = (d \circ \delta)(\tilde{\Sigma})$ как схемные образы. Очевидно, $\tilde{\Delta} \cong \tilde{\Sigma}$. В силу следствия 2.5

$$\hat{\Delta} \cong (\tilde{h}, j)(\tilde{M} \times \tilde{\Sigma}) \cap \mathrm{Univ}(\mathbb{H}) \cong \tilde{\Delta},$$

и $(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \hat{\pi})|_{\tilde{\Delta}}$ – изоморфизм.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \Sigma & \xrightarrow{=} & \tilde{M} \times \bar{M} \times S \\ i_{\Delta} \uparrow & & \downarrow \mathrm{pr}_{13} \\ \Delta & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{13}|_{\Delta}} & \tilde{M} \times S \end{array}$$

в которой левая вертикальная стрелка i_Δ – замкнутое вложение, и образуем замкнутое вложение

$$((\mathrm{id}_{\tilde{M}} \times \varphi), \mathrm{id}_S): \tilde{M} \times S \rightarrow \tilde{M} \times \bar{M} \times S \cong \tilde{M} \times \Sigma.$$

По построению морфизма φ имеет место схемное равенство

$$((\mathrm{id}_{\tilde{M}} \times \varphi), \mathrm{id}_S)(\tilde{M} \times S) = \Delta,$$

и $\mathrm{pr}_{13}|_\Delta$ – изоморфизм.

Семейство поверхностей $\tilde{\Sigma}$ естественным образом снабжено локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}} = \tilde{H}^* \mathrm{pr}_G^* \mathcal{S} \otimes \hat{\pi}^* \hat{\mathcal{L}}^{\otimes(-m)}$. Очевидно, в силу (2.1)

$$\tilde{\mathbb{E}} = \hat{\pi}^* j^* \mathcal{S} \otimes \hat{\pi}^* \hat{\mathcal{L}}^{\otimes(-m)} = \hat{\pi}^* \hat{\mathbb{E}}.$$

Мы используем обозначение $\Phi = \sigma \circ \hat{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Имеет место равенство пучков $(\Phi_* \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно локальной свободе пучка $\hat{\mathbb{E}}$ и определению морфизма Φ

$$\Phi_* \tilde{\mathbb{E}} = \Phi_*(\hat{\pi}^* \hat{\mathbb{E}}) = (\sigma \circ \hat{\pi})_* \hat{\pi}^* \hat{\mathbb{E}} \hookrightarrow \sigma_* \hat{\mathbb{E}}.$$

Таким образом, применяя следствие 1.9 и предложение 1.1, имеем

$$(\Phi_* \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = (\sigma_* \hat{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathbb{E}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Морфизм φ имеет явное описание*

$$\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{y} \mapsto (((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \Phi)_* \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} |_\Delta) |_{\tilde{y} \times S} \quad (2.5)$$

в силу изоморфизма $\Delta \cong \tilde{M} \times S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.8 имеем

$$((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \Phi)_* \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes (\Phi_* \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} = \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}.$$

Образуем ограничение и применим изоморфизм $\Delta \cong \tilde{M} \times S$:

$$\begin{aligned} (((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \Phi)_* \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}})^{\vee\vee} |_\Delta) |_{\{\tilde{y}\} \times S} &= ((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}) |_\Delta) |_{\{\tilde{y}\} \times S} \\ &= k_{\tilde{y}} \boxtimes \mathbb{E} |_{\{\varphi(\tilde{y})\} \times S} = k_{\tilde{y}} \boxtimes E_{\varphi(\tilde{y})}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Семейство поляризаций $\mathcal{H}$ на слоях семейства $\tilde{\Sigma}$, указанное в теореме 0.2, дается очевидным соотношением

$$\mathcal{H} = \tilde{H}^*(\mathcal{L}_{\mathbb{H}} \boxtimes \mathcal{O}_G(1) |_{\mathrm{Univ}(\mathbb{H})}),$$

где $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}$ – любой обратимый пучок на схеме Гильберта $\mathbb{H}$.

