Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Матвеев, О последовательных минимумах расширенной логарифмической высоты алгебраических чисел, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 3, 89–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:53:37

УДК 511

Е. М. Матвеев

О последовательных минимумах расширенной логарифмической высоты алгебраических чисел

Пусть $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ – алгебраическое поле; $S = 2$, если $\mathbb{K}$ комплексное, и $S = 1$, если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$; $\delta = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]/S$. Для $\alpha \in \mathbb{K}^*$ положим $H_*(\alpha) = \max\{\delta h(\alpha), |\ln \alpha|\}$, где $h(\alpha)$ – высота Вейля числа α . Тогда для мультипликативно независимых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ выполняется неравенство

$$H_*(\alpha_1) \cdots H_*(\alpha_n) 2.5^n (e^{0.2n} n)^S \delta \ln(4.64\delta) > 1.$$

Библиография: 19 названий.

Настоящая работа содержит описание математической конструкции, названной автором расширенным логарифмическим пространством, и соответствующих мультипликативных алгебраических решеток, а также доказательства ряда неравенств для этих решеток.

План статьи следующий. В §§ 1–3 приводятся общие сведения об алгебраических решетках. При этом в классическую конструкцию вносится небольшое усовершенствование, делающее ее более естественной и позволяющее уточнить известные неравенства (см. предложения 2.1–2.3). В §§ 4–5 представлено описание расширенного логарифмического пространства и его простейших свойств. Основные результаты сформулированы в § 6, а остаток статьи занимают доказательства этих теорем.

Выделим две важнейшие особенности полученных результатов. Во-первых, зависимость оценок от D имеет вид $D \ln D$ (D – степень алгебраического поля). Во-вторых, зависимость от n показательная и не содержит множителя n^n (n – количество последовательных минимумов).

Основным методом настоящей работы является использование так называемых интерполяционных определителей, введенных недавно М. Лораном и заменяющих технику арифметико-аналитического продолжения Гельфонда. При этом не только доказательства становятся короче и прозрачнее, но и выводимые константы существенно улучшаются. Это позволило получить явные оценки с достаточно малыми значениями входящих в них числовых констант.

Следует также отметить, что первоначально техника интерполяционного определителя и прием устранения множителя n^n были использованы соответственно М. Лораном и автором в конструкциях значительно более сложных, чем в этой работе. Поэтому статья может быть полезна для знакомства с этими методами.

Работа имеет непосредственное приложение к теории линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, а также может быть использована при конструировании новых типов многомерных решеток.

§1. Решетки

Основные факты по геометрии чисел взяты из [1], [2] и [3].

Пусть дано нормированное векторное пространство $\mathcal{V}$ над $\mathbb{R}$. Тогда *решеткой* называется дискретная подгруппа $\Lambda \subseteq \mathcal{V}$. У решетки есть базис, все векторы решетки целочисленно выражаются через него. Количество векторов в базисе называется *рангом* решетки $\text{rank } \Lambda$ (ввиду дискретности Λ имеем: $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Lambda = \text{rank}_{\mathbb{R}} \Lambda$).

Для набора векторов $\mathcal{U}$ и множества $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ через $\langle \mathcal{U} \rangle_{\mathcal{B}}$ будем обозначать множество линейных комбинаций векторов из $\mathcal{U}$ с коэффициентами из $\mathcal{B}$. Чтобы конечно порожденная аддитивная подгруппа Λ являлась решеткой, должно выполняться условие: $\text{rank } \Lambda = \dim \langle \Lambda \rangle_{\mathbb{R}}$. Если $\langle \Lambda \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{V}$, то говорят, что решетка *полная*.

Скалярное произведение в векторном пространстве задает m -мерные объемы, индуцированные формулой

$$\text{Vol}_m \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle_{[0;1]} = (\det(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{i,j=1,\dots,m})^{1/2},$$

где $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle_{[0;1]}$ — параллелепипед, построенный на линейно независимых векторах $\mathbf{v}_j$. Если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис решетки Λ , то $\Pi(\Lambda) = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{[0;1]}$ называют *фундаментальным параллелепипедом* решетки, а число $\text{Vol}_n \Lambda = \text{Vol}_n \Pi(\Lambda)$ называют *объемом* решетки Λ . Он не зависит от выбора базиса.

Если задана какая-либо норма $\| \cdot \|$, то через $\mathcal{W}(\| \cdot \|)$ будем обозначать единичный шар этой нормы, т.е. множество векторов $\mathbf{v}$ таких, что $\|\mathbf{v}\| \leq 1$.

Теперь напомним понятие последовательного минимума. Число λ_k является k -м *последовательным минимумом* множества Λ относительно нормирования $\| \cdot \|$, если λ_k есть точная нижняя грань таких λ , для которых существуют k линейно независимых векторов из $\lambda \mathcal{W}(\| \cdot \|) \cap \Lambda$. Отметим, что у решетки ввиду ее дискретности существуют ненулевые последовательные минимумы, достигающиеся на некоторых векторах. Последовательные минимумы не убывают, и их количество равно $\text{rank } \Lambda$.

Минимальное расстояние в данной норме между различными векторами решетки назовем ее *диаметром* $\text{diam}(\Lambda, \| \cdot \|) = \lambda_1$. Это означает, что с помощью Λ получается решетчатая упаковка пространства телами $\lambda_1 \mathcal{W}(\| \cdot \|)/2$ диаметра λ_1 . Если норма не указана, то по умолчанию полагаем ее евклидовой и пишем $\text{diam } \Lambda$.

Для n -мерной решетки Λ можно ввести безразмерный параметр — *центральную плотность*

$$\gamma(\Lambda) = \frac{\text{diam}^n \Lambda}{\text{Vol}_n \Lambda}.$$

Содержательный смысл $\gamma(\Lambda)$ состоит в следующем. Если $\Lambda' = \Lambda / \text{diam } \Lambda$, то $\text{diam } \Lambda' = 1$, а число $\gamma(\Lambda) = \gamma(\Lambda')$ равно среднему числу точек (центров) решетки Λ' в единице объема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (теорема Минковского о последовательных минимумах). Пусть в n -мерном евклидовом пространстве даны норма $\| \cdot \|$ и полная решетка Λ , ее последовательные минимумы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ достигаются на векторах $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, $\Lambda' = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, $[\Lambda : \Lambda']$ — индекс Λ относительно Λ' .

Тогда

$$\frac{2^n}{n!} [\Lambda : \Lambda'] \text{Vol}_n \Lambda \leq \lambda_1 \cdots \lambda_n \text{Vol}_n \mathcal{W}(\|\cdot\|) \leq 2^n \text{Vol}_n \Lambda. \quad (1.1)$$

§ 2. Аддитивные алгебраические решетки

Основные факты §§ 2 и 3 взяты из [1], [3], хотя конструкция несколько отлична, на что обращается специальное внимание.

Пусть дано алгебраическое поле $\mathbb{K}$ степени $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = D$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{K}$ имеется набор сопряженных чисел $\alpha^{(\sigma)} \in \mathbb{C}$, $\sigma = 1, \dots, D$. Это определяет гомоморфизм g аддитивной группы $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}^D \cong \mathbb{R}^{2D}$, задаваемый формулой $g(\alpha) = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(D)})$.

Зарезервируем обозначения: $\sigma = 1, \dots, D_1$ — гомоморфизмы поля $\mathbb{K}$ в $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, а $\sigma = D_1 + 1, \dots, D_1 + 2D_2$ — комплексные гомоморфизмы, при этом $\sigma = D_1 + t$ и $\tau = D_1 + D_2 + t$ ($1 \leq t \leq D_2$) соответствуют комплексно сопряженным вложениям $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$. Для краткости будем говорить, что такие σ и τ комплексно сопряжены ($D = D_1 + 2D_2$). Тогда наше геометрическое отображение обладает очевидным свойством: образ $g(\mathbb{K})$ лежит в $\mathbb{R}$ -подпространстве $\mathcal{V}_a \subseteq \mathbb{C}^D$, которое задается условиями

$$\begin{cases} \text{Im } z_\sigma = 0, & \text{если } \sigma \text{ — действительный гомоморфизм,} \\ z_\sigma = \bar{z}_\tau, & \text{если } \sigma \text{ и } \tau \text{ комплексно сопряжены,} \end{cases}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{cases} y_\sigma = 0, & \text{если } \sigma \text{ — действительный гомоморфизм,} \\ x_\sigma = x_\tau, y_\sigma = -y_\tau, & \text{если } \sigma \text{ и } \tau \text{ комплексно сопряжены;} \end{cases} \quad (2.1)$$

считаем, что координаты $z_\sigma = x_\sigma + iy_\sigma$ векторов $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^D$ при стандартном овеществлении переходят в пару действительных координат (x_σ, y_σ) . Символ i будет зарезервирован за мнимой единицей.

