Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Пирковский, Слабые гомологические размерности и биплоские алгебры Кёте, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 5, 45–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:51:14

УДК 517.98.2

А. Ю. Пирковский

Слабые гомологические размерности и биплоские алгебры Кёте

В работе исследуются гомологические свойства метризуемых алгебр Кёте $\lambda(P)$. Получен критерий биплоскости алгебры $A = \lambda(P)$ в терминах множества Кёте P , из которого следует, в частности, что для таких алгебр свойства бипроективности, биплоскости и плоскости слева эквивалентны сюръективности оператора умножения $A \hat{\otimes} A \rightarrow A$. Вычислены слабые гомологические размерности (слабая глобальная размерность $w. dg$ и слабая биразмерность $w. db$) биплоских алгебр Кёте. А именно, показано, что условия $w. db \lambda(P) \leq 1$ и $w. dg \lambda(P) \leq 1$ эквивалентны ядерности $\lambda(P)$; если же $\lambda(P)$ неядерна, то $w. dg \lambda(P) = w. db \lambda(P) = 2$. При некоторых дополнительных условиях на множество Кёте P установлено, что из ядерности биплоской алгебры Кёте $\lambda(P)$ следует более сильная оценка $db \lambda(P) \leq 1$, где db – (проективная) биразмерность. С другой стороны, построен пример ядерной биплоской алгебры Кёте $\lambda(P)$, для которой $db \lambda(P) = 2$ (в то время как $w. db \lambda(P) = 1$). Наконец, показано, что многие биплоские алгебры Кёте, не будучи аменабельными, имеют тривиальные в положительных степенях гомологии Хохшильда (с произвольными коэффициентами).

Библиография: 37 названий.

§ 1. Введение

Пространства Кёте играют весьма заметную роль в современном функциональном анализе. Определяются они как пространства последовательностей, удовлетворяющих определенным условиям убывания (или роста) на бесконечности. С одной стороны, пространства Кёте являются богатым источником всевозможных примеров и контрпримеров, важных для развития общей теории топологических векторных пространств. С другой стороны, класс пространств Кёте достаточно обширен и включает в себя многие классические пространства основных и обобщенных функций, широко используемые в анализе и его приложениях (см. [1]). Благодаря этому пространства Кёте были успешно использованы при решении ряда задач теории линейных дифференциальных операторов (см., например, [2]–[5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-00982 и № 05-01-00001) и Программы Президента РФ поддержки молодых ученых (грант № МК-1490.2006.1).

Как было замечено в [6], многие пространства Кёте являются топологическими алгебрами относительно операции поточечного умножения. Изучение гомологических свойств алгебр Кёте было начато в работах автора [7], [8] в связи с задачей о вычислении гомологической биразмерности бипроективных алгебр Фреше. Настоящая работа также посвящена исследованию гомологических свойств алгебр Кёте. В отличие от вышеупомянутых работ [7], [8] здесь нас будут интересовать в первую очередь “слабые” гомологические характеристики, а именно условия биплоскости алгебр Кёте и вычисление их слабых гомологических размерностей.

Биплоские банаховы алгебры были впервые введены А. Я. Хелемским в [9]. Они образуют весьма естественный класс алгебр, включающий в себя как бипроективные алгебры (также введенные ранее А. Я. Хелемским; см. [10]), так и аменабельные алгебры Б. Джонсона (см. [11]). Важное свойство биплоских банаховых алгебр заключается в том, что их когомологии Хохшильда с коэффициентами в дуальных бимодулях обращаются в нуль в степенях ≥ 3 . Это означает, что слабая гомологическая биразмерность биплоской алгебры не превосходит 2 (см. [12], [13]). Этот результат полезно сравнить с аналогичным свойством бипроективных алгебр: их когомологии Хохшильда равны нулю в степенях ≥ 3 уже с произвольными коэффициентами, что означает, что их “сильная” гомологическая биразмерность (далее – просто биразмерность) не превосходит 2 (см. [14; теорема V.2.28]). На самом деле, как было установлено Ю. В. Селивановым (см. [15], [16]), биразмерность “большинства” бипроективных банаховых алгебр в точности равна 2; в частности, это так для любой полупростой бесконечномерной бипроективной банаховой алгебры, обладающей свойством аппроксимации. Ему же принадлежат следующие результаты о слабых биразмерностях биплоских банаховых алгебр (см. [12], [13]): слабая биразмерность биплоской банаховой алгебры A равна 2, если A не обладает ни левой, ни правой ограниченной аппроксимативной единицей (о.а.е.), равна 1, если A обладает либо левой, либо правой о.а.е., но не обладает двусторонней о.а.е., и равна 0, если A обладает двусторонней о.а.е. (последний результат принадлежит А. Я. Хелемскому и М. В. Шейнбергу [17] и характеризует аменабельные банаховы алгебры как биплоские алгебры с о.а.е.). В этой связи упомянем также о построенном Ю. В. Селивановым (см. [18]) примере биплоской алгебры компактных операторов, слабая биразмерность которой равна 1.

В случае алгебр Фреше многие из вышеупомянутых результатов теряют силу. Так, хотя биразмерность бипроективной алгебры Фреше по-прежнему не превосходит 2, имеется много примеров бипроективных алгебр Фреше, биразмерность и слабая биразмерность которых равны 1; при этом эти алгебры полупросты, коммутативны, обладают свойством аппроксимации, но не обладают о.а.е. (отметим, что для банаховых алгебр сочетание этих свойств невозможно ввиду вышеупомянутых результатов Ю. В. Селиванова). Первый пример такой алгебры был приведен О. С. Огневой (см. [19]); оказалось, что набором указанных свойств обладает алгебра s быстро убывающих последовательностей. Впоследствии этот результат был обобщен автором (см. [7]) на более широкий класс алгебр, включающий в себя сверточные алгебры гладких функций

на компактных группах Ли, алгебры “гладких компактных операторов”, а также многие ядерные алгебры Кёте. По поводу биразмерностей бипроективных алгебр Кёте см. также [8] и § 7 настоящей работы.

Тот факт, что биразмерность бипроективной алгебры Кёте тесно связана с ее ядерностью, был отмечен автором в [7] и [8]. В частности, было показано, что если биразмерность бипроективной алгебры Кёте A не превосходит 1, то A необходимо ядерна, и что при некоторых дополнительных условиях верно и обратное. Однако оставалось неясным, насколько эти дополнительные условия существенны. В настоящей работе мы даем ответ на этот вопрос. Показано, во-первых, что для метризуемых алгебр Кёте свойства бипроективности и биплоскости эквивалентны. Далее, показано, что слабая биразмерность биплоской алгебры Кёте A не превосходит 1 тогда и только тогда, когда A ядерна; в противном случае слабая биразмерность A равна 2. Наконец, построен пример ядерной бипроективной алгебры Кёте, биразмерность которой равна 2.

Еще одна близкая задача, решаемая в настоящей работе, связана с характеристикой аменабельных алгебр в терминах групп гомологий Хохшильда. Еще в основополагающей работе Б. Джонсона [11] было показано, что банахова алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда ее гомологии Хохшильда с произвольными коэффициентами равны нулю в положительных степенях и хаусдорфовы в нулевой степени. Аналогичный факт имеет место и для алгебр Фреше (см. [14]). В то же время неясно, насколько условие хаусдорфовости нулевых гомологий существенно, иными словами, не следует ли оно автоматически из тривиальности гомологий в положительных степенях. Для банаховых алгебр эта проблема остается открытой по сей день. Что же касается алгебр Фреше, то в настоящей работе мы показываем, что многие неаменабельные алгебры Кёте, в том числе и алгебра s быстро убывающих последовательностей, имеют тривиальные в положительных степенях гомологии Хохшильда. Это дает частичный ответ на проблему 10 из работы [20].

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним некоторые определения и факты о топологических векторных пространствах, алгебрах и модулях. Все векторные пространства и алгебры в настоящей работе будут рассматриваться над полем комплексных чисел. Алгебры не предполагаются унитарными (т.е. обладающими единицей). Унитаризация алгебры A будет обозначаться через A_+ , а ее единица – через 1_+ .

Термин “локально выпуклое пространство” (ЛВП) всегда будет означать векторное пространство, снабженное локально выпуклой топологией (в отличие от большинства руководств по теории топологических векторных пространств, мы не требуем хаусдорфовости). В то же время термин “полное ЛВП” будет означать полное хаусдорфово ЛВП. Пополненное проективное тензорное произведение будет обозначаться символом $\hat{\otimes}$. Если X – ЛВП, то через X^* будет обозначаться его сильное сопряженное, а через $\hat{X}$ или $X^\sim$ – пополнение X .

Пространство непрерывных линейных отображений между ЛВП X и Y будет обозначаться через $\mathcal{L}(X, Y)$.

Топологической алгеброй в настоящей работе будет называться алгебра A , снабженная локально выпуклой топологией так, что операция умножения $A \times A \rightarrow A$ раздельно непрерывна. Если A полна, а умножение в A совместно непрерывно, то она называется $\widehat{\otimes}$ -алгеброй (см. [21], [14]). Умножение в $\widehat{\otimes}$ -алгебре A однозначно определяет непрерывное линейное отображение $A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$, $a \otimes b \mapsto ab$ (отсюда и название “ $\widehat{\otimes}$ -алгебра”). Унитализация $\widehat{\otimes}$ -алгебры, очевидно, также является $\widehat{\otimes}$ -алгеброй.

Полунорма $\|\cdot\|$ на алгебре A называется *субмультипликативной*, если она удовлетворяет условию $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ для всех $a, b \in A$. Топологическая алгебра A называется *локально m -выпуклой* (см. [22]), если ее топология может быть задана некоторым семейством субмультипликативных полунорм. Полная локально m -выпуклая алгебра называется *алгеброй Аренса–Майкла* (см. [23]). Отметим, что всякая банахова алгебра является алгеброй Аренса–Майкла, а всякая алгебра Аренса–Майкла – $\widehat{\otimes}$ -алгеброй. Под *алгеброй Фреше* в настоящей работе будет пониматься метризуемая (но не обязательно локально m -выпуклая) $\widehat{\otimes}$ -алгебра.

Пусть I – произвольное множество, и пусть P – некоторое семейство функций $p: I \rightarrow [0, +\infty)$. В дальнейшем вместо $p(i)$ будем писать p_i . Напомним, что P называется *множеством Кёте*, если выполнены следующие аксиомы:

$$\forall i \in I \quad \exists p \in P: \quad p_i > 0; \quad (P1)$$

$$\forall p, q \in I \quad \exists r \in P: \quad \max\{p_i, q_i\} \leq r_i \quad \forall i \in I. \quad (P2)$$

Если P – множество Кёте, то *пространство Кёте* $\lambda^1(P)$ определяется следующим образом (см., например, [24; § 6.1], [25; § 27], [26]):

$$\lambda^1(P) = \left\{ a = (a_i) \in \mathbb{C}^I : \|a\|_p^1 = \sum_i |a_i| p_i < \infty \quad \forall p \in P \right\}. \quad (2.1)$$

Аналогичным образом можно определить пространства Кёте $\lambda^r(P)$ для любого $r \in [1, +\infty)$, заменив в приведенном выше определении выражение $\sum_i |a_i| p_i$ на $(\sum_i (|a_i| p_i)^r)^{1/r}$. При $1 < r < +\infty$ эти пространства нам не понадобятся. Наконец, пространства Кёте $\lambda^\infty(P)$ и $\lambda^0(P)$ определяются следующим образом:

$$\lambda^\infty(P) = \left\{ a = (a_i) \in \mathbb{C}^I : \|a\|_p^\infty = \sup_i |a_i| p_i < \infty \quad \forall p \in P \right\},$$

$$\lambda^0(P) = \left\{ a = (a_i) \in \mathbb{C}^I : \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| p_i = 0 \quad \forall p \in P \right\}.$$

Семейство полунорм $\{\|\cdot\|_p^1 : p \in P\}$ (соответственно $\{\|\cdot\|_p^\infty : p \in P\}$) задает на пространстве $\lambda^1(P)$ (соответственно на $\lambda^\infty(P)$) топологию, относительно которой оно является полным ЛВП. Легко видеть, что $\lambda^0(P)$ – замкнутое подпространство в $\lambda^\infty(P)$. Отметим, что эти пространства являются пространствами Фреше тогда и только тогда, когда в P имеется не более чем счетное конфинанальное подмножество.

Поскольку в первую очередь нас будут интересовать пространства $\lambda^1(P)$, то в дальнейшем будем обозначать их просто $\lambda(P)$, а полунорму $\|\cdot\|_p^1$ будем обозначать символом $\|\cdot\|_p$.

Отметим, что имеет место непрерывное вложение

$$\lambda(P) \rightarrow \lambda^0(P) \subset \lambda^\infty(P).$$

Согласно критерию Гротендика–Пича (см. [24; п. 6.1.2]) пространство Кёте $\lambda(P)$ ядерно тогда и только тогда, когда пространства $\lambda(P)$ и $\lambda^\infty(P)$ совпадают по запасу элементов и по топологии (как следствие при этом $\lambda^0(P) = \lambda^\infty(P)$). Это эквивалентно тому, что для каждого $p \in P$ найдутся $q \in P$ и неотрицательная функция $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^1(I)$ такие, что $p_i \leq \lambda_i q_i$ для всех $i \in I$.

Если $P \subset \mathbb{R}_+^I$ и $Q \subset \mathbb{R}_+^J$ – множества Кёте, то можно ввести множество Кёте $P \times Q \subset \mathbb{R}_+^{I \times J}$, состоящее из всех функций вида $(i, j) \mapsto p_i q_j$, где $p \in P$ и $q \in Q$. Согласно [27] имеет место топологический изоморфизм

$$\lambda(P) \hat{\otimes} \lambda(Q) \xrightarrow{\sim} \lambda(P \times Q), \quad (x_i)_{i \in I} \otimes (y_j)_{j \in J} \mapsto (x_i y_j)_{(i, j) \in I \times J}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем мы будем использовать тот очевидный факт, что при $Q = P$ для задания топологии на $\lambda(P \times P)$ вместо всевозможных полунорм вида $\|\cdot\|_{p, q}$ ($p, q \in P$) достаточно рассматривать лишь полунормы вида $\|\cdot\|_{p, p}$ ($p \in P$).

Если P, Q – множества Кёте, то будем писать $P \prec Q$, если для каждого $p \in P$ найдутся такие $q \in Q$ и $C > 0$, что $p_i \leq C q_i$ для всех $i \in I$. Если одновременно выполнены условия $P \prec Q$ и $Q \prec P$, то будем писать $P \sim Q$. Положим

$$P \cdot Q = \{pq = (p_i q_i)_{i \in I} : p \in P, q \in Q\}, \quad P^2 = \{p^2 = (p_i^2)_{i \in I} : p \in P\}.$$

Отметим, что $P^2 \sim P \cdot P$ в силу аксиомы (P2).

