Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, Теоремы вложения в конструктивной теории приближений, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 9, 107–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:44:31

УДК 517.518.23+517.518.83

Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов

Теоремы вложения в конструктивной теории приближений

Получены необходимые и достаточные условия для справедливости теорем вложения различных функциональных классов. Главный результат работы – критерий вложения обобщенных классов Вейля–Никольского и обобщенных классов Липшица. При определении классов Вейля–Никольского используется понятие (λ, β) -производной, которое является обобщением производной в смысле Вейля. В качестве следствий получены оценки норм и модулей гладкости преобразованных рядов Фурье.

Библиография: 59 названий.

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Одной из основных задач конструктивной теории функций¹ является описание взаимосвязи между дифференциальными свойствами функций и их структурными и конструктивными характеристиками. Этот вопрос начал изучаться более столетия назад, и в большинстве случаев исследования проводились следующим образом: авторы рассматривали определенный функциональный класс и, исследуя свойства его элементов, получали теоремы вложения для рассматриваемого класса и других функциональных классов. В качестве исторических обзоров мы рекомендуем недавние статьи [2]–[4].

Ниже выпишем три результата, каждый из которых существенным образом повлиял на дальнейшие исследования и фактически послужил толчком для развития новых областей теории приближений:

$$(A) \quad f^{(r)} \in \text{Lip } \alpha \iff E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad r \in \mathbb{Z}_+;$$

$$(B) \quad f^{(r)} \in \text{Lip } \alpha \iff \omega_{r+1}\left(f, \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad r \in \mathbb{Z}_+;$$

$$(C) \quad f \in \text{Lip } \alpha \iff \tilde{f} \in \text{Lip } \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Критерий (A) был доказан² Д. Джексоном (см. [6]) и С. Б. Стечкиным (см. [7]) в части необходимости и С. Н. Бернштейном (см. [8], [9]) и Ш. Валле Пуссеном (см. [10]) в части достаточности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-00268 и № 08-01-00302), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2787.2008.1), Centre de Recerca Matemàtica и Scuola Normale Superiore.

¹Этот термин стал общеупотребительным после работы С. Н. Бернштейна [1; т. 2].

²В качестве подробного обзора этого вопроса до 30-х годов XX века см. [5].

Теоремы такого типа называются *прямыми и обратными теоремами теории приближений*. Прямые теоремы для L_p , $1 \leq p \leq \infty$ (см. [2], [3], [11]), записываются следующим образом:

$$E_n(f)_p \leq C(k, p) \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p, \quad k, n \in \mathbb{N}; \quad (1)$$

$$E_n(f)_p \leq \frac{C(k, r, p)}{n^r} \omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p, \quad k, n, r \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Обратные теоремы для L_p , $1 \leq p \leq \infty$ (см. [2], [3], [11]):

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C(k, p)}{n^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f)_p, \quad (3)$$

$$\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(k, r, p) \left(\frac{1}{n^k} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k+r-1} E_\nu(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)_p \right), \quad (4)$$

где $k, n \in \mathbb{N}$. Здесь и далее наилучшее приближение тригонометрическими полиномами $E_n(f)_p$ и модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$ определяются следующим образом:

$$E_n(f)_p = \min(\|f - T\|_p : T \in \mathbf{T}_n), \quad \mathbf{T}_n = \text{span}\{\cos mx, \sin mx : |m| \leq n\};$$

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^k f(x)\|_p, \quad (5)$$

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-1}(\Delta_h f(x)), \quad \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

В случае $1 < p < \infty$ можно записать (см. [3], [11], [12]) следующее усиление оценок (1) и (3):

$$\begin{aligned} \frac{C(k, p)}{n^k} \left(\sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k\tau-1} E_\nu(f)_p^\tau \right)^{1/\tau} &\leq \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \\ &\leq \frac{C(k, p)}{n^k} \left(\sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{k\theta-1} E_\nu(f)_p^\theta \right)^{1/\theta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k, n \in \mathbb{N}$, $\theta = \min(2, p)$, $\tau = \max(2, p)$.

В связи с оценками (2) и (4) отметим, что изучение вопроса о существовании r -производной функции f , принадлежащей данному функциональному пространству, было начато Бернштейном (см. [8]). Он показал, что условие $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)_\infty < \infty$ влечет $f^{(r)} \in C$. Позже для L_p , $1 \leq p \leq \infty$, были получены следующие результаты. Для удобства мы запишем соответствующие вложения в терминах пространств Бесова $B_{p,\theta}^r$ и Соболева W_p^r :

$$\begin{aligned} B_{p,1}^r &\subset W_p^r \subset B_{p,\infty}^r, & p = 1, \infty, \\ B_{p,p}^r &\subset W_p^r \subset B_{p,2}^r, & 1 < p \leq 2, \\ B_{p,2}^r &\subset W_p^r \subset B_{p,p}^r, & 2 \leq p < \infty \end{aligned}$$

(см. обзор [2] и статью [13]).

Критерий (В) был доказан А. Зигмундом (см. [14]), который одним из первых использовал понятие модуля гладкости натурального порядка, введенное Бернштейном в 1912 г. (см. [8]). В настоящее время свойства модулей гладкости хорошо изучены (см. [2], [15]), и результат (В) вытекает из следующих неравенств:

$$\omega_{k+r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C(k, r, p)}{n^r} \omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p, \quad k, r, n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(k, r, p) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_{k+r}\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p, \quad k, r, n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где $1 \leq p \leq \infty$ (см. [11; гл. 2, 6] и [16]).

Ясно, что, используя неравенства (1) и (3), из (7) и (8) можно получить неравенства (2) и (4).

Отметим также работу Марцинкевича [17], где были доказаны следующие два неравенства:

$$\|f'\|_p \leq C(p) \left(\int_0^{2\pi} \frac{\omega_2(f, u)_p^p}{u^{p+1}} du \right)^{1/p}, \quad 1 < p \leq 2, \quad (9)$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\omega_2(f, u)_p^p}{u^{p+1}} du \right)^{1/p} \leq C(p) \|f'\|_p, \quad 2 \leq p < \infty. \quad (10)$$

Несложно показать (см. [18; замечание 3.5], что (8) и (9) являются следствием оценки (см. [18; теорема 3.1])

$$\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(k, r) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \omega_{k+r}^{\theta}\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \right)^{1/\theta}, \quad (11)$$

где $k, r, n \in \mathbb{N}$, $\theta = \min(2, p)$, $1 \leq p < \infty$.

Критерий (С) был доказан И. И. Приваловым (см. [19]). Следующее неравенство, из которого следует результат (С), было доказано Зигмундом (см. [14]) и Н. К. Бари и С. Б. Стечкиным (см. [20]):

$$\omega_k\left(\tilde{f}^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(k, r) \left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+r-1} \omega_k\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_k\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \right), \quad (12)$$

$$k, n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

при $p = 1, \infty$. Здесь и далее $\tilde{f}$ обозначает функцию, сопряженную к f (см. [21; т. 1, гл. 2]).

Наконец мы отметим статью Харди и Литтлвуда [22], в которой, по-видимому впервые, были сформулированы и решены задачи конструктивной теории приближений в виде теорем вложения. Некоторые исторические аспекты этого подхода представлены в статье [23].

В заключение отметим некоторые усиления записанных выше неравенств для случая обобщенных производных или модулей гладкости, так как они,

в частности, будут представлять для нас интерес: неравенства (1) и (3) доказаны для любого $k > 0$ в [24] и [25]; аналоги неравенства (2) для f_β^ψ -производных показаны в [26; 6.3], а аналоги неравенств (4) и (12) – в [27]–[30].

1.2. Теоремы вложения для функциональных классов. Критерии (A)–(C) так же, как и их обобщения, упомянутые выше, могут быть записаны в виде теорем вложения следующих функциональных классов:

$$\begin{aligned} W_p^r &= \{f \in L_p : f^{(r)} \in L_p\}, \\ \widetilde{W}_p^r &= \{f \in L_p : \widetilde{f}^{(r)} \in L_p\}, \\ W_p^r H_\alpha[\varphi] &= \{f \in W_p^r : \omega_\alpha(f^{(r)}, \delta)_p = O[\varphi(\delta)]\}, \\ \widetilde{W}_p^r H_\alpha[\phi] &= \{f \in \widetilde{W}_p^r : \omega_\alpha(\widetilde{f}^{(r)}, \delta)_p = O[\phi(\delta)]\}, \\ W_p^r E[\xi] &= \{f \in W_p^r : E_n(f^{(r)})_p = O[\xi(1/n)]\}. \end{aligned}$$

Мы будем изучать более общие классы, так что W_p^r , $\widetilde{W}_p^r$, $W_p^r H_\alpha[\varphi]$, $\widetilde{W}_p^r H_\alpha[\phi]$, $W_p^r E[\xi]$ будут их частными случаями.

1.3. Преобразованные ряды Фурье. Пусть $L_p = L_p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p < \infty$) суть пространства 2π -периодических измеримых функций, для которых $|f|^p$ интегрируемо, и $L_\infty \equiv C[0, 2\pi]$ есть пространство 2π -периодических непрерывных функций в равномерной метрике, т.е. $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

Пусть ряд Фурье суммируемой функции $f(x)$ записывается как

$$f(x) \sim \sigma(f) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu(f) \cos \nu x + b_\nu(f) \sin \nu x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(f, x). \quad (13)$$

Преобразованный ряд Фурье к ряду (13) определяется следующим образом:

$$\sigma(f, \lambda, \beta) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left[a_\nu \cos\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right) + b_\nu \sin\left(\nu x + \frac{\pi\beta}{2}\right) \right],$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$ – данная последовательность положительных чисел. Это определение широко известно в литературе (см., например, [21; гл. 12, § 8, 9], [23], [26], [31]–[35] и замечание 3 из § 6). Отметим также, что $\sigma(f, \lambda, \beta)$ совпадает с точностью до обозначений с рядом Фурье так называемых f_β^ψ -производных в терминологии книги [26].

Изучение преобразованных рядов Фурье естественным образом связано с проблематикой мультипликаторов Фурье (см. [21; т. 1, гл. III], [36]–[38; гл. 7]), с методами суммирования (см. [21; т. 1, гл. III], [38; гл. 8], [39; гл. 1.2], а также [40; § 13, гл. II]), с так называемыми дробными классами Соболева, или классами Вейля [26; т. 1, гл. III]).