Зададим в $\mathbb{C}^D$ стандартную эрмитову форму

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_D \bar{w}_D. \quad (2.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. На пространстве $\mathcal{V}_a$ форма (2.2) является евклидовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ принимает на $\mathcal{V}_a$ вещественные значения. Для вещественных σ очевидно $z_\sigma \bar{w}_\sigma \in \mathbb{R}$. Для комплексно сопряженных σ, τ имеем

$$z_\sigma \bar{w}_\sigma + z_\tau \bar{w}_\tau = z_\sigma \bar{w}_\sigma + \bar{z}_\sigma w_\sigma \in \mathbb{R},$$

откуда следует утверждение.

ПРИМЕЧАНИЯ. 1. Стандартным геометрическим отображением g_0 (см. [1], [3]) считается аналогичное отображение, но в $\mathcal{V}_0 \cong \mathbb{R}^{D_1} \times \mathbb{C}^{D_2}$ с отбрасыванием координат, связанных соотношениями (2.1). Фактически $\mathcal{V}_0$ можно считать координатным $\mathbb{R}$ -подпространством пространства $\mathbb{C}^D$ (одна из пары связанных координат равна нулю), а g_0 получается как композиция отображения g и оператора проектирования $\mathcal{V}_a$ на $\mathcal{V}_0$.

2. В [4] поле $\mathbb{K}$, рассматриваемое как $\mathbb{Q}$ -пространство, снабжено евклидовой нормой, аналогичной (2.2),

$$\|\alpha\|^2 = |\alpha^{(1)}|^2 + \dots + |\alpha^{(D)}|^2$$

без построения соответствующего геометрического отображения. Очевидно, g и есть нужное изометрическое вложение $\mathbb{K}$ в геометрическое пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (см. [3]). Пусть $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$, $\text{Disc } \mathbb{K}$ – дискриминант $\mathbb{K}$. Тогда $g_0(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}})$ – полная решетка в $\mathcal{V}_0$ объема $2^{-D_2} |\text{Disc } \mathbb{K}|^{1/2}$ и диаметра λ_1 ,

$$\left(\frac{D_1}{2} + D_2\right)^{1/2} \leq \lambda_1 \leq (D_1 + D_2)^{1/2}.$$

Таким образом, отображение g_0 удобно тем, что образ $g_0(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}})$ полон в $\mathcal{V}_0$. Покажем, что в случае отображения g формулы для объема и диаметра оказываются проще, а в случае g_0 эти формулы усложняются из-за действия проекции $\mathcal{V}_a$ на $\mathcal{V}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. $\Lambda_a = g(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}})$ – полная решетка в $\mathcal{V}_a$ объема $|\text{Disc } \mathbb{K}|^{1/2}$ и диаметра $\lambda_1 = D^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о полноте и объеме следует из того, что проектирование $\mathcal{V}_a$ на $\mathcal{V}_0$ – это изоморфизм, уменьшающий D -мерные объемы в 2^{D_2} раз (отбрасывание одной из двух связанных координат уменьшает объем в $\sqrt{2}$ раз, число связанных пар $\mathbb{R}$ -координат равно $2D_2$). Оценка диаметра вытекает из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{|g(\alpha)|^2}{D} \geq (|\alpha^{(1)}|^2 \dots |\alpha^{(D)}|^2)^{1/D} = |\text{Norm}_{\mathbb{K}} \alpha|^{2/D} \geq 1.$$

Равенство достигается для $\alpha = 1$, для всех корней из 1 и только для них.

Умножению на число β в поле $\mathbb{K}$ при геометрическом отображении соответствует линейный оператор $\mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^D$ с матрицей $\text{diag}(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(D)})$. Очевидно, $\mathcal{V}_a$ является инвариантным $\mathbb{R}$ -подпространством для $\mathcal{B}$. Укажем еще одно инвариантное $\mathbb{R}$ -подпространство. В $\mathbb{C}$ умножению на i соответствует поворот на угол $\pi/2$. Поэтому $i\mathcal{V}_a$ будет ортогональным к $\mathcal{V}_a$ и инвариантным для $\mathcal{B}$ (ввиду равенства $i\mathcal{B} = \mathcal{B}i$). Таким образом, при овеществлении $\mathbb{C}^D$ оператор $\mathcal{B}$ распадается на прямую сумму двух подобных операторов.

§3. Логарифмическое пространство

При изучении мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ мы всегда будем предполагать, что $\alpha \neq 0$, не оговаривая это особо.

Отображение $\mathbb{K}^*$ в $\mathbb{R}^D$, задаваемое формулами

$$x_\sigma = x_\sigma(\alpha) = \ln |\alpha^{(\sigma)}|, \quad 1 \leq \sigma \leq D,$$

является гомоморфизмом мультипликативной группы поля $\mathbb{K}$. Как и в аддитивном случае, для комплексно сопряженных σ и τ выполняется $x_\sigma = x_\tau$. Однако здесь образ $\mathbb{K}^*$ не является решеткой из-за нарушения дискретности. Решеткой (обозначим ее через Λ_U) будет только образ группы $U(\mathbb{K})$ единиц поля $\mathbb{K}$. Ранг Λ_U согласно теореме Дирихле равен $r = D_1 + D_2 - 1$, поскольку для $\alpha \in U(\mathbb{K})$ выполняется еще одно соотношение

$$x_1(\alpha) + \dots + x_D(\alpha) = \ln |\text{Norm}_{\mathbb{K}} \alpha| = 0. \quad (3.1)$$

При погружении этой решетки в r -мерное координатное пространство обычно (см. [1]) пары координат $x_\sigma = x_\tau$ заменяют на $2x_\sigma$, что сохраняет соотношение типа (3.1), но увеличивает объемы в $\sqrt{2}$ раз. Затем одну (любую) из оставшихся $r + 1$ координат отбрасывают. Это уменьшает объем в $\sqrt{r + 1}$ раз. Объем $R(\mathbb{K})$ полученной решетки называется *регулятором* поля $\mathbb{K}$. Ясно, что объем исходной решетки Λ_U в этом случае равен $\text{Vol}_r \Lambda_U = (2^{-D_2}(r + 1))^{1/2} R(\mathbb{K})$.

Для более детального исследования мультипликативной структуры поля $\mathbb{K}$ часто применяется следующая конструкция. Положим $\mathcal{D} = \{1, \dots, D\}$. Пронумеруем простые идеалы поля $\mathbb{K}$ индексами $\sigma > D$ в порядке возрастания их норм и зададим нормирования $\mathbb{K}$ по формуле

$$|\alpha|_\sigma = \begin{cases} |\alpha^{(\sigma)}|, & 1 \leq \sigma \leq D, \\ (\text{Norm } \mathfrak{p})^{-\text{ord}_{\mathfrak{p}} \alpha}, & \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\sigma, \quad \sigma > D. \end{cases}$$

Мы будем учитывать все такие нормирования несмотря на то, что они одинаковы для комплексно сопряженных σ . Это позволяет записывать формулу произведения без весовых коэффициентов

$$\prod_{\sigma=1}^{\infty} |\alpha|_\sigma = 1, \quad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

Также отметим, что только для конечного числа нормирований $|\alpha|_\sigma$ отличны от единицы.