Нетрудно убедиться, что условие $P \prec P^2$ означает в точности, что для любых $a, b \in \lambda(P)$ их поточечное произведение ab также принадлежит $\lambda(P)$ и для любого $p \in P$ найдутся такие $q \in P$ и $C > 0$, что $\|ab\|_p \leq C \|a\|_q \|b\|_q$. Следовательно, при выполнении указанного условия $\lambda(P)$ становится $\hat{\otimes}$ -алгеброй. То же самое верно для $\lambda^\infty(P)$ и $\lambda^0(P)$. Алгебры вида $\lambda(P)$, $\lambda^\infty(P)$ и $\lambda^0(P)$ будут в дальнейшем называться *алгебрами Кёте* (см. [6]–[8]). Отметим, что если для всех $p \in P$ и $i \in I$ выполнено условие $p_i \geq 1$, то $P \prec P^2$ и, более того, полунормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_p^\infty$ субмультипликативны. Поэтому при указанном условии алгебры $\lambda(P)$, $\lambda^\infty(P)$ и $\lambda^0(P)$ являются алгебрами Аренса–Майкла.

Для дальнейших ссылок отметим также тот очевидный факт, что для алгебр Кёте $\lambda(P)$ и $\lambda(Q)$ изоморфизм (2.2) является изоморфизмом алгебр.

ПРИМЕР 2.1. Фиксируем произвольное число $0 < R \leq \infty$ и неубывающую последовательность $\alpha = (\alpha_i)$ положительных чисел, сходящуюся к бесконечности. Напомним, что пространство степенных рядов $\Lambda_R(\alpha)$ состоит из всевозможных последовательностей $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию $\|a\|_r = \sum_n |a_n| r^{\alpha_n} < \infty$ для всех $0 < r < R$. При $R = \infty$ оно называется пространством степенных рядов *бесконечного типа*, при $R < \infty$ – пространством степенных рядов *конечного типа*. Ясно, что $\Lambda_R(\alpha)$ – пространство Кёте

типа $\lambda^1(P)$. Отметим, что топология в $\Lambda_R(\alpha)$ может быть определена счетным семейством полунорм $\{\|\cdot\|_{r_k} : k \in \mathbb{N}\}$, где $\{r_k\}$ – произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к R ; тем самым, $\Lambda_R(\alpha)$ – пространство Фреше.

Если $R \geq 1$, то пространство $\Lambda_R(\alpha)$ удовлетворяет условию $P \prec P^2$ и является поэтому алгеброй Кёте. Если к тому же $R > 1$, то $\Lambda_R(\alpha)$ – алгебра Аренса–Майкла, поскольку полунормы $\|\cdot\|_r$ субмультипликативны при $r > 1$.

Выделим несколько частных случаев предыдущего примера.

ПРИМЕР 2.2. Положим $\alpha_n = \log n$. Тогда пространство $\Lambda_\infty(\alpha)$ топологически изоморфно пространству быстро убывающих последовательностей

$$s = \left\{ a = (a_i) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \|a\|_k = \sum_n |a_n| n^k < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

ПРИМЕР 2.3. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и положим $\alpha_n = n^{1/d}$. Тогда пространство $\Lambda_R(\alpha)$ топологически изоморфно пространству голоморфных функций в d -мерном полидиске $\mathbb{D}_R^d \subset \mathbb{C}^d$ радиуса R (см. [28]). Умножение в $\Lambda_R(\alpha)$ соответствует при этом почленному перемножению коэффициентов Тэйлора голоморфных функций (умножение Адамара; см. [29]). В дальнейшем эта алгебра будет обозначаться через $\mathcal{H}(\mathbb{D}_R^d)$.

В оставшейся части параграфа мы напомним некоторые обозначения, определения и факты из гомологической теории топологических алгебр (топологической гомологии); подробное изложение данной теории см. в [14], [21].

Пусть A – топологическая алгебра. *Левым топологическим A -модулем* называется левый A -модуль X , снабженный локально выпуклой топологией так, что отображение $A \times X \rightarrow X$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$, раздельно непрерывно. Если A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X полон и указанное отображение совместно непрерывно, то X называется *левым A - $\widehat{\otimes}$ -модулем*. В этом случае определено непрерывное линейное отображение $A \widehat{\otimes} X \rightarrow X$, $a \otimes x \mapsto a \cdot x$. Если X и Y – левые топологические A -модули, то морфизм из X в Y – это непрерывное линейное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$. Морфизмы из X в Y образуют векторное пространство, обозначаемое через ${}_A\mathbf{h}(X, Y)$.

Аналогичным образом определяются правые топологические A -модули, топологические A - B -бимодули, а также правые A - $\widehat{\otimes}$ -модули и A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодули. Пространство морфизмов из правого топологического A -модуля X в правый топологический A -модуль Y обозначается через $\mathbf{h}_A(X, Y)$.

Отметим, что если X – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, а $Y \subset X$ – замкнутый подмодуль, то Y также является левым A - $\widehat{\otimes}$ -модулем, а фактормодуль X/Y – левым топологическим A -модулем (не обязательно полным, если только X не метризуем). Продолжая совместно непрерывное действие $A \times X/Y \rightarrow X/Y$ на пополнение $(X/Y)^\sim$ модуля X/Y , видим, что $(X/Y)^\sim$ обладает естественной структурой левого A - $\widehat{\otimes}$ -модуля. Разумеется, аналогичные замечания верны для правых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей и для A - $\widehat{\otimes}$ -бимодулей.

Пусть A, B – $\widehat{\otimes}$ -алгебры. Категория левых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей (соответственно правых A - $\widehat{\otimes}$ -модулей, A - B - $\widehat{\otimes}$ -бимодулей) будет обозначаться через $A\text{-mod}$ (соответственно $\text{mod-}A$, $A\text{-mod-}B$). Если A унитарна, то категории левых и правых унитарных A - $\widehat{\otimes}$ -модулей (т.е. модулей, на которых единица A действует как тождественное преобразование) будут обозначаться через $A\text{-unmod}$ и $\text{unmod-}A$ соответственно. Обозначим через A^{op} алгебру, противоположную к A . Тогда имеют место изоморфизмы категорий

$$\text{mod-}A \cong A^{\text{op}}\text{-mod}, \quad A\text{-mod-}B \cong A_+ \widehat{\otimes} B_+^{\text{op}}\text{-unmod} \cong \text{unmod-}B_+ \widehat{\otimes} A_+^{\text{op}}. \quad (2.3)$$

В частности, $A\text{-mod-}A \cong A^e\text{-unmod} \cong \text{unmod-}A^e$, где $A^e = A_+ \widehat{\otimes} A_+^{\text{op}}$.

Пусть X – правый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, Y – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, а E – полное ЛВП. Напомним, что билинейное отображение $\Phi: X \times Y \rightarrow E$ называется *сбалансированным*, если $\Phi(x \cdot a, y) = \Phi(x, a \cdot y)$ для всех $x \in X, y \in Y, a \in A$. Пространство всех совместно непрерывных сбалансированных билинейных отображений из $X \times Y$ в E будет обозначаться через $\mathcal{Bil}_A(X \times Y, E)$. Напомним, что существует естественный изоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{Bil}_A(X \times Y, E) \cong \mathcal{L}\left(X \widehat{\otimes}_A Y, E\right), \quad (2.4)$$

где $X \widehat{\otimes}_A Y$ – A -модульное проективное тензорное произведение X и Y (см. [14; II.4]). По определению $X \widehat{\otimes}_A Y = (X \widehat{\otimes} Y/N)^\sim$, где $N \subset X \widehat{\otimes} Y$ – замыкание линейной оболочки всевозможных элементов вида $x \cdot a \otimes y - x \otimes a \cdot y$ ($x \in X, y \in Y, a \in A$).

Если на X и Y зафиксировать по непрерывной полунорме, то проективное тензорное произведение этих полунорм (являющееся полунормой на $X \otimes Y$) очевидным образом порождает непрерывную полунорму на $X \widehat{\otimes}_A Y$, которую мы также будем называть *проективным тензорным произведением* данных полунорм (к путанице это не приведет).

Пусть $X \in A\text{-mod}$, $Y \in \text{mod-}A$ и $Z \in A\text{-mod-}A$. Положим (ср. [14])

$$X_\Pi = A \widehat{\otimes}_A X, \quad {}_\Pi Y = Y \widehat{\otimes}_A A, \quad {}_\Pi Z_\Pi = A \widehat{\otimes}_A Z \widehat{\otimes}_A A.$$

Если X – левый модуль Фреше над алгеброй Фреше A , то его сильное сопряженное X^* является правым топологическим A -модулем относительно операции $\langle f \cdot a, x \rangle = \langle f, a \cdot x \rangle$ (см. [21; предложение 3.1]). Аналогично, если X – правый A -модуль Фреше, то X^* – левый топологический A -модуль.

Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра. Короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

A - $\widehat{\otimes}$ -модулей называется *допустимой*, если она расщепляется в категории локально выпуклых пространств. Легко видеть, что (2.5) допустима тогда и только тогда, когда отображение i топологически инъективно (т.е. осуществляет гомеоморфизм на свой образ), p открыто, а подпространство $\text{Ker } p$ (совпадающее с $\text{Im } i$) дополняемо в Y . Морфизм $i: X \rightarrow Y$ (соответственно морфизм $p: Y \rightarrow Z$) называется *допустимым мономорфизмом* (соответственно *допустимым эпиморфизмом*), если он входит в допустимую последовательность

вида (2.5). Цепной комплекс $C_\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модулей называется *допустимым*, если он точен и расщепляется в категории локально выпуклых пространств, или, что эквивалентно, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ короткая последовательность $0 \rightarrow \text{Ker } d_n \rightarrow C_n \rightarrow \text{Ker } d_{n-1} \rightarrow 0$ точна и допустима. *Резольвентой* $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуля X называется пара $(C_\bullet, \varepsilon)$, состоящая из положительного цепного комплекса $C_\bullet = (C_n, d_n)_{n \geq 0}$ $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модулей и морфизма $\varepsilon: C_0 \rightarrow X$, такая, что последовательность $\cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \rightarrow 0$ представляет собой допустимый комплекс. *Длиной* резольвенты $(C_\bullet, \varepsilon)$ называется наименьшее $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее условию $C_m = 0$ при $m > n$ (или ∞ , если такого n не существует). Аддитивный функтор $F: A\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – абелева категория, называется *точным*, если он переводит каждую короткую допустимую последовательность (2.5) в точную (или, эквивалентно, если он переводит каждый допустимый комплекс в $A\text{-mod}$ в точный).

Левый $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуль P называется *проективным*, если для каждого допустимого эпиморфизма $X \rightarrow Y$ в $A\text{-mod}$ индуцированное отображение ${}_A\mathbf{h}(P, X) \rightarrow {}_A\mathbf{h}(P, Y)$ сюръективно. Эквивалентно, P проективен тогда и только тогда, когда функтор ${}_A\mathbf{h}(P, \cdot): A\text{-mod} \rightarrow \text{Vect}$ точен (здесь и далее через Vect обозначается категория векторных пространств). Известно, что категория $A\text{-mod}$ обладает достаточным количеством проективных объектов; иными словами, для каждого $X \in A\text{-mod}$ существуют проективный модуль $P \in A\text{-mod}$ и допустимый эпиморфизм $P \rightarrow X$. Отсюда по индукции следует, что каждый A -модуль $X \in A\text{-mod}$ обладает проективной резольвентой, т.е. резольвентой $(P_\bullet, \varepsilon)$, в которой все модули P_n , $n \geq 0$, проективны.

Пусть $\mathcal{C} \subset \text{LCS}$ – полная аддитивная подкатегория. Через $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ обозначим полную подкатегорию в $A\text{-mod}$, состоящую из тех модулей, подлежащие пространства которых суть объекты категории $\mathcal{C}$. Если подлежащее пространство алгебры A является объектом $\mathcal{C}$ и если $\mathcal{C}$ замкнута относительно операции $\widehat{\otimes}$, то, как нетрудно видеть, все вышеприведенные гомологические понятия и утверждения переносятся на категорию $A\text{-mod}(\mathcal{C})$. Отметим, что $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуль $P \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ проективен в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда он проективен в $A\text{-mod}$ (это следует из описания проективных модулей как прямых слагаемых свободных; см. [14; III.1.3]).

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория и $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ – аддитивный ковариантный функтор. Наличие достаточного количества проективных объектов в $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ позволяет стандартным образом определить его *левые производные функторы* $L_n F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$, $n \geq 0$ (см. [14; III.3]). Напомним, что на объектах категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ функторы $L_n F$ действуют по правилу $L_n F(X) = H_n(F(P_\bullet))$, где $P_\bullet$ – какая-либо проективная резольвента X , а H_n обозначает n -ю группу гомологий. Аналогичным образом (с заменой гомологий на когомологии) определяются *правые производные функторы* $R^n F$ контравариантного функтора $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$. Отметим также, что определить правые производные ковариантного функтора в общем случае не удастся из-за возможного отсутствия в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ достаточного количества инъективных объектов (см. [30], [31]), но это можно сделать, если A – банахова алгебра, а $\mathcal{C}$ – категория банаховых пространств (см. [14; III.3]).

Следующее простое предложение хорошо известно и приводится для удобства дальнейших ссылок. Его доказательство легко следует из наличия в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$ достаточного количества проективных объектов и из длинной точной последовательности производных функторов (см. [14; теорема III.3.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $F: A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ – аддитивный ковариантный (соответственно контравариантный) функтор. Предположим, что существует такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что $L_{n+1}F = 0$ (соответственно $R^{n+1}F = 0$). Тогда $L_iF = 0$ (соответственно $R^iF = 0$) для всех $i \geq n + 1$.

Зафиксируем левый топологический A -модуль Y . Производный функтор Ext определяется следующим образом:

$$\text{Ext}_A^n(\cdot, Y) = R^n(A\mathbf{h}(\cdot, Y)): A\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Vect}. \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что, определяя функтор $\text{Ext}_A^n(\cdot, Y)$ для $\mathcal{C} = \text{LCS}$, а затем ограничивая его на подкатегорию $A\text{-mod}(\mathcal{C}) \subset A\text{-mod}$, мы получим тот же функтор (2.6). Отметим, что Ext является на самом деле функтором от двух аргументов (см. [14; III.4], [21]).

Известно (см. [14; предложение III.4.5]), что $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуль $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ проективен тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_A^1(X, Y) = 0$ для любого $Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$. Из этого условия следует (ср. предложение 2.4), что $\text{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ для любого левого топологического A -модуля Y и любого $n \geq 1$.

Гомологической размерностью ненулевого $A\text{-}\widehat{\otimes}$ -модуля $X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})$ называется величина

$$\text{dh}_A X = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{Ext}_A^{n+1}(X, Y) = 0 \ \forall Y \in A\text{-mod}(\mathcal{C})\}.$$

Если такого $n \in \mathbb{Z}_+$ не существует, полагают $\text{dh}_A X = \infty$. Для $X = 0$ обычно полагают $\text{dh}_A X = -\infty$. Отметим, что $X \neq 0$ проективен тогда и только тогда, когда $\text{dh}_A X = 0$. Гомологическую размерность модуля X можно эквивалентно определить как длину его самой короткой проективной резольвенты. Отсюда следует, что гомологическая размерность модуля X , вычисленная в категории $A\text{-mod}(\mathcal{C})$, совпадает с его гомологической размерностью как объекта категории $A\text{-mod}$. Кроме того, для всякого $i > \text{dh}_A X$ и всякого левого топологического A -модуля Y справедливо равенство $\text{Ext}_A^i(X, Y) = 0$ (ср. предложение 2.4).