Класс функций

$$W_p^{\lambda, \beta} = \{f \in L_p : \exists g \in L_p, \sigma(g) = \sigma(f, \lambda, \beta)\}$$

называется *классом Вейля* (см., например, [26], [31], [41]). Это название обусловлено тем, что при $\lambda_n = n^r$, $r > 0$ и $\beta = r$ класс $W_p^{\lambda, \beta}$ совпадает с классом W_p^r , который определяется в терминах дробных производных $f^{(r)}$ в смысле Вейля ([21; т. 2; гл. XII]). В случае $\lambda_n = n^r$, $r > 0$ и $\beta = r + 1$ класс $W_p^{\lambda, \beta}$ совпадает с классом $\widetilde{W}_p^r$. Функция $g(x) \sim \sigma(f, \lambda, \beta)$ называется (λ, β) -производной функции $f(x)$ и обозначается $f^{(\lambda, \beta)}(x)$. В терминологии работы [26] $f_\beta^\psi = f^{(\lambda, \beta)}$, если $\psi^{-1}(k) = \lambda_k$.

1.4. Обобщенный класс Вейля–Никольского. В определении этого функционального класса мы используем понятие *модуля гладкости дробного*³ *порядка* $\omega_\alpha(f, \delta)_p$ функции $f(x) \in L_p$, т.е.

$$\omega_\alpha(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p,$$

где

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h), \quad \alpha > 0,$$

есть α -я разность⁴ функции f с шагом h в точке x . Ясно, что если $\alpha \in \mathbb{N}$, то это определение совпадает с (5).

Пусть Φ_α ($\alpha > 0$) – это класс функций $\varphi(\delta)$, определенных и неотрицательных на $(0, \pi]$ и удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$);
- 2) $\varphi(\delta)$ не убывает;
- 3) $\delta^{-\alpha} \varphi(\delta)$ не возрастает.

Для функций $\varphi \in \Phi_\alpha$, $\alpha > 0$, и для $\lambda = \{\lambda_n\}$ определим *обобщенный класс Вейля–Никольского* аналогично классам $W_p^r H^\alpha[\varphi]$ и $\widetilde{W}_p^r H^\alpha[\varphi]$ (см., например, [41]):

$$W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] = \{f \in W_p^{\lambda, \beta} : \omega_\alpha(f^{(\lambda, \beta)}, \delta)_p = O[\varphi(\delta)], \delta \rightarrow +0\}.$$

Ясно, что если $\lambda_n = n^r$, $r > 0$ и $\beta = r$, то $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \equiv W_p^r H_\alpha[\varphi]$, и если $\lambda_n = n^r$, $r > 0$ и $\beta = r + 1$, то $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \equiv \widetilde{W}_p^r H_\alpha[\varphi]$.

В случае $\lambda_n \equiv 1$ и $\beta = 0$ класс $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi]$ совпадает с *обобщенным классом Липшица* H_α^φ , т.е.

$$H_\alpha^p[\varphi] = \{f \in L_p : \omega_\alpha(f, \delta)_p = O[\varphi(\delta)], \delta \rightarrow +0\}.$$

В частности, при $0 < \gamma \leq 1$

$$\text{Lip}(\gamma, L_p) \equiv H_1^p[\delta^\gamma] = \{f \in L_p : \omega_1(f, \delta)_p = O[\delta^\gamma], \delta \rightarrow +0\}.$$

³Термин “дробный” можно найти в ранних работах [24] и [25], где использовалось это определение. Как и в случае дробных производных, положительное число α , которое определяет порядок модуля, не обязательно является рациональным числом.

⁴Как обычно, $\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu > 1$, $\binom{\beta}{\nu} = \beta$ для $\nu = 1$ и $\binom{\beta}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$.

1.5. Постановка задач и структура работы. В этой работе мы получаем теоремы вложения классов Вейля $W_p^{\lambda, \beta}$, обобщенных классов Вейля–Никольского $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi]$ и обобщенных классов Липшица $H_\gamma^p[\omega]$. Мы показываем, как связаны между собой параметры α и γ в зависимости от поведения последовательности $\lambda = \{\lambda_n\}$ и от выбора метрики L_p .

Данная статья организована следующим образом. В § 2 мы формулируем основную теорему. Доказательства теоремы в части достаточности и необходимости содержатся соответственно в § 3 и § 4. В § 5 мы доказываем несколько следствий. В частности, мы описываем разницу между результатами для L_p в случае $1 < p < \infty$ и в случае $p = 1, \infty$. Также приводятся оценки $\omega_\gamma(f^{(r)}, \delta)_p$ и $\omega_\gamma(\tilde{f}^{(r)}, \delta)_p$ через $\omega_\beta(f, \delta)_p$ для различных значений r, γ и β . В § 6 содержатся заключительные замечания.

§ 2. Теоремы вложения обобщенных классов Липшица и Вейля–Никольского

Для $\lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ определим $\Delta\lambda_n := \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $\Delta^2\lambda_n := \Delta(\Delta\lambda_n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\theta = \min(2, p)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\{n^{-\rho}\lambda_n\}$ не возрастает.

I. Если $1 < p < \infty$, то

$$H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^\theta - \lambda_n^\theta) \omega^\theta\left(\frac{1}{n}\right) < \infty, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] &\iff \\ &\left\{ n^{-\alpha\theta} \sum_{\nu=1}^n \nu^{(\rho+\alpha)\theta} (\nu^{-\rho\theta} \lambda_\nu^\theta - (\nu+1)^{-\rho\theta} \lambda_{\nu+1}^\theta) \omega^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta) \omega^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right) + \lambda_{n+1}^\theta \omega^\theta\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}^{1/\theta} = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$W_p^{\lambda, \beta} \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \iff \frac{1}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad (16)$$

$$W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \iff \frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (17)$$

II. Пусть $p = 1$ или $p = \infty$.

(a) Если $\Delta^2\lambda_n \geq 0$ или $\Delta^2\lambda_n \leq 0$, то

$$\begin{aligned} H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} &\iff \\ \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\omega(1/n)}{n} &< \infty; \end{aligned} \quad (18)$$

если к тому же для некоторого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\Delta^2\left(\frac{\lambda_n}{n^r}\right) \geq 0 \quad \text{для } r = \rho + \tau \operatorname{sign}\left|\sin \frac{(\beta - \rho)\pi}{2}\right|,$$

то

$$\begin{aligned} H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] &\iff \\ n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \nu^{r+\alpha} (\nu^{-r} \lambda_\nu - (\nu+1)^{-r} \lambda_{\nu+1}) \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) &+ \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ &+ \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\omega(1/\nu)}{\nu} + \lambda_{n+1} \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

(b) Если для $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ выполнено условие $\Delta^2(1/\lambda_n) \geq 0$, а для $\beta \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ выполнены условия $\Delta^2(1/\lambda_n) \geq 0$ и $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 1/(\nu \lambda_\nu) \leq C/\lambda_n$, то

$$W_p^{\lambda, \beta} \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \iff \frac{1}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \quad (20)$$

если к тому же для некоторого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\Delta^2\left(\frac{n^r}{\lambda_n}\right) \geq 0 \quad \text{или} \quad \Delta^2\left(\frac{n^r}{\lambda_n}\right) \leq 0 \quad \text{для } r = \rho + \tau \operatorname{sign}\left|\sin \frac{(\beta - \rho)\pi}{2}\right|,$$

то

$$W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \subset H_{\alpha+r}^p[\omega] \iff \frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (21)$$

§ 3. Доказательство достаточности в теореме 1

Мы будем использовать следующие обозначения.

Пусть ряд (13) есть ряд Фурье функции $f(x) \in L$. Тогда $S_n(f)$ – n -я частичная сумма ряда (13), $V_n(f)$ – сумма Валле Пуссена и $K_n(x)$ – ядро Фейера, т.е.

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{\nu=0}^n A_\nu(x), \quad V_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} S_\nu(f), \\ K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\nu} \cos mx \right). \end{aligned}$$

Важную роль в доказательстве основной теоремы будут играть следующие леммы.

ЛЕММА 3.1. Если $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, и $\alpha > 0$, то

$$\begin{aligned} C_1(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p &\leq (n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f, x)\|_p + \|f(x) - V_n(f, x)\|_p) \\ &\leq C_2(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p. \end{aligned} \quad (22)$$

Если $f(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, то

$$\begin{aligned} C_1(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p &\leq (n^{-\alpha} \|S_n^{(\alpha)}(f, x)\|_p + \|f(x) - S_n(f, x)\|_p) \\ &\leq C_2(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p. \end{aligned} \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху $\omega_\alpha(f, 1/n)_p$ следует из неравенства (см. [24])

$$\omega_\alpha \left(T_n, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(p, \alpha) n^{-\alpha} \|T_n^{(\alpha)}\|_p,$$

где T_n – тригонометрический полином порядка n . Действительно,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p &\leq C(p, \alpha) \left(\omega_\alpha \left(T_n, \frac{1}{n} \right)_p + \|f - T_n\|_p \right) \\ &\leq C(p, \alpha) (n^{-\alpha} \|T_n^{(\alpha)}\|_p + \|f - T_n\|_p). \end{aligned}$$

При оценке $\omega_\alpha(f, 1/n)_p$ снизу мы будем использовать обобщенное неравенство Никольского–Стечкина (см. [25])

$$n^{-\alpha} \|T_n^{(\alpha)}\|_p \leq C(p, \alpha) \omega_\alpha \left(T_n, \frac{1}{n} \right)_p$$

и обобщенное неравенство Джексона (см. [24] для $\alpha > 0$)

$$E_n(f)_p \leq C(\alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n+1} \right)_p. \quad (24)$$

Также, хорошо известно, что сумма Валле Пуссена является полиномом “почти” наилучшего приближения, т.е.

$$\|f - V_n(f)\|_p \leq C E_n(f)_p. \quad (25)$$

Тогда

$$\begin{aligned} n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f, x)\|_p + \|f(x) - V_n(f, x)\|_p &\leq C(p, \alpha) \left(\omega_\alpha \left(V_n, \frac{1}{n} \right)_p + E_n(f)_p \right) \\ &\leq C(p, \alpha) \left(\omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p + \omega_\alpha \left(f - V_n, \frac{1}{n} \right)_p \right) \leq C(p, \alpha) \omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p, \end{aligned}$$

т.е. (22) доказано. Используя

$$\|f - S_n(f)\|_p \leq C(p) E_n(f)_p \quad (26)$$

для $1 < p < \infty$, аналогично получим (23). Лемма 3.1 доказана.