Рассмотрим логарифмическое отображение $\mathcal{L}$ мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ в бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ векторов $\mathbf{x} = (x_\sigma \in \mathbb{R} : 1 \leq \sigma < \infty)$, задаваемое формулой

$$x_\sigma = x_\sigma(\alpha) = \ln |\alpha|_\sigma \quad (1 \leq \sigma < \infty). \quad (3.2)$$

Очевидно, это гомоморфизм, а образ $\Lambda_m = \mathcal{L}(\mathbb{K}^*)$ лежит в подпространстве $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^\infty$, определяемом условиями: $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, если

- (a) почти все $x_\sigma = 0$;
- (b) $x_\sigma = x_\tau$ для комплексно сопряженных σ и τ ;
- (c) выполняется аддитивный аналог формулы произведения

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} x_\sigma = 0 \quad (3.3)$$

(ср. с (3.1)). Будем называть $\mathcal{E}$ *логарифмическим пространством*.

Отметим, что для логарифмических образов $\mathbf{x}(\alpha)$ выполняется

$$x_\sigma \in \ln(\text{Norm } \mathfrak{p}_\sigma)\mathbb{Z}, \quad \sigma > D.$$

Введем в пространстве $\mathcal{E}$ нормирование

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\infty} |x_\sigma| = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \max\{0, x_\sigma\}. \quad (3.4)$$

Если $\mathbf{x} = \mathcal{L}(\alpha)$, то говорят, что $H(\alpha) = H(\mathbf{x})$ — это *логарифмическая высота* α . Следует отметить, что логарифмическая высота зависит от $\mathbb{K}$, т.е. $H(\alpha) = H(\alpha, \mathbb{K})$, хотя α можно помещать в различные поля. Однако при надлежащей нормализации можно получить инвариантное определение, а именно, норма $h(\alpha) = H(\alpha)/D$, называемая *абсолютной логарифмической высотой*, не зависит от выбора поля, содержащего α (см. [5]). Если поле не фиксировано, то под $H(\alpha)$ будем понимать высоту в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$.

По теореме Кронекера ядром логарифмического отображения является $U_1(\mathbb{K})$ — группа корней из 1 поля $\mathbb{K}$; эта группа конечна, циклическа; $\Lambda_m = \mathcal{L}(\mathbb{K}^*)$ является решеткой в $\mathcal{E}$.

Следствием теоремы Кронекера является то, что логарифмическое отображение необратимо, т.е. мы можем восстановить число α по его образу $\mathcal{L}(\alpha)$ только с точностью до множителя — корня из 1.

Уточненный вариант теоремы Дирихле о единицах звучит так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть фиксирован конечный набор $\mathcal{S}$ индексов σ , $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$. Тогда множество чисел $U(\mathbb{K}, \mathcal{S}) = \{\alpha \in \mathbb{K}^* : |\alpha|_\sigma = 1, \sigma \notin \mathcal{S}\}$ (так называемые $\mathcal{S}$ -единицы) образует при логарифмическом отображении полную решетку ранга $r(\mathcal{S}) = |\mathcal{S}| - D_2 - 1$ в подпространстве $\mathcal{E}_0(\mathcal{S})$ логарифмического пространства, заданном условиями $x_\sigma = 0, \sigma \notin \mathcal{S}$.

Докажем простой, но важный результат об $\mathcal{L}(\mathbb{K}^*)$.

ЛЕММА 3.2. Для последовательных минимумов решетки $\mathcal{L}(\mathbb{K}^*)$ имеем

$$\lambda_n \geq \ln(\text{Norm } \mathfrak{p}_{n+D_2+1}), \quad n > r = D_1 + D_2 - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом свойства (b) логарифмического пространства среди первых D координат векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ имеется D_2 одинаковых, что дает D_2 независимых линейных соотношений. Еще одно соотношение — это (3.3), очевидно, независимое от предыдущих. Поэтому если мы имеем $n \geq D - D_2$ линейно независимых векторов, то по крайней мере у одного из них должна быть ненулевая координата $\tau > n + D_2$. Но тогда для этой координаты $|x_\tau| \geq (1/2) \ln(\text{Norm } \mathbf{p}_\tau)$. Кроме того, из (3.3) следует, что сумма координат, противоположных по знаку x_τ , также по модулю не меньше $(1/2) \ln(\text{Norm } \mathbf{p}_\tau)$. Отсюда с учетом порядка нумерации идеалов следует утверждение леммы.

Вопрос о последовательных минимумах при $n < D - D_2$ изучен далеко не полностью. По сути дела, все результаты относятся только к λ_1 , а для следующих λ_k нетривиальных нижних оценок нет. Относительно λ_1 имеется недоказанная гипотеза Лемера [6] о том, что существует абсолютная константа $C > 0$, для которой всегда выполняется $\lambda_1 \geq C$. Найденное Лемером число $\theta_{10} = 1.176\dots$, удовлетворяющее уравнению

$$x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1 = 0,$$

имеет минимальную известную на сегодня логарифмическую высоту $H(\theta_{10}) = \ln(\theta_{10}) > 0$.

Добровольскому [7] принадлежит наилучшая асимптотическая нижняя оценка λ_1 , константа в которой неоднократно уточнялась:

$$H(\alpha) \gg \left(\frac{\ln \ln D}{\ln D} \right)^3, \quad \alpha \notin U_1(\mathbb{A}). \quad (3.5)$$

Здесь $U_1(\mathbb{A})$ — группа корней из 1 поля всех алгебраических чисел $\mathbb{A}$.

В [8] доказано, что в (3.5) с некоторыми оговорками можно заменить $D = \deg \alpha$ на меньшую величину $\delta = D/|\text{Disc } \alpha|^{1/D}$, при этом $\delta^{D/2}$ — это центральная плотность решетки $g(\mathbb{Z}[\alpha])$. Таким образом, центральная плотность аддитивной решетки ограничивает снизу диаметр мультипликативной решетки.

Ввиду теоретической и прикладной важности вопроса интерес представляют также и явные оценки, пусть даже и худшей асимптотики, но в достаточно большом диапазоне значений D превосходящие хорошие асимптотические оценки. Для логарифмической высоты здесь следует указать результат Блансби и Монтгомери [9]:

$$H(\alpha) \geq \ln \left(1 + \frac{1}{52D \ln D} \right), \quad \alpha \notin U_1(\mathbb{A}). \quad (3.6)$$

Кроме того, для широких классов алгебраических чисел имеются явные неулучшаемые оценки, соответствующие гипотезе Лемера, часть из которых мы резюмируем в виде утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. 1) *Очевидно, если $\alpha \notin U(\mathbb{A})$, то $H(\alpha) \geq \ln 2$.*

2) *Для невязимных α (α называется *взаимным* или *возвратным*, если α алгебраически сопряжено с $1/\alpha$ или, эквивалентно, минимальный для α многочлен*

симметричен) выполняется $H(\alpha) \geq \ln \theta_3$, где $\theta_3 = 1.324 \dots$ – корень уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ (см. [10]).

3) Для целых вполне вещественных α (т.е. все $\alpha^{(\sigma)} \in \mathbb{R}$) выполняется

$$H(\alpha) \geq \frac{D}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

(см. [11]).

4) Для целых вполне положительных α выполняется

$$H(\alpha) \geq D \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

(Получается, если предыдущий результат применить к $\sqrt{\alpha}$.)

В работе Бойда [12] перечислены все алгебраические числа малой логарифмической высоты степени $D \leq 20$.

Следует также отметить, что имеется значительное количество публикаций о регуляторе поля, связанном по теореме Минковского с произведением всех последовательных минимумов решетки единиц поля. Например, в работе Циммерта [13] показано, что $R(\mathbb{K})$ имеет как минимум показательный рост в зависимости от D . В работе Фридмана [14] изучается рост $R(\mathbb{K})$ в зависимости от $|\text{Disc } \mathbb{K}|$, т.е. от объема аддитивной решетки поля. Фактически же в этой зависимости участвует центральная плотность аддитивной решетки.

§ 4. Расширенное логарифмическое пространство

В настоящей работе рассматривается более сложная конструкция, чем приведенная выше. Эта конструкция до сих пор не привлекала внимания исследователей (она отсутствует в недавнем обзоре [3]), но необходима и неявно используется в ряде вопросов, например при изучении линейных форм от логарифмов алгебраических чисел и всех задач с ними связанных (см. [15]). Сама конструкция с оценкой λ_1 была тезисно приведена в [16]. Дальнейшие результаты о λ_1 были получены в [17]. В нашей работе получены нетривиальные оценки λ_n , $n > 1$. Схема доказательства та же, что и в [17].