Все вышеприведенные определения и факты переносятся на категории правых $\widehat{\otimes}$ -модулей, $\widehat{\otimes}$ -бимодулей, а также (в случае унитарных алгебр) на соответствующие категории унитарных модулей; при этом удобно использовать изоморфизмы (2.3). Если A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, а X – топологический A -бимодуль, то пространство n -мерных когомологий Хохшильда алгебры A с коэффициентами в X определяется как $\mathcal{H}^n(A, X) = \text{Ext}_{A^e}^n(A_+, X)$.

Глобальной размерностью $\widehat{\otimes}$ -алгебры A называется величина

$$\text{dg } A = \sup\{\text{dh}_A X : X \in A\text{-mod}(\mathcal{C})\}.$$

Биразмерность A определяется как $\text{db } A = \text{dh}_{A^e} A_+$. Известно, что для любой $\widehat{\otimes}$ -алгебры A справедливо неравенство $\text{dg } A \leq \text{db } A$ (см. [14; III.5]). Если $\text{db } A = 0$, то A называется стягиваемой.

$\widehat{\otimes}$ -алгебра A называется *проективной слева (справа)*, если A является проективным левым (соответственно правым) A - $\widehat{\otimes}$ -модулем, и *бипроективной*, если A является проективным A - $\widehat{\otimes}$ -бимодулем. Для любой бипроективной $\widehat{\otimes}$ -алгебры A справедлива оценка $\text{db } A \leq 2$ (см. [14; теорема V.2.28]).

Напомним теперь гомологические понятия, связанные с плоскими топологическими модулями. Хотя само понятие плоского модуля можно ввести для произвольных $\widehat{\otimes}$ -модулей над произвольными $\widehat{\otimes}$ -алгебрами, мы по ряду причин (см. ниже замечание 2.5, а также [32; замечание 7.2]) ограничимся случаем модулей Фреше над алгебрами Фреше. Как и выше, мы будем рассматривать только левые модули; случаи правых модулей и бимодулей сводятся к случаю левых модулей при помощи изоморфизмов (2.3).

Итак, пусть A – алгебра Фреше. Категория пространств Фреше будет в дальнейшем обозначаться символом Fr . Левый A -модуль Фреше X называется *плоским*, если функтор

$$(\cdot) \widehat{\otimes}_A X: \text{mod-}A(\text{Fr}) \rightarrow \text{Vect}$$

точен. Отметим, что всякий проективный модуль Фреше является плоским. Из [33; лемма 2.1] (более прозрачное доказательство см. в [32; предложение 3.3]) следует, что X является плоским тогда и только тогда, когда для любого допустимого мономорфизма $Y \rightarrow Z$ в $\text{mod-}A(\text{Fr})$ индуцированное отображение пространств Фреше $Y \widehat{\otimes}_A X \rightarrow Z \widehat{\otimes}_A X$ топологически инъективно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Уже из предыдущего утверждения видно, почему при работе с плоскими топологическими модулями удобнее ограничиваться случаем модулей Фреше. Дело в том, что для произвольных $\widehat{\otimes}$ -модулей функтор $\widehat{\otimes}_A$ со значениями в категории Vect , вообще говоря, не сохраняет коядра, поэтому приведенный выше критерий плоскости в терминах допустимых мономорфизмов, по-видимому, не переносится на неметризуемый случай. Возможный выход из этой ситуации указан в [32; замечание 7.2].

Пусть X – правый A -модуль Фреше. Производный функтор Tor определяется следующим образом:

$$\text{Tor}_n^A(X, \cdot) = L_n\left(X \widehat{\otimes}_A (\cdot)\right): A\text{-mod}(\text{Fr}) \rightarrow \text{Vect}.$$

Отметим, что функтор Tor можно определять и как производный функтор по первому аргументу (см. [14; III.4]). Отметим также, что на пространствах $\text{Tor}_n^A(X, Y)$ имеется каноническая (вообще говоря, нехаусдорфова) топология, позволяющая рассматривать Tor_n^A как функтор со значениями в категории локально выпуклых пространств (см. [14; III.4]).

Известно (см. [14; VII.1]), что левый A -модуль Фреше X является плоским тогда и только тогда, когда $\text{Tor}_1^A(Y, X) = 0$, а $\text{Tor}_0^A(Y, X)$ хаусдорфово для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$. Из этого условия автоматически следует, что $\text{Tor}_n^A(Y, X) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$ и любого $n \geq 1$ (ср. предложение 2.4).

Пространство n -мерных гомологий Хохшильда алгебры Фреше A с коэффициентами в A -бимодуле Фреше X определяется как $\mathcal{H}_n(A, X) = \text{Tor}_n^{A^e}(X, A_+)$.

Для вычисления производных функторов аддитивного ковариантного функтора F вместо проективных резольвент можно использовать резольвенты, составленные из F -ациклических объектов. По поводу точных определений мы отсылаем читателя к [14; III.3.2]; для наших целей достаточно знать, что для любого правого A -модуля Фреше X и любого левого A -модуля Фреше Y имеют место топологические изоморфизмы

$$\mathrm{Tor}_n^A(X, Y) \cong H_n\left(X \hat{\otimes}_A Q_\bullet\right) \cong H_n\left(P_\bullet \hat{\otimes}_A Q_\bullet\right) \cong H_n\left(P_\bullet \hat{\otimes}_A Y\right),$$

где $P_\bullet$ (соответственно $Q_\bullet$) – плоская резольвента модуля X (соответственно Y), т.е. резольвента, в которой все модули плоские.

Алгебра Фреше A называется *би́плоской* (соответственно *аменабельной*), если A (соответственно A_+) является плоским A -бимодулем Фреше. Очевидно, всякая бипроективная алгебра Фреше является би́плоской. Согласно [14; теорема VII.2.18] всякая аменабельная банахова алгебра также является би́плоской. Можно показать (см. [32; теорема 9.5]), что предыдущее утверждение сохраняет силу для аменабельных алгебр Фреше–Аренса–Майкла, однако этот факт нам не понадобится. Из вышеупомянутого критерия плоскости в терминах функтора Tor следует, что алгебра Фреше A аменабельна тогда и только тогда, когда для любого $X \in A\text{-mod-}A(\mathrm{Fr})$ выполнено условие $\mathcal{H}_1(A, X) = 0$ (или, эквивалентно, $\mathcal{H}_n(A, X) = 0$ при $n > 0$), а $\mathcal{H}_0(A, X)$ хаусдорфово.

§ 3. Некоторые свойства тензорных произведений и плоских модулей

В этом параграфе мы соберем некоторые вспомогательные утверждения о тензорных произведениях и плоских модулях, которые будут использоваться в дальнейшем. Большинство из них хорошо известны в случае банаховых модулей над банаховыми алгебрами (см. [14], [23]), однако мы приводим их с полными доказательствами, поскольку случай модулей Фреше требует несколько иных (по сравнению с [14], [23]) рассуждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть A – $\hat{\otimes}$ -алгебра, и пусть $I \subset A_+$ – замкнутый левый идеал. Тогда для каждого $X \in \text{mod-}A$ существует топологический изоморфизм

$$X \hat{\otimes}_A (A_+/I)^\sim \cong (X/\overline{X \cdot I})^\sim,$$

однозначно определенный формулой $x \otimes (a + I) \mapsto x \cdot a + \overline{X \cdot I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого полного ЛВП E имеют место естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(X \hat{\otimes}_A (A_+/I)^\sim, E\right) &\cong \mathcal{B}il_A(X \times (A_+/I)^\sim, E) \cong \mathcal{B}il_A(X \times (A_+/I), E) \\ &\cong \{\Phi \in \mathcal{B}il_A(X \times A_+, E) : \Phi|_{X \times I} = 0\} \cong \{\varphi \in \mathcal{L}(X, E) : \varphi|_{X \cdot I} = 0\} \\ &\cong \mathcal{L}((X/\overline{X \cdot I})^\sim, E). \end{aligned}$$

Доказательство завершается применением леммы Ионеды (см., например, [34; следствие 1.7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X – правый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, Y – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Тогда существует естественное линейное отображение

$$\left(X \widehat{\otimes}_A Y\right)^* \rightarrow \mathbf{h}_A(X, Y^*), \quad f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x \otimes y))). \quad (3.1)$$

Это отображение является изоморфизмом векторных пространств в каждом из следующих случаев:

- (i) Y – банахов A -модуль;
- (ii) X и Y – A -модули Фреше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, отображение (3.1) инъективно. Для заданного морфизма $\varphi \in \mathbf{h}_A(X, Y^*)$ определим билинейную A -сбалансированную форму $\Phi: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ формулой $\Phi(x, y) = \varphi(x)(y)$. Легко видеть, что Φ непрерывна и, более того, гипонепрерывна относительно семейства всех ограниченных подмножеств в Y . При выполнении любого из условий (i) или (ii) отсюда следует, что Φ совместно непрерывна (случай (i) очевиден, а случай (ii) следует из [35; III.5.1]). Следовательно, существует такой функционал $f \in (X \widehat{\otimes}_A Y)^*$, что $f(x \otimes y) = \Phi(x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Это означает, что отображение (3.1) сюръективно, как и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть A – алгебра Фреше, и пусть $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$, $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место изоморфизм векторных пространств $\text{Ext}_A^n(X, Y^*) \cong \text{Ext}_A^n(Y, X^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снабдим пространство $\mathcal{L}(X, Y^*)$ топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Согласно [21; предложения 3.1 и 3.8] на $\mathcal{L}(X, Y^*)$ имеется естественная структура топологического A -бимодуля и существует канонический изоморфизм

$$\text{Ext}_A^n(X, Y^*) \cong \mathcal{H}^n(A, \mathcal{L}(X, Y^*)).$$

Аналогично,

$$\text{Ext}_A^n(Y, X^*) \cong \mathcal{H}^n(A, \mathcal{L}(Y, X^*)).$$

С другой стороны, как $\mathcal{L}(X, Y^*)$, так и $\mathcal{L}(Y, X^*)$ изоморфны (как топологические векторные пространства) пространству $\mathcal{Bil}(X \times Y, \mathbb{C})$, состоящему из непрерывных билинейных функционалов на $X \times Y$ и снабженному топологией биоограниченной сходимости. Наконец, прямая проверка (ср. [14; предложение III.4.13] для банахова случая) показывает, что результирующий изоморфизм между $\mathcal{L}(X, Y^*)$ и $\mathcal{L}(Y, X^*)$ является изоморфизмом A -бимодулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть A – алгебра Фреше. Следующие свойства модуля $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ эквивалентны:

- (i) X – плоский;
- (ii) $\text{Ext}_A^1(Y, X^*) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$;
- (ii)' $\text{Ext}_A^1(X, Y^*) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$;

- (iii) $\text{Ext}_A^i(Y, X^*) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$ и любого $i \geq 1$;
 (iii)' $\text{Ext}_A^i(X, Y^*) = 0$ для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$ и любого $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\Leftrightarrow$ (ii)', (iii) $\Leftrightarrow$ (iii)'. Это частный случай предложения 3.3.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Из характеристики плоских модулей в терминах функторов Tor (см. § 2) следует, что X является плоским тогда и только тогда, когда для любого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$ и любой проективной резольвенты $P = (P_n, d_n)$ модуля Y комплекс

$$0 \leftarrow Y \hat{\otimes}_A X \leftarrow P_0 \hat{\otimes}_A X \leftarrow P_1 \hat{\otimes}_A X \leftarrow \dots \quad (3.2)$$

точен. Согласно [25; предложение 26.4] это эквивалентно точности комплекса, сопряженного к (3.2). Но с учетом предложения 3.2 комплекс, сопряженный к (3.2), изоморфен комплексу

$$0 \rightarrow \mathbf{h}_A(Y, X^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(P_0, X^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(P_1, X^*) \rightarrow \dots$$

Последний комплекс автоматически точен в $\mathbf{h}_A(Y, X^*)$ и $\mathbf{h}_A(P_0, X^*)$, а его точность в остальных членах эквивалентна условию (iii).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Это частный случай предложения 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть A – алгебра Фреше. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) A аменабельна;
 (ii) $\mathcal{H}^1(A, X^*) = 0$ для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$;
 (iii) $\mathcal{H}^i(A, X^*) = 0$ для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и каждого $i \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть A, B – алгебры Фреше, $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ и $Y \in \text{mod-}B(\text{Fr})$. Предположим, что один из модулей X, Y плоский, а другой проективный. Тогда A - B -бимодуль Фреше $X \hat{\otimes} Y$ плоский.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, предположим, что модуль $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ проективный, а $Y \in \text{mod-}B(\text{Fr})$ плоский. Зафиксируем допустимый комплекс $C_\bullet$ в $B\text{-mod-}A$. Из проективности X следует, что комплекс $C_\bullet \hat{\otimes}_A X$ также допустим, поэтому в силу плоскости Y комплекс

$$Y \hat{\otimes}_B C_\bullet \hat{\otimes}_A X \cong C_\bullet \hat{\otimes}_{A \hat{\otimes} B_+^{\text{op}}} (X \hat{\otimes} Y)$$

точен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Для банаховых алгебр и модулей имеет место более сильное утверждение: если левый банахов A -модуль X и правый банахов B -модуль Y плоские, то таков же и A - B -бимодуль $X \hat{\otimes} Y$ (см. [23; предложение 7.1.57]). Однако нам не известно, верно ли аналогичное утверждение для модулей Фреше. Сложность заключается в том, что эквивалентность

$$“X \text{ плоский} \iff X^* \text{ инъективный}”,$$

являющаяся весьма удобным средством исследования плоских банаховых модулей, не имеет аналога в категориях модулей Фреше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть A, B – алгебры Фреше, M – плоский A - B -бимодуль Фреше. Тогда для любого $Y \in B\text{-mod}(\text{Fr})$ (соответственно любого $X \in \text{mod-}A(\text{Fr})$) левый A -модуль Фреше $M \hat{\otimes}_B Y$ (соответственно правый B -модуль Фреше $X \hat{\otimes}_A M$) является плоским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого допустимого комплекса $C_\bullet$ в $\text{mod-}A(\text{Fr})$ комплекс $Y \hat{\otimes} C_\bullet$ допустим в $B\text{-mod-}A(\text{Fr}) \cong \text{unmod-}(A_+ \hat{\otimes} B_+^{\text{op}})(\text{Fr})$. Для доказательства первого утверждения остается воспользоваться изоморфизмом

$$C_\bullet \hat{\otimes}_A M \hat{\otimes}_B Y \cong (Y \hat{\otimes} C_\bullet) \hat{\otimes}_{A_+ \hat{\otimes} B_+^{\text{op}}} M.$$

Второе утверждение получается из первого переходом к противоположным алгебрам.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Каждый плоский A - B -бимодуль Фреше является плоским в $A\text{-mod}(\text{Fr})$ и в $\text{mod-}B(\text{Fr})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить предложение 3.8 с $X = A_+$ и $Y = B_+$.