§ 3. Структура проекции $\tilde{\pi}$: доказательство теоремы 0.3

В этом параграфе строится разложение проекции $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M}$ в композицию раздутья и тривиальной проекции и исследуется структура произвольного слоя проекции $\tilde{\pi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Семейство $\tilde{\Sigma}$ является раздутьем схемы $\tilde{M} \times S \cong \Delta$ в пучке идеалов $\mathcal{J} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Delta}^1((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$.

Рассмотрим морфизм $(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma): \tilde{M} \times \hat{\Sigma} \rightarrow \tilde{M} \times \Sigma$ и обозначим через $i_{\hat{\Delta}}$ замкнутое вложение $\hat{\Delta} \hookrightarrow \tilde{M} \times \hat{\Sigma}$.

Доказательство предложения 3.1 дается леммами 3.2 и 3.3.

ЛЕММА 3.2. Ограничение $(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma)|_{\hat{\Delta}}$ морфизма

$$(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma): \tilde{M} \times \hat{\Sigma} \rightarrow \tilde{M} \times \Sigma$$

на подсхему $\hat{\Delta}$ равно морфизму раздутья в пучке идеалов

$$\mathcal{J} = (i_\Delta^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{J})) \cdot \mathcal{O}_\Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образует расслоенное произведение $\Delta_1 = \Delta \times_\Sigma \hat{\Sigma}$, и пусть $i_1: \Delta_1 \hookrightarrow \tilde{M} \times \hat{\Sigma}$ – замкнутое вложение. Тогда по универсальному свойству расслоенных произведений существует единственный морфизм $r: \hat{\Delta} \rightarrow \Delta_1$ такой, что треугольник

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \xrightarrow{r} & \Delta_1 \\ & \searrow i_{\hat{\Delta}} & \downarrow i_1 \\ & & \tilde{M} \times \hat{\Sigma} \end{array} \quad (3.1)$$

коммутативен.

Теперь обозначим через Δ' раздутье схемы Δ в пучке идеалов $\mathcal{J}$, и пусть $\sigma': \Delta' \rightarrow \Delta$ – морфизм раздутья. По универсальному свойству раздутья (см. [12; гл. II, следствие 7.15]) существует единственный морфизм (замкнутого вложения) $i': \Delta' \rightarrow \tilde{M} \times \hat{\Sigma}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \hat{\Sigma} & \xrightarrow{(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma)} & \tilde{M} \times \Sigma \\ \uparrow i' & & \uparrow i_\Delta \\ \Delta' & \xrightarrow{\sigma'} & \Delta \end{array}$$

коммутативна. Тогда по универсальному свойству расслоенных произведений найдется единственный морфизм $s: \Delta' \rightarrow \Delta_1$, входящий в коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \Delta' & \xrightarrow{s} & \Delta_1 \\ & \searrow i' & \downarrow i_1 \\ & & \tilde{M} \times \hat{\Sigma} \end{array} \quad (3.2)$$

Поскольку морфизмы $i_{\hat{\Delta}}$ и i_1 в (3.1) и i' и i_1 в (3.2) – замкнутые вложения, то морфизмы r и s – также замкнутые вложения. Заметим, что схемы Δ' и $\hat{\Delta}$ совпадают на открытых подмножествах, изоморфных произведению $M_0 \times S$. Схема $\hat{\Delta}$ приведена и неприводима по построению. Схема Δ' приведена и неприводима как раздутие приведенной и неприводимой схемы Δ . Следовательно, $\hat{\Delta} = \Delta'$ и $(\text{id}_{\tilde{M}}, \sigma)|_{\hat{\Delta}} = \sigma'$, что доказывает лемму 3.2.