Прежде всего построим конструкцию, которую назовем расширенным логарифмическим пространством. Сначала выберем некоторый непустой набор индексов $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ и заменим в пространстве $\mathbb{R}^\infty$, содержащем $\mathcal{E}$, $\mathbb{R}$ -компоненты, соответствующие координатам $\sigma \in \mathcal{S}$, на $\mathbb{C}$ -компоненты. Новая координата будет иметь вид $z_\sigma = x_\sigma + iy_\sigma$. Комплексно сопряженные σ, τ должны включаться в $\mathcal{S}$ парами. Для координат x_σ сохраняются прежние условия (а)–(с) логарифмического пространства и добавляется еще одно для y_σ :

(d) $y_\sigma = -y_\tau$ для комплексно сопряженных σ и τ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В приложениях (см., например, [4]) условие (d) выполняется автоматически. Если же мы изучаем решетки с геометрической точки зрения, например ищем плотные упаковки шаров, то условие (d) можно отбросить. На результатах статьи это практически не отразится.

Зарезервируем также для указанной конструкции обозначения: $\mathcal{S}$ содержит s_1 действительных координат и s_2 пар комплексно сопряженных координат, $S = |\mathcal{S}| = s_1 + 2s_2$, $s = s_1 + s_2$.

Полученное пространство назовем *расширенным логарифмическим пространством* $\mathcal{E}(\mathcal{S})$. Можно считать, что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{S})$, относя к $\mathcal{E}$ векторы, имеющие $y_\sigma = 0$. Существует естественное отображение $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{E}$ – проектирование $\mathcal{P}$, обращающее в нуль все y_σ .

Теперь опишем связь $\mathbb{K}^*$ с $\mathcal{E}(\mathcal{S})$. Для этого с координатами x_σ поступим так же, как и в случае построения $\mathcal{E}$ по формуле (3.2). Координаты y_σ определим как $y_\sigma = \text{Arg } \alpha^{(\sigma)}$. Другими словами, $z_\sigma = \text{Ln } \alpha^{(\sigma)}$, $\sigma \in \mathcal{S}$. При этом, строя соответствующую решетку в $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, будем учитывать все возможные значения логарифма. Полученное множество точек в $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ обозначим через $\Lambda(\mathcal{S})$. Отметим его основное свойство: для $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathcal{S})$ при некотором $\alpha \in \mathbb{K}^*$ выполняется

$$\begin{cases} \exp(x_\sigma) = |\alpha|_\sigma, & \sigma \notin \mathcal{S}, \\ \exp(z_\sigma) = \alpha^{(\sigma)}, & \sigma \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (4.1)$$

что позволяет восстанавливать α по его образу. Таким образом, расширенное логарифмическое отображение неоднозначно, зато существует сюръективное однозначное обратное отображение $\Lambda(\mathcal{S})$ на $\mathbb{K}^*$, $\alpha = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathcal{S})$, определяемое по формулам (4.1).

Далее мы часто будем фиксировать некоторый набор индексов $\mathcal{T}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$), тогда $\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ будет обозначать координатное подпространство пространства $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, содержащее векторы с $x_\sigma = 0$, $z_\sigma = 0$, $\sigma \notin \mathcal{T}$. Через $\Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ будем обозначать пересечение $\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \cap \Lambda(\mathcal{S})$.

Сформулируем сначала простые свойства множества $\Lambda(\mathcal{S})$ и отображений $\mathcal{A}$ (восстановление чисел по их расширенным логарифмическим изображениям), $\mathcal{L}$ (логарифмическое отображение $\mathbb{K}^*$ в $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{S})$), $\mathcal{P}$ (проектирование $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ на $\mathcal{E}$, т.е. обнуление всех y_σ).

ЛЕММА 4.1. *Выполняются следующие свойства:*

- 1) *отображение $\mathcal{A}$ – гомоморфизм $\Lambda(\mathcal{S})$ в $\mathbb{K}^*$, т.е.*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{v});$$

- 2) *$\text{Ker } \mathcal{A}$ состоит из векторов, у которых все $x_\sigma = 0$ ($1 \leq \sigma < \infty$), а $y_\sigma \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathcal{S}$; $\text{rank Ker } \mathcal{A} = s = s_1 + s_2$;*
- 3) *на множестве $\Lambda(\mathcal{S})$ выполняется равенство $\mathcal{P} = \mathcal{L}\mathcal{A}$;*
- 4) *$\mathcal{A}(\Lambda(\mathcal{S}) \cap \text{Ker } \mathcal{P}) = U_1(\mathbb{K})$;*
- 5) *$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \geq |\mathcal{T}| + s - D_2 - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1–4 очевидны.

Для доказательства п. 5 отметим, что согласно теореме Дирихле существует $|\mathcal{T}| - D_2 - 1$ мультипликативно независимых $\mathcal{T}$ -единиц. Если взять какие-либо их $\mathcal{A}$ -прообразы в $\Lambda(\mathcal{S})$, то это будут линейно независимые векторы в $\Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Более того, они будут не сравнимы по $\text{mod}(\text{Ker } \mathcal{A})$. Согласно п. 2 мы можем взять s линейно независимых векторов из $\text{Ker } \mathcal{A}$, ввиду вложения $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ принадлежащих тому же множеству $\Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ и при этом линейно независимых с предыдущими векторами. Этим п. 5 доказан.

Стандартное скалярное произведение позволяет говорить только о конечномерных объемах. Кроме того, оба пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ не являются гильбертовыми, так как состоят из векторов, у которых почти все координаты равны нулю, значит, нельзя говорить о метрической замкнутости и пр. Так что подобные вопросы в работе не затрагиваются. Кроме того, фактически в приложениях всегда берется какое-либо конечномерное координатное подпространство $\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Как и в пространстве $\mathcal{E}$, говоря о решетках в $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, мы будем опираться не на евклидову норму (нужную для определения объемов), а на норму, аналогичную норме (3.4) в $\mathcal{E}$. Для этого положим $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x}, \mathcal{S}) &= \frac{1}{2S} \sum_{\sigma \notin \mathcal{S}} |x_\sigma|, \\ \lambda(\mathbf{x}, \mathcal{S}) &= \frac{1}{S} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} |z_\sigma|, \quad H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \max\{\mu(\mathbf{x}, \mathcal{S})\theta, \lambda(\mathbf{x}, \mathcal{S})\}, \quad (4.2) \\ \lambda^*(\mathbf{x}, \mathcal{S}) &= \max\{|z_\sigma| : \sigma \in \mathcal{S}\}, \quad H_\theta^*(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \max\{\mu(\mathbf{x}, \mathcal{S})\theta, \lambda^*(\mathbf{x}, \mathcal{S})\} \end{aligned}$$

и назовем $H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ *расширенной логарифмической высотой* (с весовым коэффициентом θ , определяющим соотношение между λ и μ). Если $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \alpha$, то в случаях, когда нет опасности ошибиться, мы будем писать $\lambda(\alpha, \mathcal{S}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ и пр., подразумевая, что в λ выбраны некоторые значения логарифмов.

До сих пор в приложениях (см. [15]) в основном встречалась огрубленная форма расширенной логарифмической высоты

$$H_*(\alpha) = \max \left\{ \frac{D}{S} h(\alpha), |\ln \alpha| \right\} \quad (4.3)$$

для случаев, когда взято либо только одно действительное σ (если $S = 1$), либо пара комплексно сопряженных σ, τ (если $S = 2$), где $\lambda(\alpha, \mathcal{S}) = |\ln \alpha|$, а $(D/S)h(\alpha) \geq \mu(\alpha, \mathcal{S})$. Возможны и другие аналогичные нормирования.