Завершим параграф простым наблюдением, хорошо известным в чисто алгебраическом случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть $\varphi: A \rightarrow B$ – гомоморфизм алгебр Фреше, и пусть X – плоский левый A -модуль Фреше. Тогда B -модуль Фреше $B_+ \hat{\otimes}_A X$ плоский.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что функторы

$$(\cdot) \hat{\otimes}_B B_+ \hat{\otimes}_A X, \quad (\cdot) \hat{\otimes}_A X: \text{mod-}B(\text{Fr}) \rightarrow \text{Vect}$$

изоморфны.

§ 4. Слабая гомологическая размерность

В этом параграфе мы обсуждаем слабые гомологические размерности модулей и алгебр Фреше и устанавливаем некоторые свойства этих размерностей. Понятия слабых гомологических размерностей были введены А. Я. Хелемским в [36]; упомянем также работы Ю. В. Селиванова [12], [13], в которых изучалось понятие слабой биразмерности банаховых алгебр (см. ниже определение 4.3). Некоторые из доказываемых ниже свойств слабой размерности были сформулированы А. Я. Хелемским без доказательства в [36; предложение 2.5.4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть A – алгебра Фреше, и пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Следующие свойства модуля $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ эквивалентны:

(i) X обладает плоской резольвентой длины n :

$$0 \leftarrow X \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \cdots \leftarrow F_n \leftarrow 0; \quad (4.1)$$

(ii) $\text{Tor}_{n+1}^A(Y, X) = 0$, а $\text{Tor}_n^A(Y, X)$ хаусдорфово для каждого $Y \in \text{mod-}A(\text{Fr})$;

- (iii) $\mathrm{Tor}_i^A(Y, X) = 0$, а $\mathrm{Tor}_n^A(Y, X)$ хаусдорфово для каждого $Y \in \mathrm{mod}\text{-}A(\mathrm{Fr})$ и каждого $i \geq n + 1$;
- (iv) $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(Y, X^*) = 0$ для каждого $Y \in \mathrm{mod}\text{-}A(\mathrm{Fr})$;
- (iv)' $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(X, Y^*) = 0$ для каждого $Y \in \mathrm{mod}\text{-}A(\mathrm{Fr})$;
- (v) $\mathrm{Ext}_A^i(Y, X^*) = 0$ для каждого $Y \in \mathrm{mod}\text{-}A(\mathrm{Fr})$ и каждого $i \geq n + 1$;
- (v)' $\mathrm{Ext}_A^i(X, Y^*) = 0$ для каждого $Y \in \mathrm{mod}\text{-}A(\mathrm{Fr})$ и каждого $i \geq n + 1$;
- (vi) для каждой резольвенты (4.1) модуля X , в которой модули $F_0, \dots, F_{n-1}$ плоские, модуль F_n также является плоским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (iv) $\Leftrightarrow$ (iv)', (v) $\Leftrightarrow$ (v)'. Это частные случаи предложения 3.3.

(i) $\Rightarrow$ (iii) следует из равенства $\mathrm{Tor}_i^A(Y, X) = \mathrm{H}_i(F_\bullet \widehat{\otimes}_A X)$ (см. § 2).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii), (iv) $\Leftrightarrow$ (v) – это частные случаи предложения 2.4.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Зафиксируем проективную резольвенту $P_\bullet = (P_n, d_n)$ модуля Y и положим

$$B_n = \mathrm{Im}\left(d_{n+1} \otimes \mathbf{1}_X : P_{n+1} \widehat{\otimes}_A X \rightarrow P_n \widehat{\otimes}_A X\right).$$

В силу условия (iii) комплекс

$$0 \leftarrow B_n \leftarrow P_{n+1} \widehat{\otimes}_A X \leftarrow P_{n+2} \widehat{\otimes}_A X \leftarrow \dots$$

является точным комплексом пространств Фреше. Следовательно (см. [25; предложение 26.4]), точен и его сопряженный комплекс, который в силу предложения 3.2 изоморфен комплексу

$$0 \rightarrow B_n^* \rightarrow \mathbf{h}_A(P_{n+1}, X^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(P_{n+2}, X^*) \rightarrow \dots$$

Поскольку отображение $\mathbf{h}_A(P_n, X^*) \rightarrow \mathbf{h}_A(P_{n+1}, X^*)$ пропускается, очевидно, через B_n^* , из точности последнего комплекса получаем (v).

(v)' $\Rightarrow$ (vi). Разбивая последовательность (4.1) на короткие допустимые последовательности и сопоставляя каждой из них длинную точную последовательность пространств $\mathrm{Ext}_A^i(\cdot, Y^*)$, для каждого $i \geq 1$ получаем изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_A^i(F_n, Y^*) \cong \mathrm{Ext}_A^{i+n}(X, Y^*).$$

Но последнее пространство равно нулю при $i \geq 1$ в силу (v)', и остается воспользоваться предложением 3.4.

(vi) $\Rightarrow$ (i) очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Разумеется, предложение 4.1 переносится с очевидными модификациями на правые модули и бимодули Фреше (см. (2.3)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $X \neq 0$ – левый A -модуль Фреше. Наименьшее $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее условиям предложения 4.1, называется *слабой гомологической размерностью* X и обозначается через $\mathrm{w. dh}_A X$. Для $X = 0$ полагаем $\mathrm{w. dh}_A X = -\infty$. *Слабой глобальной размерностью* алгебры Фреше A называется величина

$$\mathrm{w. dg} A = \sup\{\mathrm{w. dh}_A X : X \in A\text{-mod}(\mathrm{Fr})\}.$$

Слабая биразмерность A определяется как $\mathrm{w. db} A = \mathrm{w. dh}_{A^e} A_+$.

Очевидно, $w.\text{dh}_A X \leq \text{dh}_A X$ и, следовательно, $w.\text{dg } A \leq \text{dg } A$. Отметим также, что $w.\text{dh}_A X = 0$ тогда и только тогда, когда X ненулевой и плоский, и что $w.\text{db } A = 0$ тогда и только тогда, когда A аменабельна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ – короткая допустимая последовательность в $A\text{-mod}(\text{Fr})$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $w.\text{dh}_A Y \leq \max\{w.\text{dh}_A X, w.\text{dh}_A Z\}$;
- (ii) если $w.\text{dh}_A Z \neq w.\text{dh}_A X + 1$, то $w.\text{dh}_A Y = \max\{w.\text{dh}_A X, w.\text{dh}_A Z\}$.

Для доказательства достаточно зафиксировать произвольный модуль $W \in \text{mod-}A(\text{Fr})$, рассмотреть длинную точную последовательность функторов $\text{Ext}_A^i(\cdot, W^*)$ и воспользоваться определением слабой размерности, соответствующим п. (v)' предложения 4.1.

Для удобства дальнейших ссылок сформулируем еще одно простое следствие предложения 4.1 (ср. [13; предложение 1]).

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Для алгебры Фреше A следующие условия эквивалентны:

- (i) $w.\text{db } A \leq n$;
- (ii) $\mathcal{H}_{n+1}(A, X) = 0$, а $\mathcal{H}_n(A, X)$ хаусдорфово для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$;
- (iii) $\mathcal{H}_i(A, X) = 0$, а $\mathcal{H}_n(A, X)$ хаусдорфово для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и каждого $i \geq n + 1$;
- (iv) $\mathcal{H}^{n+1}(A, X^*) = 0$ для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$;
- (v) $\mathcal{H}^i(A, X^*) = 0$ для каждого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и каждого $i \geq n + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Как было показано в [32; предложение 4.3], плоский банахов модуль над банаховой алгеброй остается плоским, если его рассмотреть как модуль Фреше над той же алгеброй. Поэтому из свойства (vi) предложения 4.1 видно, что для банаховых алгебр и модулей введенные выше слабые размерности не изменятся, если в предложении 4.1 и определении 4.3 сузить все категории модулей Фреше до их полных подкатегорий, состоящих из банаховых модулей. Впрочем, это утверждение в дальнейшем использоваться не будет.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Для любой алгебры Фреше A справедливо неравенство

$$w.\text{dg } A \leq w.\text{db } A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = w.\text{db } A < \infty$. Зафиксируем проективную резольвенту $0 \leftarrow A_+ \leftarrow P_\bullet$ в $A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и положим $F_n = \text{Im}(P_{n+1} \rightarrow P_n)$. Получаем допустимую последовательность

$$0 \leftarrow A_+ \leftarrow P_0 \leftarrow \cdots \leftarrow P_{n-1} \leftarrow F_n \leftarrow 0. \quad (4.2)$$

Согласно свойству (vi) предложения 4.1 F_n – плоский A -бимодуль. Разбивая (4.2) на короткие последовательности и пользуясь проективностью A_+ и P_i

в $\text{mod-}A(\text{Fr})$, заключаем, что (4.2) расщепляется в $\text{mod-}A(\text{Fr})$. Следовательно, для любого $X \in A\text{-mod}(\text{Fr})$ последовательность левых A -модулей

$$0 \leftarrow X = A_+ \hat{\otimes}_A X \leftarrow P_0 \hat{\otimes}_A X \leftarrow \cdots \leftarrow P_{n-1} \hat{\otimes}_A X \leftarrow F_n \hat{\otimes}_A X \leftarrow 0$$

допустима. В силу предложения 3.8 все левые модули $P_i \hat{\otimes}_A X$ и $F_n \hat{\otimes}_A X$ плоские. Поэтому $\text{w. dh}_A X \leq n$ в силу свойства (i) предложения 4.1.

Обратимся теперь к оценкам слабых размерностей биплоских алгебр Фреше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть A – алгебра Фреше.

- (i) Если A биплоская, то $\text{w. dg } A \leq 2$.
- (ii) Если A биплоская и проективная слева или справа, то $\text{w. db } A \leq 2$.
- (iii) Предположим, что выполнены условия п.(ii). Тогда для выполнения неравенства $\text{w. db } A \leq 1$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $A \hat{\otimes}$ -бимодуля Фреше X отображение

$$\Delta_X : {}_{\Pi}X_{\Pi} \rightarrow {}_{\Pi}X \oplus X_{\Pi}, \quad a \otimes x \otimes b \mapsto (ax \otimes b, a \otimes xb), \quad (4.3)$$

было топологически инъективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим раскручивающую резольвенту

$$0 \leftarrow A_+ \leftarrow (A_+ \hat{\otimes} A_+) \oplus A \leftarrow (A_+ \hat{\otimes} A) \oplus (A \hat{\otimes} A_+) \xleftarrow{\Delta} A \hat{\otimes} A \leftarrow 0 \quad (4.4)$$

(см. [36; § 2.2.2]). Умножая ее тензорно на произвольный $Y \in A\text{-mod}(\text{Fr})$, получаем комплекс

$$0 \leftarrow Y \leftarrow (A_+ \hat{\otimes} Y) \oplus Y_{\Pi} \leftarrow (A_+ \hat{\otimes} Y_{\Pi}) \oplus (A \hat{\otimes} Y) \leftarrow A \hat{\otimes} Y_{\Pi} \leftarrow 0, \quad (4.5)$$

являющийся резольвентой Y в $A\text{-mod}(\text{Fr})$ (см. [14; V.2.1]). Если A биплоская, то из предложения 3.8 следует, что (4.5) – плоская резольвента Y , поэтому $\text{w. dh}_A Y \leq 1$ и, следовательно, $\text{w. dg } A \leq 1$ ввиду произвольности Y . Это доказывает п. (i). Если к тому же A проективна слева или справа, то из предложения 3.6 следует, что (4.4) – плоская резольвента A_+ в $A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и, следовательно, $\text{w. db } A \leq 2$. Это доказывает п. (ii). Для доказательства п. (iii) напомним (см. [36; § 2.2.2]), что морфизм Δ в резольвенте (4.4) задается формулой

$$\Delta(a \otimes b) = (a \otimes b, a \otimes b) \quad (a, b \in A).$$

Применяя к (4.4) функтор $(\cdot) \hat{\otimes}_{A^e} X$, получаем комплекс, изоморфный комплексу

$$\cdots \leftarrow {}_{\Pi}X \oplus X_{\Pi} \xleftarrow{\Delta_X} {}_{\Pi}X_{\Pi} \leftarrow 0,$$

где морфизм Δ_X определяется формулой (4.3). В силу теоремы Банаха об открытом отображении Δ_X топологически инъективен тогда и только тогда, когда одновременно $\mathcal{H}_2(A, X) = 0$ и $\mathcal{H}_1(A, X)$ хаусдорфово. Доказательство завершается применением следствия 4.5.

§ 5. Критерий биплоскости алгебры Кёте

Пусть I – множество, и пусть $i \in I$. В дальнейшем символ e_i будет обозначать функцию на I , заданную формулой $e_i(j) = \delta_{ij}$, $j \in I$.

ЛЕММА 5.1. *Для любой алгебры Кёте $A = \lambda(P)$ имеет место топологический изоморфизм*

$$A \widehat{\otimes}_A A \rightarrow \lambda(P^2),$$

однозначно определенный условием $e_i \otimes_A e_j \mapsto e_{ij}e_i$, $i, j \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что для любых $a, b \in A$ и любого $p \in P$ справедлива оценка

$$\sum_i |a_i b_i| p_i^2 \leq \sum_i |a_i| p_i \sum_j |b_j| p_j = \|a\|_p \|b\|_p.$$

Тем самым, покомпонентное произведение $(a_i b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ лежит в $\lambda(P^2)$ и определено совместно непрерывное билинейное отображение

$$\Phi: A \times A \rightarrow \lambda(P^2), \quad (a, b) \mapsto (a_i b_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Легко видеть, что $\Phi(ae_j, b) = \Phi(a, e_j b)$ для любых $a, b \in A$ и $j \in \mathbb{N}$. Отсюда по непрерывности получаем, что Φ сбалансировано и, следовательно, определяет непрерывное линейное отображение

$$\varphi: A \widehat{\otimes}_A A \rightarrow \lambda(P^2), \quad e_i \otimes_A e_j \mapsto \delta_{ij} e_i.$$

Построим теперь отображение, обратное к φ . Для этого заметим, что формула $\sum_i a_i e_i \mapsto \sum_i a_i e_{ii}$, где $e_{ii} = e_{(i,i)}$, задает непрерывное линейное отображение из $\lambda(P^2)$ в $\lambda(P \times P)$. отождествляя последнее пространство с $A \widehat{\otimes}_A A$ (см. (2.2)) и беря композицию с каноническим отображением из $A \widehat{\otimes}_A A$ в $A \widehat{\otimes}_A A$, получаем непрерывное линейное отображение

$$\psi: \lambda(P^2) \rightarrow A \widehat{\otimes}_A A, \quad e_i \mapsto e_i \otimes_A e_i.$$

Очевидно, $\varphi\psi = \mathbf{1}_{\lambda(P^2)}$, а из равенства $e_i \otimes_A e_j = 0$ при $i \neq j$ следует, что $\psi\varphi = \mathbf{1}_{A \widehat{\otimes}_A A}$. Тем самым, φ – топологический изоморфизм, как и требовалось.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $A = \lambda(P)$ – метризуемая алгебра Кёте. Следующие утверждения эквивалентны:*

- (i) A бипроективная;
- (ii) A биплоская;
- (iii) A – плоский A -модуль Фреше;
- (iv) $\text{Tor}_0^A(\mathbb{C}, A)$ хаусдорфово;
- (v) $\text{Tor}_0^A(\mathbb{C}, A) = 0$;
- (vi) оператор умножения $A \widehat{\otimes}_A A \rightarrow A$ сюръективен;
- (vii) $P \sim P^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ (iv) очевидно.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi). Из [14; предложение III.4.26] следует, что для любой алгебры Фреше A имеют место изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_0^A(\mathbb{C}, A) &\cong A / \mathrm{Im}(A \widehat{\otimes} A \rightarrow A, a \otimes b \mapsto ab) \\ &\cong A / \mathrm{Im}\left(\pi_A: A \widehat{\otimes}_A A \rightarrow A, a \otimes b \mapsto ab\right). \end{aligned}$$

Следовательно, утверждения (v) и (vi) эквивалентны для любой алгебры Фреше.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v). Для алгебры Кёте $A = \lambda(P)$ образ π_A , очевидно, плотен в A , поэтому топология на $\mathrm{Tor}_0^A(\mathbb{C}, A)$ тривиальна. Тем самым, утверждения (iv) и (v) эквивалентны.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Для $A = \lambda(P)$ лемма 5.1 позволяет отождествить π_A с вложением $\lambda(P^2) \rightarrow \lambda(P)$, $e_i \mapsto e_i$. Отсюда с учетом (vi) и теоремы Банаха следует, что последнее отображение – топологический изоморфизм, что, как нетрудно видеть, эквивалентно утверждению (vii).