Заметим, что (22) и (23) – это результаты о “реализации” модуля гладкости; в оригинале (см. статью З. Дитциана, В. Христова и К. Иванова [42]) – realization results.

ЛЕММА 3.2 (см. [43]). Пусть $f(x) \in L_p$, $p = 1, \infty$, и пусть выполнено условие $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E_n(f)_p < \infty$. Тогда $f(x) \in L_p$ и

$$E_n(\tilde{f})_p \leq C \left(E_n(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $p = 1, \infty$, и пусть $\{\lambda_n\}$ – положительная монотонная выпуклая (вверх или вниз) последовательность. Пусть

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x,$$

$$T_n(\lambda, x) = \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x).$$

Тогда при любых натуральных $M > N$ имеем

$$\|T_M(\lambda, x) - T_N(\lambda, x)\|_p \leq \mu(M, N) \|T_M(x) - T_N(x)\|_p,$$

где при $M > N + 2$

$$\mu(M, N) = \begin{cases} 2M(\lambda_M - \lambda_{M-1}) + \lambda_{N+1} - (N+1)(\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1}), & \text{если } \lambda_n \uparrow (n \uparrow), \Delta^2 \lambda_n \geq 0, \\ 2\lambda_M + (N+1)(\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1}) - \lambda_{N+1}, & \text{если } \lambda_n \uparrow (n \uparrow), \Delta^2 \lambda_n \leq 0, \\ (N+1)(\lambda_{N+1} - \lambda_{N+2}) + \lambda_{N+1}, & \text{если } \lambda_n \downarrow (n \uparrow), \Delta^2 \lambda_n \geq 0, \end{cases}$$

при $M = N + 1$

$$\mu(M, N) = \lambda_M,$$

а при $M = N + 2$

$$\mu(M, N) = 2|\lambda_{N+1} - \lambda_{N+2}| + \lambda_{N+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $M > N + 2$. Применяя два раза преобразование Абеля, запишем

$$\begin{aligned} & \|T_M(\lambda, x) - T_N(\lambda, x)\|_p \\ &= \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} (T_M - T_N)(x + u) \sum_{\nu=N+1}^M \lambda_{\nu} \cos \nu u \, du \right\|_p \\ &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_M - T_N)(x + u) \left\{ \sum_{\nu=N+1}^{M-2} (\lambda_{\nu} - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2})(\nu + 1) K_{\nu}(u) \right. \right. \\ &\quad + (\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1})(N + 1) K_N(u) \\ &\quad \left. \left. + (\lambda_{M-1} - \lambda_M) M K_{M-1}(u) \right\} du + \lambda_M (T_M - T_N) \right\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T_M(x) - T_N(x)\|_p \left\{ \sum_{\nu=N+1}^{M-2} |\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}|(\nu+1) \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_{M-1} - \lambda_M|M + \lambda_M \right\} \\
&=: \|T_M(x) - T_N(x)\|_p I(M, N).
\end{aligned}$$

Оценим $I(M, N)$ для случая $\lambda_n \uparrow (n \uparrow)$, $\Delta^2 \lambda_n \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
I(M, N) &= \sum_{\nu=N+1}^{M-2} (\lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2})(\nu+1) + (\lambda_M - \lambda_{M-1})M + \lambda_M \\
&= -(N+1)(\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1}) + (\lambda_{N+1} - \lambda_{M-1}) + \lambda_M \\
&\quad + (2M-1)(\lambda_M - \lambda_{M-1}) \\
&= -(N+1)(\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1}) + \lambda_{N+1} + 2M(\lambda_M - \lambda_{M-1}).
\end{aligned}$$

Если $\lambda_n \uparrow (n \uparrow)$, $\Delta^2 \lambda_n \leq 0$, то

$$I(M, N) = -(N+1)(\lambda_{N+1} - \lambda_{N+2}) + (\lambda_{M-1} - \lambda_{N+1}) + \lambda_M + (\lambda_M - \lambda_{M-1}).$$

Наконец, если $\lambda_n \downarrow (n \uparrow)$, $\Delta^2 \lambda_n \geq 0$, то

$$I(M, N) = -(N+1)(\lambda_{N+2} - \lambda_{N+1}) + \lambda_{N+1}.$$

Оценка для случая $M = N+1$ тривиальна, а для случая $M = N+2$ немедленно следует из равенства

$$\begin{aligned}
T_M(\lambda, x) - T_N(\lambda, x) &= \frac{\lambda_M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_M - T_N)(x+u) \left(\sum_{m=N+1}^{N+2} \cos mu \right) du \\
&\quad + \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_{N+2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_M - T_N)(x+u) \cos(N+1)u du.
\end{aligned}$$

Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $p = 1, \infty$. Если $T_{2^n, 2^{n+1}}(x) = \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} (c_\nu \cos \nu x + d_\nu \sin \nu x)$, то

$$C_1 \|\tilde{T}_{2^n, 2^{n+1}}(x)\|_p \leq \|T_{2^n, 2^{n+1}}(x)\|_p \leq C_2 \|\tilde{T}_{2^n, 2^{n+1}}(x)\|_p. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем $T_{2^n, 2^{n+1}}(x)$ следующим образом:

$$T_{2^n, 2^{n+1}}(x) = \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{\nu} (\nu c_\nu \cos \nu x + \nu d_\nu \sin \nu x).$$

Применяя лемму 3.3 и неравенство Бернштейна, имеем

$$\begin{aligned}
\|T_{2^n, 2^{n+1}}(x)\|_p &\leq C \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} (\nu c_\nu \cos \nu x + \nu d_\nu \sin \nu x) \right\|_p \\
&= C \frac{1}{2^n} \left\| \left(\sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} (-d_\nu \cos \nu x + c_\nu \sin \nu x) \right)' \right\|_p \leq C \|\tilde{T}_{2^n, 2^{n+1}}(x)\|_p.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения для $\tilde{T}_{2^n, 2^{n+1}}(x)$ позволяют получить левое неравенство в (27). Лемма 3.4 доказана.

Докажем достаточность в (14)–(21).

I. $1 < p < \infty$. В этом случае для $\lambda_n \equiv 1$ неравенство Рисса (см. [21; т. 1]) $\|\tilde{f}\|_p \leq C(p)\|f\|_p$ влечет

$$\|f^{(\lambda, \beta)}\|_p \leq C(p, \beta)\|f\|_p \quad (28)$$

(здесь и далее под $C(s, t, \dots)$ понимаются положительные постоянные, зависящие лишь от $s, t, \dots$, вообще говоря, разные в разных неравенствах).

Пусть выражение в правой части (14) конечно и $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Будем использовать представление

$$\lambda_{2^n}^\theta = \begin{cases} \lambda_1^\theta + \sum_{\nu=2}^{n+1} (\lambda_{2^{\nu-1}}^\theta - \lambda_{2^{\nu-2}}^\theta), & \text{если } n \geq 1, \\ \lambda_1^\theta, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} I_1 := \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^{n-1}}^2 \Delta_n^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{\theta/p} &\leq C(p) \left(\lambda_1^\theta \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{\theta/p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=2}^{\infty} (\lambda_{2^{s-1}}^\theta - \lambda_{2^{s-2}}^\theta) \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=s}^{\infty} \Delta_n^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{\theta/p} \right)^{1/\theta} \end{aligned} \quad (29)$$

(здесь и ниже $\Delta_1 := A_1(f, x)$, $\Delta_{n+2} := \sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} A_\nu(f, x)$, где $A_\nu(f, x)$ из (13)). Применяя теорему Литтлвуда–Пели (см., например, [21]) и используя неравенство (26), получим

$$I_1 \leq C(p) \left\{ \lambda_1^\theta \|f\|_p^\theta + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{2^s}^\theta - \lambda_{2^{s-1}}^\theta) E_{2^{s-1}}^\theta(f)_p \right\}^{1/\theta}. \quad (30)$$

Обобщенное неравенство Джексона (24) и условие $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$ влекут $I_1 < \infty$. Значит, существует функция $g \in L_p$ с рядом Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2^{n-1}} \Delta_n, \quad (31)$$

причем $\|g\|_p \leq C(p)I_1$. Запишем ряд (31) в виде $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n(f, x)$, где $\gamma_i := \lambda_i$, $i = 1, 2$, и $\gamma_\nu := \lambda_{2^n}$ для $2^{n-1} + 1 \leq \nu \leq 2^n$ ($n = 2, 3, \dots$). Далее рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n(f, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Lambda_n A_n(f, x), \quad (32)$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, $\Lambda_\nu := \lambda_\nu / \gamma_n = \lambda_\nu / \lambda_{2^n}$ для $2^{n-1} + 1 \leq \nu \leq 2^n$ ($n = 2, 3, \dots$).

Так как последовательность $\{\Lambda_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича о мультипликаторах (см. [21]), то ряд (32) есть ряд Фурье некоторой функции $f^{(\lambda,0)} \in L_p$, причем $\|f^{(\lambda,0)}\|_p \leq C(p)\|g\|_p$. Тогда из неравенств (24), (28) и (30) получаем

$$\begin{aligned} \|f^{(\lambda,\beta)}\|_p &\leq C(p, \beta) \left\{ \lambda_1^\theta \|f\|_p^\theta + \sum_{s=1}^{\infty} E_{2^{s-1}}^\theta(f)_p \sum_{n=2^{s-1}}^{2^s-1} (\lambda_{n+1}^\theta - \lambda_n^\theta) \right\}^{1/\theta} \\ &\leq C(p, \beta, \alpha, \rho) \left\{ \lambda_1^\theta \|f\|_p^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^\theta - \lambda_n^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right\}^{1/\theta}, \end{aligned} \quad (33)$$

т.е. достаточность в (14) доказана.