§ 5. Сведения о первом последовательном минимуме

Для работы с корнями из 1 нам потребуется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 (см., например, [15]). Пусть $\alpha = \exp(2\pi i/N)$, тогда $D = \deg \alpha = \varphi(N)$, где φ — функция Эйлера, и

$$|\ln \alpha| \geq \frac{\pi}{2D \ln \ln(6D)} \geq \frac{\pi}{2D \ln(2D)}. \quad (5.1)$$

Отметим также, что если $\mathbb{K}$ не вполне комплексное поле, то в нем нет других корней из 1, кроме $\alpha = \pm 1$.

Прежде чем переходить к основной теореме о первых последовательных минимумах $\Lambda(\mathcal{S})$, приведем простое утверждение, по сути означающее, что мы действительно имеем дело с полной решеткой.

ЛЕММА 5.2. 1) Для любого набора индексов $\mathcal{T}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$) решетка $\Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ является полной в $\mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ ранга $|\mathcal{T}| + s - D_2 - 1$.

2) Последовательные минимумы $\Lambda(\mathcal{S})$ относительно нормы $H_\theta(\cdot, \mathcal{S})$ удовлетворяют условию

$$\lambda_n \geq \ln(\text{Norm } \mathbf{p}_{n+D_2-s+1}) \frac{2\theta}{S \min\{4, 2+\theta\}}, \quad n > r + s.$$

3) $\Lambda(\mathcal{S})$ – полная решетка в $\mathcal{E}(\mathcal{S})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} \in \Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, $\mathbf{y} = \mathcal{P}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}$. Если $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то из (4.2) и (3.4) получаем, что

$$H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S}) \geq \frac{\mu(\mathbf{x}, \mathcal{S})2\theta + \lambda(\mathbf{x}, \mathcal{S})\theta}{2+\theta} \geq H(\mathbf{y}) \frac{2\theta}{(2+\theta)S}, \quad (5.2)$$

и по теореме Кронекера $H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ ограничена снизу константой. Если же $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}$ является прообразом корня из 1 и согласно предложению 5.1 высота $H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ также ограничена снизу. Так что группа $\Lambda(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ дискретна, т.е. является решеткой, и по лемме 4.1 ее ранг максимален.

Пункт 2 доказывается аналогично лемме 3.2 применением (5.2) или неравенства $H_\theta(\mathbf{x}, \mathcal{S}) \geq \mu(\mathbf{x}, \mathcal{S})\theta$ с учетом того, что добавлено S координат y_σ , из которых s_2 пар связаны. Поэтому номера p -адических нормирований сдвинуты на s вперед.

Из первых двух пунктов следует, что $\Lambda(\mathcal{S})$ – решетка, при этом полнота получается за счет того, что $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ порождается векторами, у которых почти все координаты равны нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3 (см. [17]). Пусть $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\eta \geq 0$ и выполняются условия

$$\mu(\alpha, \mathcal{S}) \leq \frac{2\eta}{(2+\eta)\xi}, \quad \lambda(\alpha, \mathcal{S}) \leq \frac{1}{(2+\eta)\xi}.$$

Тогда $\alpha = 1$. Здесь $\xi = \delta \ln(4.8\delta)$, $\delta = D/S$.

Положив здесь $\eta = 1/(2\theta)$, получим:

СЛЕДСТВИЕ 5.4. При $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \neq 1$, $\delta = D/S$ выполняется

$$H_\theta(\alpha, \mathcal{S}) > \frac{2\theta}{(1+4\theta)\delta \ln(4.8\delta)}. \quad (5.3)$$

Сравнение с предложением 5.1 показывает, что тип зависимости от δ ($\delta \ln \delta$ в знаменателе) в оценках в основном правильный, и дальнейшие улучшения могут состоять только в замене $\ln \delta$ на $\ln \ln \delta$ и в уточнении параметров, не зависящих от δ . Этим ситуация в логарифмическом пространстве отличается от положения в расширенном логарифмическом пространстве, где аналог гипотезы Лемера неверен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5 (см. [17]). Для $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \neq 1$, выполняется

$$\operatorname{sh} \frac{\lambda(\alpha, \mathcal{S})}{2} \geq \exp \left(-\frac{D}{S} \ln 2 - \mu(\alpha, \mathcal{S}) \right).$$

В [17] не было приведено полезное следствие из этой теоремы, уточняющее результат Шинцеля (см. предложение 3.3).¹

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $\alpha \neq 1$ – целое вполне положительное алгебраическое число. Тогда

$$h(\alpha) \geq \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2}, \quad y = |\operatorname{Norm} \alpha|^{1/\deg \alpha}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathcal{S} = \mathcal{D} = \{1, \dots, D\}$, $S = D$. Поскольку α – целое число, то для неархимедовых нормирований имеем $|\alpha|_\sigma \leq 1$, $\sigma > D$. С учетом формулы произведения это дает

$$\mu(\alpha, \mathcal{D}) = -\frac{1}{2D} \sum_{\sigma > D} \ln |\alpha|_\sigma = \frac{1}{2D} \sum_{\sigma=1}^D \ln |\alpha|_\sigma = \ln y.$$

Так как α – вполне положительное число, то формула произведения также дает, что $\lambda(\alpha, \mathcal{D}) = 2(\ln x - \ln y)$, $\ln x = h(\alpha)$. Тогда из предложения 5.5 следует, что

$$\operatorname{sh}(\ln x - \ln y) \geq \exp(-\ln 2 - \ln y)$$

или после простых преобразований

$$x^2 - x - y^2 \geq 0.$$

Решая это неравенство с учетом $x \geq 1$, получаем (5.4).

§6. Формулировки основных результатов

Напомним необходимые обозначения. Дано поле $\mathbb{K}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = D$, $\mathcal{S} \subseteq \{1, \dots, D\}$, $|\mathcal{S}| = S = s_1 + 2s_2 > 0$, $s = s_1 + s_2$, $\theta > 0$. Набор $\mathcal{S}$ определяет расширенное логарифмическое пространство $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ с нормами $H_\theta(\cdot, \mathcal{S})$, $H_\theta^*(\cdot, \mathcal{S})$. В $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ имеется решетка $\Lambda(\mathcal{S})$, порождаемая $\mathbb{K}^*$, $\mathcal{A}$ – эпиморфизм $\Lambda(\mathcal{S})$ на $\mathbb{K}^*$. Положим для краткости

$$\delta = \frac{D}{S}, \quad C = \frac{1 + 4\theta}{2\theta}. \quad (6.1)$$

ТЕОРЕМА 6.1. 1) Пусть $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \Lambda(\mathcal{S})$ – линейно независимые векторы, $V_k = H_\theta(\mathbf{v}_k, \mathcal{S})$, $1 \leq k \leq n$, тогда при $S < 2\pi C$ выполняется

$$V_1 \cdots V_n C^n n^n \delta \ln(4.64\delta) > 1. \quad (6.2)$$

2) Если числа $\beta_k = \mathcal{A}(\mathbf{v}_k) \in \mathbb{K}^*$, $k = 1, \dots, n$, мультипликативно независимы, то условие $S < 2\pi C$ можно отбросить.

¹Когда статья находилась в печати, появилась работа [18], в которой доказывается следствие 5.6.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \Lambda(\mathcal{S})$ – линейно независимые векторы, $V_k = H_\theta^*(\mathbf{v}_k, \mathcal{S})$, $1 \leq k \leq n$. Положим $\Lambda_n = \Lambda \cap \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{R}}$, $\Lambda'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$. Тогда

$$V_1 \cdots V_n C^n (e^{n/(2\theta C)} n)^S \max\{6, n-1, \delta \ln(4.64\delta)\} > [\Lambda_n : \Lambda'_n]. \quad (6.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 6.3. 1) Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$ – мультипликативно независимые числа, $H_*(\cdot)$ – из (4.3). Тогда при $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{K} \not\subseteq \mathbb{R}$

$$H_*(\alpha_1) \cdots H_*(\alpha_n) 2.5^n e^{0.4n} n^2 \delta \ln(4.64\delta) > 1. \quad (6.4)$$

2) Если $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, то

$$h(\alpha_1) \cdots h(\alpha_n) 2.5^n e^{0.2n} n D^{n+1} \ln(4.64D) > 1. \quad (6.5)$$

ПРИМЕЧАНИЯ. 1. Главной целью работы является получение зависимости от δ вида (6.2), не меняющейся с ростом n . Главное в теореме 6.2 – это исключение из оценки множителя n^n (ср. с (6.2)). При $n = 1$ вместо (6.3) лучше взять (6.2).