ЛЕММА 3.3. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{J} = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Delta}}^1((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Delta}}^1((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) = i_{\Delta}^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}).$$

Следующая точная последовательность получается непосредственно из (1.1):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Delta}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, можно применить к (1.1) функтор $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\cdot, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma})$ перед формированием прямого образа i_{Δ}^* . Это приводит к комплексу

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) &\rightarrow i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \\ &\rightarrow i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \rightarrow i_{\Delta}^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

точному справа. Легко проверяется, что морфизмы замены базы (локально свободных пучков)

$$r_{\ell}: i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_{\ell}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_{\ell}|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}), \quad \ell = 0, 1,$$

являются изоморфизмами. Теперь имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) & \longleftarrow & i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) & = & i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) & = & i_{\Delta}^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Delta}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}) & \longleftarrow & i_{\Delta}^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

с точным левым столбцом. Коммутативностью обеспечивается изоморфизм

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Delta}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \cong i_\Delta^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}).$$

Очевидно,

$$i_\Delta^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M} \times \Sigma}) = i_\Delta^*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Sigma}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)).$$

Завершает доказательство применение функториального свойства идеала Фиттинга:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Delta}^1(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)) &= \mathcal{F}itt^0(i_\Delta^*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Sigma}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma))) \\ &= i_\Delta^{-1}(\mathcal{F}itt^0(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes (\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Sigma}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)))) \cdot \mathcal{O}_\Delta = i_\Delta^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_\Delta. \end{aligned}$$

По леммам 3.2 и 3.3 проекция $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M}$ пропускается через вложение $\hat{\sigma}$ согласно коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Sigma} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\Delta} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \hat{\sigma} \\ \tilde{M} & \xleftarrow{\text{pr}_{\tilde{M}}} & \Delta \end{array} \quad (3.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Слой проекции $\tilde{\pi}$ над общей точкой $\tilde{y} \in \tilde{M}_0$ изоморфен поверхности S . Слой над специальной точкой $\tilde{y} \in \tilde{M} \setminus \tilde{M}_0$ – приведенная поверхность, содержащая компоненту, изоморфную раздутию поверхности S в пучке нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^1(E_{\varphi(\tilde{y})}, \mathcal{O}_S))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай общего слоя очевиден. Обозначим морфизмы вложений слоев как $i_{\tilde{y}}: \{\tilde{y}\} \times S \hookrightarrow \Delta$ и $i_{\tilde{y}}: \{\tilde{y}\} \times S \hookrightarrow \Sigma$. Тогда по универсальному свойству раздутий имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \xleftarrow{\quad} & \hat{S}_{\tilde{y}} \\ \hat{\sigma} \downarrow & & \downarrow \hat{\sigma}_{\tilde{y}} \\ \Delta & \xleftarrow{i_{\tilde{y}}} & \{\tilde{y}\} \times S \end{array}$$

где $\hat{S}_{\tilde{y}}$ означает слой $\{\tilde{y}\} \times S$, раздутый в пучке идеалов $i_{\tilde{y}}^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\} \times S}$, и $\hat{\sigma}_{\tilde{y}}$ – соответствующий морфизм раздутия. Образова расслоенное произведение $\hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S)$, с помощью изоморфизма $\hat{\Delta} \cong \tilde{\Sigma}$ и диаграммы (3.3) заключаем, что произведение $\hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S)$ равно слою проекции $\tilde{\pi}$ и, следовательно, является поверхностью. В этой ситуации поверхность $\hat{S}_{\tilde{y}}$ является компонентой в слое проекции $\tilde{\pi}$.