Пусть справедливо соотношение в правой части (15) и $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Докажем, что $f \in W_p^{\lambda,\beta} H_\alpha[\varphi]$. Сначала оценим $\omega_\alpha(f^{(\lambda,\beta)}, 1/n)_p$. По лемме 3.1

$$\omega_\alpha \left(f^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(p, \alpha) (\|f^{(\lambda,\beta)} - S_n(f^{(\lambda,\beta)})\|_p + n^{-\alpha} \|S_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda,\beta)})\|_p). \quad (34)$$

Используя (33) для функции $(f - S_n)$, имеем ($[a]$ – целая часть a)

$$\begin{aligned} \|f^{(\lambda,\beta)} - S_n(f^{(\lambda,\beta)})\|_p &\leq C(p, \beta, \alpha, \rho) \left\{ \lambda_{n+1}^\theta \|f - S_n\|_p^\theta + E_{[n/2]}^\theta(f)_p \sum_{s=1}^{2n} (\lambda_{s+1}^\theta - \lambda_s^\theta) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=n+1}^{\infty} (\lambda_{s+1}^\theta - \lambda_s^\theta) E_{[s/2]}^\theta(f)_p \right\}^{1/\theta} \\ &\leq C(p, \beta, \alpha, \rho) \left\{ \lambda_{n+1}^\theta \omega_{\alpha+\rho}^\theta \left(f, \frac{1}{n} \right)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее оценим второе слагаемое в (34). Пусть m – это такое целое число, что $2^m \leq n+1 < 2^{m+1}$. Мы будем использовать тождество

$$2^{-s\rho\theta} \lambda_{2^s}^\theta = 2^{-(m+1)\rho\theta} \lambda_{2^{m+1}}^\theta + \sum_{\nu=s}^m (2^{-\nu\rho\theta} \lambda_{2^\nu}^\theta - 2^{-(\nu+1)\rho\theta} \lambda_{2^{\nu+1}}^\theta).$$

Тогда, используя леммы 3.1, 3.3 и действуя по аналогии с типовыми оценками (29)–(33), получим

$$\begin{aligned} n^{-\alpha} \|S_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda,\beta)})\|_p &\leq C(p, \beta, \alpha, \rho) \left\{ \lambda_{n+1}^\theta \omega_{\alpha+\rho}^\theta \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right. \\ &\quad \left. + n^{-\alpha\theta} \sum_{\nu=1}^n (\nu^{-\rho\theta} \lambda_\nu^\theta - (\nu+1)^{-\rho\theta} \lambda_{\nu+1}^\theta) \nu^{(\rho+\alpha)\theta} \omega_{\alpha+\rho}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\theta}. \end{aligned} \quad (36)$$

Объединение оценок (35) и (36) с учетом неравенства в правой части (15) дает $f \in W_p^{\lambda,\beta} H_\alpha[\varphi]$.

Теперь докажем, что условия

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad \frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

достаточны для вложений $W_p^{\lambda, \beta} \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$ и $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$ соответственно.

Используя теоремы Литтлвуда–Пели и Марцинкевича, а также свойства последовательности $\{\lambda_n\}$ (следуя ходу доказательства (29)–(33)), получим

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha+\rho}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p &\leq C(p, \alpha, \rho)(\|f - S_n(f)\|_p + n^{-(\alpha+\rho)}\|S_n^{(\alpha+\rho)}(f)\|_p) \\ &\leq C(p, \beta, \alpha, \rho)(\lambda_n^{-1}\|f^{(\lambda, \beta)} - S_n(f^{(\lambda, \beta)})\|_p + \lambda_n^{-1}n^{-\alpha}\|S_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p). \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 3.1 имеем неравенства

$$\omega_{\alpha+\rho}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(p, \beta, \alpha, \rho)\lambda_n^{-1}\omega_\alpha\left(f^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(p, \beta, \alpha, \rho)\lambda_n^{-1}\|f^{(\lambda, \beta)}\|_p,$$

первое из которых показывает достаточность (17), а второе достаточность (16).

II. $p = 1$ или $p = \infty$. Пусть конечен ряд в правой части (18), и пусть $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} &\cos \frac{\pi\beta}{2} V_1(\lambda, f) - \sin \frac{\pi\beta}{2} \widetilde{V}_1(\lambda, f) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \cos \frac{\pi\beta}{2} (V_{2^n}(\lambda, f) - V_{2^{n-1}}(\lambda, f)) - \sin \frac{\pi\beta}{2} (\widetilde{V}_{2^n}(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^{n-1}}(\lambda, f)) \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$V_1(\lambda, f) := \lambda_1 A_1(f, x),$$

$$\begin{aligned} V_n(\lambda, f) &:= \sigma(\lambda, V_n(f)) = \sum_{m=1}^n \lambda_m A_m(f, x) \\ &+ \sum_{m=n+1}^{2n-1} \lambda_m \left(1 - \frac{m-n}{n}\right) A_m(f, x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Пусть $M > N > 0$. Используя неравенство $\|f - V_n(f)\|_p \leq C E_n(f)_p$, теорему Джексона (24), свойства последовательности $\{\lambda_n\}$ и следуя ходу доказательства леммы 3.3, мы получим

$$\begin{aligned} A &:= \left\| \sum_{n=N}^M \left[\cos \frac{\pi\beta}{2} (V_{2^{n+1}}(\lambda, f) - V_{2^n}(\lambda, f)) - \sin \frac{\pi\beta}{2} (\widetilde{V}_{2^{n+1}}(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^n}(\lambda, f)) \right] \right\|_p \\ &\leq \sum_{n=N}^M \left[\left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| \|V_{2^{n+1}}(f) - V_{2^n}(f)\|_p \left(\sum_{m=2^n}^{2^{n+2}-1} |\Delta^2 \lambda_m| (m+1) + 2^{n+2} |\Delta \lambda_{2^{n+2}}| \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| \left\| \widetilde{V_{2^{n+1}}}(f) - \widetilde{V_{2^n}}(f) \right\|_p \left(\sum_{m=2^n}^{2^{n+2}-1} |\Delta^2 \lambda_m| (m+1) + 2^{n+2} |\Delta \lambda_{2^{n+2}-1}| \right) \\
& + \left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| \left\| \sum_{n=N}^M \lambda_{2^{n+2}} (V_{2^{n+1}} - V_{2^n})(f) \right\|_p \\
& + \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| \left\| \sum_{n=N}^M \lambda_{2^{n+2}} (\widetilde{V_{2^{n+1}}} - \widetilde{V_{2^n}})(f) \right\|_p \\
& \leq C \left\{ \lambda_{2^N} \left(\left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| E_{2^N}(f)_p + \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| E_{2^N}(\tilde{f})_p \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=2^{N-1}}^{\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \left(\left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| \omega_{\alpha+\rho} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p + \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| \omega_{\alpha+\rho} \left(\tilde{f}, \frac{1}{n} \right)_p \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Завершая доказательство достаточности в (18), мы применяем лемму 3.2, неравенство (3) (см. [25] в случае $k > 0$) и неравенство (24). Тогда условие сходимости ряда в правой части в (18) и условие $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$ влекут тот факт, что последовательность

$$\left\{ V_{2^n}(\lambda, \beta, f) := \cos \frac{\pi\beta}{2} V_{2^n}(\lambda, f) - \sin \frac{\pi\beta}{2} \widetilde{V_{2^n}}(\lambda, f) \right\}$$

фундаментальна в L_p . Если $p = 1$, то в силу полноты L_1 найдется подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $V_{2^{n_k}}(\lambda, \beta, f)$ сходится почти всюду к некоторой функции $\varphi \in L_1$. Тогда из сходимости в среднем получим, что, например, для косинус-коэффициентов

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_{2^{n_k}}(\lambda, \beta, f) \cos nx \, dx = a_n(f^{(\lambda, \beta)}).$$

Значит, $\sigma(\varphi) = \sigma(f^{(\lambda, \beta)})$. Для $p = \infty$ доказательство аналогично. Достаточность в (18) доказана.

Пусть далее выполнено условие в правой части (19) и $f \in H_{\alpha+r}^p[\omega]$. Оценим сверху $\omega_{\alpha}(f^{(\lambda, \beta)}, 1/n)_p$. По лемме 3.1

$$\omega_{\alpha} \left(f^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(\alpha) (\|f^{(\lambda, \beta)} - V_n(f^{(\lambda, \beta)})\|_p + n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p).$$

Покажем, что

$$\begin{aligned}
\|f^{(\lambda, \beta)} - V_n(f^{(\lambda, \beta)})\|_p & \leq C(\beta, \alpha, r) \left(\lambda_n \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right. \\
& \quad + \left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \\
& \quad \left. + \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right).
\end{aligned} \tag{39}$$

Выше доказано, что

$$A = \left\| \sum_{n=N}^M (V_{2^{n+1}}(f^{(\lambda, \beta)}) - V_{2^n}(f^{(\lambda, \beta)})) \right\|_p.$$

Тогда для $2^m \leq n < 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \|f^{(\lambda, \beta)} - V_n(f^{(\lambda, \beta)})\|_p &\leq \|V_n(f^{(\lambda, \beta)}) - V_{2^{m+1}}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p \\ &+ \left\| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (V_{2^\nu}(f^{(\lambda, \beta)}) - V_{2^{\nu+1}}(f^{(\lambda, \beta)})) \right\|_p =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

По лемме 3.4 мы имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \cos \frac{\pi\beta}{2} (V_n(\lambda, f) - V_{2^{m+1}}(\lambda, f)) - \sin \frac{\pi\beta}{2} (\widetilde{V}_n(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^{m+1}}(\lambda, f)) \right\|_p \\ &\leq \|V_n(\lambda, f) - V_{2^{m+1}}(\lambda, f)\|_p + \|\widetilde{V}_n(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^{m+1}}(\lambda, f)\|_p \\ &\leq C \|V_n(\lambda, f) - V_{2^{m+1}}(\lambda, f)\|_p, \end{aligned}$$

и по лемме 3.3 запишем $I_1 \leq \lambda_n \omega_{\alpha+r}(f, 1/n)_p$.