2. Условие типа $S < 2\pi C$ необходимо, поскольку в $\Lambda(\mathcal{S})$ содержатся $\mathcal{A}$ -прообразы единицы, имеющие одну координату (или пару) равную 2π . Так что у нас есть s линейно независимых векторов, s_1 из которых имеют норму $2\pi/S$ и s_2 – норму $4\pi/S$. При большом S оценка (6.2) может не выполняться. Отметим в связи с этим, что в (5.2) приводится $H_\theta(\alpha, \mathcal{S})$, $\alpha \neq 1$, а не $H_\theta(\mathbf{v}, \mathcal{S})$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, так как в последнем случае (5.3) может не выполняться по той же причине.

3. Условие линейной независимости векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ и неравенство $S < 2\pi C$ в теореме 6.1 можно заменить на более слабое требование, а именно: целочисленные линейные комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ с коэффициентами, по модулю не превосходящими соответственно $1/(CnV_k)$, не принадлежат $\text{Ker } \mathcal{A}$. Аналогично можно уточнить теорему 6.2.

4. Отметим, что при $n = r$ оценка (6.5) не следует из степенной по D оценки регулятора, поскольку в теореме Минковского неравенство (1.1) содержит в знаменателе слева $n!$.

5. Оценки (6.4), (6.5) не следуют из предложения 5.1 и гипотезы Лемера, поскольку константа Лемера θ_{10} слишком мала, чтобы давать оценки при $n \geq 2$, аналогичные (6.4), (6.5).

6. Множитель $[\Lambda_n : \Lambda'_n]$ в (6.3) превращает полученную оценку в аналог теоремы Минковского о последовательном минимуме (1.1). Этот множитель можно добавить и в неравенства (6.2), (6.4), (6.5), тогда вместо $\delta \ln(4.64\delta)$ в левой части появится множитель $\max\{6, n-1, \delta \ln(4.64\delta)\}$, как в (6.3).

§ 7. Интерполяционный определитель

Основой схемы Лорана [18] является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть даны аналитические в нуле функции $f_j(\zeta)$, $1 \leq j \leq J$, и комплексные числа z_n , $0 \leq n \leq J-1$. Тогда определитель $\Delta(\zeta) = \det(f_j(z_n \zeta))_{j=1, \dots, J}^{n=0, \dots, J-1}$ имеет при $\zeta = 0$ нуль кратности не меньше чем $J(J-1)/2$.

Выделим фрагмент доказательства теорем, использующий схему Лорана, в отдельную лемму.

ЛЕММА 7.2. Пусть даны $\mathbf{x}_j \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$, $1 \leq j \leq J$ ($J \geq 2$), сравнимые по $\text{mod}(\Lambda(\mathcal{S}))$, но не сравнимые по $\text{mod}(\text{Ker } \mathcal{A})$, удовлетворяющие условиям:

$$\max_j |x_{j\sigma}| \leq X_\sigma, \quad \sigma \notin \mathcal{S}; \quad \frac{1}{2S} \sum_{\sigma \notin \mathcal{S}} X_\sigma \leq X; \quad (7.1)$$

$$\max_j |z_{j\sigma}| \leq Y_\sigma, \quad \sigma \in \mathcal{S}; \quad \frac{1}{S} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} Y_\sigma \leq Y, \quad (7.2)$$

где X, X_σ, Y, Y_σ — некоторые числа.

Тогда выполняется неравенство

$$\frac{D}{S} \frac{\ln J}{J-1} + 1 + \frac{XJ}{J-1} - \ln \frac{2(J-1)}{JY} \geq 0. \quad (7.3)$$

Содержательный смысл неравенства (7.3) состоит в том, что количество J чисел малой высоты (если X мало), близких к единице (если Y мало), ограничено. Правда, выписать решение этого неравенства в виде формулы непросто, поэтому оно оставлено пока в таком виде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x}_j = \mathbf{w} + \mathbf{w}_j$, $\mathbf{w}_j \in \Lambda(\mathcal{S})$, $\alpha_j = \mathcal{A}(\mathbf{w}_j)$. Положим $T = (J-1)/2$, возьмем $\sigma \in \mathcal{S}$ и рассмотрим определители

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(\zeta) &= \zeta^{-2JT} \det^2 \left((\alpha_j^{(\sigma)})^{(n-T)} \zeta \right)_{j=1, \dots, J}^{n=0, \dots, J-1} \\ &= \zeta^{-2JT} \det^2 \left(e^{w_{j\sigma}(n-T)} \zeta \right)_{j=1, \dots, J}^{n=0, \dots, J-1} \in \mathbb{C}(\zeta), \quad \sigma \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Очевидно, все $\Delta_\sigma(1)$ являются алгебраически сопряженными для числа

$$\Delta = \det^2 \left(\alpha_j^{n-T} \right)_{j=1, \dots, J}^{n=0, \dots, J-1} \in \mathbb{K}.$$

Определим также функцию

$$F(\zeta) = \prod_{\sigma \notin \mathcal{S}} |\Delta|_\sigma \cdot \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \Delta_\sigma(\zeta)$$

(где только конечное число сомножителей отлично от единицы). Так как точки $\mathbf{w}_j$ не сравнимы по $\text{mod}(\text{Ker } \mathcal{A})$, то числа α_j различны, и поэтому $\Delta \neq 0$. Тогда по формуле произведения имеем $|F(1)| = 1$. Кроме того, по лемме 7.1 функция $F(\zeta)$ имеет устранимую особенность в нуле.

Теперь оценим $|F(\zeta)|$ сверху. Легко видеть, что

$$\sum_{n=0}^{J-1} (n-T) = 0, \quad \sum_{n=0}^{J-1} |n-T| \leq \frac{J^2}{4}. \quad (7.4)$$

Тогда, полагая $\gamma_\sigma = J^J$ для архимедовых нормирований и $\gamma_\sigma = 1$ для неархимедовых, используя неравенство Адамара и (7.1), (7.2), (7.4), получаем с учетом равенства $w_{j\sigma} = z_{j\sigma} - w_\sigma$, что

$$|\Delta|_\sigma \leq \gamma_\sigma \exp\left(2X_\sigma \sum_{j=1}^J |n - T| \right) \leq \gamma_\sigma \exp\left(\frac{1}{2}J^2 X_\sigma\right), \quad \sigma \notin \mathcal{S},$$

$$|\Delta_\sigma(\zeta)| \leq |\zeta|^{-2JT} \gamma_\sigma \exp\left(\frac{1}{2}J^2 Y_\sigma |\zeta|\right), \quad \sigma \in \mathcal{S}.$$

Перемножая все $|\Delta|_\sigma$ и $|\Delta_\sigma(\zeta)|$ и логарифмируя, приходим к оценке

$$\ln |F(\zeta)| \leq DJ \ln J + XSJ^2 + \frac{1}{2}YS|\zeta|J^2 - 2JTS \ln |\zeta|.$$

Если $4T/(YJ) \leq 1$, то неравенство (7.3) очевидно. Если $4T/(YJ) > 1$, то, применяя принцип максимума к окружности $|\zeta| = 4T/(YJ) > 1$, имеем

$$0 \leq \ln |F(1)| \leq \frac{1}{2}DJ \ln J + \frac{1}{2}XSJ^2 + JTS - JTS \ln \frac{4T}{YJ},$$

откуда после деления на $JST = JS(J-1)/2$ тоже получаем (7.3).

§ 8. Доказательство теоремы 6.1

Доказательство основано на том, что в предположении малости $V_1, \dots, V_n$ удастся найти достаточно много точек $\mathbf{x}_j$, чтобы получить противоречие с (7.3). Основная трудность заключается в решении этого неравенства. Оно будет решено приближенно для больших J , а затем полученная формула будет проверена для конечного числа сравнительно малых J .