Наконец, стандартные операции приводят пучок идеалов $i_{\tilde{y}}^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\} \times S}$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} i_{\tilde{y}}^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\} \times S} &= i_{\tilde{y}}^{-1}(i_\Delta^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_\Delta) \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\} \times S} \\ &= k_{\tilde{y}} \boxtimes i_{\tilde{y}}^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\} \times S} = k_{\tilde{y}} \boxtimes \mathcal{F}itt^0(i_{\tilde{y}}^* \mathcal{E}xt^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma)). \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление с точной тройкой (1.1) и функторами $i_{\bar{y}}^*$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Sigma}(\cdot, \mathcal{O}_\Sigma)$ и $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\cdot, \mathcal{O}_S)$ приводит к формуле замены базы

$$i_{\bar{y}}^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_\Sigma}^1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_\Sigma) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^1(E_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{\{\bar{y}\} \times S}).$$

Следовательно, неприводимая компонента $\widehat{S}_{\bar{y}}$ слоя проекции $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{M}$ изоморфна раздутию поверхности S в пучке идеалов Фиттинга

$$\mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^1(E_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{\{\bar{y}\} \times S})).$$

Когда идеал Фиттинга $\mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^1(E_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{\{\bar{y}\} \times S}))$ нетривиален, эта компонента дает слой не целиком.

ПРИМЕР 3.5. Рассмотрим тривиальное однопараметрическое семейство поверхностей $\Sigma = \mathbb{P}^1 \times S$. Каждый из его слоев помечен символом $\bar{y} \in k \cup \{\infty\}$. Пусть семейство $\mathbb{P}^1 \times S$ снабжено плоским семейством $\mathbb{E}$ пучков со следующим свойством: пучок $E_{\bar{y}} := \mathbb{E}|_{\{\bar{y}\} \times S}$ локально свободен тогда и только тогда, когда $\bar{y} \in k$, и для $\bar{y} = \infty$ имеем не локально свободный пучок $E_\infty := \mathbb{E}|_{\{\infty\} \times S}$ с особенностью в точке $(\bar{y}, x) \in \mathbb{P}^1 \times S$ такой, что имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow E_\infty \rightarrow E_\infty^{\vee\vee} \rightarrow k_{(\bar{y}, x)} \rightarrow 0.$$

В этом случае пучок идеалов $\mathcal{I}$ равен пучку максимальных идеалов приведенной точки $(\bar{y}, x) \in \mathbb{P}^1 \times S$. По свойству однопараметрических семейств (см. [12; гл. III, предложение 9.7]) раздутие $\tilde{\Sigma}$ является плоской схемой над базой $\mathbb{P}^1$; следовательно, одномерная база $\mathbb{P}^1$ не претерпевает эффективного бирационального преобразования, т.е. $\varphi: \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$. Проекция $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет следующие слои: при $\bar{y} \in k$ – слой $\tilde{\pi}^{-1}(\bar{y}) \cong S$; при $\bar{y} = \infty$ соответствующий слой $\tilde{\pi}^{-1}(\infty)$ – приводимая поверхность, состоящая из двух компонент. Одна ее компонента изоморфна раздутию поверхности S в пучке идеалов $\mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_S}^1(E_\infty, \mathcal{O}_{\{\infty\} \times S})$ приведенной точки x , а вторая изоморфна проективной плоскости $\mathbb{P}^2$.

§ 4. Инвариантность

Основная конструкция, проведенная в предыдущих параграфах, использует обратимый пучок $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ на промежуточном раздутии $\widehat{\Sigma}$. Пучок $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ обеспечивает замкнутое вложение схемы $\widehat{\Sigma}$ в подходящее многообразие Грассмана, которое само зависит от $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$. В этом параграфе доказывается независимость многообразия $\tilde{M}$ и морфизма $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ для $m \gg 0$ от выбора обратимого пучка $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m} \in \text{Pic } \widehat{\Sigma}$.

Напомним, что K есть ядро эпиморфизма локально свободных $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}$ -пучков

$$\bigotimes^r \widehat{\mathbb{E}} \rightarrow \bigwedge^r \widehat{\mathbb{E}}.$$

Согласно леммам 2.1 и 2.2 обильный пучок $\mathcal{L} = \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ поставляет вложение схемы $\widehat{\Sigma}$ в подходящее многообразие Грассмана, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) пучок $\bigwedge^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})$ очень обилен;
- (2) $\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}$ порожден глобальными сечениями;
- (3) отображение $\bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \rightarrow H^0(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}))$ сюръективно;
- (4) $H^1(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{L}^{\otimes r}) = 0$.