(vii) $\Rightarrow$ (i) доказано в [7; теорема 3.5].

ПРИМЕР 5.3. Алгебра $\Lambda_R(\alpha)$ удовлетворяет эквивалентным условиям (i)–(vii) теоремы 5.2 тогда и только тогда, когда $R = 1$ или $R = \infty$. В частности, алгебры s , $\mathcal{H}(\mathbb{D}_1^d)$ и $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ бипроективны.

§ 6. Слабые гомологические размерности биплоских алгебр Кёте

Поскольку всякая биплоская алгебра Кёте бипроективна (см. теорему 5.2), ее гомологические размерности (как “сильные”, так и слабые) не превосходят 2 в силу уже упоминавшейся выше теоремы А. Я. Хелемского (см. [14; теорема V.2.28]). В этом параграфе мы покажем (теорема 6.10), что слабая глобальная размерность (или, что в данном случае эквивалентно, слабая биразмерность) биплоской алгебры Кёте $\lambda(P)$ не превосходит 1 тогда и только тогда, когда $\lambda(P)$ ядерна (и, следовательно, равна 2 в противном случае). “Сильные” размерности будут обсуждаться в § 7 (см. также [7], [8]).

Для дальнейшего нам понадобится следующее векторнозначное обобщение пространств Кёте (см. [37]).

Пусть I – множество, $E = \{E_i : i \in I\}$ – семейство хаусдорфовых ЛВП. Для каждого $i \in I$ обозначим через $\mathfrak{N}(E_i)$ семейство всех непрерывных полуномр на E_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. $\mathbb{E}$ -множеством Кёте называется семейство $\mathbb{P}$, состоящее из функций $p: I \rightarrow \bigcup_i \mathfrak{N}(E_i)$, такое, что $p_i = p(i) \in \mathfrak{N}(E_i)$ для каждого $i \in I$, и удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) для каждого $i \in I$ семейство полуномр $\{p_i : p \in \mathbb{P}\}$ порождает исходную топологию на E_i ;
- 2) для любых $p, q \in \mathbb{P}$ существует такое $r \in \mathbb{P}$, что $r_i(x) \geq \max\{p_i(x), q_i(x)\}$ для всех $i \in I$ и всех $x \in E_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть даны семейство $\mathbb{E} = \{E_i : i \in I\}$ хаусдорфовых ЛВП и $\mathbb{E}$ -множество Кёте $\mathbb{P}$. Определим *векторнозначное пространство Кёте* $\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{E})$ следующим образом:

$$\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{E}) = \left\{ x = (x_i) \in \prod_i E_i : \|x\|_p = \sum_i p_i(x_i) < \infty \ \forall p \in \mathbb{P} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если $E_i = \mathbb{C}$ для всех i , то мы получаем классическое определение пространства Кёте (2.1).

Очевидно, $\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{E})$ является хаусдорфовым ЛВП относительно топологии, порожденной семейством полунорм $\{\|\cdot\|_p : p \in \mathbb{P}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Пространство $\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{E})$ полно тогда и только тогда, когда полны все пространства E_i , $i \in I$.*

Доказательство этого предложения представляет собой очевидную модификацию стандартного доказательства полноты пространства ℓ^1 и поэтому опускается.

Пусть теперь $A = \lambda(P)$ – алгебра Кёте, и пусть X – левый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль. Для каждого $i \in I$ положим $X_i = e_i X$. Очевидно, X_i – замкнутое подпространство в X . Положим $\mathbb{X} = \{X_i : i \in I\}$. Далее, зафиксируем направленное семейство полунорм $\{\|\cdot\|_\nu : \nu \in \Lambda\}$, задающее топологию на X , и для каждого $p \in P$ и каждого $\nu \in \Lambda$ определим функцию

$$p_\nu : I \rightarrow \bigcup_i \mathfrak{N}(X_i), \quad p_\nu(i) = p_{\nu,i} = \|\cdot\|_\nu p_i.$$

Положим

$$\mathbb{P} = \{p_\nu : p \in P, \nu \in \Lambda\}.$$

Очевидно, $\mathbb{P}$ представляет собой $\mathbb{X}$ -множество Кёте. В дальнейшем полунорму $\|\cdot\|_{p_\nu}$ на $\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X})$ мы будем обозначать через $\|\cdot\|_{p,\nu}$.

ЛЕММА 6.5. *Предположим, что $P \sim P^2$. Тогда имеет место топологический изоморфизм*

$$\varphi : A \widehat{\otimes}_A X \xrightarrow{\sim} \lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X}), \quad a \otimes x \mapsto (a_i e_i x)_{i \in I}. \quad (6.1)$$

При этом

$$\varphi^{-1}(y) = \sum_i e_i \otimes_A y_i \quad (y = (y_i) \in \lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $p \in P$ и $\nu \in \Lambda$ и подберем $q \in P$, $\mu \in \Lambda$ и $C_1 > 0$ так, чтобы $\|a \cdot x\|_\nu \leq C_1 \|a\|_q \|x\|_\mu$ для всех $a \in A$ и $x \in X$; при этом можем считать, что $q \geq p$. Далее, пользуясь тем, что $P^2 \prec P$, найдем $r \in P$ и $C_2 > 0$, удовлетворяющие условию $q^2 \leq C_2 r$. Тогда для любых $a \in A$ и $x \in X$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_i p_{\nu,i}(a_i e_i x) &= \sum_i \|a_i e_i x\|_\nu p_i \leq C_1 \sum_i |a_i| p_i q_i \|x\|_\mu \\ &\leq C_1 C_2 \sum_i |a_i| r_i \|x\|_\mu = C_1 C_2 \|a\|_r \|x\|_\mu. \end{aligned}$$

Это показывает, что семейство $(a_i e_i x)_{i \in I}$ принадлежит $\lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X})$ и что билинейное отображение

$$\Phi: A \times X \rightarrow \lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X}), \quad (a, x) \mapsto (a_i e_i x)_{i \in I},$$

совместно непрерывно. Далее,

$$\Phi(a e_j, x)_i = \delta_{ij} a_i e_i x = a_i e_i e_j x = \Phi(a, e_j x)_i,$$

т.е. $\Phi(a e_j, x) = \Phi(a, e_j x)$ для любого $j \in I$. Отсюда по непрерывности получаем, что Φ сбалансировано и, следовательно, доставляет непрерывный линейный оператор φ , однозначно определенный формулой (6.1).

Построим теперь отображение, обратное к φ . С этой целью снова зафиксируем произвольные $p \in P$ и $\nu \in \Lambda$ и заметим, что для любого элемента $y = (y_i) \in \lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X})$ справедливы равенства

$$\sum_i \|e_i\|_p \|y_i\|_\nu = \sum_i \|y_i\|_\nu p_i = \|y\|_{p, \nu}.$$

Следовательно, семейство $\sum_i e_i \otimes_A y_i$ абсолютно суммируемо в $A \hat{\otimes}_A X$, и если через $\psi(y)$ обозначить его сумму, а через $\|\cdot\|_{\pi(p, \nu)}$ обозначить проективное тензорное произведение полунорм $\|\cdot\|_p$ на A и $\|\cdot\|_\nu$ на X , то справедлива оценка $\|\psi(y)\|_{\pi(p, \nu)} \leq \|y\|_{p, \nu}$. Следовательно, получаем непрерывное линейное отображение

$$\psi: \lambda(\mathbb{P}, \mathbb{X}) \rightarrow A \hat{\otimes}_A X, \quad y = (y_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i e_i \otimes_A y_i.$$

Прямая проверка показывает, что отображения φ и ψ взаимно обратны.

ЛЕММА 6.6. Пусть A и B – $\hat{\otimes}$ -алгебры, причем $\overline{A^2} = A$, $\overline{B^2} = B$. Тогда для любого A - B - $\hat{\otimes}$ -бимодуля X имеет место топологический изоморфизм

$$(A \hat{\otimes} B^{\text{op}}) \hat{\otimes}_{A \hat{\otimes} B^{\text{op}}} X \xrightarrow{\sim} A \hat{\otimes}_A X \hat{\otimes}_B B, \quad (a \otimes b) \otimes x \mapsto a \otimes x \otimes b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя универсальное свойство проективного тензорного произведения (2.4) и стандартное отождествление A - B - $\hat{\otimes}$ -бимодулей с левыми унитарными $A_+ \hat{\otimes} B_+^{\text{op}}$ -модулями (2.3), нетрудно видеть, что существует топологический изоморфизм

$$(A \hat{\otimes} B^{\text{op}}) \hat{\otimes}_{A_+ \hat{\otimes} B_+^{\text{op}}} X \xrightarrow{\sim} A \hat{\otimes}_A X \hat{\otimes}_B B, \quad (a \otimes b) \otimes x \mapsto a \otimes x \otimes b.$$

Поэтому доказательство будет завершено, если мы покажем, что для любого полного ЛВП E любое $A \hat{\otimes} B^{\text{op}}$ -сбалансированное непрерывное билинейное отображение

$$\Phi: A \hat{\otimes} B^{\text{op}} \times X \rightarrow E$$

автоматически будет $A_+ \hat{\otimes} B_+^{\text{op}}$ -сбалансированным. Ясно, что требуемое равенство $\Phi(uv, x) = \Phi(u, v \cdot x)$ достаточно проверять для элементов v , имеющих вид

$$v = a \otimes 1_+ \quad (a \in A), \quad v = 1_+ \otimes b \quad (b \in B^{\text{op}});$$

при этом в качестве u можно брать элементы вида

$$u = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \quad (a_i \in A, b_i \in B^{\text{op}}, i = 1, 2).$$

Пользуясь $A \widehat{\otimes} B^{\text{op}}$ -сбалансированностью Φ , получаем равенства

$$\begin{aligned} \Phi((a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)(a \otimes 1_+), x) &= \Phi(a_1 a_2 a \otimes b_1 b_2, x) \\ &= \Phi((a_1 \otimes b_1)(a_2 a \otimes b_2), x) = \Phi(a_1 \otimes b_1, a_2 a \cdot x \cdot b_2) \\ &= \Phi((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2), a \cdot x) = \Phi(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, (a \otimes 1_+) \cdot x). \end{aligned}$$

Случай $v = 1_+ \otimes b$ разбирается аналогично.

ЛЕММА 6.7. Пусть $A = \lambda(P)$ – алгебра Кёте. Предположим, что $P \sim P^2$. Пусть, далее, X – A - $\widehat{\otimes}$ -бимодуль, топология которого определяется направленным семейством полунорм $\{\|\cdot\|_\nu : \nu \in \Lambda\}$. Для каждого $i, j \in I$ положим

$${}_i X = e_i X, \quad X_i = X e_i, \quad {}_i X_j = e_i X e_j.$$

Тогда имеют место топологические изоморфизмы

$$X_\Pi \cong \left\{ z = (z_i) \in \prod_i {}_i X : \|z\|_{p,\nu} = \sum_i \|z_i\|_\nu p_i < \infty \forall p \in P, \forall \nu \in \Lambda \right\}, \quad (6.2)$$

$${}_\Pi X \cong \left\{ y = (y_i) \in \prod_i X_i : \|y\|_{p,\nu} = \sum_i \|y_i\|_\nu p_i < \infty \forall p \in P, \forall \nu \in \Lambda \right\}, \quad (6.3)$$

$${}_\Pi X_\Pi \cong \left\{ x = (x_{ij}) \in \prod_{i,j} {}_i X_j : \|x\|_{p,\nu} = \sum_{i,j} \|x_{ij}\|_\nu p_i p_j < \infty \forall p \in P, \forall \nu \in \Lambda \right\}, \quad (6.4)$$

задаваемые формулами

$$z \mapsto \sum_i e_i \otimes z_i, \quad y \mapsto \sum_i y_i \otimes e_i, \quad x \mapsto \sum_{i,j} e_i \otimes x_{ij} \otimes e_j. \quad (6.5)$$

При указанных отождествлениях отображение Δ_X (см. (4.3)) действует по правилу

$$\Delta_X(x) = (y, z), \quad \text{где } y_j = \sum_i x_{ij}, \quad z_i = \sum_j x_{ij}. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизмы (6.2) и (6.3) получаются прямым применением леммы 6.5. Для построения изоморфизма (6.4) положим $\mathfrak{A} = A \widehat{\otimes} A$ и воспользуемся леммой 6.6, согласно которой имеет место изоморфизм

$${}_\Pi X_\Pi = A \widehat{\otimes}_A X \widehat{\otimes}_A A \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A} \widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}} X, \quad a \otimes x \otimes b \mapsto (a \otimes b) \otimes x. \quad (6.7)$$

Отождествляя $\mathfrak{A}$ с $\lambda(P \times P)$ (см. (2.2)) и снова применяя лемму 6.5, получаем (6.4). То, что указанные изоморфизмы действуют по формулам (6.5), в первых двух случаях следует непосредственно из леммы 6.5, а в третьем случае – из нее же с учетом (6.7) и (2.2).