Далее,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| \cos \frac{\pi\beta}{2} \right| \left\| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (V_{2^\nu}(\lambda, f) - V_{2^{\nu+1}}(\lambda, f)) \right\|_p \\ &+ \left| \sin \frac{\pi\beta}{2} \right| \left\| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (\widetilde{V}_{2^\nu}(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^{\nu+1}}(\lambda, f)) \right\|_p. \end{aligned}$$

Как и в (38), запишем

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{\nu=N}^M (V_{2^{\nu+1}} - V_{2^\nu})(\lambda, f) \right\|_p \\ &\leq C \left(\lambda_{2^N} \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{2^N} \right)_p + \sum_{\nu=2^N+1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right), \\ &\left\| \sum_{\nu=N}^M (\widetilde{V}_{2^\nu}(\lambda, f) - \widetilde{V}_{2^{\nu+1}}(\lambda, f)) \right\|_p \\ &\leq \left\| \sum_{\nu=N}^M \lambda_{2^{\nu+2}} (\widetilde{V}_{2^\nu}(f) - \widetilde{V}_{2^{\nu+1}}(f)) \right\|_p \\ &\quad + \sum_{\nu=N}^M \left\| \widetilde{V}_{2^\nu}(f) - \widetilde{V}_{2^{\nu+1}}(f) \right\|_p \left(\sum_{m=2^\nu}^{2^{\nu+2}-1} |\Delta^2 \lambda_m| (m+1) + 2^{\nu+2} |\Delta \lambda_{2^{\nu+2}}| \right) \\ &=: I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned}
 I_{21} &\leq \lambda_{2^{N+1}} \|\widetilde{V_{2^{M+1}}}(f) - \widetilde{V_{2^N}}(f)\|_p + \sum_{\nu=N}^M (\lambda_{2^{\nu+2}} - \lambda_{2^{\nu+1}}) \|\widetilde{V_{2^{\nu+1}}}(f) - \widetilde{V_{2^\nu}}(f)\|_p \\
 &\leq C \left(\lambda_{2^{N+1}} \sum_{\nu=N}^{\infty} E_{2^\nu}(f)_p + \sum_{\nu=N}^{\infty} (\lambda_{2^{\nu+2}} - \lambda_{2^{\nu+1}}) \sum_{s=\nu}^{\infty} E_{2^s}(f)_p \right) \\
 &\leq C \sum_{\nu=2^N}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu} \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p, \\
 I_{22} &\leq C \sum_{\nu=N}^M (\lambda_{2^{\nu+3}} - \lambda_{2^{\nu-1}}) E_{2^\nu}(\tilde{f})_p \leq C \sum_{\nu=2^N}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu} \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p,
 \end{aligned}$$

и (39) доказано.

Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве соотношения (38), мы оценим $n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p$. Используя лемму 3.3 и неравенства (24) и (25), запишем

$$\begin{aligned}
 \|V_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p &\leq C(\beta, \alpha, r) \left(n^\alpha \lambda_n \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\lambda_\nu}{\nu^r} - \frac{\lambda_{\nu+1}}{(\nu+1)^r} \right) \nu^{\alpha+r} \omega_{\alpha+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right). \quad (40)
 \end{aligned}$$

Объединяя (39) и (40) и используя условие в правой части (19), получим $f \in W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi]$.

Докажем (20). Пусть $f \in W_p^{\lambda, \beta}$. Для доказательства $f \in H_{\alpha+\rho}^p(\omega)$ будем оценивать $E_n(f)_p$ сначала для случая $\sin(\pi\beta/2) \neq 0$.

Тогда, повторяя схему доказательства оценки (38) и учитывая (25), получим ($2^m \leq n < 2^{m+1}$)

$$\begin{aligned}
 E_n(f)_p &\leq C \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2^\nu}} \|(V_{[2^{\nu-1}]} - V_{2^\nu})f^{(\lambda, \beta)}\|_p \\
 &\leq C E_{[2^{m-1}]}(f^{(\lambda, \beta)})_p \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2^\nu}} \leq C(\rho, p) \frac{\|f^{(\lambda, \beta)}\|_p}{\lambda_n}.
 \end{aligned}$$

Если $\sin(\pi\beta/2) = 0$, то несложно проверить, что

$$E_n(f)_p \leq \frac{C}{\lambda_n} E_n(f^{(\lambda, \beta)})_p \leq \frac{C}{\lambda_n} \|f^{(\lambda, \beta)}\|_p.$$

Таким образом, подставляя полученные оценки для $E_n(f)_p$ в неравенство (3) и учитывая тот факт, что $n^\rho \lambda_n^{-1} \uparrow (n \uparrow)$, получим

$$\omega_{\alpha+\rho} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(\alpha, \rho) \frac{1}{n^{\alpha+\rho}} \sum_{\nu=0}^n \nu^{\alpha+\rho-1} E_{\nu-1}(f)_p \leq \frac{C(\alpha, \rho)}{\lambda_n} = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

т.е. $f \in H_{\alpha+\rho}^p(\omega)$. Достаточность в (20) доказана.

Пусть справедлива правая часть в (21) и $f \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Сначала докажем, что

$$\|V_n^{(\alpha+r)}(f)\|_p \leq C(\alpha, r) \frac{n^r}{\lambda_n} \|V_{2n}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p. \quad (41)$$

Если $\beta = \rho + 2m$ и, следовательно, $r = \rho$, то

$$V_n^{(\alpha+r)}(f) = V_n^{(\alpha)}\left(\left\{\frac{\nu^r}{\lambda_\nu}\right\}, f^{(\lambda, \beta)}\right),$$

и по лемме 3.3 имеем

$$\|V_n^{(\alpha+r)}(f)r\|_p \leq C(\alpha, r) \frac{n^r}{\lambda_n} \|V_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p \leq C(\alpha, r) \frac{n^r}{\lambda_n} \left\| V_{2n}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)}) \right\|_p.$$

Если $\beta \neq \rho + 2m$ и, следовательно, $r > \rho$, то по лемме 3.4 запишем

$$\begin{aligned} \|V_{2^n}^{(\alpha+r)}(f)\|_p &\leq \sum_{\nu=1}^n \|V_{2^\nu}^{(\alpha+r)}(f) - V_{2^{\nu-1}}^{(\alpha+r)}(f)\|_p + \|V_1^{(\alpha+r)}(f)\|_p \\ &\leq C \sum_{\nu=1}^n \frac{2^{\nu r}}{\lambda_{2^\nu}} \|V_{2^\nu}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)}) - V_{2^{\nu-1}}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p + \frac{1}{\lambda_1} \|V_1^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p \\ &\leq C \|V_{2^{n+1}}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{2^{\nu r}}{\lambda_{2^\nu}} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \leq C(\alpha, r) \frac{2^{nr}}{\lambda_{2^n}} \|V_{2^{n+1}}^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p. \end{aligned}$$

Тогда (41) и оценка

$$E_n(f)_p \leq \frac{C}{\lambda_n} E_{[n/4]}(f^{(\lambda, \beta)})_p$$

позволяют записать

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha+r}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p &\leq C(\alpha, r) (n^{-(\alpha+r)} \|V_n^{(\alpha+r)}(f)\|_p + E_n(f)_p) \\ &\leq \frac{C(\alpha, r)}{\lambda_n} (n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f^{(\lambda, \beta)})\|_p + E_{[n/4]}(f^{(\lambda, \beta)})_p) \\ &\leq \frac{C(\alpha, r)}{\lambda_n} \omega_\alpha\left(f^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n}\right)_p = O\left[\frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n}\right] = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Итак, условие

$$\frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

достаточно для справедливости вложения

$$W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi] \subset H_{\alpha+r}^p[\omega].$$

§ 4. Доказательство необходимости в теореме 1

Определим тригонометрические полиномы $\tau_{n+1}(x)$:

$$\tau_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j^n \sin jx,$$

где

$$\alpha_j^n = \begin{cases} \frac{j}{n+2}, & \text{если } 1 \leq j \leq \frac{n+2}{2}, \\ 1 - \frac{j}{n+2}, & \text{если } \frac{n+2}{2} \leq j \leq n+1. \end{cases}$$

Наряду с леммами 3.1, 3.2 мы будем использовать следующие леммы.

ЛЕММА 4.1 (см. [44]). Пусть ряд (13) есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_1$. Тогда

$$E_n(f)_1 \geq C \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu} \right|.$$

ЛЕММА 4.2 (см. [21; т. 1, т. 2]). Пусть $1 \leq p < \infty$.

(а) Если ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2^\nu x + b_\nu \sin 2^\nu x)$ есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_p$, то

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\}^{1/2} \leq C \|f\|_p.$$

(б) Пусть a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) – такие действительные числа, что $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \infty$. Тогда ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2^\nu x + b_\nu \sin 2^\nu x)$ есть ряд Фурье некоторой функции $f(x) \in L_p$ и при этом

$$\|f\|_p \leq C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right\}^{1/2}.$$

ЛЕММА 4.3 ([40; гл. 11, § 12]). Если ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2^\nu x + b_\nu \sin 2^\nu x), \quad a_\nu, b_\nu \geq 0,$$

есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_\infty$, то

$$C_1 \sum_{\xi=n}^{\infty} (a_\xi + b_\xi) \leq E_{2^n-1}(f)_\infty \leq C_2 \sum_{\xi=n}^{\infty} (a_\xi + b_\xi).$$

Мы будем использовать следующие определения. Пусть $\omega(\cdot) \in \Phi_\alpha$.

Последовательность ψ будем называть $Q_{\alpha,\theta}(\omega)$ -последовательностью, если

$$0 < \psi_n \leq n^\alpha \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad \psi_n \uparrow (n \uparrow), \quad (42)$$

$$C_1 \omega\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\alpha\theta-1} \psi_\nu^\theta \right\}^{1/\theta} \leq C_2 \omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (43)$$

Последовательность ε будем называть $q_{\alpha,\theta}(\omega)$ -последовательностью, если

$$0 < \varepsilon_n \leq \omega\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad \varepsilon_n \downarrow (n \uparrow), \quad (44)$$

$$C_1 \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \left\{ (n+1)^{-\alpha\theta} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{\alpha\theta-1} \varepsilon_\nu^\theta \right\}^{1/\theta} \leq C_2 \omega\left(\frac{1}{n+1}\right). \quad (45)$$

Докажем необходимость в (14)–(21). В части необходимости доказательство проводится путем построения соответствующих примеров. Доказательство состоит из восьми частей.

I. $1 < p < \infty$.

Шаг 1. Покажем необходимость в (14).

Пусть $\omega(\cdot) \in \Phi_{\alpha+\rho}$ и $\theta = \min(2, p)$. Построим последовательность ψ , которая будет $Q_{\alpha+\rho,\theta}(\omega)$ -последовательностью.