ЛЕММА 4.1. Из условий (2) и (3) следует, что любая тензорная степень $\bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})$ порождена глобальными сечениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, композиция

$$\bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \rightarrow H^0\left(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})\right) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \rightarrow \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})$$

должна быть сюръективной, следовательно, второе отображение сюръективно.

Пусть $\widehat{\mathcal{M}}$ – другой обильный обратимый $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}$ -пучок, причем его m' -я тензорная степень $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}}^{\otimes m'}$ удовлетворяет условиям (1)–(4).

ЛЕММА 4.2. Для любых двух обильных обратимых пучков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условиям (1)–(4), если:

- (i) $H^1(\widehat{\Sigma}, K' \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) = 0$ для $K' = \ker(H^0(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \rightarrow \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}))$,
- (ii) $\mathcal{M}$ порожден глобальными сечениями,
- (iii) отображение $\bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M}^{\otimes r})$ сюръективно,
- (iv) $H^i(\widehat{\Sigma}, \mathcal{L}^{\otimes r}) = 0$ для всех $i > 0$,
- (v) $K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}$ порожден глобальными сечениями,
- (vi) K_1 – ядро канонического эпиморфизма $H^0(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \twoheadrightarrow K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}$ и $H^i(\widehat{\Sigma}, K_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes r}) = 0$ для всех $i > 0$,

то пучок $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ также удовлетворяет условиям (1)–(4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Требования (i)–(v) могут быть удовлетворены при увеличении показателей m и m' , если это необходимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. (1) Поскольку $\bigwedge^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})$ очень обилен и $\mathcal{M}$ порожден глобальными сечениями, то $\bigwedge^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})$ очень обилен.

(2) Умножая тензорно канонический эпиморфизм

$$H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}$$

на $\mathcal{M}$ и образуя глобальные сечения, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \otimes H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} & \longrightarrow & H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \end{array}$$

Теперь из условия (ii) следует, что диагональная стрелка – эпиморфизм, следовательно, вертикальная также является эпиморфизмом.

(3) Рассмотрим эпиморфизм

$$\bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \rightarrow H^0\left(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})\right).$$

Умножая его тензорно на $\mathcal{M}^{\otimes r}$ и образуя глобальные сечения, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \right) \otimes H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M}^{\otimes r}) & \xrightarrow{b} & H^0\left(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r (\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L})\right) \otimes H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M}^{\otimes r}) \\
 \uparrow a & & \downarrow c \\
 \bigotimes^r (H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}) \otimes H^0(\widehat{\Sigma}, \mathcal{M})) & \xrightarrow{d} & H^0\left(\widehat{\Sigma}, \bigotimes^r (\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})\right) \\
 \downarrow & \nearrow f & \\
 \bigotimes^r H^0(\widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) & &
 \end{array}$$

Сюръективность отображения c следует из п. (i) и леммы 4.1, сюръективность отображения b обеспечена условием (3) для пучка $\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}$, отображение a сюръективно в силу п. (iii). Следовательно, отображение d сюръективно, и, таким образом, f сюръективно.

(4) Возьмем точную тройку

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow H^0(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \rightarrow K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r} \rightarrow 0,$$

умножим ее тензорно на $\mathcal{L}^{\otimes r}$ и образуем отрезок длинной точной когомологической последовательности

$$\begin{aligned}
 \dots &\rightarrow H^0(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) \otimes H^1(\widehat{\Sigma}, \mathcal{L}^{\otimes r}) \\
 &\rightarrow H^1(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{L}^{\otimes r} \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) \rightarrow H^2(\widehat{\Sigma}, K_1 \otimes \mathcal{L}^{\otimes r}) \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Согласно пп. (iv) и (vi), примененным к пучку $\mathcal{L}$, имеем

$$H^1(\widehat{\Sigma}, K \otimes \mathcal{L}^{\otimes r} \otimes \mathcal{M}^{\otimes r}) = 0.$$