Для $x = \sum_{i,j} e_i \otimes x_{ij} \otimes e_j \in \Pi X_\Pi$ имеем

$$\Delta_X(x) = \left(\sum_{i,j} e_i x_{ij} \otimes e_j, \sum_{i,j} e_i \otimes x_{ij} e_j \right) = \left(\sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_j, \sum_{i,j} e_i \otimes x_{ij} \right). \quad (6.8)$$

Отсюда, в частности, следует, что семейства $(x_{ik})_{i \in I}$ и $(x_{kj})_{j \in I}$ абсолютно суммируемы для каждого фиксированного $k \in I$. Положим $y_k = \sum_i x_{ik}$ и $z_k = \sum_j x_{kj}$ и заметим, что $y_k \in X_k$ и $z_k \in {}_k X$. Теперь равенства (6.8) могут быть переписаны в виде

$$\Delta_X(x) = \left(\sum_j y_j \otimes e_j, \sum_i e_i \otimes z_i \right), \quad \text{где} \quad y_j = \sum_i x_{ij}, \quad z_i = \sum_j x_{ij}.$$

Учитывая (6.5), получаем требуемую формулу (6.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.8. Если алгебра Кёте $\lambda(P)$ ядерна, то, используя критерий Гротендика–Пича (см. § 2), нетрудно видеть, что в формулах (6.2)–(6.4) полунормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ можно заменить полунормами $\|\cdot\|_{p,\nu}^\infty$, которые задаются формулами

$$\begin{aligned} \|z\|_{p,\nu}^\infty &= \sup_i \|z_i\|_\nu p_i, & z &\in X_\Pi, \\ \|y\|_{p,\nu}^\infty &= \sup_i \|y_i\|_\nu p_i, & y &\in \Pi X, \\ \|x\|_{p,\nu}^\infty &= \sup_{i,j} \|x_{ij}\|_\nu p_i p_j, & x &\in \Pi X_\Pi. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6.9. Пусть P – множество Кёте. Положим $\lambda^1 = \lambda^1(P)$, $\lambda^\infty = \lambda^\infty(P)$. Тогда для ядерности λ^1 необходимо и достаточно, чтобы отображение

$$\lambda^1 \hat{\otimes} \lambda^1 \rightarrow (\lambda^\infty \hat{\otimes} \lambda^1) \oplus (\lambda^1 \hat{\otimes} \lambda^\infty), \quad x \otimes y \mapsto (x \otimes y, x \otimes y), \quad (6.9)$$

было топологически инъективно.

Доказательство этой леммы фактически содержится в доказательстве теоремы 4.3 из [7] и поэтому опускается.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема. В ее формулировке пространство $\lambda^\infty(P)$ рассматривается как $\lambda^1(P)$ - $\hat{\otimes}$ -модуль, полученный “отступлением” вдоль гомоморфизма вложения $\lambda^1(P) \rightarrow \lambda^\infty(P)$.

ТЕОРЕМА 6.10. Пусть $A = \lambda(P)$ – метризуемая биплоская алгебра Кёте. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $w.\text{db } A \leq 1$;
- (ii) $w.\text{dg } A \leq 1$;
- (iii) $w.\text{dh}_A \lambda^\infty(P) \leq 1$;
- (iv) $\text{Tor}_1^A(\lambda^\infty(P), \lambda^\infty(P))$ хаусдорфово;
- (v) A ядерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ (iv) очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Используя раскручивающую резольвенту (4.5), нетрудно видеть, что для любых $X \in \text{mod-}A$ и $Y \in A\text{-mod}$ пространства $\text{Tor}_i^A(X, Y)$ суть гомологии комплекса

$$\dots \leftarrow (X \widehat{\otimes} Y_{\Pi}) \oplus (\Pi X \widehat{\otimes} Y) \xleftarrow{\Delta_{XY}} \Pi X \widehat{\otimes} Y_{\Pi} \leftarrow 0,$$

где $\Pi X \widehat{\otimes} Y_{\Pi}$ стоит в степени 2, а отображение Δ_{XY} задается формулой

$$\Delta_{XY} \left(\left(x \underset{A}{\otimes} a \right) \otimes \left(b \underset{A}{\otimes} y \right) \right) = \left(xa \otimes \left(b \underset{A}{\otimes} y \right) \right), \left(x \underset{A}{\otimes} a \right) \otimes by.$$

В частности, $\text{Tor}_1^A(X, Y)$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда Δ_{XY} имеет замкнутый образ. В силу [7; лемма 4.1] при $X = Y = \lambda^{\infty}(P)$ отображение Δ_{XY} превращается в (6.9). Отметим, что (6.9) всегда инъективно, поэтому его топологическая инъективность эквивалентна замкнутости образа в силу теоремы Банаха. Применяя лемму 6.9, получаем, что A ядрна.

(v) $\Rightarrow$ (i). Пусть X — A -бимодуль Фреше. В силу предложения 4.8, (iii) достаточно доказать, что отображение Δ_X , задаваемое формулой (4.3), топологически инъективно. Поскольку A биплоская, имеем $P \sim P^2$ в силу теоремы 5.2, поэтому применимы лемма 6.7 и замечание 6.8. В дальнейшем мы будем использовать обозначения, введенные в формулировке леммы 6.7 и в замечании 6.8.

Зафиксируем произвольные $p \in P$, $\nu \in \Lambda$ и подберем $q \in P$, $\mu \in \Lambda$ и $C_1 > 0$ так, чтобы $\|a \cdot x\|_{\nu} \leq C_1 \|a\|_q \|x\|_{\mu}$ и $\|x \cdot a\|_{\nu} \leq C_1 \|a\|_q \|x\|_{\mu}$; при этом можем считать, что $q \geq p$. Пользуясь тем, что $P \sim P^2$, найдем такие $r, s \in P$ и $C_2 > 0$, что $q^2 \leq C_2 r$, $r^2 \leq C_2 s$ и $q \leq r \leq s$. Возьмем произвольный элемент $x = (x_{ij}) \in \Pi X_{\Pi}$ (см. (6.4)) и запишем $\Delta_X(x)$ в виде (y, z) (см. (6.6)). Отметим, что $x_{ij} = e_i y_j = z_i e_j$ для любых $i, j \in I$. Поэтому для любых $i, j \in I$ таких, что $p_i p_j \neq 0$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|x_{ij}\|_{\nu} p_i p_j &= \left\| \frac{r_j}{r_i + r_j} e_i y_j + \frac{r_i}{r_i + r_j} z_i e_j \right\|_{\nu} p_i p_j \\ &\leq C_1 \left(\frac{r_j}{r_i + r_j} q_i \|y_j\|_{\mu} + \frac{r_i}{r_i + r_j} q_j \|z_i\|_{\mu} \right) p_i p_j \\ &\leq C_1 C_2 \left(\frac{r_j p_j r_i}{r_i + r_j} \|y_j\|_{\mu} + \frac{r_i p_i r_j}{r_i + r_j} \|z_i\|_{\mu} \right) \\ &\leq C_1 C_2^2 (\|y_j\|_{\mu} s_j + \|z_i\|_{\mu} s_i) \leq C (\|y\|_{s, \mu}^{\infty} + \|z\|_{s, \mu}^{\infty}), \end{aligned}$$

где $C = C_1 C_2^2$. Отсюда окончательно получаем

$$\|x\|_{p, \nu}^{\infty} \leq C (\|y\|_{s, \mu}^{\infty} + \|z\|_{s, \mu}^{\infty}).$$

Следовательно, отображение Δ_X топологически инъективно. Применяя предложение 4.8, (iii), получаем требуемую оценку $\text{w. db } A \leq 1$.

Конкретные примеры алгебр Кёте, для которых указанные в (i)–(iii) размерности равны 0 или 1, будут приведены ниже (см. примеры 6.13 и 7.7; см. также теорему 7.9).

Следующее предложение дает несколько эквивалентных характеристик алгебр Кёте (слабой) глобальной размерности нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. Пусть $A = \lambda(P)$ – алгебра Кёте, $\mathbb{C} = A_+/A$ – одномерный тривиальный A -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) A унитарна;
- (ii) $\sum_i p_i < \infty$ для всех $p \in P$;
- (iii) $\text{db } A = 0$;
- (iv) $\text{dg } A = 0$;
- (v) $\text{dh}_A \mathbb{C} = 0$.

Если вдобавок A метризуема, то предыдущие условия эквивалентны следующим:

- (vi) $w.\text{db } A = 0$;
- (vii) $w.\text{dg } A = 0$;
- (viii) $w.\text{dh}_A \mathbb{C} = 0$ и A ядерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) очевидно.

(i) $\Leftrightarrow$ (v) – частный случай предложения 7.1.29 из [23].

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Зафиксируем $p \in P$. Из условия (ii), эквивалентного (i), следует, что для всех $i \in I$, кроме конечного их числа, справедливо неравенство $p_i \leq 1$. Поэтому для тех же $i \in I$ имеем $p_i^2 \leq p_i$. Следовательно, $P^2 \prec P$. Применяя теорему 5.2, видим, что A бипроективна. Но для бипроективных алгебр условия (i) и (iii) эквивалентны (см. [14; теорема IV.5.8]).

Итак, эквивалентность условий (i)–(v) доказана. Предположим теперь, что A метризуема.

(iii) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) очевидно с учетом предложения 4.7.

(vii) $\Rightarrow$ (viii). То, что $w.\text{dh}_A \mathbb{C} = 0$, очевидным образом следует из (vii). Для доказательства ядерности A заметим, что из (vii) и теоремы 5.2 следует, что A бипроективна. Поэтому, применяя теорему 6.10 и учитывая (vii), заключаем, что A ядерна.

(viii) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что в множестве Кёте P существует неограниченная функция p . Тогда для некоторого бесконечного подмножества $J \subset I$ имеем $p_i \geq 1$ для всех $i \in J$. Следовательно, существует непрерывный гомоморфизм из A в $B = \ell^1(J)$, сопоставляющий каждой функции из A ее ограничение на J . Согласно предложению 3.10 модуль $B_+ \hat{\otimes}_A \mathbb{C}$ плоский в $B\text{-mod}(\text{Fr})$. Применяя предложение 3.1, получаем топологические изоморфизмы

$$B_+ \hat{\otimes}_A \mathbb{C} \cong B_+ / \overline{B_+ \cdot A} = B_+ / B.$$

Отсюда с учетом [14; теорема VII.1.20] получаем, что алгебра $B = \ell^1(J)$ обладает ограниченной аппроксимативной единицей. Полученное противоречие показывает, что все функции $p \in P$ ограничены. Пользуясь ядерностью A и применяя критерий Гротендика–Пича (см. §2), получаем, что $\sum_i p_i < \infty$ для всех $p \in P$.

СЛЕДСТВИЕ 6.12. Аменабельная метризуемая алгебра Кёте $\lambda(P)$ стягиваема.

ПРИМЕР 6.13. Алгебра $\Lambda_1(\alpha)$ удовлетворяет эквивалентным условиям предложения 6.11 тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)/\alpha_n = 0$ (см., например, [25; 29.6]). В частности, алгебра $\mathcal{H}(\mathbb{D}_1^d)$ стягиваема.

§ 7. Сравнение биразмерности и слабой биразмерности библиоских алгебр Кёте

Естественно поинтересоваться, справедлив ли аналог теоремы 6.10 для “сильных” (т.е. проективных) гомологических размерностей. В частности, верно ли, что для ядерной бипроективной алгебры Кёте $\lambda(P)$ имеет место оценка $\text{db } \lambda(P) \leq 1$? В этом параграфе мы сначала приведем некоторые результаты из [7], [8] к виду, более удобному для использования, а затем построим пример, показывающий, что в общем случае ответ на поставленный вопрос отрицателен.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Для удобства дальнейших рассуждений примем следующее соглашение относительно операций с символом $\infty = +\infty$. А именно, будем считать, что $a \leq \infty$ и $a/0 = \infty$ для любого $a \geq 0$. Удобство такого соглашения заключается в том, что для любых $a, b, c \geq 0$ неравенства $a \geq bc$ и $a/b \geq c$ оказываются эквивалентными.

Следующий результат представляет собой модификацию теоремы 4.7 из [7].

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $\lambda(P)$ – бипроективная алгебра Кёте. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\text{db } \lambda(P) \leq 1$;
- (ii) $\lambda(P)$ ядерна, и существуют матрицы комплексных чисел $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j \in I}$ и $\beta = (\beta_{ij})_{i,j \in I}$, удовлетворяющие условиям:
 - 1) $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = 1, i, j \in I$;
 - 2) $\forall p \in P \exists C > 0 \exists q \in P \forall j \in I \sup_i |\alpha_{ij}| p_i p_j \leq C q_j$;
 - 3) $\forall p \in P \exists C > 0 \exists q \in P \forall i \in I \sup_j |\beta_{ij}| p_j p_i \leq C q_i$;
- (iii) $\lambda(P)$ ядерна, и существуют матрицы неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_{ij})_{i,j \in I}$ и $\beta = (\beta_{ij})_{i,j \in I}$, удовлетворяющие тем же условиям;
- (iv) $\lambda(P)$ ядерна, и существуют отображения $\varphi: P \rightarrow P$ и $C: P \rightarrow [0, \infty)$ такие, что

$$C_p \frac{\varphi(p)_j}{p_i p_j} + C_q \frac{\varphi(q)_i}{q_i q_j} \geq 1, \quad p, q \in P, \quad i, j \in I. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) доказано в [7; теорема 4.7 и следствие 4.4].

(iii) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Для каждого $i, j \in I$ положим

$$\alpha'_{ij} = \frac{|\alpha_{ij}|}{|\alpha_{ij}| + |\beta_{ij}|}, \quad \beta'_{ij} = \frac{|\beta_{ij}|}{|\alpha_{ij}| + |\beta_{ij}|}.$$

Из условия 1) следует, что $|\alpha_{ij}| + |\beta_{ij}| \geq 1$, поэтому $\alpha'_{ij} \leq |\alpha_{ij}|$ и $\beta'_{ij} \leq |\beta_{ij}|$ для всех $i, j \in I$. Поэтому из выполнения условий 2), 3) для α, β следует выполнение тех же условий для α', β' .

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть матрицы α, β удовлетворяют условию (iii). Тогда существуют такие функции $\varphi: P \rightarrow P$ и $C: P \rightarrow [0, \infty)$, что

$$\alpha_{ij} p_i p_j \leq C_p \varphi(p)_j, \quad p \in P, \quad i, j \in I; \quad (7.2)$$

$$(1 - \alpha_{ij}) q_i q_j \leq C_q \varphi(q)_i, \quad q \in P, \quad i, j \in I. \quad (7.3)$$

Домножая (7.2) на $q_i q_j$, а (7.3) на $p_i p_j$ и складывая, получаем неравенство

$$p_i p_j q_i q_j \leq C_p \varphi(p)_j q_i q_j + C_q \varphi(q)_i p_i p_j. \quad (7.4)$$

С учетом замечания 7.1 неравенства (7.4) и (7.1) эквивалентны. Тем самым, условие (iv) выполнено.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Перепишем соотношение (7.1) в виде

$$1 - C_q \frac{\varphi(q)_i}{q_i q_j} \leq C_p \frac{\varphi(p)_j}{p_i p_j}, \quad p, q \in P, \quad i, j \in I, \quad (7.5)$$

и положим

$$\alpha_{ij} = \min \left\{ 1, \inf_{p \in P} C_p \frac{\varphi(p)_j}{p_i p_j} \right\}, \quad i, j \in I.$$

Очевидно, справедливо неравенство (7.2), а из (7.5) следует, что справедливо и (7.3). Следовательно, матрицы α и $\beta = (1 - \alpha_{ij})_{i,j \in I}$ удовлетворяют условию (iii).

