Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 12, 53–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:49:14

УДК 517.958:531.327

С. А. Назаров

Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости

Рассматриваются задачи линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости в полупространстве или бесконечном трехмерном каньоне. Найдены семейства погруженных или полупогруженных тел, параметризованные некоторым линейным размером $h > 0$ и обладающие следующим свойством: для любого $d > 0$ и любого натурального N найдется такое $h(d, N) > 0$, что при $h \in (0, h(d, N)]$ на сегменте $[0, d]$ непрерывного спектра оператора соответствующей задачи существует не менее N собственных чисел, которым отвечают ловушечные моды, т.е. решения однородной задачи, экспоненциально затухающие на бесконечности и обладающие конечной энергией.

Библиография: 38 названий.

§ 1. Постановка задачи

В полупространстве $\mathbb{R}_-^3 = \{x : x_3 < 0\}$ рассмотрим периодическое семейство областей

$$\Theta_k = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2 - 2lk, x_3) \in \Theta\}, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{Z} := \{0, 1, 2, \dots\}$, $2l > 0$ – длина периода, а эталонное открытое, но не обязательно связное множество Θ расположено в полуслое $\Sigma = \{x : |x_2| < l, x_3 < 0\}$ и его граница θ может иметь общие участки с полуплоскостями $\sigma_{\pm} = \{x : x_2 = \pm l, x_3 < 0\}$ и верхним основанием $\sigma = \{x : |x_2| < l, x_3 = 0\}$ полуслоя. Тело $\bar{\Theta} = \Theta \cup \theta$ считаем компактным и предполагаем, что область $\mathbb{R}_-^3 \setminus \bar{\Theta}$ имеет липшицеву границу.

Рассмотрим спектральную задачу линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости (см., например, [1]), которую ввиду указанной $2l$ -периодичности семейства областей Θ_k поставим на множестве $\Xi = \Sigma \setminus \bar{\Theta}$: потенциал скоростей Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$-\Delta_x \Phi(x) = 0, \quad x \in \Xi, \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \theta^0 := \theta \setminus (\bar{\sigma} \cup \sigma_+ \cup \sigma_-), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x) = \lambda \Phi(x), \quad x \in \sigma^0 := \sigma \setminus \theta. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06–01–257).

Здесь λ – спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты гармонических колебаний, а $\partial/\partial n$ – производная вдоль внешней нормали, причем $\partial/\partial n = \partial/\partial x_3$ на σ^0 . Соотношения (2)–(4) дополнены условиями периодичности на поверхностях $\sigma_{\pm}^0 = \sigma_{\pm} \setminus \theta$; эти условия в явном виде не приводим. Нормаль n определена почти всюду на липшицевой поверхности θ^0 , однако из-за возможных иррегулярностей границы задачу (2)–(4) понимаем как следующее интегральное тождество (см. [2]):

$$(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_{\Xi} = \lambda(\Phi, \Psi)_{\sigma^0}, \quad \Psi \in C_{c,\text{per}}^{\infty}(\bar{\Xi}). \quad (5)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$; $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi)$, скалярном или векторном, обычно вещественном; $C_{c,\text{per}}^{\infty}(\bar{\Xi})$ – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций, имеющих компактные носители и являющихся $2l$ -периодическими относительно переменной x_2 .

Тело $\bar{\Theta}$ может касаться поверхности жидкости (реальный объект – частично выступать над нею) или быть полностью погружено в нее (см. рис. 1). Области (1) могут являться общими участками границы, т.е. сливаться в одно бесконечное периодическое тело (см. рис. 2, где изображено сечение “бесконечного гребешка” плоскостью $\{x : x_1 = 0\}$, однако на рис. 1 сечения произведены плоскостью $\{x : x_2 = 0\}$).

Рис. 1

Рис. 2

В §2 задача (5) будет переформулирована как абстрактное спектральное уравнение с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве и будет установлено, что его λ -спектр расположен на замкнутой вещественной положительной полуоси $\bar{\mathbb{R}}_+ \subset \mathbb{C}$ (теорема 2). В предположении дополнительной симметрии относительно плоскости $\{x : x_2 = 0\}$, т.е. формально при выполнении равенства

$$\Theta = \{x : (x_1, -x_2, x_3) \in \Theta\}, \quad (6)$$

в §2 рассматривается родственная (2)–(4) смешанная спектральная задача Стеклова на половине $\Xi^+ = \{x \in \Xi : x_2 > 0\}$ множества Ξ с искусственными

условиями Дирихле на поверхностях σ_+^0 и $\xi_0 = \{x \in \Xi : x_2 = 0\}$, а именно,

$$\begin{aligned} -\Delta_x \Phi^+(x) &= 0, \quad x \in \Xi^+, \quad \Phi^+(x) = 0, \quad x \in \sigma_+^0 \cup \xi_0, \\ \frac{\partial \Phi^+}{\partial x_3}(x) &= \lambda^+ \Phi^+(x), \quad x \in \sigma^{0+} = \sigma^0 \cap \partial \Xi^+. \end{aligned} \quad (7)$$

В теореме 3 доказано, что λ -спектр ассоциированного с ней самосопряженного оператора оказывается непрерывным на участке $[\pi^2 l^{-2}, +\infty)$ вещественной оси, но дискретным на полуинтервале $[0, \pi^2 l^{-2}) \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \subset \mathbb{C}$.

Связь рассматриваемых задач в областях Ξ^+ и Ξ состоит в следующем: если λ^+ – собственное число задачи (7), а Φ^+ – отвечающая ему собственная функция из пространства Соболева, то число $\lambda = \lambda^+$ и нечетное продолжение Φ функции Φ^+ по переменной x_2 суть спектральные атрибуты задачи (2)–(4). Это наблюдение используется в § 2 для построения так называемых “ловушечных мод” – решений задачи (2)–(4), обладающих конечной энергией (интегралом Дирихле) и порождающих точечный спектр на непрерывном спектре. Достаточно подробный обзор по ловушечным модам в линейной теории поверхностных волн представлен в [3] (см. также книгу [1]); укажем лишь не упомянутые в [3] признак [4]–[6] и критерий [7], [8] существования экспоненциально затухающих решений формально самосопряженных эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, а также похожие по постановке задачи [9], [10] о дифракции волн на периодическом семействе препятствий.

Отметим отдельно статью [11], где и был предложен прием постановки искусственных условий Дирихле на плоскости геометрической симметрии для образования порога $\lambda_{\#} > 0$, т.е. нижней границы непрерывного спектра, и поиска точечного спектра на полуинтервале $[0, \lambda_{\#})$. Этот прием был модифицирован разными способами в [12], [13] для задач теории упругости, но далее в § 2 применяется в изначальном виде.

Результаты, полученные в работе, отличаются от предшествующих результатов, в частности, тем, что, позволяют при помощи максиминимального принципа (см. [14; теорема 10.2.2]) поместить на сколь угодно малый интервал $(0, d) \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ непрерывного спектра любое наперед заданное количество собственных чисел, порождающих ловушечные моды. Это делается посредством варьирования параметра h во вспомогательной спектральной задаче Стеклова на параллелепипеде

$$\Omega = \{x : 0 < x_i < a_i, 0 > x_3 > -h\} \subset \Xi. \quad (8)$$

В § 2 предполагается, что нижнее основание параллелепипеда лежит на поверхности θ тела $\bar{\Theta}$, т.е.

$$\omega_- = \{x : 0 < x_i < a_i, i = 1, 2; x_3 = -h\} \subset \theta = \partial \bar{\Theta}. \quad (9)$$

Такие параллелепипеды нетрудно обнаружить на рис. 1, 2.

В § 3 статьи исследуются неоднородные задачи (2)–(4) и (7), а полученные результаты позволяют сделать окончательные выводы о строении спектров их операторов. Несмотря на то, что геометрическая форма области Σ (полуслой)

отличается от допустимых в общей теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами (конические точки, ребра и цилиндрические, в том числе периодические, выходы на бесконечность, см. [15]–[19]), к рассматриваемым здесь задачам применимы общие методы названной теории.

Последний параграф статьи посвящен возможным обобщениям развиваемого подхода. Здесь, в частности, обсуждается задача о волнах на поверхности жидкости, занимающей объем $\Xi = \Sigma \setminus \bar{\Theta}$, где

$$\Sigma = \{x : |x_2| < H(-x_3), x_3 < 0\}, \quad (10)$$

а H – гладкая (для простоты) положительная функция,

$$H(t) = t^\varkappa(H_0 + O(t^{-1})), \quad t \rightarrow +\infty, \quad H_0 > 0, \quad \varkappa \in (-\infty, 1). \quad (11)$$

Иными словами, сечение “каньона” (10) может сужаться на бесконечности или даже расширяться, оставаясь в главном параболическом (см. рис. 3). При этом сохраняются все результаты о спектре, полученные для задач (5) и (7), за исключением проверки конечномерности ядра (см. формулировку теоремы 11).

Рис. 3

В статье рассматриваются преимущественно спектральные задачи и их реализации в рамках теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Поэтому нет необходимости заботиться об условиях излучения, нужных для корректной постановки неоднородных задач при фиксированном параметре λ (см., например, [1], где такие условия вводятся в иных геометрических ситуациях). Условия излучения требуют информации о поведении решения на бесконечности, которая может быть легко получена применением методов теории, упомянутой выше и видоизмененной в § 3 для задач в полуслоях. Постановка условий излучения проводится, например, по общей схеме, разработанной в [20]–[22] (см. также [19; гл.5]). Отметим, что метод асимптотического анализа слоевидных иррегулярностей границы, разработанный в [23]–[26] для разнообразных задач математической физики, позволяет исследовать задачи в параболических полуслоях полностью (в том числе проверить конечномерность ядер операторов), однако требует громоздких вычислений и преобразований, и поэтому в настоящей статье, посвященной иным эффектам, не применяется.

§ 2. Спектр задачи в области Ξ

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство, полученное замыканием линейного множества $C_{c,\text{reg}}^\infty(\Xi)$ по норме

$$\|\Phi; \mathcal{H}\| = (\|\nabla_x \Phi; L_2(\Xi)\|^2 + \|\Phi; L_2(\sigma^0)\|^2)^{1/2}, \quad (12)$$

порожденной скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = (\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_\Xi + (\Phi, \Psi)_{\sigma^0}. \quad (13)$$

Это гильбертово пространство состоит из $2l$ -периодических относительно x_2 функций $\Phi \in H_{\text{loc}}^1(\Xi)$, для которых конечна норма (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу одномерного неравенства Харди

$$\int_0^\infty t^{-2} |V(t)|^2 dt \leq 4 \int_0^\infty \left| \frac{dV}{dt}(t) \right|^2 dt, \quad V \in C_c^\infty(0, +\infty), \quad (14)$$

справедлива оценка

$$\|(1 + |x_3|)^{-1} \Phi; L_2(\Xi)\| \leq c \|\Phi; \mathcal{H}\|. \quad (15)$$

Весовая норма в левой части (15) устанавливает ограничение на рост функции $\Phi \in \mathcal{H}$ при $x_3 \rightarrow -\infty$.

Оператор в пространстве $\mathcal{H}$, заданный формулой

$$\langle \mathcal{T}\Phi, \Psi \rangle = (\Phi, \Psi)_{\sigma^0}, \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}, \quad (16)$$

является ограниченным и симметрическим и, следовательно, самосопряженным. Он положителен и его норма равна единице. Таким образом, его спектр расположен на сегменте $[0, 1]$, а множество $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ содержится в резольвентном поле (см. [14; § 4.1]). Ядром оператора $\mathcal{T}$ служит бесконечномерное подпространство

$$\mathcal{H}^0 = \{\Phi \in \mathcal{H} : \Phi(x) = 0, x \in \sigma^0\}. \quad (17)$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{T}$ не может быть компактным.