Пусть выбраны числа $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_s$. Тогда в качестве n_{s+1} возьмем наименьший номер $N > n_s$ такой, что

$$\omega\left(\frac{1}{N}\right) < \frac{1}{2} \omega\left(\frac{1}{n_s}\right) \leq \omega\left(\frac{1}{N-1}\right).$$

Положим

$$\psi_n = \begin{cases} n_s^{\rho+\alpha} \omega\left(\frac{1}{n_s}\right), & \text{если } n_s \leq n < n_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта последовательность искомая.

Пусть $H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta}$, и пусть ряд в (14) расходится. В силу свойств последовательности $\{\psi_n\}$ имеем

$$\begin{aligned} \infty &= \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta) \omega^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right) \leq C(\alpha, \rho, \theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta) \sum_{m=\nu}^{\infty} m^{-(\alpha+\rho)\theta-1} \psi_m^\theta \\ &\leq C(\alpha, \rho, \theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\theta \nu^{-(\alpha+\rho)\theta-1} \psi_\nu^\theta. \end{aligned}$$

Шаг 1(a): $2 \leq p < \infty$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+\rho)} (\psi_{2\nu}^2 - \psi_{2\nu-1}^2)^{1/2} \cos 2^\nu x. \quad (46)$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-2\nu(\alpha+\rho)} (\psi_{2\nu}^2 - \psi_{2\nu-1}^2) &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (\psi_{2\nu}^2 - \psi_{2\nu-1}^2) \sum_{\xi=\nu}^{\infty} 2^{-2\xi(\alpha+\rho)} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-2\nu(\alpha+\rho)} \psi_{2\nu}^2 \leq C\omega^2(1), \end{aligned} \quad (47)$$

то по лемме 4.2 (лемме Зигмунда) ряд (46) есть ряд Фурье некоторой функции $f_1(x) \in L_p$. Применяя леммы 3.1 и 4.2, получим

$$\begin{aligned} C(\alpha, \rho) \omega_{\alpha+\rho} \left(f_1, \frac{1}{2^n} \right)_p &\leq 2^{-n(\alpha+\rho)} \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2 2^{2(\alpha+\rho)\nu} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^2 \right)^{1/2} \\ &=: I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где $a_\nu = 2^{-(\alpha+\rho)}(\psi_{2^\nu}^2 - \psi_{2^{\nu-1}}^2)^{1/2}$. Аналогично оценке (47) в силу (42) имеем

$$I_1 \leq 2^{-n(\alpha+\rho)} \psi_{2^n} \leq \omega \left(\frac{1}{2^n} \right),$$

и в силу (43)

$$I_2 \leq C(\alpha, \rho) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 2^{-2\nu(\alpha+\rho)} \psi_{2^\nu}^2 \right)^{1/2} \leq C(\alpha, \rho) \omega \left(\frac{1}{2^n} \right).$$

Таким образом, $f_1(x) \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Тогда из нашего предположения следует, что $f_1(x) \in W_p^{\lambda, \beta}$. С другой стороны,

$$\|f_1^{(\lambda, \beta)}\|_p \geq C(\alpha, \rho, \theta) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 \nu^{-2(\alpha+\rho)-1} \psi_\nu^2 \right)^{1/2} = \infty.$$

Полученное противоречие доказывает сходимость ряда в правой части (14).

Шаг 1(b): $1 < p \leq 2$. Рассмотрим ряд⁵

$$\psi_1 \cos x + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+\rho)} 2^{\nu(1/p-1)} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p)^{1/p} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \cos \mu x. \quad (48)$$

Применяя неравенство Йенсена

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta \right)^{1/\beta}, \quad a_n \geq 0, \quad 0 < \beta \leq \alpha < \infty,$$

запишем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(2^{-\nu(\alpha+\rho)} 2^{\nu(1/p-1)} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p)^{1/p} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \cos \mu x \right)^2 \right]^{p/2} dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu p(\alpha+\rho)} 2^{\nu(1-p)} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p) \left| \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \cos \mu x \right|^p \right] dx \\ &\leq C(p) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p) 2^{-\nu p(\alpha+\rho)} \leq C(p) \omega^p(1) \end{aligned}$$

⁵Подобный ряд рассмотрен в [45].

в силу того, что

$$C_1(p)2^{\nu(p-1)} \leq \left\| \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \cos \mu x \right\|_p^p \leq C_2(p)2^{\nu(p-1)}.$$

Тогда по теореме Литтлвуда–Пели (см. [21; т. 2]) существует $f_2 \in L_p$ с рядом Фурье (48). Нетрудно проверить, что $f_2 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. По нашему предположению $f_2(x) \in W_p^{\lambda,\beta}$. С другой стороны, применяя теорему Пели о коэффициентах Фурье (см. [21; т. 2]) для $f_2(x) \in L_p$, имеем

$$\begin{aligned} \|f_2^{(\lambda,\beta)}\|_p^p &\geq C(p) \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu p(\alpha+\rho)} 2^{\nu(1-p)} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p) \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \lambda_\mu^p \mu^{p-2} \\ &\geq C(\alpha, \rho, p) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\psi_{2^\nu}^p - \psi_{2^{\nu-1}}^p) \sum_{\xi=\nu}^{\infty} (2^{-\xi(\alpha+\rho)p} \lambda_{2^\xi}^p - 2^{-(\xi+1)(\alpha+\rho)p} \lambda_{2^{\xi+1}}^p) \\ &\geq C_1(\alpha, \rho, p) \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu^p \lambda_\nu^p \nu^{-p(\alpha+\rho)-1} - C_2(\alpha, \rho, p) \psi_1^p \lambda_2^p 2^{-p(\alpha+\rho)-1} = \infty. \end{aligned}$$

Это противоречие показывает, что ряд в правой части (14) сходится. Необходимость в (14) доказана.

Шаг 2. Докажем необходимость условия в (15) для случая $2 \leq p < \infty$.

Заметим, что, применяя леммы 3.1 и 4.2, мы получим для

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2^\nu x + b_\nu \sin 2^\nu x)$$

следующее соотношение:

$$\omega_\alpha \left(f, \frac{1}{2^m} \right)_p \asymp \left(2^{-2m\alpha} \sum_{\nu=1}^m (a_\nu^2 + b_\nu^2) 2^{2\nu\alpha} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right)^{1/2}. \quad (49)$$

Пусть $\omega(\cdot) \in \Phi_{\alpha+\rho}$. Тогда можно построить (см., например, [46], [47]) такую последовательность ε , что ε есть $q_{\alpha+\rho,\theta}(\omega)$ -последовательность. В этом случае рассмотрим

$$\varepsilon_0 + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)^{1/2} \cos x + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_{2^\nu}^2 - \varepsilon_{2^{\nu+1}}^2)^{1/2} \cos 2^\nu x. \quad (50)$$

Повторяя рассуждения, применявшиеся для ряда (46), мы получим, что ряд (50) есть ряд Фурье некоторой функции $f_3 \in L_p$. Так как $E_{2^{n-1}}(f_3)_p \leq C(p)\varepsilon_{2^n}$, то из (3) и (45) имеем $f_3 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Определим $f_{13} := f_1 + f_3$. Тогда $f_{13} \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta} H_\alpha[\varphi]$. Из (49) легко показать, что

$$C(\alpha, \beta) \omega_\alpha \left(f_{13}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1} \right)_p \geq \omega_\alpha \left(f_1^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1} \right)_p + \omega_\alpha \left(f_3^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1} \right)_p. \quad (51)$$

Далее оценим $\omega_\alpha(f_1^{(\lambda,\beta)}, 1/(n+1))_p$. Применяя (49) и используя свойства последовательности $\{\psi_\nu\}$, запишем для $2^m \leq n+1 < 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^2\left(f_1^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p &\geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=m}^{\infty} \psi_{2\nu}^2 2^{-2\nu(r+\alpha)} \left(\sum_{k=m}^{\nu} (\lambda_{2k}^2 - \lambda_{2k-1}^2) + \lambda_{2m-1}^2 \right) \\ &\geq C(\alpha, \beta) \left(\lambda_{2m}^2 \omega^2\left(\frac{1}{2^m}\right) + \sum_{k=m}^{\infty} (\lambda_{2k}^2 - \lambda_{2k-1}^2) \omega^2\left(\frac{1}{2^k}\right) \right) \\ &\geq C(\alpha, \beta) \left(\lambda_{n+1}^2 \omega^2\left(\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^2 - \lambda_\nu^2) \omega^2\left(\frac{1}{\nu}\right) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Приступим к оценке $\omega_\alpha(f_3^{(\lambda,\beta)}, 1/(n+1))_p$. Используя (49), имеем для $2^m \leq n+1 < 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^2\left(f_3^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p &\geq C(\alpha, \beta) 2^{-2m\alpha} \sum_{\nu=0}^m 2^{2\nu\alpha} \lambda_{2\nu}^2 (\varepsilon_{2\nu}^2 - \varepsilon_{2\nu+1}^2) \\ &\geq C_1(\alpha, \beta) 2^{-2m\alpha} \sum_{\nu=0}^m 2^{2\nu\alpha} \lambda_{2\nu}^2 \varepsilon_{2\nu}^2 - C_2(\alpha, p) \lambda_{2m+1}^2 \varepsilon_{2m+1}^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Тогда неравенство Джексона влечет

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^2\left(f_3^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p &\geq C(\alpha) E_{2^m-1}^2(f_3^{(\lambda,\beta)})_p \\ &\geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=m}^{\infty} \lambda_{2\nu}^2 (\varepsilon_{2\nu}^2 - \varepsilon_{2\nu+1}^2) \geq C(\alpha, \beta) \lambda_{2m}^2 \varepsilon_{2m}^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Применяя оценки (53) и (54), получим

$$\omega_\alpha\left(f_3^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p \geq C(\alpha, \beta) \left((n+1)^{-2\alpha} \sum_{\nu=1}^{n+1} \lambda_\nu^2 \nu^{2\alpha-1} \varepsilon_\nu^2 \right)^{1/2}. \quad (55)$$

Далее, (45) и $\nu^{-\rho} \lambda_\nu \downarrow$ позволяют записать оценки

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^2 \omega^2\left(\frac{1}{n+1}\right) + (n+1)^{-2\alpha} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{2(\rho+\alpha)} \omega^2\left(\frac{1}{\nu}\right) (\lambda_\nu^2 \nu^{-2\rho} - \lambda_{\nu+1}^2 (\nu+1)^{-2\rho}) \\ \leq C(\alpha, \rho) (n+1)^{-2\alpha} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{2\alpha-1} \lambda_\nu^2 \varepsilon_\nu^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Объединяя оценки (51), (52), (55), (56) и

$$\omega_\alpha\left(f_{13}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

мы получаем условие в правой части (15).