Положим с учетом (6.1)

$$\eta = \frac{1}{2\theta}, \quad C_1 = nC = n(2 + \eta),$$

$$J_k = \left\lceil \frac{1}{C_1 V_k} \right\rceil + 1, \quad T_k = \frac{J_k - 1}{2} \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$J = J_1 \cdots J_n, \quad X = \frac{\eta}{C}, \quad Y = \frac{1}{2C}; \quad (8.1)$$

пронумеруем наборы $\{j_1, \dots, j_n\}$, $0 \leq j_k < J_k$, $1 \leq k \leq n$, индексами $j = 1, \dots, J$ и рассмотрим векторы

$$\mathbf{x}_j = (j_1 - T_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (j_n - T_n)\mathbf{v}_n \in \mathcal{E}(\mathcal{S}), \quad j = 1, \dots, J.$$

Очевидно, они сравнимы по $\text{mod}(\Lambda(\mathcal{S}))$. Проверим выполнение условия (7.1). С учетом (8.1) и определения $H_\theta(\cdot, \mathcal{S})$ имеем

$$\frac{1}{2S} \sum_{\sigma \notin \mathcal{S}} \max_j |x_{j\sigma}| \leq \frac{1}{2S} \sum_{\sigma \notin \mathcal{S}} \sum_{k=1}^n |v_{k\sigma}| \max_j |j_k - T_k| \leq \sum_{k=1}^n \mu(\mathbf{v}_k, \mathcal{S}) T_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{\mu(\mathbf{v}_k, \mathcal{S})}{2C_1 V_k} \leq \frac{1}{2\theta C} = \frac{\eta}{2 + \eta} = X. \quad (8.2)$$

Аналогично проверяется условие (7.2). В частности, с учетом неравенства $S < 2\pi C$ получаем $\lambda(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l, \mathcal{S}) \leq 2Y < 2\pi/S$, поэтому векторы $\mathbf{x}_j$ не сравнимы по $\text{mod}(\text{Ker } \mathcal{A})$. Теперь можно применить лемму 7.2. Перепишем (7.3) в виде

$$\delta \frac{\ln J}{J-1} + 1 + \frac{J}{J-1} \frac{\eta}{2+\eta} - \ln \frac{8(1+\eta/2)(J-1)}{J} \geq 0. \quad (8.3)$$

Если мы покажем, что можно считать

$$J < \xi(\delta) = \delta \ln(4.64\delta), \quad (8.4)$$

то ввиду условия $J > 1/(C_1^n V_1 \cdots V_n)$ получим (6.2).

Пусть пока $J > 6$. Положим для краткости $\varepsilon = 1/(J-1)$. Дифференцированием по η получаем, что худшее значение η в (8.3) равно 2ε . Худшее значение δ в случае невыполнения (8.4) определяется равенством $J = \xi(\delta)$. Тогда (8.3) можно переписать в виде

$$\delta \frac{\ln J}{J} + 1 - \frac{\ln 8}{1+\varepsilon} \geq 0, \quad J = \xi(\delta). \quad (8.5)$$

При $6 < J \leq 20000$ неравенство проверяется компьютерным перебором: при каждом J вычисляем ε , δ и подставляем их в (8.5). Программа на языке Qbasic требует для этого на компьютере Pentium несколько секунд.

При $J > 20000$, положив $y = \ln(4.64\delta)/4.64$, получим

$$\delta \frac{\ln J}{J} = 1 + \frac{\ln y}{4.64y} \leq 1 + \frac{1}{4.64e} < \frac{\ln 8}{1.00005} - 1.$$

Это противоречит (8.3) и поэтому (8.4) выполнено. (Именно для этого неравенства взята константа 4.64.)

Пусть теперь $J \leq 6$. Мы можем считать при $n \geq 2$ и при всех k , что $C_1 V_k < 1/2$, иначе, если $C_1 V_n \geq 1/2$, то

$$\begin{aligned} C^n n^n V_1 \cdots V_n &\geq \frac{1}{2} C^{n-1} (n-1)^{n-1} V_1 \cdots V_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\geq C^{n-1} (n-1)^{n-1} V_1 \cdots V_{n-1} \end{aligned}$$

и мы можем действовать по индукции.

При $C_1 V_k < 1/2$ имеем $J_k \geq 3$, поэтому при $J \leq 6$ возможен лишь случай $n = 1$. Здесь (6.2) несколько сильнее, чем (5.3), поскольку под знаком логарифма стоит 4.64, а не 4.8, но доказательство дословно совпадает с доказательством в [17], где константа 4.8 была выбрана из-за того, что проверка проводилась только до $J = 1000$.

В случае мультипликативно независимых чисел β_k нам не надо проверять различие чисел α_j . Теорема 6.1 полностью доказана.

§9. Доказательство теоремы 6.2

Пусть $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\sigma \in \mathbb{C}^n : 1 \leq \sigma \leq S\}$, причем комплексные $\mathbf{z}_\sigma$ входят вместе с комплексно сопряженными; $\varepsilon > 0$. Определим множество

$$\mathcal{R}(\varepsilon; \mathcal{Z}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}_\sigma| \leq \varepsilon, 1 \leq \sigma \leq S\}.$$

ЛЕММА 9.1. Пусть $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое $\mathbf{0}$ -симметричное тело, $\varepsilon > 0$, $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_S \in \mathbb{C}^n$. Положим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathcal{W}, \mathcal{Z}) = \sup\{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}_\sigma| : \mathbf{x} \in \mathcal{W}, 1 \leq \sigma \leq S\},$$

$$\rho = \text{rank}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_S\}, \quad c = \max\left\{1, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right\}.$$

Тогда

$$\text{Vol}_n(\mathcal{W} \cap \mathcal{R}(\varepsilon, \mathcal{Z})) \geq \text{Vol}_n(\mathcal{W})c^{-\rho}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c = 1$ или $\rho = 0$, то утверждение леммы очевидно, поскольку $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{R}(\varepsilon, \mathcal{Z})$.

Пусть теперь $c > 1$, $\rho > 0$. Рассмотрим пространства

$$\mathcal{X} = \langle \text{Re } \mathcal{Z}, \text{Im } \mathcal{Z} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Имеем $\dim \mathcal{X} = \rho$, $\dim \mathcal{Y} = n - \rho$. Рассмотрим функцию

$$f(\mathbf{x}) = \text{Vol}_{n-\rho}(\mathcal{W} \cap (\mathbf{x} + \mathcal{Y})), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Из теоремы Брунна–Минковского о выпуклом теле с учетом симметрии $\mathcal{W}$ следует, что для любого $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ функция $f(t\mathbf{x})$ убывает при $t \geq 0$. Пусть $\mathcal{R}'$ – ортогональная проекция $\mathcal{R}(\varepsilon, \mathcal{Z})$ на $\mathcal{X}$, $\mathcal{W}'$ – проекция $\mathcal{W}$ на $\mathcal{X}$, тогда ввиду того, что $\mathcal{W}' \subseteq c\mathcal{R}'$, получаем

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(\mathcal{W} \cap \mathcal{R}(\varepsilon, \mathcal{Z})) &= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}'} f(\mathbf{x}) d \text{Vol}_\rho(\mathbf{x}) = \int_{c\mathbf{x} \in c\mathcal{R}'} f(\mathbf{x}) d \text{Vol}_\rho(\mathbf{x}) \\ &\geq \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{W}'} f\left(\frac{\mathbf{y}}{c}\right) d \text{Vol}_\rho\left(\frac{\mathbf{y}}{c}\right) \\ &\geq c^{-\rho} \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{W}'} f(\mathbf{y}) d \text{Vol}_\rho(\mathbf{y}) = c^{-\rho} \text{Vol}_n(\mathcal{W}_0), \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

Для доказательства теоремы 6.2 поступим следующим образом: вместо (8.1) с учетом (6.1) положим

$$\eta = \frac{1}{2\theta}, \quad C_1 = C, \quad X = \frac{n\eta}{C}, \quad Y = \frac{1}{2Ce^X}, \quad Z = \frac{n}{2C}, \quad (9.1)$$

определим векторы $\mathbf{z}_\sigma = (z_{1\sigma}, \dots, z_{n\sigma})$, $\sigma \in \mathcal{S}$, составленные из соответствующих координат векторов $\mathbf{v}_j$ из условий теоремы, и рассмотрим в пространстве векторов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ тела