Замена спектрального параметра

$$\lambda \mapsto \mu = (1 + \lambda)^{-1} \quad (18)$$

переводит интегральное тождество (5) в абстрактное спектральное уравнение

$$\mathcal{T}\Phi = \mu\Phi \in \mathcal{H}. \quad (19)$$

При $\mu \neq 0$ верен обратный переход. Поэтому исследование μ -спектра оператора $\mathcal{T}$ равносильно исследованию λ -спектра задачи (5).

ТЕОРЕМА 2. Сегмент $[0, 1] \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \subset \mathbb{C}$ покрыт существенным спектром оператора $\mathcal{T}$, причем на полуинтервале $(0, 1]$ лежит непрерывный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в том, что при $\mu \in (0, 1)$ и $\lambda = \mu^{-1} - 1 > 0$ функции

$$\Psi_m(x) = b_m X_m((2\pi)^{-1} \lambda x_1) \exp(\lambda x_3) \cos(\lambda x_1) \quad (20)$$

образуют сингулярную последовательность Вейля. В формуле (20) фигурирует такое натуральное число m , что $\Theta \subset \{x \in \Sigma : |x_1| < 2^m\}$. Кроме того, b_m – нормирующий множитель, X_m – гладкая срезающая функция,

$$X_m(t) = \chi(t - 2^m) \chi(2^{m+1} - t), \quad (21)$$

а $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – эталонная срезающая функция, $\chi(t) = 1$, $t \geq 1$, и $\chi(t) = 0$, $t \leq 0$. Носитель функции (21) расположен на сегменте $[2^m, 2^{m+1}]$ и она равна единице при $t \in [2^m + 1, 2^{m+1} - 1]$. Функция (20) попадает в пространство $\mathcal{H}$ благодаря экспоненциальному затуханию при $x_3 \rightarrow -\infty$ (см. замечание 1). Кроме того,

$$\begin{aligned} & \|\Psi_m; \mathcal{H}\|^2 \\ & \geq b_m^2 \int_{-l}^l \int_{2\pi\lambda^{-1}(2^m+1)}^{2\pi\lambda^{-1}(2^{m+1}-1)} \left(2\lambda^2 \int_{-\infty}^0 \exp(2\lambda x_3) dx_3 + 1 \right) [\cos(\lambda x_1)]^2 dx_1 dx_2 \\ & = \pi b_m^2 l (2^{m+1} - 2^m - 2)(\lambda + 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Зафиксируем коэффициент $b_m = O(2^{-m/2})$ так, чтобы правая часть (22) обратилась в единицу. Интегрируя по сегменту $[2^m, 2^{m+1}] \ni x_1$ и учитывая производные срезки (21), не зависящие от параметра m , повторяем выкладки (22) и убеждаемся в том, что

$$1 \leq \|\Psi_m; \mathcal{H}\| \leq c, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

В силу соотношений (13), (16) и (18) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\Psi_m - \mu\Psi_m; \mathcal{H}\| &= \mu \sup_{\dots} |\mu^{-1} \langle \mathcal{T}\Psi_m, \Psi \rangle - \langle \Psi_m, \Psi \rangle| \\ &= \mu \sup_{\dots} |(\nabla_x \Psi_m, \nabla_x \Psi)_\Xi - \lambda(\Psi_m, \Psi)_{\sigma^0}| \\ &= \mu \sup_{\dots} |(\Delta_x \Psi_m, \Psi)_\Sigma + (\partial_n \Psi_m - \lambda \Psi_m, \Psi)_\sigma|, \end{aligned} \quad (24)$$

причем многоточие означает, что “ $\Psi \in \mathcal{H} : \|\Psi; \mathcal{H}\| = 1$ ”, а в конце проведено интегрирование по частям в полуслое Σ , так как $\sup \Psi_m \cap \overline{\Theta} = \emptyset$. Согласно определению (20) последнее скалярное произведение в (24) равно нулю. Функция Ψ_m отличается от гармонической лишь на полубесконечных признаках

$$\begin{aligned} & \{x \in \Sigma : |x_2| < l, (2\pi)^{-1} \lambda x_1 \in (2^m, 2^m + 1)\}, \\ & \{x \in \Sigma : |x_2| < l, (2\pi)^{-1} \lambda x_1 \in (2^{m+1} - 1, 2^{m+1})\}, \end{aligned}$$

у которых сечения имеют фиксированные размеры $(2\pi\lambda^{-1}) \times (2l)$. Производные срезки $X_m((2\pi)^{-1} \lambda x_1)$ равномерно относительно m ограничены. Таким образом, в силу неравенства (15) величина (24) не превосходит

$$cb_m \|\exp(\lambda x_3) \Psi; L_2(\Xi)\| \leq c(\lambda) b_m \|(1 + |x_3|)^{-1} \Psi; L_2(\Xi)\| = c(\lambda) b_m,$$

т.е. оказывается бесконечно малой при $m \rightarrow +\infty$. Перечисленные свойства последовательности $\{\Psi_m\}$ и то, что в силу правого неравенства в (23) и формулы

$\text{supp } \Psi_m \cap \text{supp } \Psi_p = \emptyset$, $m \neq p$, эта последовательность слабо в $\mathcal{H}$ сходится к нулю, показывают, что она сингулярная для оператора $\mathcal{T}$ в точке μ .

Итак, μ – точка существенного спектра оператора $\mathcal{T}$, но ее принадлежность непрерывному спектру проверяется в §3. Поскольку существенный спектр – замкнутое множество, концы отрезка $(0, 1)$ также попадают на него. При этом $\mu = 0$ принадлежит точечному спектру и обладает бесконечным собственным подпространством (17). Точке $\mu = 1$ отвечает тривиальное собственное подпространство, т.е. заведомо $\mu = 1$ – точка непрерывного спектра. Действительно, в силу формулы Грина интеграл Дирихле функции $\Phi \in \mathcal{H}$, удовлетворяющей задаче (2)–(4) с параметром $\lambda = 0$ (см. (19)), обращается в нуль, а значит, $\Phi = \text{const}$, но только нулевая постоянная принадлежит пространству $L_2(\sigma^0)$.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ – скалярное произведение (13), в котором множества интегрирования Ξ и σ^0 заменены множествами Ξ^+ и σ^{0+} соответственно. Пусть еще $\mathcal{H}^+$ – замыкание по норме $\|\Phi; \mathcal{H}^+\| = \langle \Phi, \Phi \rangle_+^{1/2}$ линейного пространства $C_c^\infty(\Xi^+ \cup \sigma^{0+})$ (гладкие функции с компактными носителями, аннулирующиеся вблизи поверхностей σ_+^0 и ξ_0 ; см. формулы (7)). Оператор $\mathcal{T}^+$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^+$, введенный равенством (16) с очевидными изменениями, сохраняет все основные свойства рассмотренного оператора $\mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА 3. *Полуинтервал $(0, (1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}] \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \subset \mathbb{C}$ покрыт непрерывным спектром оператора $\mathcal{T}^+$, множество $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ лежит в его резольвентном поле, а на полуинтервале $((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1]$ расположен дискретный спектр. Кроме того, ядро оператора $\mathcal{T}^+$*

$$\mathcal{H}^{0+} = \{\Phi \in \mathcal{H}^+ : \Phi(x) = 0, x \in \sigma^0\} \quad (25)$$

бесконечномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при проверке теоремы 2, точкам $\mu \in (0, (1 + \pi^2/l^2)^{-1})$ ставятся в соответствие сингулярные последовательности Вейля

$$\Psi_m(x) = b_m X_m((2\pi)^{-1} \Lambda x_1) \exp(\lambda x_3) \sin\left(\frac{\pi x_3}{l}\right) \cos(\Lambda x_1), \quad (26)$$

где $\lambda = \mu^{-1} - 1 \in (\pi^2 l^{-2}, +\infty)$, $\Lambda = (\lambda^2 - \pi^2 l^{-2})^{1/2} > 0$, а остальные обозначения те же, что и ранее в формуле (20). Требуемые свойства функций (26) устанавливаются при помощи выкладок, полностью аналогичных (22)–(24). Принадлежность этих точек непрерывному спектру обсуждается в §3. Дискретность спектра в полуинтервале $((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1] \ni \mu$ (или $[0, \pi^2 l^{-2}) \ni \lambda$) вытекает из леммы 4. Утверждение о подпространстве (25) очевидно.

Зафиксируем параметр $\lambda \in [0, \pi^2 l^{-2})$ (соответственно $\mu \in ((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1]$; см. формулу (18) связи спектральных параметров) и изучим вспомогательную задачу

$$(\nabla_x u, \nabla_x v)_{\Xi^+} - \lambda((u, v)_{\sigma^{0+}} - M(u, v)_{\Upsilon^+ \cap \Xi^+}) = F(v), \quad v \in \mathcal{H}^+, \quad (27)$$

где $M > 0$ – фиксированное число, Υ^+ – параллелепипед $\{x : x_1 \in (-L, L), x_2 \in (0, l), x_3 \in (-L, 0)\}$, а размер $L > 0$ выбран так, что $\Theta^+ = \{x \in \Theta : x_2 > 0\} \subset \Upsilon^+$. С интегральным тождеством (27) свяжем оператор $\mathcal{T}^+(L, M)$ на

пространстве $\mathcal{H}^+$, который задан формулой, аналогичной (16):

$$\langle \mathcal{T}^+(L, M)u, v \rangle_+ = (u, v)_{\sigma^{0+}} - M(u, v)_{\Upsilon \cap \Xi^+}, \quad u, v \in \mathcal{H}^+.$$

В силу компактности вложения $\mathcal{H}^+ \subset L_2(\Upsilon)$ разность $\mathcal{T}^+ - \mathcal{T}^+(L, M)$ оказывается компактным оператором в пространстве $\mathcal{H}^+$ при любых подходящих L и M , а значит, отсутствие спектра оператора $\mathcal{T}^+(L, M)$ на полуинтервале $((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1]$ влечет за собой дискретность спектра оператора $\mathcal{T}^+$ на этом же полуинтервале и устанавливает факт, упомянутый в конце доказательства теоремы 3.