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть $\lambda(P)$ – бипроективная алгебра Кёте. Рассмотрим следующие утверждения:

- (i) $\text{db } \lambda(P) \leq 1$;
- (ii) $\lambda(P)$ ядрна, и существуют такие отображения

$$\varphi: P \rightarrow P \quad \text{и} \quad C: P \rightarrow [0, \infty),$$

что

$$C_p \frac{\varphi(p)_j}{p_i} + C_q \frac{\varphi(q)_i}{q_j} \geq 1 \quad p, q \in P, \quad i, j \in I. \quad (7.6)$$

Тогда (ii) $\Rightarrow$ (i). Если к тому же $p_i \geq 1$ для всех $p \in P$ и $i \in I$, то (i) $\Rightarrow$ (ii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) $\Rightarrow$ (i). Учитывая замечание 7.1, перепишем соотношение (7.6) в виде

$$p_i q_j \leq C_p \varphi(p)_j q_j + C_q \varphi(q)_i p_i. \quad (7.7)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\varphi(p) \geq p$ для всех $p \in P$. Для каждого $p \in P$ выберем $D_p > 0$ и $\psi(p) \in P$ так, чтобы $\varphi(p)^2 \leq D_p \psi(p)$. Положим $C'_p = C_p D_p$. Домножая (7.7) на $p_j q_i$, получаем оценки

$$p_i p_j q_i q_j \leq C_p \varphi(p)_j p_j q_i q_j + C_q \varphi(q)_i q_i p_i p_j \leq C'_p \psi(p)_j q_i q_j + C'_q \psi(q)_i p_i p_j,$$

или, эквивалентно (см. замечание 7.1),

$$C'_p \frac{\psi(p)_j}{p_i p_j} + C'_q \frac{\psi(q)_i}{q_i q_j} \geq 1.$$

Используя теорему 7.2, получаем требуемую оценку $\text{db } \lambda(P) \leq 1$.

Если $p_i \geq 1$ для всех $p \in P$ и $i \in I$, то соотношение (7.6) является, очевидно, более слабым, чем (7.1). Поэтому импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует непосредственно из теоремы 7.2.

Разумеется, по явному виду множества Кёте P иногда бывает довольно трудно судить, существуют или нет матрицы α и β и/или отображения φ и C , удовлетворяющие условиям теоремы 7.2 или следствия 7.3. Сформулируем более простое условие, достаточное для выполнения неравенства $\text{db } \lambda(P) \leq 1$. Предположим, что множество Кёте P состоит из последовательностей (т.е. что $I = \mathbb{N}$), и введем в рассмотрение множество Кёте

$$\tilde{P} = \{\tilde{p} : p \in P\}, \quad \text{где} \quad \tilde{p}_n = \max_{i \leq n} p_i, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.8)$$

Ясно, что $P \prec \tilde{P}$; поэтому если $\lambda(P)$ – алгебра Кёте (т.е. если $P \prec P^2$), то $P \prec \tilde{P} \cdot P$.

Следующий результат обобщает теорему 4.9 из [7] и теорему 3.12 из [8].

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $\lambda(\mathbb{N}, P)$ – бипроективная алгебра Кёте. Предположим, что $\tilde{P} \cdot P \prec P$. Тогда неравенство $\text{db } \lambda(\mathbb{N}, P) \leq 1$ эквивалентно ядерности $\lambda(\mathbb{N}, P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 4.2 из [7] неравенство $\text{db } \lambda(\mathbb{N}, P) \leq 1$ влечет за собой ядерность $\lambda(\mathbb{N}, P)$. Обратно, предположим, что $\lambda(\mathbb{N}, P)$ ядерна. Зафиксируем $p \in P$ и, пользуясь условием $\tilde{P} \cdot P \prec P$, выберем $C_p > 0$ и $\varphi(p) \in P$ так, чтобы $\tilde{p} \cdot p \leq C_p \varphi(p)$. Тогда при $i \leq j$ справедливы неравенства

$$p_i p_j q_i q_j \leq \tilde{p}_j p_j q_i q_j \leq C_p \varphi(p)_j q_i q_j,$$

а при $i \geq j$ – неравенства

$$p_i p_j q_i q_j \leq p_i p_j q_i \tilde{q}_i \leq C_q \varphi(q)_i p_i p_j.$$

Следовательно, для любых $i, j \in \mathbb{N}$ имеет место оценка (7.4), эквивалентная (7.1) (см. замечание 7.1). Доказательство завершается применением теоремы 7.2.

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Пусть $\lambda(\mathbb{N}, P)$ – бипроективная алгебра Кёте. Предположим, что $P \sim \tilde{P}$. Тогда неравенство $\text{db } \lambda(\mathbb{N}, P) \leq 1$ эквивалентно ядерности $\lambda(\mathbb{N}, P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $P \sim \tilde{P}$, то из теоремы 5.2 получаем, что

$$\tilde{P} \cdot P \sim P^2 \sim P,$$

поэтому P удовлетворяет условиям теоремы 7.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Легко видеть, что для множеств Кёте, элементы которых удовлетворяют неравенству $p_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$, из условия $\tilde{P} \cdot P \prec P$ следует, что $\tilde{P} \sim P$. Поэтому для таких множеств Кёте предположения теоремы 7.4 и следствия 7.5 эквивалентны.

ПРИМЕР 7.7. Для алгебр $\Lambda_\infty(\alpha)$ получаем следующие равенства:

$$\text{db } \Lambda_\infty(\alpha) = \text{w. db } \Lambda_\infty(\alpha) = \text{dg } \Lambda_\infty(\alpha) = \text{w. dg } \Lambda_\infty(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Lambda_\infty(\alpha) \text{ ядерна,} \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, для алгебр s и $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ все вышеперечисленные размерности равны 1. Отметим в этой связи, что пространство $\Lambda_\infty(\alpha)$ ядерно тогда и только тогда, когда $\sup_n (\log n)/\alpha_n < \infty$ (см., например, [25; 29.6]).

Перейдем к построению примера, показывающего, что в общем случае биразмерность бипроективной (или, эквивалентно, биплоской) ядерной метризуемой алгебры Кёте не обязательно равна единице. С этой целью сформулируем сначала следующую лемму, вытекающую непосредственно из следствия 7.3.

ЛЕММА 7.8. Пусть $P = \{p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ – счетное множество Кёте, удовлетворяющее условию $P \sim P^2$ (так что $\lambda(P)$ – бипроективная метризуемая алгебра Кёте). Предположим, что $p_i^{(n)} \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $i \in I$ (так что $\lambda(P)$ – алгебра Аренса–Майкла) и что для каждого $m \in \mathbb{N}$ в множестве $I \times I$ найдется последовательность (i_s, j_s) , $s \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p_{j_s}^{(m)}}{p_{i_s}^{(1)}} = 0, \quad (7.9)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p_{i_s}^{(n)}}{p_{j_s}^{(m+1)}} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.10)$$

Тогда $\text{db } \lambda(P) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из бипроективности $\lambda(P)$ следует, что $\text{db } \lambda(P) \leq 2$ (см. [14; теорема V.2.28]). Предположим, что $\text{db } \lambda(P) \leq 1$. Тогда в силу следствия 7.3 существуют отображения $\varphi: P \rightarrow P$ и $C: P \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющие условию (7.6). В дальнейшем вместо $C_{p^{(n)}}$ будем писать C_n . Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $p^{(m)} \geq \varphi(p^{(1)})$, и зафиксируем последовательность (i_s, j_s) , $s \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую условиям (7.9) и (7.10). Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $p^{(n)} \geq \varphi(p^{(m+1)})$. Тогда из (7.6) следует, что

$$C_1 \frac{p_j^{(m)}}{p_i^{(1)}} + C_{m+1} \frac{p_i^{(n)}}{p_j^{(m+1)}} \geq 1, \quad i, j \in I.$$

Это, очевидно, противоречит (7.9) и (7.10). Полученное противоречие показывает, что $\text{db } \lambda(P) = 2$, как и требовалось.

ТЕОРЕМА 7.9. *Существует ядерная метризуемая бипроективная алгебра Кёте $\lambda(P)$ такая, что $w.\text{db } \lambda(P) = 1$, но $\text{db } \lambda(P) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим функцию $p^{(k)}$ на I формулой

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 2^{(kj)^i} (i+j)^k, & i \leq k, \\ (i+j)^k, & i > k. \end{cases}$$

Рассмотрим множество Кёте $P = \{p^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Поскольку $p_{ij}^{(k)} \geq 1$ для всех i, j, k , то справедливо соотношение $P^2 \prec P$, откуда следует, что $\lambda(P) = \lambda(I, P)$ – алгебра Кёте. Очевидно, $\lambda(P)$ метризуема и является, кроме того, алгеброй Аренса–Майкла (см. § 2).

Легко видеть, что $(p_{ij}^{(k)})^2 \leq p_{ij}^{(2k)}$ для всех $i, j, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lambda(P)$ бипроективна по теореме 5.2. Далее, для всех $i, j, k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{p_{ij}^{(k)}}{p_{ij}^{(k+3)}} \leq \frac{1}{(i+j)^3}.$$

Поскольку ряд $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} (i+j)^{-3}$ сходится, то из критерия Гротендика–Пича (см. § 2) следует, что $\lambda(P)$ ядерна.

Покажем, что $\lambda(P)$ удовлетворяет условиям леммы 7.8. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и определим последовательность $(i_s, j_s)_{s \in \mathbb{N}}$ в множестве $I \times I$ формулами $i_s = (1, s)$ и $j_s = (m+1, s)$. Тогда

$$\frac{p_{j_s}^{(m)}}{p_{i_s}^{(1)}} = \frac{p_{m+1, s}^{(m)}}{p_{1s}^{(1)}} = \frac{(m+1+s)^m}{2^s(1+s)} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

Следовательно, условие (7.9) выполнено. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{p_{i_s}^{(n)}}{p_{j_s}^{(m+1)}} &= \frac{p_{1s}^{(n)}}{p_{m+1, s}^{(m+1)}} = \frac{2^{ns}(1+s)^n}{2^{((m+1)s)^{m+1}}(m+1+s)^{m+1}} \\ &\leq \frac{2^{ns}}{2^{s^2}} \frac{(1+s)^n}{(m+1+s)^{m+1}} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, условие (7.10) также выполнено. Применяя лемму 7.8, получаем равенство $\text{db } \lambda(P) = 2$. С другой стороны, из ядерности $\lambda(P)$, теоремы 6.10 и предложения 6.11 следует, что $w.\text{db } \lambda(P) = 1$.

§ 8. Неаменабельные алгебры Фреше, гомологии Хохшильда которых тривиальны в положительных степенях

Напомним (см. § 2), что алгебра Фреше A аменабельна тогда и только тогда, когда для любого A -бимодуля Фреше X выполнено условие $\mathcal{H}_n(A, X) = 0$ при $n > 0$, а пространство $\mathcal{H}_0(A, X)$ хаусдорфово. Для банаховых алгебр вопрос о том, является ли условие хаусдорфовости $\mathcal{H}_0(A, X)$ существенным, до сих

пор открыт (см. [20; проблема 10]). В этом параграфе мы дадим ответ на этот вопрос в случае алгебр Фреше, а именно покажем, что многие из алгебр Кёте, рассматривавшихся в предыдущих параграфах, не будучи аменабельными, удовлетворяют условию $\mathcal{H}_n(A, X) = 0$ для всех $n > 0$ и всех A -бимодулей Фреше X .

ЛЕММА 8.1. Пусть E, F – топологические векторные пространства, и пусть $(T_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – равностепенно непрерывная направленность в $\mathcal{L}(E, F)$. Предположим, что $T_\nu(x) \rightarrow 0$ для каждого вектора x из некоторого тотального в E множества. Тогда $T_\nu(x) \rightarrow 0$ для каждого $x \in E$.

Доказательство стандартно и поэтому опускается.

ЛЕММА 8.2. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, X – правый A - $\widehat{\otimes}$ -модуль, Y, Z – левые A - $\widehat{\otimes}$ -модули. Пусть, далее, $M \subset {}_A\mathbf{h}(Y, Z)$ – равностепенно непрерывное множество. Тогда множество

$$1_X \otimes_A M = \{1_X \otimes_A \varphi : \varphi \in M\} \subset \mathcal{L}(X \widehat{\otimes}_A Y, X \widehat{\otimes}_A Z)$$

равностепенно непрерывно.

Доказательство следует непосредственно из определения топологии в пространстве $X \widehat{\otimes}_A Y$.

Пусть A – топологическая алгебра, $(e_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – правая аппроксимативная единица (а.е.) в A . Будем говорить, что $(e_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ равностепенно непрерывна, если семейство операторов умножения $\{R_{e_\nu}\}_{\nu \in \Lambda}$ в A равностепенно непрерывно. Отметим, что для банаховых алгебр это определение совпадает с определением операторно ограниченной а.е. из [14; 0.1.4]. Левые равностепенно непрерывные а.е. определяются аналогично.

Следующая лемма обобщает предложение II.3.11 из [14].

ЛЕММА 8.3. Пусть A – $\widehat{\otimes}$ -алгебра, $I \subset A$ – замкнутый левый идеал, обладающий равностепенно непрерывной правой а.е. Тогда для каждого правого A - $\widehat{\otimes}$ -модуля X каноническое отображение

$$\sigma: X \widehat{\otimes}_A I \rightarrow X, \quad x \otimes_A a \mapsto x \cdot a,$$

инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(e_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – равностепенно непрерывная правая а.е. в I . Для каждого $\nu \in \Lambda$ рассмотрим оператор

$$S_\nu = 1_X \otimes_A R_{e_\nu}: X \widehat{\otimes}_A I \rightarrow X \widehat{\otimes}_A I.$$

Легко видеть, что $S_\nu(u) = \sigma(u) \otimes_A e_\nu$ для каждого $u \in X \widehat{\otimes}_A I$. Поэтому доказательство будет завершено, если мы покажем, что $S_\nu(u) \rightarrow u$ для любого $u \in X \widehat{\otimes}_A I$. Используя леммы 8.2 и 8.1, мы видим, что достаточно доказать это для элементов вида $u = x \otimes_A a$, где $x \in X, a \in I$. Но для таких элементов это утверждение очевидно, поскольку $(e_\nu)_{\nu \in \Lambda}$ – правая а.е. в I . Тем самым, предложение доказано.