Шаг 3. Здесь мы показываем необходимость в (15) для случая $1 < p < 2$. Доказательство проводится аналогично доказательству для случая $2 \leq p < \infty$.

Единственная разница заключается в том, что используется теорема Пели о коэффициентах Фурье вместо леммы 4.2. В этом случае мы рассматриваем сумму $f_2(x)$ и следующую функцию:

$$\varepsilon_0 + (\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^{1/p} \cos x + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/p-1)} (\varepsilon_{2^{\nu+1}}^p - \varepsilon_{2^{\nu+2}}^p)^{1/p} \sum_{\mu=2^{\nu+1}}^{2^{\nu+1}} \cos \mu x. \quad (57)$$

Шаг 4. В доказательстве необходимости в (16) и (20) мы рассматриваем общий случай $1 \leq p \leq \infty$. Пусть Φ – класс всех убывающих нуль-последовательностей. Ясно, что

$$\frac{1}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \iff \forall \gamma = \{\gamma_n\} \in \Phi \quad \frac{\gamma_n}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Предположим, что $W_p^{\lambda, \beta} \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$ и существует такое $\gamma \in \Phi$, что соотношение $\gamma_n/\lambda_n = O[\omega(1/n)]$ не выполнено. Тогда существуют $\gamma = \{\gamma_n\} \in \Phi$ и $\{C_n \uparrow \infty\}$ такие, что $\gamma_{m_n}/\lambda_{m_n} \geq C_n \omega(1/m_n)$. Далее, мы выбираем такую подпоследовательность $\{m_{n_k}\}$, что $m_{n_{k+1}}/m_{n_k} \geq 2$ и $\gamma_{m_{n_k}} \leq 2^{-k}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m_{n_k}}}{\lambda_{m_{n_k}}} \cos(m_{n_k} + 1)x. \quad (58)$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_{m_{n_k}}}{\lambda_{m_{n_k}}} \leq \frac{1}{\lambda_{m_{n_0}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

то существует функция $f_4 \in L_p$ с рядом Фурье (58). В силу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m_{n_k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

имеем $f_4^{(\lambda, \beta)} \in L_p$, т.е. $f_4 \in W_p^{\lambda, \beta}$.

С другой стороны, используя (24) и $E_{n-1}(f)_p \geq C(|a_n| + |b_n|)$, получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha+\rho}\left(f_4, \frac{1}{m_{n_k}}\right)_p &\geq C(\alpha, \rho) E_{m_{n_k}}(f_4)_p \geq C(\alpha, \rho) \frac{\gamma_{m_{n_k}}}{\lambda_{m_{n_k}}} \\ &\geq C(\alpha, \rho) C_{n_k} \omega\left(\frac{1}{m_{n_k}}\right), \end{aligned}$$

т.е. $f_4 \notin H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$. Это противоречие доказывает, что условие $1/\lambda_n = O[\omega(1/n)]$ необходимо для $W_p^{\lambda, \beta} \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega]$.

Шаг 5. Для того чтобы доказать необходимость в (17) и (21), покажем, что для любых $\rho > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$ справедливо

$$W_p^{\lambda, \beta} H_{\alpha}[\varphi] \subset H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \implies \frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \quad (59)$$

Сначала заметим, что

$$\frac{\varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \iff \forall \gamma = \{\gamma_n\} \in \Phi \quad \frac{\gamma_n \varphi(1/n)}{\lambda_n} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Предположим, что соотношение в правой части (59) не выполнено. Тогда существуют $\gamma = \{\gamma_n\} \in \Phi$ и $\{C_n \uparrow \infty\}$ такие, что

$$\frac{\gamma_{m_n} \varphi(1/m_n)}{\lambda_{m_n}} \geq C_n \omega\left(\frac{1}{m_n}\right).$$

Мы выберем такую подпоследовательность $\{m_{n_k}\}$, что $m_{n_{k+1}}/m_{n_k} \geq 2$ и $\gamma_{m_{n_k}} \leq 2^{-k}$. В силу

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m_{n_k}} \varphi\left(\frac{1}{m_{n_k}}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{m_0}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

существует функция $f_5 \in L_p$ с рядом Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m_{n_k}} \varphi\left(\frac{1}{m_{n_k}}\right) \cos(m_{n_k} + 1)x. \quad (60)$$

Для $m_{n_k} \leq n < m_{n_{k+1}}$, применяя леммы 3.1 и 4.3, имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}\left(f_5, \frac{1}{n}\right)_p &\leq C \omega_{\alpha}\left(f_5, \frac{1}{n}\right)_{\infty} \\ &\leq C \left(n^{-\alpha} \sum_{s=0}^k \gamma_{m_{n_s}} \varphi\left(\frac{1}{m_{n_s}}\right) m_{n_s}^{\alpha} + \sum_{s=k+1}^{\infty} \gamma_{m_{n_s}} \varphi\left(\frac{1}{m_{n_s}}\right) \right) \\ &\leq C \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{s=0}^k \gamma_{m_{n_s}} + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{s=k+1}^{\infty} \gamma_{m_{n_s}} \right) \leq C \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Тогда $f_5 \in H_{\alpha}^p[\varphi]$, т.е., полагая

$$\frac{1}{\lambda} := \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \dots \right\},$$

имеем $f_5^{(1/\lambda, -\beta)} \in W_p^{\lambda, \beta} H_{\alpha}[\varphi]$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha+p}\left(f_5^{(1/\lambda, -\beta)}, \frac{1}{m_{n_k}}\right)_p &\geq C E_{m_{n_k}}(f_5^{(1/\lambda, -\beta)})_p \\ &\geq C \frac{\gamma_{m_{n_k}} \varphi(1/m_{n_k})}{\lambda_{m_{n_k}}} \geq C C_{n_k} \omega\left(\frac{1}{m_{n_k}}\right), \end{aligned}$$

т.е. $f_5^{(1/\lambda, -\beta)} \notin H_{\alpha+p}^p[\omega]$, что противоречит нашему предположению. Доказательство части необходимости в (16), (17) и (20), (21) закончено.

II. $p = 1$ или $p = \infty$.

Шаг 6. Докажем необходимость в (18). Пусть $H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta}$ и ряд в (18) расходится.

Шаг 6(a): $\sin(\beta\pi/2) \neq 0$. В этом случае расходимость ряда в (18) эквивалентна расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n/n)\omega(1/n)$.

Пусть $p = 1$. Возьмем $q_{\alpha+\rho,1}(\omega)$ -последовательность ε и рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}) K_{\nu}(x). \quad (61)$$

Этот ряд сходится в L_1 (см. [48]) к функции $f_6(x)$, причем $E_n(f_6)_1 = O(\varepsilon_n)$. Применяя (3), (45), получим $f_6 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta}$. Можно также переписать (61) следующим образом:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu x, \quad \text{где } a_{\nu} = \varepsilon_{\nu} - \nu \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}}{j+1}.$$

По лемме 4.1

$$\begin{aligned} \|f_6^{(\lambda,\beta)}\|_1 &\geq C(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} a_{\nu} = C(\beta) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \varepsilon_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}}{j+1} \right) \\ &= C(\beta) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \varepsilon_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} - a_{\nu+1}) \lambda_{\nu} \right) \\ &\geq C_1(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \varepsilon_{\nu} - C_2(\beta) \left(\lambda_1 a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) a_n \right). \end{aligned}$$

Далее, используя (44) и (45), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \varepsilon_{\nu} &\leq C(\rho) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \leq C(\rho) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \nu^{-(\alpha+\rho)-1} \sum_{m=1}^{\nu} m^{\alpha+\rho-1} \varepsilon_m \\ &= C(\rho) \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha+\rho-1} \varepsilon_m \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu}}{\nu^{\rho}} \nu^{-\alpha-1} \leq C(\rho, \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{m} \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|f_6^{(\lambda,\beta)}\|_1 \geq C_1(\alpha, \rho, \beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \nu^{-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) - C_2(\alpha, \rho, \beta) \left(\lambda_1 a_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) a_{\nu} \right). \quad (62)$$

С другой стороны, используя монотонность $\{a_{\nu}\}$ и лемму 4.1, имеем

$$\begin{aligned} C(\beta, \rho) \|f_6^{(\lambda,\beta)}\|_1 &\geq C(\rho) \left(\lambda_1 a_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu} a_{\nu}}{\nu} \right) \geq C(\rho) \left(\lambda_1 a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{2^{\nu}} a_{2^{\nu}} \right) \\ &\geq \lambda_1 a_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2^{\nu}} (\lambda_{2^{\nu+1}} - \lambda_{2^{\nu}}) \geq \lambda_1 a_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) a_{\nu}. \end{aligned} \quad (63)$$

Применяя (62) и (63), получим

$$\|f_6^{(\lambda, \beta)}\|_1 \geq C(\alpha, \rho, \beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \nu^{-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) = \infty.$$

Полученное противоречие влечет сходимость ряда в (18).

Пусть теперь $p = \infty$. Определим функцию $f_7(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} \nu^{-1} \sin \nu x$ (см. [49]), где ε есть $q_{\alpha+\rho, 1}(\omega)$ -последовательность. Тогда $E_n(f_7)_{\infty} \leq C\varepsilon_{n+1}$. Используя (3) и (45), получим $f_7 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \infty &= \|f_7^{(\lambda, \beta)}\|_{\infty} \geq C(\beta) \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\alpha+\rho)} \varepsilon_{2^{\nu}} \frac{\lambda_{2^{\nu}}}{2^{\nu(\alpha+\rho)}} \\ &\geq C(\alpha, \rho, \beta) \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\alpha+\rho)} \varepsilon_{2^{\nu}} \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{\lambda_{2^m}}{2^{m(\alpha+\rho)}} \geq C(\alpha, \rho, \beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \nu^{-1} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right), \end{aligned}$$

и полученное противоречие доказывает сходимость ряда в (18).