Обобщим постановку задачи (27) для того, чтобы, в частности, убедиться в экспоненциальном затухании собственных функций. С этой целью введем весовой класс $\mathcal{H}_\beta^+$, порожденный весовым множителем $\mathcal{R}_\beta(x) = \exp(\beta\sqrt{1+r^2})$: $\mathcal{H}_\beta^+$ состоит из таких функций $u \in H_{\text{loc}}^1(\Xi^+)$, которые обращаются в нуль на $\sigma_+^0 \cup \xi_0$ (см. условие Дирихле в задаче (7)) и обладают конечной нормой $\|u; \mathcal{H}_\beta^+\| = \|\mathcal{R}_\beta u; \mathcal{H}^+\|$. Если $\beta > 0$, то функция $v \in \mathcal{H}_\beta^+$ экспоненциально затухает на бесконечности, но при $\beta < 0$ пространство $\mathcal{H}_\beta^+$ включает в себя функции с определенным экспоненциальным ростом при $r = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Под обобщенным решением задачи (27) в классе $\mathcal{H}_\beta^+$ с правой частью $F_\beta \in (\mathcal{H}_{-\beta}^+)^*$ (линейные функционалы на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{-\beta}^+$) понимаем функцию $u_\beta \in \mathcal{H}_\beta^+$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\nabla_x u_\beta, \nabla_x (\mathcal{R}_\beta^2 v))_{\Xi^+} - \lambda((u_\beta, \mathcal{R}_\beta^2 v)_{\sigma^{0+}} - M(u_\beta, \mathcal{R}_\beta^2 v)_{\Upsilon \cap \Xi^+}) = F_\beta(\mathcal{R}_\beta^2 v), \quad (28)$$

$$v \in \mathcal{H}_\beta^+.$$

Это тождество формально получено из тождества (27) заменой $v \mapsto \mathcal{R}_\beta^2 v$ пробной функции, а под $(\cdot, \cdot)_{\Xi^+}$ и т.п. подразумевается расширение естественно-го скалярного произведения в пространстве $L_2(\Xi^+)$ и т.п. до двойственности между подходящими весовыми классами Лебега. Поскольку $\mathcal{R}_\beta^2 v \in \mathcal{H}_{-\beta}^+$ при $v \in \mathcal{H}_\beta^+$, все слагаемые в (28) определены корректно.

Следующее утверждение проверяется при помощи приема, предложенного в [27].

ЛЕММА 4. *Существует такие числа $M > 0$ и $B > 0$, что при $|\beta| < B$ задача (28) с правой частью $F_\beta \in (\mathcal{H}_{-\beta}^+)^*$ допускает единственное решение $u_\beta \in \mathcal{H}_\beta^+$ и для него верна оценка*

$$\|u_\beta; \mathcal{H}_\beta^+\| \leq c \|F_\beta; (\mathcal{H}_\beta^+)^*\|,$$

где постоянная c зависит от величин λ , M , l и множества Θ и не зависит от функционала F_β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $U = \mathcal{R}_\beta u_\beta$, $V = \mathcal{R}_\beta v$, получаем

$$\begin{aligned} I(U, V) &:= (\nabla_x u_\beta, \nabla_x (\mathcal{R}_\beta^2 v))_{\Xi^+} \\ &= (\mathcal{R}_\beta \nabla_x u_\beta, \nabla_x V)_{\Xi^+} + (\mathcal{R}_\beta \nabla_x u_\beta, V \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta)_{\Xi^+} \\ &= (\nabla_x U, \nabla_x V)_{\Xi^+} - (U \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta, \nabla_x V)_{\Xi^+} \\ &\quad + (\nabla_x U, V \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta)_{\Xi^+} - (U \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta, V \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta)_{\Xi^+}. \end{aligned} \quad (29)$$

В силу леммы Лакса–Мильграма теперь достаточно убедиться в справедливости оценки

$$\|\nabla_x U; L_2(\Xi^+)\|^2 \leq c(I(U, U) - \lambda((U, U)_{\sigma^{0+}} - M(U, U)_{\Upsilon \cap \Xi^+})). \quad (30)$$

Заметим, что при $V = U$ второе и третье слагаемые в правой части (29) взаимно сокращаются, так как все функции вещественны. Кроме того, выполнено соотношение

$$|\nabla_x \mathcal{R}_\beta(x)| \leq 2\beta \mathcal{R}_\beta(x). \quad (31)$$

Сузим в правой части (30) интегрирование на множество $\Sigma^+ \setminus \Upsilon^+$ – бесконечную призму высоты l , у которой основаниями служат полуплоскости без прямоугольников ϑ размером $2L \times L$. В силу условий Дирихле на этих основаниях выполнены одномерное неравенство Фридрихса и двумерное следовое неравенство

$$\|U; L_2(0, l)\|^2 \leq \pi^{-2} l^2 \left\| \frac{\partial U}{\partial x_2}; L_2(0, l) \right\|^2, \quad (32)$$

$$\|U; L_2(\varpi^+)\|^2 \leq \pi^{-2} l^2 \|\nabla_{x'} U; L_2(\Pi^+)\|^2. \quad (33)$$

Здесь $\Pi^+ = (0, l) \times (-\infty, 0) \ni (x_2, x_3) = x'$ – полоса с торцом ϖ^+ . Подчеркнем, что π^2/l^{-2} – первое собственное число задачи Дирихле на отрезке $(0, l)$ и одновременно первое собственное число уравнения Лапласа в Π^+ с условиями Дирихле на сторонах полосы и спектральным условием Стеклова на торце ϖ .

Применяя неравенства (32) и (33), проинтегрированные по недостающим переменным $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}_-^2 \setminus \vartheta$ и $x_1 \in \mathbb{R} \setminus [-L, L]$, получаем, учитывая формулу (31), что

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \setminus \Upsilon^+)\|^2 - \|U \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla \mathcal{R}_\beta; L_2(\Xi^+ \setminus \Upsilon^+)\|^2 - \lambda \|U; L_2(\sigma^{0+} \setminus \bar{\Upsilon}^+)\|^2 \\ & \geq (1 - 4\beta^2 \pi^{-2} l^2) \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \setminus \Upsilon^+)\|^2 \\ & \quad - \lambda \pi^2 l^{-2} \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \setminus ([-L, L] \times \Pi^+))\|^2 \\ & \geq (1 - 4\beta^2 \pi^{-2} l^2 - \lambda \pi^{-2} l^2) \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \setminus \Upsilon^+)\|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

На множестве $\Xi^+ \cap \Upsilon$ используем следовое неравенство в таком виде (см., например, [2]):

$$\|U; L_2(\sigma^{0+} \cap \bar{\Upsilon}^+)\|^2 \leq t \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2 + C(t) \|U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2. \quad (35)$$

Здесь $t > 0$ – произвольное число и множитель $C(t)$ зависит от параметра t , а также множеств $\Xi^+ \cap \Upsilon^+$ и $\sigma^{0+} \cap \bar{\Upsilon}^+$. Кроме того, в силу условий Дирихле имеем

$$\|U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2 \leq C \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2.$$

В результате находим, что при $M \geq C(t)$ верно соотношение

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2 - \|U \mathcal{R}_\beta^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\| - \lambda (\|U; L_2(\sigma^{0+} \cap \bar{\Upsilon}^+)\|^2 \\ & \quad - M \|U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2) \geq (1 - 4C\beta^2 - \lambda t) \|\nabla_x U; L_2(\Xi^+ \cap \Upsilon^+)\|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Поскольку $\lambda < \pi^2 l^{-2}$, оба последних множителя при нормах градиента $\nabla_x U$ в правых частях (34) и (36) можно оставить положительными в случае достаточно малых β^2 и t . Нужное неравенство (30) обеспечено соотношениями (34) и (36).

Вспомнив, что в случае симметрии (6) нечетное по переменной x_2 продолжение с половины Ξ^+ на всю область Ξ собственной функции $\Phi^+ \in \mathcal{H}^+$ задачи (7) оказывается собственной ($2l$ -периодической) функцией $\Phi \in \mathcal{H}$ задачи (2)–(4), воспользуемся теоремой 3 и максиминимальным принципом (см., например, [14]) для поиска собственных чисел на полуинтервале $[0, \pi^2 l^{-2})$ непрерывного λ -спектра задачи (2)–(4). С этой целью рассмотрим спектральную задачу Стеклова на параллелепипеде (8) с сечением $\omega = (0, a_1) \times (0, a_2)$:

$$\begin{aligned} -\Delta_x w(x) &= 0, & x \in \Omega; & & w(x) &= 0, & x \in \partial\omega \times (-h, 0), \\ -\frac{\partial w}{\partial x_3}(y, -h) &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x_3}(y, 0) &= \Lambda w(y, 0), & y &= (x_1, x_2) \in \omega. \end{aligned} \quad (37)$$

Ее решение, параметризованное мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, имеет вид

$$\begin{aligned} w_\alpha(x) &= \sin\left(\frac{\pi\alpha_1}{a_1} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi\alpha_2}{a_2} x_2\right) \left(\exp(-A_\alpha x_3) + \exp(A_\alpha(x_3 + 2h))\right), \\ \Lambda_\alpha &= A_\alpha \frac{\exp(2A_\alpha h) - 1}{\exp(2A_\alpha h) + 1}, \quad A_\alpha = \pi \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{a_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{a_2^2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть $\Lambda^{(1)} \leq \dots \leq \Lambda^{(N)}$ – те собственные числа из списка (38), которые попадают на полуинтервал $[0, \pi^2 l^{-2})$, а $w^{(1)}, \dots, w^{(N)}$ – соответствующие им собственные функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Поскольку $\Lambda_\alpha = A_\alpha^2 h(1 + O(A_\alpha h))$ при $h \rightarrow +0$, то число Q можно сделать сколь угодно большим путем уменьшения высоты h параллелепипеда Ω .

Приняв во внимание геометрические условия (8), (9), продолжим функцию $w^{(a)}$ нулем с параллелепипеда Ω на область Ξ^+ , сохранив за этой функцией прежнее обозначение.

Упомянутый максиминимальный принцип для оператора $-\mathcal{T}^+$ (со знаком минус) выглядит так:

$$-\mu^{(p)} = \max_{\mathcal{E}_p \subset \mathcal{H}^+} \inf_{\Phi \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}} \frac{\langle -\mathcal{T}^+ \Phi, \Phi \rangle_+}{\langle \Phi, \Phi \rangle_+}. \quad (39)$$

Здесь $\mathcal{E}_p$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^+$ с коразмерностью $p-1$ (т.е. $\dim(\mathcal{H}^+ \ominus \mathcal{E}_p) = p-1$ и, в частности, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}^+$), а $-\mu^{(1)} \leq \dots \leq -\mu^{(P)}$ – список (может быть, пустой или бесконечный) всех собственных чисел оператора $-\mathcal{T}^+$ на полуинтервале $[-1, -(1 + \pi^2 l^{-2})^{-1})$, содержащем лишь его дискретный спектр по теореме 2. Каждое подпространство $\mathcal{E}_p$ включает нетривиальную линейную комбинацию

$$\Phi = b_1 w^{(1)} + \dots + b_p w^{(p)}$$

собственных функций задачи (37) – иначе его коразмерность больше, чем $p - 1$. Согласно формулам (13) и (16) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \langle -\mathcal{T}^+\Phi, \Phi \rangle_+ &= -\sum_{j=1}^p b_j^2 \|w^{(j)}; L_2(\omega^+)\|^2, \\ \langle \Phi, \Phi \rangle_+ &= \sum_{j=1}^p b_j^2 (\|\nabla_x w^{(j)}; L_2(\Omega)\|^2 + \|w^{(j)}; L_2(\omega^+)\|^2) \\ &= \sum_{j=1}^p b_j^2 (1 + \Lambda^{(j)}) \|w^{(j)}; L_2(\omega^+)\|^2 \leq (1 + \Lambda^{(p)}) \langle \mathcal{T}^+\Phi, \Phi \rangle_+. \end{aligned}$$