Пусть $A - \widehat{\otimes}$ -алгебра. Обозначим через $\varepsilon_A: A_+ \rightarrow \mathbb{C}$ единственный унитарный гомоморфизм, обращающийся в нуль на A . Положим

$$J_A = \text{Ker}(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_A: A^e = A_+ \widehat{\otimes} A_+^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{C}).$$

Ясно, что J_A – замкнутый двусторонний идеал в A^e коразмерности 1. Отметим, что

$$J_A = A \widehat{\otimes} A_+ + A_+ \widehat{\otimes} A = (A \otimes \mathbb{C}1_+) \oplus (\mathbb{C}1_+ \otimes A) \oplus (A \widehat{\otimes} A). \quad (8.1)$$

Пусть $\{\|\cdot\|_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – направленное семейство полунорм, задающее топологию на A . Проективное тензорное произведение полунормы $\|\cdot\|_\lambda$ на себя мы будем обозначать тем же символом $\|\cdot\|_\lambda$ (это не вызовет путаницы). Продолжим эту полунорму на J_A , полагая

$$\|a \otimes 1_+ + 1_+ \otimes b + u\|_\lambda = \|a\|_\lambda + \|b\|_\lambda + \|u\|_\lambda \quad (a, b \in A, \quad u \in A \widehat{\otimes} A). \quad (8.2)$$

Из (8.1) легко следует, что топология на J_A задается семейством полунорм (8.2).

ЛЕММА 8.4. Пусть $A = \lambda^0(P)$ – алгебра Кёте. Предположим, что множество Кёте P удовлетворяет условию $\tilde{P} \cdot P \prec P$ (см. (7.8) и теорему 7.4). Тогда в J_A имеется равностепенно непрерывная а.е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $h_n = \sum_{i=1}^n e_i \in A$. Легко видеть, что $\|ah_n\|_p^\infty \leq \|a\|_p^\infty$ для каждого $a \in A$. Следовательно,

$$\|v \cdot h_n\|_p^\infty \leq \|v\|_p^\infty, \quad \|h_n \cdot v\|_p^\infty \leq \|v\|_p^\infty \quad (v \in A \widehat{\otimes} A). \quad (8.3)$$

Определим элемент $u_n \in J_A$ формулой

$$u_n = h_n \otimes 1_+ + 1_+ \otimes h_n - h_n \otimes h_n$$

и покажем, что (u_n) – искомая равностепенно непрерывная а.е. в J_A . Если $v \in A \widehat{\otimes} A$, то из (8.3) следует, что

$$\|vu_n\|_p^\infty \leq 3\|v\|_p^\infty \quad (v \in A \widehat{\otimes} A). \quad (8.4)$$

Пусть теперь элемент $v \in J_A$ имеет вид $v = a \otimes 1_+$ для некоторого $a \in A$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(a \otimes 1_+)u_n\|_p^\infty &= \|ah_n \otimes 1_+ + a \otimes h_n - ah_n \otimes h_n\|_p^\infty \\ &\leq \|a\|_p^\infty + \|a - ah_n\|_p^\infty \|h_n\|_p^\infty. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Подберем $q \in P$ и $C > 0$ так, чтобы $\tilde{p} \cdot p \leq Cq$. Тогда

$$\|a - ah_n\|_p^\infty \|h_n\|_p^\infty = \sup_{i>n} |a_i| p_i \tilde{p}_n \leq \sup_{i>n} |a_i| p_i \tilde{p}_i \leq C \sup_{i>n} |a_i| q_i \leq C \|a\|_q^\infty.$$

Отсюда вместе с (8.5) следует, что

$$\|(a \otimes 1_+)u_n\|_p^\infty \leq \|a\|_p^\infty + C \|a\|_q^\infty \quad (a \in A). \quad (8.6)$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\|(1_+ \otimes a)u_n\|_p^\infty \leq \|a\|_p^\infty + C \|a\|_q^\infty \quad (a \in A). \quad (8.7)$$

Из оценок (8.4), (8.6) и (8.7) вместе с (8.1) следует, что семейство операторов умножения $\{R_{u_n}\}$ в J_A равностепенно непрерывно.

Докажем теперь, что (u_n) – а.е. в J_A . С учетом леммы 8.1 и только что доказанной равностепенной непрерывности достаточно проверить, что $vu_n \rightarrow v$ для элементов $v \in J_A$ каждого из следующих трех типов:

$$v = e_i \otimes 1_+, \quad v = 1_+ \otimes e_j, \quad v = e_i \otimes e_j, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Но для таких элементов из явного вида u_n легко следует, что $vu_n = v$ при $n \geq \max\{i, j\}$. Тем самым, предложение доказано.

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть A – биплоская алгебра Фреше. Предположим, что $w.\text{db } A \leq 1$ и что в J_A имеется равностепенно непрерывная правая а.е. Тогда $\mathcal{H}_n(A, X) = 0$ для любого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и любого $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 2.4 утверждение теоремы достаточно доказать для $n = 1$.

Рассмотрим допустимую последовательность

$$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow A_+ \leftarrow A \leftarrow 0 \quad (8.8)$$

в $A^e\text{-unmod}(\text{Fr})$. Выписывая ассоциированную с ней длинную точную последовательность производных функторов $\text{Tor}_n^{A^e}(X, \cdot)$ и пользуясь биплоскостью A , заключаем, что $\mathcal{H}_1(A, X)$ инъективно отображается в $\text{Tor}_1^{A^e}(X, \mathbb{C})$. Поэтому достаточно показать, что $\text{Tor}_1^{A^e}(X, \mathbb{C}) = 0$.

Применяя предложение 4.4 к последовательности (8.8) и пользуясь биплоскостью A , заключаем, что либо $w.\text{dh}_{A^e} \mathbb{C} = w.\text{dh}_{A^e} A + 1 = 1$, либо $w.\text{dh}_{A^e} \mathbb{C} = w.\text{dh}_{A^e} A_+ = w.\text{db } A \leq 1$. Следовательно, в обоих случаях $w.\text{dh}_{A^e} \mathbb{C} \leq 1$. Поэтому, рассматривая допустимую последовательность

$$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow A^e \leftarrow J_A \leftarrow 0$$

в $A^e\text{-unmod}(\text{Fr})$ и пользуясь предложением 4.1, (vi) и определением 4.3, мы видим, что J_A – плоский A -бимодуль Фреше. Следовательно,

$$\text{Tor}_1^{A^e}(X, \mathbb{C}) = \text{Ker} \left(X \hat{\otimes}_{A^e} J_A \rightarrow X \hat{\otimes}_{A^e} A^e = X \right).$$

Но поскольку в J_A имеется равностепенно непрерывная правая а.е., из леммы 8.3 следует, что последнее пространство равно нулю. С учетом сказанного выше это завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть $A = \lambda(P)$ – ядерная метризуемая алгебра Кёте. Предположим, что $p_i \geq 1$ для всех $p \in P$ и всех $i \in I$ и что множество Кёте P удовлетворяет условиям $\tilde{P} \sim P \sim P^2$ (см. (7.8) и следствие 7.5). Тогда A не аменабельна, но $\mathcal{H}_n(A, X) = 0$ для любого $X \in A\text{-mod-}A(\text{Fr})$ и любого $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия и из теорем 5.2 и 6.10 следует, что A биплоская и что $w.\text{db } A \leq 1$. Кроме того, $A = \lambda^0(P)$ в силу ядерности A и критерия

Гротендика–Пича (см. § 2). Применяя лемму 8.4, видим, что в J_A имеется равномерно непрерывная правая а.е. Поскольку $p_i \geq 1$ для всех $p \in P$ и всех $i \in I$, то условие (ii) предложения 6.11 нарушается и, следовательно, A не аменабельна. Для завершения доказательства остается применить теорему 8.5.

СЛЕДСТВИЕ 8.7. *Ядерные алгебры Кёте вида $\Lambda_\infty(\alpha)$ не аменабельны, но*

$$\mathcal{H}_n(\Lambda_\infty(\alpha), X) = 0 \quad \text{для любого } X \in \Lambda_\infty(\alpha)\text{-mod-}\Lambda_\infty(\alpha)(\text{Fr}) \text{ и любого } n \geq 1.$$

В частности, это верно для алгебры с быстро убывающих последовательностей и алгебры $\mathcal{H}(\mathbb{C}^d)$ целых функций с умножением Адамара.

Автор благодарен А. Я. Хелемскому за внимание к работе.

Список литературы

- [1] D. Vogt, “Sequence space representations of spaces of test functions and distributions”, *Functional analysis, holomorphy, and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1979), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **83**, Dekker, New York, 1983, 405–443.
- [2] P. Domański, D. Vogt, “A splitting theorem for the space of smooth functions”, *J. Funct. Anal.*, **153**:2 (1998), 203–248.
- [3] P. Domański, D. Vogt, “Distributional complexes split for positive dimensions”, *J. Reine Angew. Math.*, **522** (2000), 63–79.
- [4] M. Langenbruch, “Complemented kernels of partial differential operators in weighted spaces of (generalized) functions”, *Studia Math.*, **89**:1 (1988), 37–63.
- [5] M. Langenbruch, “Tame right inverses for partial differential equations”, *Advances in the theory of Fréchet spaces* (Istanbul, Turkey, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **287**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, 79–114.
- [6] S. J. Bhatt, G. M. Deheri, “Köthe spaces and topological algebra with bases”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **100**:3 (1990), 259–273.
- [7] А. Ю. Пирковский, “Бипроективные топологические алгебры гомологической биразмерности 1”, *Функциональный анализ–8*, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **8**, 2001; англ. пер.: A. Yu. Pirkovskii, “Biprojective topological algebras of homological bidimension 1”, *J. Math. Sci. (New York)*, **111**:2 (2002), 3476–3495.
- [8] A. Yu. Pirkovskii, “Homological bidimension of biprojective topological algebras and nuclearity”, *Proceedings of the 3rd international conference on topological algebra and applications* (University of Oulu, Finland, 2001), Acta Univ. Oulu Ser. A Sci. Rerum Natur., **408**, Oulu Univ. Press, Oulu, 2004, 179–196.
- [9] А. Я. Хелемский, “Плоские банаховы модули и аменабельные алгебры”, *Тр. ММО*, **47**, 1984, 179–218; англ. пер.: A. Ya. Khelemskij, “Flat Banach modules and amenable algebras”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1985, 199–244.
- [10] А. Я. Хелемский, “Об одном методе вычисления и оценки глобальной гомологической размерности банаховых алгебр”, *Матем. сб.*, **87(129)**:1 (1972), 122–135; англ. пер.: A. J. Helemskii, “On a method for calculating and estimating the global homological dimension of Banach algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **16**:1 (1972), 125–138.
- [11] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **127**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.
- [12] Ю. В. Селиванов, “Когомологии биплоских банаховых алгебр с коэффициентами в дуальных бимодулях”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:4 (1995), 84–87; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, “Cohomology of biflat Banach algebras with coefficients in dual bimodules”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:4 (1995), 289–291.

- [13] Yu. V. Selivanov, "Weak homological bidimension and its values in the class of biflat Banach algebras", *Extracta Math.*, **11**:2 (1996), 348–365.
- [14] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986; англ. пер.: А. Ya. Khelemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [15] Ю. В. Селиванов, "Бипроективные банаховы алгебры, их строение, когомологии и связь с ядерными операторами", *Функц. анализ и его прил.*, **10**:1 (1976), 89–90; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, "Biprojective Banach algebras, their structure, cohomologies, and connection with nuclear operators", *Funct. Anal. Appl.*, **10**:1 (1976), 78–79.
- [16] Yu. V. Selivanov, "Coretraction problems and homological properties of Banach algebras", *Topological homology*, Helemskii's Moscow seminar, Nova, Huntington, NY, 2000, 145–199.
- [17] А. Я. Хелемский, М. В. Шейнберг, "Об аменабельных банаховых алгебрах", *Функц. анализ и его прил.*, **13**:1 (1979), 42–48; англ. пер.: А. Ya. Khelemskii, M. V. Sheinberg, "Amenable Banach algebras", *Funct. Anal. Appl.*, **13**:1 (1979), 32–37.
- [18] Ю. В. Селиванов, *Когомологии банаховых и близких к ним алгебр*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, М., 2002.
- [19] О. С. Огнева, *Гомологические размерности некоторых алгебр основных и обобщенных функций на многообразиях*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, М., 1986.
- [20] А. Ya. Helemskii, "31 problems of the homology of the algebras of analysis", *Linear and complex analysis. Problem book 3. Part I*, Lecture Notes in Math., **1573**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 54–78.
- [21] J. L. Taylor, "Homology and cohomology for topological algebras", *Advances in Math.*, **9**:2 (1972), 137–182.
- [22] E. A. Michael, *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **11**, 1952.
- [23] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989; англ. пер.: А. Ya. Helemskii, *Banach and locally convex algebras*, Oxford Sci. Publ., Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1993.
- [24] А. Пич, *Ядерные локально выпуклые пространства*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Akademie, Berlin, 1965.
- [25] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxf. Grad. Texts Math., **2**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [26] K.-D. Bierstedt, R. G. Meise, W. H. Summers, "Köthe sets and Köthe sequence spaces", *Functional analysis, holomorphy and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1980), North-Holland Math. Stud., **71**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1982, 27–91.
- [27] A. Pietsch, "Zur Theorie der topologischen Tensorprodukte", *Math. Nachr.*, **25**:1 (1963), 19–30.
- [28] S. Rolewicz, "On spaces of holomorphic functions", *Studia Math.*, **21** (1962), 135–160.
- [29] H. Render, A. Sauer, "Algebras of holomorphic functions with Hadamard multiplication", *Studia Math.*, **118**:1 (1996), 77–100.
- [30] А. Ю. Пирковский, "К проблеме существования достаточного количества инъективных модулей Фреше над ненормируемыми алгебрами Фреше", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:4 (1998), 137–154; англ. пер.: А. Yu. Pirkovskii, "The problem of the existence of sufficiently many injective Frechet modules over non-normed Frechet algebras", *Izv. Math.*, **62**:4 (1998), 773–788.

- [31] A. Yu. Pirkovskii, “On Arens–Michael algebras which do not have non-zero injective $\widehat{\otimes}$ -modules”, *Studia Math.*, **133**:2 (1999), 163–174.
- [32] A. Yu. Pirkovskii, *Flat cyclic Fréchet modules, amenable Fréchet algebras, and approximate identities*, [arXiv: math/0610528](#).
- [33] А. Ю. Пирковский, *Функциональный анализ*–3, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Тематические обзоры, **48**, 1997; [англ. пер.: A. Yu. Pirkovskii, “On certain homological properties of Stein algebras”, *J. Math. Sci. \(New York\)*, **95**:6 \(1999\), 2690–2702.](#)
- [34] И. Букур, А. Деляну, *Введение в теорию категорий и функторов*, Мир, М., 1972; [пер. с англ.: I. Bucur, A. Deleanu, *Introduction to the theory of categories and functors*, Wiley, London–New York–Sydney, 1968.](#)
- [35] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; [пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York–London, 1966.](#)
- [36] А. Я. Хедемский, “Homology for the algebras of analysis”, *Handbook of algebra*, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, 151–274.
- [37] A. Yu. Pirkovskii, “Stably flat completions of universal enveloping algebras”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **441** (2006), 1–60.

А. Ю. Пирковский (A. Yu. Pirkovskii)
Российский университет дружбы народов, г. Москва
E-mail: pirkosha@sci.pfu.edu.ru

Поступила в редакцию
07.09.2007 и 06.11.2007