Образуем пучки $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$. По лемме 4.2 все конструкции могут быть проделаны для обоих пучков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Пусть $\widetilde{M}_i$ – новая компактификация модулей рассматриваемых пучков, а $\widetilde{\Sigma}_i$ – соответствующее семейство поверхностей, построенное с использованием пучка $\mathcal{L}_i$ для $i = 1, 2$. По построению имеются изоморфные открытые подмножества $\widetilde{M}_{01} \subset \widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_{02} \subset \widetilde{M}_2$ такие, что $\widetilde{M}_{01} \cong \widetilde{M}_{02} \cong M_0$. Предположим, что для любой точки $y \in M_0$ пучки $\mathcal{L}_i$ послойно принадлежат лучу, определяемому поляризацией H в группе Нерона–Севери поверхности S . Это означает, что

(*) для $i = 1, 2$ существует положительное целое число k_i , зависящее от i , такое, что для любой точки $y \in M_0$ имеет место равенство

$$(\mathcal{L}_i|_{\widetilde{\Sigma}_0})|_{\{y\} \times S} = H^{\otimes k_i}.$$

Цель дальнейших рассуждений – доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Имеет место изоморфизм $\widetilde{M}_1 \cong \widetilde{M}_2$.*

Для доказательства необходимы две леммы.

ЛЕММА 4.5. *Имеет место замкнутое вложение многообразий Грассмана $\gamma: G_1 \rightarrow G_2$ такое, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\gamma} & G_2 \\ & \nwarrow j_1 \quad \nearrow j_2 & \\ & \widehat{\Sigma} & \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многообразия Грассмана

$$G_i = G(r, H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_i)),$$

их плюккеровы вложения

$$\text{Pl}_i: G_i \rightarrow P\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_i)\right)$$

и замкнутые вложения $j_i: \widehat{\Sigma} \hookrightarrow G_i$, определяемые соответствующими пучками $\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_i$. Зафиксируем сечение $s: \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}} \rightarrow \mathcal{M}$. Тензорным умножением на это сечение индуцирован мономорфизм пучков $(\otimes s): \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_1 \hookrightarrow \widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_2$. Образуя глобальные сечения и формируя внешнюю степень, получаем вложение проективных пространств

$$P(\otimes s^{\otimes r}): P\left(\bigwedge^r (H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_1))\right) \hookrightarrow P\left(\bigwedge^r (H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_2))\right)$$

вместе с замкнутым вложением γ многообразий Грассмана такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} P\left(\bigwedge^r (H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_1))\right) & \xrightarrow{P(\otimes s^{\otimes r})} & P\left(\bigwedge^r (H^0(\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_2))\right) \\ \text{Pl}_1 \uparrow & & \uparrow \text{Pl}_2 \\ G_1 & \xrightarrow{\gamma} & G_2 \end{array}$$

По построению вложение γ совместимо с вложениями $j_i: \widehat{\Sigma} \rightarrow G_i$ в том смысле, что $j_2 = \gamma \circ j_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. *Для $p_i(k) = \chi(j_i^* \mathcal{O}_{G_i}(k)|_{\{y_0\} \times S})$, $i = 1, 2$, имеется замкнутое вложение схем Гильберта $\text{Hilb}^{p_1(k)}(G_1) \hookrightarrow \text{Hilb}^{p_2(k)}(G_2)$, индуцированное вложением γ многообразий Грассмана.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для подходящего положительного числа ℓ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} j_1^* \mathcal{O}_{G_1}(1) &= \bigwedge^r (\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_1), \\ j_2^* \mathcal{O}_{G_2}(1) &= \bigwedge^r (\widehat{\mathbb{E}} \otimes \mathcal{L}_2), \\ \gamma^* \mathcal{O}_{G_2}(1) &= \mathcal{O}_{G_1}(\ell). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Теперь рассмотрим общий слой $\{y_0\} \times S \hookrightarrow \widehat{\Sigma}_0 \subset \widehat{\Sigma}$. Соответствующий многочлен Гильберта имеет вид $p_i(k) = \chi(j_i^* \mathcal{O}_{G_i}(k)|_{\{y_0\} \times S})$. Следовательно, согласно равенству (4.1) имеем