Следовательно, инфимум в правой части (39) не превосходит $-(1 + \Lambda^{(p)})^{-1}$. Таким образом, $-\mu^{(p)} \leq -(1 + \Lambda^{(p)})^{-1}$. Теперь теорема 10. 2. 2 из [14] гарантирует, что на полуинтервале $((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1]$ найдется не менее N собственных чисел оператора $\mathcal{T}^+$, а значит, и оператора $\mathcal{T}$. Иными словами, $P \geq N$. В силу формулы (18) связи спектральных параметров μ и λ упомянутым собственным числам отвечают собственные числа задачи (2)–(4) на полуинтервале $[0, \pi^2 l^{-2})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены геометрические условия (6), (8), (9), а N – количество собственных чисел задачи (37) на полуинтервале $[0, \pi^2 l^{-2})$. Тогда задача (2)–(4) (более точно, вариационная задача (5)) имеет не менее N собственных чисел на том же полуинтервале, который лежит на ее непрерывном спектре. Соответствующие собственные функции Φ (ловушечные моды) экспоненциально затухают на бесконечности, т.е. $\mathcal{R}_\beta \Phi \in H^1(\Xi)$ при $\mathcal{R}_\beta(x) = \exp(\beta(1 + r^2)^{1/2})$ и некотором $\beta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось проверить включение $\Phi^+ \in \mathcal{H}_\beta^+$. Собственная функция Φ^+ задачи (7) удовлетворяет вариационной задаче (27), в которой $F(v) = \lambda M(\Phi^+, v)_{\Upsilon \cap \Xi^+}$. В связи с компактностью множества $\bar{\Upsilon}$ такой функционал F попадает в пространство $(\mathcal{H}_{-\beta}^+)^*$ при любом β . Следовательно, существует решение $\Phi_\beta^+ \in \mathcal{H}_\beta^+$ задачи (28) с правой частью $F_\beta = F$ и (вообще говоря, малым) положительным весовым индексом β (лемма 4). Очевидно, что $\Phi_\beta^+ \in \mathcal{H}^+$. Кроме того, интегральное тождество (28) влечет за собой тождество (27) (считаем пробные функции гладкими и имеющими компактные носители, а также пользуемся плотностью линейного множества таких функций в пространствах $\mathcal{H}_\beta^+$). Итак, ввиду единственности решения из класса $\mathcal{H}^+$ (лемма 4) справедливо равенство $\Phi = \Phi_\beta$.

Еще раз обратим внимание на замечание 5: подбором геометрического параметра h можно поместить на полуинтервал $[0, \pi^2 l^{-2})$ любое наперед заданное количество собственных чисел задачи (37).

§ 3. Конечномерность ядра

В этом параграфе покажем, что задача (2)–(4) имеет конечномерное ядро, т.е. размерность подпространства функций $\Phi \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих тождеству (5), конечна. Разумеется, аналогичный результат верен и для задачи (7).

В этих условиях наличие сингулярных последовательностей Вейля, построенных в предыдущем параграфе при проверке теорем 2 и 3, означает, что резольвенты $(\mathcal{T} - \mu)^{-1}$ и $(\mathcal{T}^+ - \mu^+)^{-1}$ в точках $\mu \in (0, 1)$ и $\mu^+ \in ((1 + \pi^2 l^{-2})^{-1}, 1)$ соответственно не являются ограниченными операторами, а сами точки принадлежат непрерывным спектрам операторов $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^+$ соответственно. Похожие рассуждения уже проводились для точки $\mu = 1$, для которой нужно утверждение об ядре очевидно. Приведенные наблюдения завершают доказательства теорем 2 и 3, начатые в § 2.

Зафиксируем параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Пусть $F \in \mathcal{H}^*$, $\beta > 0$, а $\mathcal{R}_\beta$ – та же весовая функция, что в § 2 (см. формулу (28)). Изучим вариационную задачу

$$(\nabla_x u, \nabla_x v)_{\Xi} - \lambda(u, v)_{\sigma^0} = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} v), \quad v \in \mathcal{H}. \quad (40)$$

Очевидно, что правая часть – линейный непрерывный функционал на $\mathcal{H}$. Далее будет доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 7. *Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ существуют число $Q = Q(\lambda)$ и набор функций $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_Q$, зависящие от параметра λ , удовлетворяющие включениям $\mathcal{R}_\beta^{-1} \mathbf{V}_q \in \mathcal{H}$ и такие, что условия*

$$F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \mathbf{V}_q) = 0, \quad q = 1, \dots, Q, \quad (41)$$

обеспечивают существование решения $u \in \mathcal{H}$ задачи (40).

СЛЕДСТВИЕ 8. *Размерность подпространства*

$$\mathcal{N}(\lambda) = \{\Phi \in \mathcal{H} : \Phi \text{ удовлетворяет тождеству (5)}\}$$

не превосходит числа Q из леммы 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\dim \mathcal{N}(\lambda) > Q = Q(\lambda)$. Тогда найдется такой функционал F , что выполнены равенства (41) и $F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \Phi) \neq 0$ при некотором $\Phi \in \mathcal{N}(\lambda)$. В тождестве (40) положим $v = \Phi$, а в качестве пробной функции Ψ в тождестве (5) для Φ возьмем решение $u \in \mathcal{H}$ задачи (40). Полученное противоречие $0 = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \Phi)$ означает, что $\dim \mathcal{N}(\lambda) \leq Q(\lambda)$.

Приступим к доказательству леммы 7, которое проведем в несколько этапов. Сначала изучим вспомогательную задачу в ограниченной области

$$(\nabla_x u_\Theta, \nabla_x v)_{\Xi \cap \Upsilon} + M(u_\Theta, v)_{\Xi \cap \Upsilon} - \lambda(u_\Theta, v)_{\sigma^0 \cap \Upsilon} = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_\Theta v), \quad v \in \mathcal{H}_\Theta. \quad (42)$$

Здесь Υ – параллелепипед $(-L, L) \times (-l, l) \times (-L, 0)$, содержащий область Θ “с запасом”: существует гладкая функция χ_Θ , равная единице на теле $\bar{\Theta}$ и нулю около трех граней $\{\pm L\} \times (-l, l) \times (-L, 0)$ и $(-L, L) \times (-l, l) \times \{-L\}$ параллелепипеда. Через X_Θ обозначим еще одну срезающую функцию, обладающую такими же свойствами, причем $X_\Theta \chi_\Theta = \chi_\Theta$. Кроме того, $\mathcal{H}_\Theta$ – подпространство периодических по переменной x_2 функций из класса Соболева $H^1(\Xi \cap \Upsilon)$, обращающихся в нуль на указанных выше гранях параллелепипеда. В силу следового неравенства (35), в котором множества Ξ^+ и Υ^+ заменены множествами Ξ и Υ соответственно, а в правой части фигурируют множители t и $C(t)$, задача (42) имеет единственное решение $u_\Theta \in \mathcal{H}_\Theta$ в случае $M \geq \lambda C([2\lambda]^{-1})$, так

как левая часть (42) оказывается скалярным произведением, а правая часть – линейным функционалом в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\Theta$. Кроме того, верна оценка

$$\|u_\Theta; \mathcal{H}_\Theta\| \leq c \|F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_\Theta \cdot); \mathcal{H}_\Theta^*\| \leq c \|F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \cdot); \mathcal{H}^*\|.$$

На втором этапе рассмотрим задачу на полуслое Σ (без тела Θ):

$$(\nabla_x u_\Sigma, \nabla_x v)_\Sigma - \lambda(u_\Sigma, v)_\sigma = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_z v), \quad v \in \mathcal{H}_\Sigma. \quad (43)$$

При этом $\chi_\Sigma = 1 - \chi_\Theta$, а $\mathcal{H}_\Sigma$ – подпространство периодических по переменной x_2 функций из класса Соболева $H^1(\Sigma)$. Введем еще одну гладкую срезку X_Σ так, чтобы $X_\Sigma = 0$ на $\bar{\Theta}$ и $X_\Sigma \chi_\Sigma = \chi_\Sigma$.

Будем оперировать с комплекснозначными функциями. Далее понадобится следующая задача на сечении $\Pi = (-l, l) \times (-\infty, 0)$ с параметром $\eta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'} U(x', \eta) + \eta^2 U(x', \eta) &= 0, \quad x' = (x_2, x_3) \in \Pi, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} U(x', \eta) &= \lambda U(x', \eta), \quad x' \in \varpi = (-l, l) \times \{0\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Как обычно, условия периодичности подразумеваются, но не приводятся явно. Задача (44) имеет следующие собственные числа и собственные функции:

$$\eta_{\pm k} = \pm(\lambda^2 - \pi^2 l^{-2} k^2)^{1/2}, \quad (45)$$

$$U_{\pm k}(x') = b_k \exp(ik\pi l^{-1} x_2 + \lambda x_3); \quad (46)$$

здесь $k = 0, \dots, K$, числа η_{+k} и η_{-k} различаются, даже если они равны нулю, а функции U_{+0} и U_{-0} в этом случае не различаются. Наконец, $K = K(\lambda)$ – максимальное из целых неотрицательных чисел, для которых корни (45) вещественны. Поскольку $\lambda > 0$, то функции (46) экспоненциально затухают на бесконечности в полуполосе Π и при $b_k = \lambda^{1/2} l^{-1/2}$ оказываются ортонормированными в пространстве $L_2(\Pi)$.

Положим

$$v(x) = v^\perp(x) + \sum_{k=-K}^K v^{(k)}(x_1) U_k(x'), \quad (47)$$

$$v^{(k)}(x_1) = \int_\Pi v(x) \overline{U_k(x')} dx', \quad \int_\Pi v^\perp(x) \overline{U_k(x')} dx' = 0, \quad (48)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Компонента $v^\perp$ принадлежит подпространству $\mathcal{H}_\Sigma^\perp \subset \mathcal{H}_\Sigma$ бесконечной коразмерности (операция $\perp$ выделяет функции, подчиненные второму условию ортогональности (48) при $k = 0, \pm 1, \dots, \pm K$ и почти всех $x_1 \in \mathbb{R}$). Коэффициенты $v^{(k)}$ попадают в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R})$, причем

$$c \|v; \mathcal{H}_\Sigma\| \leq \|v^{(k)}; H^1(\mathbb{R})\| + \|v^\perp; \mathcal{H}_\Sigma^\perp\| \leq C \|v; \mathcal{H}_\Sigma\|, \quad c, C > 0.$$

Решение u_Σ задачи (43) ищем в виде (47), обозначив через $u_\Sigma^\perp$ и $u^{(k)}$ его атрибуты. Подстановка в интегральное тождество (43) пробных функций $v^{(k)} U_k$

выделяет $1 + 2K$ обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} & \left(U_k \frac{\partial u_{\Sigma}^{(k)}}{\partial x_1}, U_k \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_1} \right)_{\Sigma} + (u_{\Sigma}^{(k)} \nabla_{x'} U_k, v^{(k)} \nabla_{x'} U_k)_{\Sigma} - \lambda (u_{\Sigma}^{(k)} U_k, v^{(k)} U_k)_{\sigma} \\ & = F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} \chi_{\Sigma} U_k v^{(k)}), \quad v^{(k)} \in H^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (49)$$

Подчеркнем, что количество уравнений совпадает с количеством линейно независимых функций (46). Выполнив интегрирование по $x_2 \in (-l, l)$ и воспользовавшись условиями ортогональности и нормировки для функций (46), придадим каждому из тождеств (49) вид вариационной задачи для оператора Гельмгольца $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \eta_k^2$ на прямой $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{\partial u_{\Sigma}^{(k)}}{\partial x_1}, \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_1} \right)_{\mathbb{R}} - \eta_k^2 (u_{\Sigma}^{(k)}, v^{(k)})_{\mathbb{R}} = F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} \chi_{\Sigma} U_k v^{(k)}), \quad v^{(k)} \in H^1(\mathbb{R}). \quad (50)$$

Задачи (50) имеют решения $u_{\Sigma}^{(k)} \in H^1(\mathbb{R})$ в том и только в том случае, когда выполнены условия ¹

$$F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} V_{pj}) = 0, \quad j = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm K, \quad p = 0, 1, \quad (51)$$

причем $V_{pj}(x) = \chi_{\Sigma}(x) U_j(x') \exp((-1)^p i \eta_{\pm j} x_2)$ в случае $\eta_j \neq 0$ и $V_{pj}(x) = \chi_{\Sigma}(x) x_1^p U_0(x')$ в случае $\eta_j = 0$. Подчеркнем, что в соотношении (51), как и ранее в (45), различаются индексы $+0$ и -0 . После некоторой модификации указанные функции войдут в набор $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_Q\}$ из леммы 7, но очевидно, что они не принадлежат пространству $\mathcal{H}_{\Sigma}$.