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{w} : |w_k| \leq \frac{1}{2C_1 H_\theta^*(\mathbf{v}_k, \mathcal{S})}, 1 \leq k \leq n \right\}, \quad \mathcal{W}_0 = \mathcal{W} \cap \mathcal{R}(Y, \mathcal{Z}), \quad (9.2)$$

а также линейный оператор $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E}$, задаваемый формулой

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}(\mathbf{w}) = w_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + w_n \mathbf{v}_n.$$

Очевидно, $\mathcal{F}$ -прообразом $\Lambda'_n = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ является $M'_n = \mathbb{Z}^n$, и пусть M_n — прообраз Λ_n , при этом

$$\text{Vol}_n(M_n) = \frac{\text{Vol}_n(M'_n)}{[M_n : M'_n]} = \frac{1}{[\Lambda_n : \Lambda'_n]}.$$

По теореме Бlichфельда в теле $\mathcal{W}_0$ найдутся J точек $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_J$, сравнимых по $\text{mod}(M_n)$,

$$J > \frac{\text{Vol}_n(\mathcal{W}_0)}{\text{Vol}_n(M_n)} = \text{Vol}_n(\mathcal{W}_0)[\Lambda_n : \Lambda'_n].$$

Положим $\mathbf{x}_j = \mathcal{F}(\mathbf{w}_j)$, $j = 1, \dots, J$. Как и в случае теоремы 6.1, для $\mathbf{x}_j$ выполнено условие (7.1) с X из (9.1), а (7.2) выполнено по построению тела $\mathcal{W}_0$. Кроме того, $\varepsilon_1(\mathcal{W}, \mathcal{X}) \leq Z = n/(2C)$, поэтому по лемме 9.1 имеем

$$\text{Vol}_n(\mathcal{W}_0) \geq \text{Vol}_n(\mathcal{W}) \max \left\{ 1, \frac{Z}{Y} \right\}^{-\rho} \geq \frac{1}{(Z/Y)^S C_1^n V_1 \dots V_n}.$$

Покажем, что

$$J \leq \max \{ 6, n-1, \delta \ln(4.64\delta) \}. \quad (9.3)$$

Поскольку σ -координаты ($\sigma \in \mathcal{S}$) векторов $\mathbf{x}_j$ не превосходят по модулю $Y < \pi$, то $\mathbf{x}_j$ не сравнимы по $\text{mod}(\text{Ker } \mathcal{A})$ и можно применить лемму 7.2, что дает неравенство (7.3) с X, Y из (9.1), и (7.3) можно записать в виде

$$\delta \frac{\ln J}{J-1} + 1 + \frac{J}{J-1} \frac{n\eta}{2+\eta} - \frac{n\eta}{2+\eta} - \ln \frac{8(1+\eta/2)(J-1)}{J} \geq 0. \quad (9.4)$$

Если считать, что $J \geq n$, то

$$\frac{nJ}{J-1} - n \leq \frac{J}{J-1}$$

и (9.4) можно заменить на (8.4). При $J > 6$ из (8.4) следует (8.5), что доказывает (9.3) и теорему 6.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенный в доказательстве прием усечения множества $\mathcal{W}$, позволяющий устранить из оценки множитель n^n , был ранее использован автором при оценке линейных форм от логарифмов алгебраических чисел.

§ 10. Доказательство следствия 6.3

При $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ возьмем σ , соответствующее данному вложению, $\mathcal{S} = \{\sigma\}$, $S = 1$, $\delta = D$. В комплексном случае возьмем пару соответствующих комплексно сопряженных σ, τ , $\mathcal{S} = \{\sigma, \tau\}$, $S = 2$, $\delta = D/2$. Отметим, что здесь $\theta = 1$, $H_1(\cdot, \mathcal{S}) = H_1^*(\cdot, \mathcal{S})$.

Очевидно, в комплексном случае $H_*(\alpha, \mathcal{S}) \geq H_1(\alpha, \mathcal{S})$. В действительном случае с помощью замены $\alpha \rightarrow \pm\alpha^{\pm 1}$ можно получить $\lambda(\alpha, \mathcal{S}) = \ln \alpha > 0$, откуда с учетом формулы произведения также имеем $Dh(\alpha) \geq H_1(\alpha, \mathcal{S})$. Это позволяет применить теоремы 6.1 и 6.2. При $n = 1$ оценки (6.4), (6.5) следуют непосредственно из (6.2).

При $n \geq 2$ применим (6.3). Покажем, что максимум в (6.3) можно считать равным $\delta \ln(4.64\delta)$. Сделаем некоторые упрощения. Мы можем отбросить α_j , не являющиеся алгебраическими единицами, поскольку для них

$$e^{0.2} 2.5 \frac{H(\alpha)}{S} \geq e^{0.2} 2.5 \frac{\ln 2}{2} > 1.$$

Значит, можно считать, что $2 \leq n \leq r < D$ и $D \ln(4.64D) > 6$. Тем самым неравенство (6.5) доказано при $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.

В комплексном случае при $D \geq 5$ также имеем $\delta \ln(4.64\delta) > 6$, и (6.4) следует из (6.3). Кроме того, здесь $D - 2 \geq r \geq n \geq 2$, поэтому остается только случай $n = 2$, $D = 4$. Но $H(\alpha) > 0.28$ (см. [12] и предложение 3.3) и (6.4) проверяется непосредственно.

Список литературы

1. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.
2. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
3. *Tsfasman M. A.* Global fields, codes and sphere packings. Journees arithmetiques, Exp. Congr., Luminy/Fr. 1989 // Astérisque. 1991. №198–200. P. 373–396.
4. *Pohst M. E.* Computational algebraic number theory. DMV Seminar. №21. Basel: Birkhäuser, 1993.
5. *Ленг С.* Основы диофантовой геометрии. М.: Мир, 1986.
6. *Lehmer D. H.* Factorization of certain cyclotomic functions // Ann. of Math. 1993. V. 34. №2. P. 461–479.
7. *Dobrowolski E.* On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial // Acta Arith. 1979. V. 34. P. 391–401.
8. *Матвеев Е. М.* О связи меры Малера и дискриминанта алгебраических чисел // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №3. С. 415–420.
9. *Blanksby P. E., Montgomery H. L.* Algebraic integers near the unit circle // Acta Arith. 1971. V. 18. P. 355–369.
10. *Smyth C. J.* On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer // Bull. London Math. Soc. 1971. V. 3. P. 169–175.
11. *Schinzel A.* On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number // Acta Arith. 1973. V. 24. P. 385–399.
12. *Boyd D. W.* Reciprocal polynomials having small measure. I // Math. Comp. 1980. V. 35. №152. P. 1361–1377; II // Math. Comp. 1989. V. 53. №187. P. 355–357.
13. *Zimmert R.* Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung // Invent. Math. 1981. V. 62. P. 367–380.
14. *Friedman E.* Analytic formulas for the regulator of a number field // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 599–622.

15. *Waldschmidt M.* A lower bound for linear forms in logarithms // *Acta Arith.* 1980. V. 37. P. 257–283.
16. *Матвеев Е. М.* Об одном типе мультипликативных алгебраических решеток // Тезисы докладов международной конференции “Современные проблемы теории чисел”. Тула 20–25 сентября 1993 г. Тула: ТГПИ, 1993. С. 107.
17. *Матвеев Е. М.* Об алгебраических числах малой логарифмической высоты // Диофантовы приближения. Сер. “Монографии и тематические сборники”. Математические записки. 1996. Т. 2. С. 90–98.
18. *Flammang V.* Inegalites sur la mesure de Mahler d'un polynome // *J. Théor. Nombres Bordeaux.* 1997. V. 9. № 1. P. 69–74.
19. *Laurent M.* Sur quelques résultats récents de transcendance. Journées arithmétiques, Exp. Congr., Luminy/Fr. 1989 // *Astérisque.* 1991. № 198–200. P. 209–230.

Московская государственная текстильная
академия им. А. Н. Косыгина

Поступила в редакцию
04.04.1997 и 10.03.1998