$$\begin{aligned} p_2(k) &= \chi(j_2^* \mathcal{O}_{G_2}(k)|_{\{y_0\} \times S}) = \chi(j_1^* \gamma^* \mathcal{O}_{G_2}(k)|_{\{y_0\} \times S}) \\ &= \chi(j_1^* \mathcal{O}_{G_1}(\ell k)|_{\{y_0\} \times S}) = p_1(k\ell). \end{aligned}$$

Теперь имеется индуцированное замкнутое вложение схем Гильберта

$$\mathrm{Hilb}^{p_1(k)}(G_1) \hookrightarrow \mathrm{Hilb}^{p_2(k)}(G_2).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.4. Обозначим $\mathbb{H}_i = \mathrm{Hilb}^{p_i(k)}(G_i)$ для $i = 1, 2$ и рассмотрим композицию

$$h_{02}: M_0 \xrightarrow{h_{01}} \mathbb{H}_1 \hookrightarrow \mathbb{H}_2.$$

Очевидно, замыкания $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ образов схемы M_0 в обеих схемах Гильберта $\mathbb{H}_1 \hookrightarrow \mathbb{H}_2$ совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Для любых двух обильных обратимых $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}}$ -пучков $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$, $m \gg 0$, и $\widehat{\mathcal{M}}^{\otimes m'}$, $m' \gg 0$, удовлетворяющих условиям (1)–(4) и (*), соответствующие схемы $\widetilde{M}$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L} = \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ и $\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{M}}^{\otimes m'}$ – обратимые пучки требуемого вида. Полагая $\widehat{\mathcal{L}}_1 = \mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ и применяя предложение 4.4, имеем изоморфизм компактификаций $\widetilde{M}_1 \cong \widetilde{M}_2$. Полагая $\widehat{\mathcal{L}}'_1 = \mathcal{M}$ и $\widehat{\mathcal{L}}'_2 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$, получаем изоморфизм соответствующих компактификаций $\widetilde{M}'_1 \cong \widetilde{M}'_2$. Этим доказывается изоморфизм $\widetilde{M}_1 \cong \widetilde{M}'_1$.

Из построения и доказательства предложения 4.4 имеем очевидное

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Морфизм $\varphi: \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ не зависит от выбора пучка $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$.

Автор выражает искреннюю благодарность Институту Миттаг-Леффлера (г. Дьюрскольм, Швеция), в котором была выполнена большая часть настоящей работы, за гостеприимство, поддержку и вдохновляющую атмосферу. Также автор глубоко благодарна Торстену Экедалу в Университете Стокгольма и Рою Чилнесу в Королевской Высшей технической школе (г. Стокгольм, Швеция) за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] M. Maruyama, “Moduli of stable sheaves. II”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:3 (1978), 557–614.
- [3] G. Ellingsrud, L. Göttsche, “Variation of moduli space and Donaldson invariants under change of polarization”, *J. Reine Angew. Math.*, **467** (1995), 1–49.

- [4] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [5] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756–769; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a surface in the Hilbert scheme”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 677–690.
- [6] Н. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I”, *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 109–203.
- [7] D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1995.
- [8] А. С. Тихомиров, “Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:6 (1997), 153–180; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “The variety of complete pairs of zero-dimensional subschemes of an algebraic surface”, *Izv. Math.*, **61**:6 (1997), 1265–1291.
- [9] W. Barth, “Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$ ”, *Math. Ann.*, **226**:2 (1977), 125–150.
- [10] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
- [11] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, I. Classical setting: line bundles and linear series, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [12] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.

Н. В. Тимофеева (N. V. Timofeeva)

Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского;

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступила в редакцию

15.08.2007 и 13.03.2008