Вычтем из тождества (43) сумму тождеств (49) и получим, учитывая (48), такую вариационную задачу:

$$(\nabla_x u_{\Sigma}^{\perp}, \nabla_x v)_{\Sigma} - \lambda (u_{\Sigma}^{\perp}, v)_{\sigma} = F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} \chi_{\Sigma} v^{\perp}), \quad v \in \mathcal{H}_{\Sigma}. \quad (52)$$

Здесь уместно упомянуть, что формулы (46) и (48) влекут за собой соотношение

$$\begin{aligned} & (\nabla_x (u_{\Sigma}^{(k)} U_k), \nabla_x v^{\perp})_{\Sigma} - \lambda (u_{\Sigma}^{(k)} U_k, v^{\perp})_{\sigma} \\ & = \left(\frac{\partial u_{\Sigma}^{(k)}}{\partial x_1}, U_k \frac{\partial v^{\perp}}{\partial x_1} \right)_{\Sigma} - (\Delta_{x'} U_k, u_{\Sigma}^{(k)} v^{\perp})_{\Sigma} + \left(u_{\Sigma}^{(k)} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_3} - \lambda U_k \right), v^{\perp} \right)_{\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

В самом деле, последнее скалярное произведение равно нулю потому, что U_k — решение задачи (44) при $\eta = \eta_k$, а первые два из средней части (53) равны нулю в силу условия ортогональности из формулы (48), сохраняющемуся при дифференцировании по x_1 .

Применим к задаче (52) частичное преобразование Фурье

$$w(x) \mapsto \widehat{w}(\eta; x') = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\eta x_1) w(x_1, x') dx_1, \quad i = \sqrt{-1}.$$

¹Нужные решения можно построить при помощи функций Грина, приведенных, например, в [28].

В результате при почти всех $\eta \in \mathbb{R}$ получим вариационные задачи

$$(\nabla_{x'} \hat{u}_{\Sigma}^{\perp}, \nabla_{x'} \hat{v})_{\Pi} + \eta^2 (\hat{u}_{\Sigma}^{\perp}, \hat{v})_{\Pi} - \lambda (\hat{u}_{\Sigma}^{\perp}, \hat{v})_{\varpi} = \mathcal{F}_{\beta}(\eta; \hat{v}^{\perp}), \quad \hat{v}(\eta; \cdot) \in \mathcal{H}_{\Pi}(\eta). \quad (54)$$

Здесь $\mathcal{H}_{\Pi}(\eta)$ – пространство периодических по переменной x_2 функций $\hat{v}(\eta; \cdot) \in H_{\text{loc}}^1(\Pi)$ с конечной нормой

$$(\|\nabla_{x'} \hat{v}; L_2(\Pi)\|^2 + \eta^2 \|\hat{v}; L_2(\Pi)\|^2 + \|\hat{v}; L_2(\varpi)\|^2)^{1/2}. \quad (55)$$

При $\eta \neq 0$ это пространство совпадает с подпространством периодических функций из класса Соболева $H^1(\Pi)$, но при $\eta = 0$ норма (55) эквивалентна норме

$$(\|\nabla_{x'} \hat{v}; L_2(\Pi)\|^2 + \|(1 + |x_3|)^{-1} \hat{v}; L_2(\Pi)\|^2 + \|\hat{v}; L_2(\varpi)\|^2)^{1/2} \quad (56)$$

(см. замечание 1 и, в частности, неравенство Харди (14)). Правая часть (54) определена равенством

$$F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} \chi_{\Sigma} v^{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_{\beta}(\eta; \hat{v}^{\perp}) d\eta \quad (57)$$

и поэтому является линейным функционалом на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\Pi}(\eta)$, причем он принимает ненулевые значения разве лишь на ортогональном дополнении $\mathcal{H}_{\Pi}^{\perp}(\eta)$ этого пространства до линейной оболочки функций (46).

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\|v; \mathcal{H}_{\Sigma}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|\hat{v}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_{\Pi}(\eta)\|^2 d\eta.$$

Нормы

$$\|F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1} \chi_{\Sigma} \cdot); \mathcal{H}_{\Sigma}^*\|, \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}_{\beta}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_{\Pi}(\eta)^*\|^2 d\eta \right)^{1/2}$$

эквивалентны. Кроме того, из-за наличия весового множителя $\mathcal{R}_{\beta}^{-1}$ и соотношения

$$\mathcal{R}_{\beta}(x') = \exp(\beta(1 + r^2)^{1/2}) \geq \exp(\beta(1 + x_3^2)^{1/2}) =: \mathcal{E}_{\beta}(x_3), \quad (58)$$

функционал $\hat{v} \mapsto \mathcal{F}(\eta; \hat{v}) = \mathcal{F}_{\beta}(\eta; \mathcal{E}_{\beta} \hat{v})$ оказывается непрерывным.

ЛЕММА 9. *При почти всех $\eta \in \mathbb{R}$ задача (54) имеет решение $\hat{u}_{\Sigma}^{\perp} \in \mathcal{H}_{\Pi}^{\perp}$, для которого верна оценка*

$$\|\hat{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_{\Pi}(\eta)\| \leq c(\|\mathcal{F}_{\beta}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_{\Pi}(\eta)^*\| + \|\mathcal{F}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_{\Pi}(\eta)^*\|), \quad (59)$$

с множителем c , не зависящим от η и $\mathcal{F}_{\beta}$. При этом второе слагаемое в правой части (59) появляется лишь при $|\eta| \leq \eta_0(\lambda)$, где $\eta_0(\lambda) > 0$ – некоторое число, зависящее от параметра $\lambda > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при любых $\eta \in \mathbb{R}$ и $\hat{v}(\eta; \cdot) \in \mathcal{H}_{\Pi}$ справедливо равенство

$$(\nabla_{x'} U_k, \nabla_{x'} \hat{v})_{\Pi} + \eta^2 (U_k, \hat{v})_{\Pi} - \lambda (U_k, \hat{v})_{\varpi} = (\eta^2 - \eta_k^2)(U_k, \hat{v})_{\Pi},$$

оператор задачи (54), рассматриваемый как отображение

$$\mathcal{H}_\Pi^\perp(\eta) \rightarrow \{\mathcal{F} \in \mathcal{H}_\Pi(\eta)^* : \mathcal{F}(U_k) = 0, k = \pm 0, \dots, \pm K\}, \quad (60)$$

непрерывен. Таким образом, согласно альтернативе Фредгольма, нужной в случаях $\eta = \eta_k$ при $k = \pm 0, \pm 1, \dots, \pm K$, отображение (60) – изоморфизм. При большом $|\eta|$ из интегрального тождества (54) с пробной функцией $\hat{v} = \hat{v}_\Sigma^\perp$ и аналогичного (35) следового неравенства

$$\|\hat{u}; L_2(\varpi)\|^2 \leq t \|\nabla_{x'} \hat{u}; L_2(\Pi)\|^2 + C(t) \|\hat{u}; L_2(\Pi)\|^2 \quad (61)$$

вытекает, что постоянная c в оценке (59) действительно не зависит от больших $|\eta|$. Осталось проверить это свойство при малых $|\eta|$.

Проблема состоит в том, что из-за потери нормой (55) при $\eta = 0$ среднего слагаемого и превращения ее в норму (56) оператор умножения на постоянную η^2 не является непрерывным возмущением отображения (60) с параметром $\eta = 0$. Обойдем это препятствие, вспомнив, что функционал $\mathcal{F}_\beta$ в некотором смысле “исчезает” на бесконечности с экспоненциальной скоростью – согласно формуле (57) он наследует это свойство от функционала $F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_\Sigma \cdot)$ с весовым множителем $\mathcal{R}_\beta^{-1}$ из соотношения (58).

Для точной формулировки сказанного выше введем гильбертово пространство $\mathcal{W}_{\beta\Pi}$ с нормой $\|\hat{v}; \mathcal{W}_{\beta\Pi}\| = \|\mathcal{E}_\beta \hat{v}; \mathcal{H}\|$ (см. (58)). Справедливо включение $\mathcal{F}_\beta(\eta; \cdot) \in \mathcal{W}_{-\beta\Pi}^*$ и, более того,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}_\beta(\eta; \cdot); \mathcal{W}_{-\beta\Pi}^*\|^2 d\eta \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}(\eta; \cdot); \mathcal{H}_\Pi^*(\eta)\|^2 d\eta \leq c \|F(\chi_\Sigma \cdot); \mathcal{H}^*\|^2 \leq c \|F; \mathcal{H}^*\|^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Под решением задачи (54) в классе экспоненциально затухающих функций будем понимать элемент $\tilde{u}_\Sigma^\perp$ пространства $\mathcal{W}_{\beta\Pi}$ с весовым показателем $\beta > 0$, который (элемент) удовлетворяет интегральному тождеству (54) при любой пробной функции $\hat{v} \in \mathcal{W}_{-\beta\Pi}$. При этом $(\cdot)_\Pi$ – расширение скалярного произведения в пространстве Лебега $L_2(\Pi)$ до двойственности между подходящими весовыми классами. Кроме того, $\mathcal{W}_{\beta\Pi}^\perp$ – подпространство, ортогональное функциям (46), которые принадлежат $\mathcal{W}_{-\beta\Pi}$ при $\beta \in (0, \lambda)$, а $\mathcal{W}_{-\beta\Pi}^{*0}$ – подпространство линейных функционалов на $\mathcal{W}_{-\beta\Pi}$, аннулирующих на этих функциях.

Дальнейшие построения основаны на следующем результате теории общих краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. [15]–[19]): существует $\beta_0 > 0$ такое, что при $\beta \in (0, \beta_0)$ оператор задачи (54), рассматриваемый как отображение $\mathcal{W}_{\beta\Pi}^\perp \rightarrow \mathcal{W}_{-\beta\Pi}^{*0}$, является фредгольмовым мономорфизмом с коядром, натянутым на функцию ζ ,

$$\zeta(x) = x_1 + \lambda^{-1}. \quad (63)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Поясним сказанное выше. Решение $\hat{u}_\Sigma^\perp \in \mathcal{H}_\Pi^\perp(0)$ задачи (54) с экспоненциально затухающей правой частью допускает асимптотическое разложение

$$\hat{u}_\Sigma^\perp(0; x') = C(0) + \tilde{u}_\Sigma^\perp(0; x'), \quad (64)$$

где $C(0)$ – некоторая постоянная, а остаток $\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(0; \cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{W}_{\beta\Pi}$ в случае $\beta \in (0, \pi l^{-1})$, т.е. “исчезает” при $x_3 \rightarrow -\infty$ с экспоненциальной скоростью. Функция (63) является линейно растущим на бесконечности решением однородной задачи (54), в частности, ζ попадает в пространство $\mathcal{W}_{-\beta\Pi}$ при любом показателе $\beta > 0$. Вычисляя постоянную $C(0)$ при помощи метода из [16], подставим в тождество (54) пробную функцию $\zeta_R(x) = \zeta(x)\chi(-R - x_3) \in C_c^{\infty}(\bar{\Pi})$, где χ – эталонная срезка, фигурирующая в (21). Ввиду экспоненциального затухания остатка $\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} (\nabla_x \tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}, \nabla_x \zeta_R)_{\Pi} - \lambda(\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}, \zeta_R)_{\varpi} &= -(\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}, \Delta_{x'} \zeta_R)_{\Pi} \\ &= \int_{-l}^l \int_{-R-1}^{-R} (C + \tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(x')) (2\chi'(-R - x_1) - (x_3 + \lambda^{-1})\chi''(-R - x_1)) dx_3 dx \\ &\rightarrow -2lC(0), \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\chi'(t) = \partial_t \chi(t)$. Следовательно, предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ приводит к равенству

$$C(0) = -(2l)^{-1} \mathcal{F}_{\beta}(0; \zeta). \quad (65)$$

Поскольку задача (54) при $\eta = 0$ однозначно разрешима в энергетическом классе $\mathcal{H}_{\Pi}^{\perp}(0)$, то ее решение (64) принадлежит пространству $\mathcal{W}_{\beta\Pi}^{\perp}$ в том и только в том случае, если величина (65) обращается в нуль. Именно это утверждение и было сформулировано выше. Приведенные приемы анализа задачи в полуполосе подробно обсуждаются во вводных главах монографий [19], [29], однако ввиду простой геометрической формы тот же результат нетрудно получить при помощи метода Фурье. Ссылки на общую теорию нужны лишь для того, чтобы описать схему проверки конечномерности ядра задачи (40) при более сложной геометрии области Σ (см. рис. 3).

Применим технику весовых пространств с отделенной асимптотикой (см. [30], [31], [19]). Будем искать решение задачи (54) в виде (64), а пару $\{\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(0; \cdot), C(0)\} \in \mathcal{W}_{\beta\Pi} \times \mathbb{R}$ – как решение задачи

$$(\nabla_x \tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(0; \cdot), \nabla_x \hat{v})_{\Pi} - \lambda(\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(0; \cdot), \hat{v})_{\varpi} - \lambda C(0)(1, \hat{v})_{\varpi} = \mathcal{F}_{\beta}(0; \hat{v}), \quad \hat{v} \in \mathcal{W}_{-\beta\Pi}, \quad (66)$$

совмещенной с условием (65) ее разрешимости в классе $\mathcal{W}_{\beta\Pi}$. Оператор системы (66), (65), осуществляющий отображение

$$\mathcal{W}_{\beta,\Pi}^{\perp} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}_{-\beta,\Pi}^{*0} \times \mathbb{R}, \quad (67)$$

является изоморфизмом, что, в частности, обеспечивает следующую оценку (пока при $\eta = 0$):

$$\|\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot); \mathcal{W}_{\beta\Pi}\| + |C(\eta)| \leq \|\mathcal{F}_{\beta}(\eta; \cdot); \mathcal{W}_{-\beta\Pi}\|. \quad (68)$$

Решение задачи (54) при малом $|\eta|$ ищем в виде

$$\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; x') = C(\eta) \exp(-|\eta|x_3) + \tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; x'). \quad (69)$$

Функция $\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot) \in \mathcal{W}_{\beta\Pi}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} (\nabla_x \tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot), \nabla_x \hat{v})_{\Pi} + \eta^2(\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot), \hat{v})_{\Pi} - \lambda(\tilde{u}_{\Sigma}^{\perp}(\eta; \cdot), \hat{v})_{\varpi} - (\lambda + |\eta|)C(\eta)(1, \hat{v})_{\varpi} \\ = \mathcal{F}_{\beta}(\eta; \hat{v}), \quad \hat{v} \in \mathcal{W}_{-\beta\Pi}, \end{aligned} \quad (70)$$

которая получается подстановкой суммы (69) в интегральное тождество (54) с учетом равенства $(\Delta_l - \eta^2) \exp(-|\eta|x_3) = 0$. Задачу (70) интерпретируем как задачу (66) с новой правой частью

$$\mathcal{F}_\beta(\eta; \widehat{v}) - \eta^2(\widehat{u}_\Sigma^\perp(\eta; \cdot), \widehat{v})_\Pi + |\eta|C(\eta)(1, \widehat{v})_\varpi.$$

Условие разрешимости новой задачи принимает вид равенства

$$C(\eta) = -(1 + \lambda^{-1}|\eta|)^{-1}(2l)^{-1}(\mathcal{F}_\beta(\eta; \zeta) - \eta^2(\widehat{u}_\Sigma^\perp, \zeta)_\Pi). \quad (71)$$

Легко видеть, что оператор системы (70), (71), рассматриваемый как отображение (67), оказывается малым (при $\eta \rightarrow 0$) непрерывным возмущением такого же оператора системы (66), (67). Следовательно, можно распространить оценку (68) на малые значения параметра η . Формула (62) вместе с соотношением

$$\begin{aligned} & \|\widehat{u}_\Sigma^\perp(\eta; \cdot); \mathcal{H}_\Pi(\eta)\|^2 \\ & \leq c(\|\widehat{u}_\Sigma^\perp(\eta; \cdot); \mathcal{H}_\Pi(\eta)\|^2 \\ & \quad + |C(\eta)|^2 \int_{-\infty}^0 \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_3} \exp(-|\eta|x_3) \right|^2 + |\exp(-|\eta|x_3)|^2 \right) dx_3 \\ & \leq c(\|\widehat{u}_\Sigma^\perp(\eta; \cdot); \mathcal{W}_{\beta\Pi}\|^2 + |\eta| |C(\eta)|^2) \end{aligned}$$

завершает доказательство леммы 9.

Теперь можно закончить доказательство леммы 7. Пусть функционал из правой части тождества (40) удовлетворяет условиям (51). Тогда обе задачи (42) и (43) имеют решения $u_\Theta \in \mathcal{H}_\Theta$ и $u_\Sigma \in \mathcal{H}_\Sigma$, из которых можно составить следующее приближенное решение задачи (40):

$$u = \chi_\Theta u_\Theta + \chi_\Sigma u_\Sigma, \quad (72)$$

где χ_Θ и χ_Σ – введенные ранее срезающие функции. Очевидно, что $u \in \mathcal{H}$ и

$$\|u; \mathcal{H}\| \leq c(\|u_\Theta; \mathcal{H}_\Theta\| + \|u_\Sigma; \mathcal{H}_\Sigma\|).$$

Определим правую часть задачи, которой удовлетворяет функция (72). С этой целью при произвольной функции $v \in \mathcal{H}$ возьмем произведения $v_\Theta = \chi_\Theta v$ и $v_\Sigma = \chi_\Sigma v$ в качестве пробных функций в тождествах (42) и (43) соответственно. Поскольку $\chi_\Theta X_\Theta = \chi_\Theta$, $\chi_\Sigma X_\Sigma = \chi_\Sigma$, то имеем

$$\begin{aligned} & (\nabla_x u_\Theta, \nabla_x v_\Theta)_{\Xi \cap \Upsilon} - \lambda(X_\Theta u_\Theta, v)_{\sigma^0 \cap \bar{\Upsilon}} + M(X_\Theta u_\Theta, v)_{\Xi \cap \Upsilon} = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_\Theta v), \\ & (\nabla_x u_\Sigma, \nabla_x v_\Sigma)_\Sigma - \lambda(X_\Sigma u_\Sigma, v)_\sigma = F(\mathcal{R}_\beta^{-1} \chi_\Sigma v). \end{aligned} \quad (73)$$

Сумма правых частей этих равенств есть $F(\mathcal{R}_\beta^{-1} v)$, так как $\chi_\Theta + \chi_\Sigma = 1$. В силу наличия срезов множества интегрирования $\Xi \cap \Upsilon$, Σ и $\sigma^0 \cap \bar{\Upsilon}$, σ можно заменить множествами Ξ и σ^0 соответственно. Срезающие функции X_Θ и X_Σ зафиксируем так, чтобы они не зависели от переменной x_3 вблизи поверхности σ . Теперь посредством коммутирования и интегрирования по частям получаем, что

$$\begin{aligned} & (\nabla_x u_\Theta, \nabla_x v_\Theta)_\Xi = (\nabla_x u_\Theta, X_\Theta \nabla_x v)_\Xi + (\nabla_x u_\Theta, v \nabla_x X_\Theta)_\Xi \\ & = (\nabla_x (X_\Theta u_\Theta), \nabla_x v)_\Xi - (u_\Theta \nabla_x X_\Theta, \nabla_x v)_\Xi - (u_\Theta, \nabla_x \cdot v \nabla_x X_\Theta)_\Xi. \end{aligned} \quad (74)$$

Формула (74) остается верной при замене $\Theta \mapsto \Sigma$. Таким образом, складывая равенства из формулы (73), приходим к интегральному тождеству

$$(\nabla_x u, \nabla_x v)_{\Xi} - \lambda(u, v)_{\sigma^0} = F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1}v) + F'(\mathcal{R}_{\beta}^{-1}v),$$

в котором

$$\begin{aligned} F'(v) = & -M(X_{\Theta}u_{\Theta}, \mathcal{R}_{\beta}v)_{\Xi \cap \Upsilon} + (u_{\Theta} \nabla_x X_{\Theta}, \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}v)_{\Xi} + (u_{\Theta}, \nabla_x \cdot \mathcal{R}_{\beta}v \nabla_x X_{\Theta})_{\Xi} \\ & + (u_{\Sigma} \nabla_x X_{\Sigma}, \nabla_x \mathcal{R}_{\beta}v)_{\Xi} + (u_{\Sigma}, \nabla_x \cdot \mathcal{R}_{\beta}v \nabla_x X_{\Sigma})_{\Xi}. \end{aligned} \quad (75)$$

Обратим внимание на следующее. Во-первых, справедлива формула

$$F'(v) = (Z^{\beta}, v)_{\Xi \cap \Upsilon} + (\mathcal{Z}^{\beta}, \nabla_x v)_{\Xi \cap \Upsilon}, \quad (76)$$

где Z^{β} и $\mathcal{Z}^{\beta}$ – функция и вектор-функция с компактными носителями, принадлежащие пространству $H^1(\Xi \cap \Upsilon)$. Во-вторых, решение u_{Σ} задачи (43) существует и при нарушении условий (51). Это решение не попадает в пространство $\mathcal{H}$ и не является единственным, так как приходится допустить растущие решения обыкновенных дифференциальных уравнений (50), а значит, выйти из класса единственности. Тем не менее, функции $u_{\Sigma} \in H_{\text{loc}}^1(\bar{\Sigma})$, удовлетворяющую интегральному тождеству (43) при гладких пробных функциях с компактными носителями, можно выбрать так, чтобы появилось линейное непрерывное отображение $F \mapsto u_{\Sigma}$ и выполнялась оценка

$$\|X_{\Sigma}u_{\Sigma}; H^1(\Sigma)\| \leq c\|F; \mathcal{H}^*\|.$$

В результате формула (75) определяет оператор $\mathcal{K} : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$, действующий по правилу $F \mapsto \mathcal{K}F = F'$. Он оказывается компактным в силу того, что множители Z и $\mathcal{Z}$ в представлении (76) принадлежат пространству Соболева $H^1(\Xi \cap \Upsilon)$, компактно вкладывающемуся в пространство Лебега $L_2(\Xi \cap \Upsilon)$.

Итак, согласно известной теореме Фредгольма о разрешимости уравнения

$$\mathbf{F} + \mathcal{K}\mathbf{F} = F \in \mathcal{H}^* \quad (77)$$

с компактным оператором $\mathcal{K}$, найдется такой набор $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_P\}$ элементов пространства $\mathcal{H}$, что при выполнении условий ортогональности

$$F(\mathcal{V}_p) = 0, \quad p = 1, \dots, P,$$

уравнение (77) имеет решение $\mathbf{F} \in \mathcal{H}^*$. Указанные равенства принимают вид условий (41) с индексами $q = 1, \dots, P$. Наконец, соотношения (51) для функционала $\mathbf{F} = (1 + \mathcal{K})^{-1}F$ также принимают вид условий (41), причем индекс q пробегает значения от $P + 1$ до $Q = P + 1 + 2K$. В силу равенства (77) сумма (72), найденная по решениям $u_{\Theta} \in \mathcal{H}_{\Theta}$ и $u_{\Sigma} \in \mathcal{H}_{\Sigma}$ задач (42) и (43), в которых произведена замена $F \mapsto \mathbf{F}$, является решением задачи (40) с правой частью $F(\mathcal{R}_{\beta}^{-1}v)$. Лемма 7 доказана.

Из следствия 8 вытекает также конечномерность ядра задачи (7) с искусственными условиями Дирихле. Впрочем, непосредственная проверка этого факта значительно проще, чем в случае задачи (2)–(4), так как в силу неравенства Фридрихса (32) проблем с переходом при $\eta = 0$ нормы (55) в норму (56) не возникает.

§ 4. Варианты и обобщения постановки задачи

Нет никаких препятствий для исследования по прежней схеме задачи о волнах на поверхности жидкости, заполняющей бесконечно глубокий каньон Σ со строго вертикальными стенками $\sigma_{\pm}$ и плавающим телом Θ : к соотношениям (2)–(4) добавляются условия непротекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \sigma_{\pm}^0 := \sigma_{\pm} \setminus \Theta. \quad (78)$$

Единственное изменение возникает во вспомогательной задаче (7), где вместо условий Дирихле на поверхности $\sigma_{\pm}^0$ сохраняются условия Неймана (78). Соответственно вместо порога $\lambda_{\#} = \pi^2 l^{-2}$ возникает порог $\lambda_{\#} = \pi^2 (2l)^{-2}$. Результат будет сформулирован в теореме 11.

В задаче (2)–(4), (78) физически осмыслены искривления прямых стенок $\sigma_{\pm}$. Любые возмущения области Ξ внутри шара $\mathbb{B}_R = \{x : |x| < R\}$ со сколь угодно большим, но фиксированным радиусом R никак не влияют на утверждения, установленные в предыдущих параграфах.

Возможно еще одно несложное обобщение предыдущих результатов – для каньонов с периодическими “изрезанными” стенками (шхер), т.е. в этом случае

$$\Sigma = \{x : x_1 \in \mathbb{R}, x_3 < 0, |x_2| < H(x_1, x_3)\}, \quad (79)$$

где H – липшицева функция с периодами $2l_1$ и $2l_3$ по переменным x_1 и x_3 соответственно. Разумеется, возможно более сложное строение поверхности $\partial \Sigma$, в частности, боковые стенки не обязаны быть графиками функций (см. рис. 4). Отличие от материала предыдущих параграфов возникает, во-первых, при доказательстве леммы 7: вместо преобразования Фурье приходится использовать его дискретный аналог – преобразование Гельфанда (сведения, необходимые для анализа задачи (43), содержатся, например, в статьях [32], [33]). Во-вторых, порог $\lambda_{\#}$ и спектральные атрибуты (45), (46) модельной задачи удастся найти посредством разделения переменных только в том случае, когда функция H в определении (79) не зависит от координаты x_3 . Изучить модельные задачи можно при помощи приемов, излагаемых ниже в более содержательной ситуации. Уточнять появляющиеся характеристики и формулировать финальную теорему не будем – это просто сделать по прочтении всей статьи.

Гораздо больше проблем с каньонами, заданными формулами (10) и (11), т.е. сужающимися или расширяющимися при $x_3 \rightarrow -\infty$ (см. рис. 3). В этом случае краевой задаче (2)–(4) поставим в соответствие следующую плоскую модельную задачу в области $\Pi = \{x' = (x_2, x_3) : x_3 < 0, |x_2| < H(x_3)\}$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'} U(x') + \eta^2 U(x') &= 0, & x' \in \Pi, \\ \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_2, 0) &= \lambda U(x_2, 0), & |x_2| < H(0), & \frac{\partial U}{\partial n}(\pm H(x_3), x_3) = 0, & x_3 < 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Пусть выполнено условие (6) симметрии тела Θ (симметрия искривленного полуслоя Σ введена изначально, однако она не нужна для проверки утверждения, аналогичного теореме 2). Понадобится еще одна модельная задача

Рис. 4

в области $\Pi^+ = \{x' \in \Pi : x_2 > 0\}$ с искусственным условием Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'} U^+(x') &= 0, \quad x' \in \Pi^+, \quad U^+(0, x_3) = 0, \quad x_3 < 0, \\ \frac{\partial U^+}{\partial x_3}(x_2, 0) &= \lambda^+ U^+(x_2, 0), \quad 0 < x_2 < H(0), \quad \frac{\partial U^+}{\partial n}(H(x_3), x_3) = 0, \quad x_3 < 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Очевидно, что λ^+ -спектр задачи (81) дискретен и расположен на полуоси $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$. Первое собственное число обозначим через $\lambda_{\#} > 0$; оно простое в силу принципа максимума. Согласно формуле Рэлея справедливо следовое неравенство

$$\|U^+; L_2(0, H(0))\|^2 \leq \lambda_{\#}^{-1} \|\nabla_{x'} U^+; L_2(\Pi)\|, \quad U^+ \in H^1(\Pi), \quad U^+ = 0, \quad x_2 = 0, \quad (82)$$

заменяющее неравенство (33) в рассматриваемом случае.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполнены геометрические требования (6) и (8)–(10) (не исключается случай $\varkappa = 0$), а N – количество собственных чисел (38) задачи (37) на полуинтервале $[0, \lambda_{\#})$. Тогда задача (2)–(4), (78) имеет не менее N собственных чисел на том же полуинтервале, лежащем на ее существенном (заведомо непрерывном в случае $H = \text{const}$) спектре. Соответствующие собственные функции (ловушечные моды) с экспоненциальной скоростью затухают на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поясним только те частные изменения, которые позволяют реализовать схему исследования задачи, разработанную в §§ 2, 3.

1) Неравенство Фридрихса (32) заменяется следующим весовым неравенством, опирающимся на условие Дирихле при $x_2 = 0$:

$$\int_0^{H(x_3)} H(x_3)^{-2} |U(x')|^2 dx_2 \leq \frac{4}{\pi^2} \int_0^{H(x_3)} \left| \frac{dU}{dx_2}(x') \right|^2 dx_2. \quad (83)$$

Если $\varkappa \leq 0$ в формуле (11), то соотношение (83) легко преобразуется в соотношение, аналогичное (32), которое вместе с оценкой (82) позволяет повторить доказательство леммы 4 с прежней весовой функцией $\mathcal{R}_{\beta}(x) = \exp(\beta(1 + r^2)^{1/2})$. Если же $\varkappa \in (0, 1)$, то приходится изменить весовую функцию, положив

$\mathcal{R}_\beta(x) = \exp(\beta(1+r^2)^{(1+\kappa)/2})$. При этом формула

$$|\nabla_x \mathcal{R}_\beta(x)| \leq 2\beta(1-\kappa)(1+r^2)^{-\kappa/2} \mathcal{R}_\beta(x) \leq \beta CH(x_3)^{-1} \mathcal{R}_\beta(x)$$

заменяет формулу (31) и согласуется с весовым неравенством, получающимся интегрированием одномерного неравенства (83) по переменной $x_3 \in (-\infty, 0)$. В результате утверждение леммы 4 остается в силе, но ловушечные моды для $\kappa \in (0, 1)$ характеризуются более медленной, чем для $\kappa \leq 0$, хотя и по-прежнему экспоненциальной скоростью затухания при $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow \infty$.

Отметим, что весовое неравенство (15) сохраняется и для множества $\Sigma \setminus \Theta$, заданного формулами (10) и (11) (см., например, [34]).

2) Разделение переменных и явные решения (45), (46) задачи (80) доступны только для полуполосы Π . Для полубесконечных областей, изображенных на рис. 3, введем оператор $S(\eta)$ формулой

$$\langle S(\eta)U, V \rangle_\eta = (U, V)_\varpi, \quad U, V \in \mathcal{H}_\Pi(\eta),$$

где $\varpi = \{x' : |x_2| < H(0), x_3 < 0\}$, а $\langle U, V \rangle_\eta$ — скалярное произведение, порожденное нормой (55). При любом вещественном значении η этот оператор самосопряженный и компактный, а его норма $\mu_1(\eta)$ удовлетворяет соотношениям $\mu_1(0) = 1$ и $\mu_1(\eta) < 1$ при $\eta \neq 0$. Спектр оператора $S(\eta)$ расположен на сегменте $[0, \mu_1(\eta)]$, точка $\mu = 0$ — бесконечнократное собственное число, а на полуотрезке $(0, \mu_1(\eta)]$ спектр является дискретным и образует бесконечно малую последовательность

$$\mu_1(\eta) > \mu_2(\eta) \geq \dots \geq \mu_k(\eta) \geq \dots \rightarrow +0,$$

в которой собственные числа указаны с учетом их кратностей. При помощи теоремы 10.2.4 из [14] нетрудно убедиться в том, что при $|\eta_1| \geq |\eta_2|$

$$\mu_k(\eta_1) \geq \mu_k(\eta_2). \quad (84)$$

Кроме того, следовое неравенство (61) показывает, что при $|\eta| \rightarrow +\infty$

$$\mu_k(\eta) \rightarrow +0. \quad (85)$$

Фиксируем параметр $\lambda > 0$ и рассмотрим задачу (80). Обозначим через $\eta_\pm = \pm\eta_0, \dots, \eta_{\pm K(\lambda)} = \pm\eta_{K(\lambda)}$ все числа, для которых $\lambda = \mu_p(\eta_k)^{-1} - 1$ при каком-то $p = p(k)$. Набор таких чисел конечен (иначе согласно формулам (84), (85) найдется положительная точка сгущения спектра оператора $S(\eta)$). Собственные функции $U_{\pm k}$ операторов $S(\eta_{\pm k})$, отвечающие собственному числу $\mu = (1 + \lambda)^{-1}$, удовлетворяют соотношению

$$\eta_{\pm k}^2 (U_{\pm k}, U_{\pm j})_\Pi = \lambda (U_{\pm k}, U_{\pm j})_\varpi - (\nabla_{x'} U_{\pm k}, \nabla_{x'} U_{\pm j})_\Pi = \eta_{\pm j}^2 (U_{\pm k}, U_{\pm j})_\Pi.$$

Следовательно, их можно ортонормировать в $L_2(\Pi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Если $\eta_{\pm k} > 0$, то соответствующая собственная функция $U_{\pm k}$ экспоненциально затухает на бесконечности. Однако в случае $\eta_{\pm k} = 0$ затухания нет — справедливо представление, аналогичное (64), т.е. $U_{\pm k}(x')$ стабилизируется к постоянной $C_{\pm k}$ при $x_3 \rightarrow -\infty$. Для полуполосы оказывается,

что отлична от нуля только постоянная $C_{\pm 0}$, как раз и являющаяся собственной функцией, отвечающей нулевому собственному числу спектральной задачи Стеклова (80) при $\eta = 0$. Вопрос о затухании собственных функций этой задачи для других геометрических форм остается открытым. Это свойство нужно для реализации изложенной в § 3 схемы проверки конечномерности ядра задачи (2)–(4) и непрерывности ее спектра (см. формулировку теоремы 11). Можно ожидать, что для тех же целей при отсутствии затухания годятся методы, разработанные в [23]–[26], однако применять их здесь не будем из-за значительной громоздкости требуемых вычислений. По той же причине не будем изучать оператор задачи в весовом классе функций с ростом на бесконечности, упомянув лишь, что проверка его фредгольмовости достаточна для утверждения, аналогичного следствию 8 и обеспечивающего непрерывность спектра.

3) В случае сужающегося или расширяющегося поперечного сечения каньона (см. формулу (10) и рис. 3) изменяется вид (63) весовой функции ζ , упомянутой в замечании 10 и фигурирующей в интегральном представлении (65). Согласно результатам [35], [36] (см. также [29]) при условии (11) эту функцию следует искать в виде

$$\zeta(x) = \int_{x_1}^0 H(t)^{-1} dt + O(|x_3|^{-\kappa}), \quad x_3 \rightarrow -\infty.$$

Все остальные приемы, предложенные в §§ 2, 3, без труда могут быть адаптированы к доказательству теоремы 11.

Разработанный метод идентификации ловушечных мод может быть применен, в основном, к пространственным задачам. Его применению в двумерном случае препятствуют изначальная дискретность спектра в плоской задаче на поперечном сечении $\Pi \setminus \bar{\Theta}$ (см. комментарии к задаче (81)) и отсутствие горизонтальной линии симметрии для постановки искусственных краевых условий Дирихле в плоской задаче на продольном сечении каньона. Исключение составляет задача о косом набегании волн на бесконечный цилиндр в полупространстве $\mathbb{R}_-^3$, двумерная форма которой выглядит так:

$$\begin{aligned} -\Delta_y \Phi(y) + \kappa^2 \Phi(y) &= 0, & y &= (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_-^2 \setminus \bar{\Theta}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}(y) &= \lambda \Phi(y), & y &\in \mathbb{R}_- \setminus \bar{\Theta}, & \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y) &= 0, & y &\in \partial \Theta \cap \mathbb{R}_-^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Здесь κ – положительное число, связанное с углом набегания, а Θ – открытое множество, ограниченное одной или несколькими кусочно гладкими дугами.

Дело в том, что, как нетрудно установить, непрерывный λ -спектр задачи (86) занимает луч $[\kappa, +\infty)$, а на полуинтервале $[0, \kappa)$ расположен дискретный спектр. Эффект появления ловушечных мод в задаче (86) известен (см., например, [37], [38]), а наличие положительного порога $\lambda_{\#} = \kappa$ позволяет легко получить результат, аналогичный теореме 11: “посадить” на полуинтервал $[0, \lambda_{\#})$ любое наперед заданное количество собственных чисел, отвечающих экспоненциально затухающим на бесконечности собственным функциям. Для этого требуется предположить, что нижняя сторона прямоугольника $\{y : y_1 \in (0, b), y_2 \in (-h, 0)\}$ расположена на границе $\partial \Theta$ тела. В самом деле, собственные числа двумерного варианта смешанной спектральной задачи

Стеклова (37) для оператора Гельмгольца $-\partial^2/\partial y_1^2 + \varkappa^2$ имеют вид

$$\Lambda_k = B_k \frac{\exp(2B_k h) - 1}{\exp(2B_k h) + 1} = O(B_k^2 h), \quad B_k = \sqrt{\varkappa^2 + \pi^2 \frac{k^2}{b^2}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и оказываются бесконечно малыми при $h \rightarrow +0$. При этом плоское тело Θ может выступить над поверхностью или быть полностью погруженным (см. рис. 1). Отметим, что при указанной интерпретации задачи (86) на рис. 1 изображены плоские поперечные сечения бесконечных цилиндров.

Список литературы

- [1] N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear water waves, A mathematical approach*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [2] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [3] C. M. Linton, P. McIver, "Embedded trapped modes in water waves and acoustics", *Wave Motion*, **45**:1–2 (2007), 16–29.
- [4] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. I", *Матем. сб.*, **190**:1 (1999), 109–138; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, "Wood's anomalies and surface waves in the problem of scattering by a periodic boundary. I", *Sb. Math.*, **190**:1 (1999), 111–141.
- [5] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе. II", *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 43–70; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, "Wood's anomalies and surface waves in the problem of scattering by a periodic boundary. II", *Sb. Math.*, **190**:2 (1999), 205–231.
- [6] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области", *Математические вопросы теории распространения волн*. 29, Записки науч. сем. ПОМИ, **264**, ПОМИ, СПб., 2000, 66–82; англ. пер.: I. V. Kamotski, S. A. Nazarov, "The augmented scattering matrix and exponentially decaying solutions of an elliptic problem in a cylindrical domain", *J. Math. Sci. (New York)*, **111**:4 (2002), 3657–3666.
- [7] С. А. Назаров, "Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом", *Функц. анализ и его прил.*, **40**:2 (2006), 20–32; англ. пер.: S. A. Nazarov, "A criterion for the existence of decaying solutions in the problem on a resonator with a cylindrical waveguide", *Funct. Anal. Appl.*, **40**:2 (2006), 97–107.
- [8] С. А. Назаров, "Искусственные краевые условия для поиска поверхностных волн в задаче дифракции на периодической границе", *ЖВМ и МФ*, **46**:12 (2006), 2265–2276; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Artificial boundary conditions for finding surface waves in the problem of diffraction by a periodic boundary", *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:12 (2006), 2164–2175.
- [9] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов", *Докл. РАН*, **368**:6 (1999), 771–773; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, "Elastic waves localized near periodic families of defects", *Dokl. Phys.*, **44**:10 (1999), 715–717.
- [10] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, "Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической границе", *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 138–140; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, "Exponentially decreasing solutions of diffraction problems on a rigid periodic boundary", *Math. Notes*, **73**:1–2 (2003), 129–131.

- [11] D. V. Evans, M. Levitin, D. Vassiliev, "Existence theorems for trapped modes", *J. Fluid Mech.*, **261** (1994), 21–31.
- [12] I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl, "Edge resonance in an elastic semi-strip", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **51**:1 (1998), 1–14.
- [13] С. А. Назаров, "Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой", *ЖВМ и МФ*, **48**:5 (2008), 863–881; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Trapped modes in a cylindrical elastic waveguide with a damping gasket", *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:5 (2008), 816–833.
- [14] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [15] В. А. Кондратьев, "Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками", *Тр. ММО*, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292; англ. пер.: V. A. Kondrat'ev, "Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **16** (1967), 227–313.
- [16] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, "О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками", *Math. Nachr.*, **76**:1 (1977), 29–60.
- [17] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, "Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе", *Math. Nachr.*, **81**:1 (1978), 25–82.
- [18] С. А. Назаров, "Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов", *УМН*, **54**:5 (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, "The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes", *Russian Math. Surveys*, **54**:5 (1999), 947–1014.
- [19] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [20] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, "Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей", *Труды ЛМО*, **1990**:1, 174–211.
- [21] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, "Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач", *Проблемы матем. физики*, **13**, Изд-во ЛГУ, Л., 1991, 192–244.
- [22] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, "Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы", *Алгебра и анализ*, **4**:3 (1992), 196–225; англ. пер.: S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, "Selfadjoint elliptic problems with radiation conditions on the edges of the boundary", *St. Petersburg Math. J.*, **4**:3 (1993), 569–594.
- [23] С. А. Назаров, "Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:1 (1993), 202–239; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Asymptotics of the solution of a boundary value problem in a thin cylinder with nonsmooth lateral surface", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **42**:1 (1994), 183–217.
- [24] С. А. Назаров, "Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое", *Тр. ММО*, **60**, УРСС, М., 1998, 3–97; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Asymptotic expansions at infinity of solutions of the elasticity theory problem in a layer", *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1999, 1–85.

- [25] S. A. Nazarov, K. Pileckas, "The asymptotic properties of the solution to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity", *J. Math. Fluid Mech.*, **1**:2 (1999), 131–167.
- [26] S. A. Nazarov, G. Thäter, "Neumann problem in a perforated layer (sieve)", *Asymptot. Anal.*, **44**:3–4 (2005), 259–298.
- [27] С. А. Назаров, "Асимптотика по малому параметру решения эллиптической по Аграновичу–Вишику краевой задачи в области с конической точкой", *Проблемы матем. анализа*, **7** (1979), 146–167.
- [28] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976; пер. с нем.: Е. Камке, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Geest & Portig, Leipzig, 1959.
- [29] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [30] S. A. Nazarov, K. Pileckas, "Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier–Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity", *Advances in fluid dynamics*, Quad. Mat., **4**, Seconda Univ. Napoli, Caserta, 1999, 141–243.
- [31] S. A. Nazarov, "Weighted spaces with detached asymptotics in application to the Navier–Stokes equations", *Advances in mathematical fluid mechanics* (Paseky, Czech. Republic, 1999), Adv. Math. Fluid Mech., Springer-Verlag, Berlin, 2000, 159–191.
- [32] С. А. Назаров, "Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 101–112; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Elliptic boundary value problems with periodic coefficients in a cylinder", *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 89–98.
- [33] П. А. Кучмент, "Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных", *УМН*, **37**:4 (1982), 3–52; англ. пер.: P. A. Kuchment, "Floquet theory for partial differential equations", *Russian Math. Surveys*, **37**:4 (1982), 1–60.
- [34] С. А. Назаров, "Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях", *Матем. заметки*, **62**:5 (1997), 751–765; Письмо в редакцию, **63**:4 (1998), 640; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Weighted korn inequalities in paraboloidal domains", *Math. Notes*, **62**:5 (1997), 629–641; "Letter to the editor", **63**:4 (1998), 565.
- [35] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, "Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:5 (1972), 1080–1113; исправления к работе, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 709–710; англ. пер.: V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, "On the asymptotic behavior of solutions of differential equations in Hilbert space", *Math. USSR-Izv.*, **6**:5 (1972), 1067–1116.
- [36] Б. А. Пламеневский, "Об асимптотическом поведении решений квазиэллиптических дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:6 (1973), 1332–1375; англ. пер.: B. A. Plamenevskii, "On the asymptotic behavior of solutions of quasielliptic differential equations with operator coefficients", *Math. USSR-Izv.*, **7**:6 (1973), 1327–1370.
- [37] N. Kuznetsov, R. Porter, D. V. Evans, M. J. Simon, "Uniqueness and trapped modes for surface-piercing cylinders in oblique waves", *J. Fluid Mech.*, **365** (1998), 351–368.
- [38] О. В. Мотыгин, "Локализованные моды колебаний жидкости при косом набегающем волн на частично погруженные тела", *ПММ*, **63**:2 (1999), 267–275; англ. пер.: O. V. Motygin, "Trapped modes of oscillation of a liquid for surface-piercing bodies in oblique waves", *J. Appl. Math. Mech.*, **63**:2 (1999), 257–264.

С. А. Назаров (S. A. Nazarov)
 Институт проблем машиноведения РАН,
 г. Санкт-Петербург
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию
 28.08.2007 и 17.09.2008