Шаг 6(b): $\sin(\beta\pi/2) = 0$. Пусть ряд в (18) расходится. Рассмотрим только нетривиальный случай $\rho > 0$. Пусть ε – это $q_{\alpha+\rho, 1}(\omega)$ -последовательность. В силу свойств $\{\lambda_n\}$ имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) \omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ &\leq C(\alpha, \rho) \sum_{s=0}^{\infty} (\varepsilon_{2^s} - \varepsilon_{2^{s+1}}) \left[\sum_{m=0}^s 2^{m(\alpha+\rho)} \sum_{\nu=m}^s 2^{-\nu(\alpha+\rho)} (\lambda_{2^{\nu}} - \lambda_{2^{\nu-1}}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^s 2^{m(\alpha+\rho)} \sum_{\nu=s+1}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+\rho)} (\lambda_{2^{\nu}} - \lambda_{2^{\nu-1}}) \right] \leq C(\alpha, \rho) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}) \lambda_{\nu}. \end{aligned} \quad (64)$$

Пусть $p = 1$. Тогда ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}) \tau_{\nu}(x) \quad (65)$$

сходится (см. [48]) к $f_8 \in L_1$, причем $E_n(f_8)_1 \leq C\varepsilon_{n+1}$. Значит, мы имеем $f_8 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta}$.

Запишем ряд (65) следующим образом:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu x, \quad \text{где } b_{\nu} = \sum_{j=\nu}^{2\nu-2} \left(1 - \frac{\nu}{j+1}\right) (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}) + \sum_{j=2\nu-1}^{\infty} \frac{\nu}{j+1} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}).$$

По лемме 4.1 запишем

$$\|f_8^{(\lambda, \beta)}\|_1 \geq C(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} \frac{b_{\nu}}{\nu} \geq C(\beta) \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu} (\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}).$$

Это противоречит (64). Таким образом, ряд в (18) сходится.

Пусть теперь $p = \infty$. Пусть ψ есть $Q_{\alpha+\rho,1}$ -последовательность. Тогда определим

$$f_9(x) = \psi_1 \cos x + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu(\rho+\alpha)} (\psi_{2\nu} - \psi_{2\nu-1}) \cos 2^\nu x.$$

Как и для функции f_1 в случае $2 \leq p < \infty$, нетрудно проверить, что $f_9 \in H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta}$. Применяя лемму 4.3, получим

$$\begin{aligned} \|f_9^{(\lambda,\beta)}\|_\infty &\geq C(\beta) \left(\lambda_1 \psi_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{2\nu} 2^{-\nu(\rho+\alpha)} (\psi_{2\nu} - \psi_{2\nu-1}) \right) \\ &\geq C(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \nu^{-(\rho+\alpha)-1} \psi_\nu \geq C(\beta) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \left(\frac{1}{\nu} \right) = \infty, \end{aligned}$$

что противоречит $f_9 \in W_p^{\lambda,\beta}$. Необходимость в (18) доказана.

Шаг 7. Покажем необходимость условия в (19) для случая $\sin(\pi\beta/2) \neq 0$. Пусть $H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta} H_\alpha[\varphi]$. Возьмем $q_{\alpha+r,1}(\omega)$ -последовательность ε . Тогда (45) справедливо для $\alpha + r$ вместо α и для 1 вместо θ . В силу $\sin(\pi\beta/2) \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} J &:= \lambda_{n+1} \omega \left(\frac{1}{n+1} \right) + n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \nu^{r+\alpha} (\nu^{-r} \lambda_\nu - (\nu+1)^{-r} \lambda_{\nu+1}) \omega \left(\frac{1}{\nu} \right) \\ &\quad + \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \omega \left(\frac{1}{\nu} \right) + \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\omega(1/\nu)}{\nu} \\ &\leq C(\alpha, \beta, r) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} + n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \varepsilon_\nu \nu^{\alpha-1} \right) =: C(\alpha, \beta, r) (J_1 + J_2). \quad (66) \end{aligned}$$

Мы будем использовать несколько раз следующие очевидные соотношения:

$$\omega_\alpha \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \asymp \omega_\alpha \left(f_+, \frac{1}{n} \right)_p + \omega_\alpha \left(f_-, \frac{1}{n} \right)_p, \quad \text{где } f_\pm(x) := \frac{f(x) \pm f(-x)}{2}. \quad (67)$$

Шаг 7(a): $p = \infty$ и $\cos(\pi\alpha/2) \neq 0$. В этом случае по лемме 3.1 имеем $(f_{7+}^{(\lambda,\beta)}) := (f_7^{(\lambda,\beta)})_+$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \left(f_7^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n} \right)_p &\geq \omega_\alpha \left(f_{7+}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \geq C(\alpha) n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f_{7+}^{(\lambda,\beta)})(\cdot)\|_p \\ &\geq C(\alpha) n^{-\alpha} |V_n^{(\alpha)}(f_{7+}^{(\lambda,\beta)})(0)|_p \geq C(\alpha, \beta) J_2. \quad (68) \end{aligned}$$

Используя (24) и $\sum_{k=2n}^{\infty} a_k \leq 4E_n(f)_\infty$ (см. [49]), запишем

$$\omega_\alpha \left(f_7^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \geq C(\alpha) E_{[n/2]}(f_{7+}^{(\lambda,\beta)})_p \geq C(\alpha, \beta) J_1. \quad (69)$$

Выше было доказано, что $f_7 \in H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta} H_\alpha[\varphi]$. Объединяя неравенства (68), (69) и (66), мы приходим к оценке в правой части (19).

Шаг 7(b): $p = \infty$ и $\cos(\pi\alpha/2) = 0$. Если $\cos(\pi\beta/2) \neq 0$, то мы используем (69) и

$$\omega_\alpha\left(f_7^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_p \geq C(\alpha)n^{-\alpha}\|V_n^{(\alpha)}(f_7^{(\lambda,\beta)})(\cdot)\|_p \geq C(\alpha,\beta)J_2,$$

если $\cos(\pi\beta/2) = 0$, то $f_7 = \pm f_{7+}$ и

$$\omega_\alpha\left(f_7^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_p \geq C(\alpha)E_{[n/2]}(f_{7+}^{(\lambda,\beta)})_p \geq C(\alpha,\beta)J_1.$$

Для того чтобы получить оценку J_2 , определим

$$f_{10}(x) = \frac{\varepsilon_0}{2} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_{2\nu} - \varepsilon_{2\nu+1})\cos 2^\nu x.$$

Ясно, что $E_n(f_{10})_p \leq \varepsilon_{n+1}$. Тогда, применяя (45), получим

$$f_{10} \in H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda,\beta}H_\alpha[\varphi].$$

Далее, используя

$$\omega_\alpha\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geq C(\alpha)n^{-\alpha}\|V_n^{(\alpha)}(f)\|_p$$

и лемму 4.3, запишем ($2^m \leq n+1 < 2^{m+1}$)

$$\begin{aligned} \omega_\alpha\left(f_{10}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{2^m}\right)_p &\geq C(\alpha,\beta)2^{-m\alpha}\sum_{\nu=0}^m\lambda_{2^\nu}2^{\nu\alpha}(\varepsilon_{2^\nu} - \varepsilon_{2^{\nu+1}}) \\ &\geq C_1(\alpha,\beta,r)2^{-m\alpha}\sum_{\nu=0}^m\lambda_{2^\nu}2^{\nu\alpha}\varepsilon_{2^\nu} - C_2(\alpha,\beta,r)\lambda_{2^{m+1}}\varepsilon_{2^{m+1}}. \end{aligned} \quad (70)$$

В то же время

$$\omega_\alpha\left(f_{10}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{2^m}\right)_p \geq C(\alpha,\beta)\lambda_{2^{m+1}}\varepsilon_{2^{m+1}}.$$

Тогда имеем

$$\omega_\alpha\left(f_{10}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_p \geq C(\alpha,\beta,r)J_2, \quad (71)$$

и, применяя (67), получаем

$$\begin{aligned} C(\alpha,\beta,r)[J_1 + J_2] &\leq \omega_\alpha\left(f_{10}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{2^m}\right)_p + \omega_\alpha\left(f_7^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{2^m}\right)_p \\ &\asymp \omega_\alpha\left((f_7 + f_{10})^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_p = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Необходимость в (19) доказана.

Шаг 7(c): $p = 1$ и $\cos(\pi\alpha/2) \neq 0$. В этом случае мы используем функцию f_6 . Известно, что $f_6 \in H_{\alpha+r}^p[\omega]$, и по лемме 4.1 имеем

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \left(f_6^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_1 &\geq C(\alpha) E_n(f_{6-}^{(\lambda, \beta)})_p \geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \frac{a_\nu}{\nu} \\ &\geq C(\alpha, \beta) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} - a_{n+1} \lambda_n - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) a_\nu \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\omega_\alpha \left(f_6^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_1 \geq C(\alpha, \beta, r) \left(a_{n+1} \lambda_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) a_\nu \right).$$

Тогда из последних двух неравенств следует

$$\omega_\alpha(f_6^{(\lambda, \beta)}, 1/n)_1 \geq C(\alpha, \beta, r) J_1.$$

Кроме того,

$$\omega_\alpha \left(f_6^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \geq C(\alpha) n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f_{6-}^{(\lambda, \beta)})(\cdot)\|_p \geq C(\alpha, \beta) J_2. \quad (72)$$

Шаг 7(d): $p = 1$ и $\cos(\pi\alpha/2) = 0$. Если $\cos(\pi\beta/2) \neq 0$, то мы используем $\omega_\alpha(f_6^{(\lambda, \beta)}, 1/n)_1 \geq C(\alpha, \beta, r) J_1$ и

$$\omega_\alpha \left(f_6^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_p \geq C(\alpha) n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f_{6+}^{(\lambda, \beta)})(\cdot)\|_p \geq C(\alpha, \beta) J_2,$$

если $\cos(\pi\beta/2) = 0$, то рассмотрим $f_6 + f_8$. Используя леммы 3.1 и 4.1, получаем

$$\begin{aligned} \omega_\alpha \left(f_8^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_1 &\geq C(\alpha, \beta) n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \nu^{\alpha-1} b_\nu \\ &\geq C_1(\alpha, \beta, r) n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \nu^{\alpha-1} \varepsilon_{\nu-1} - C_2(\alpha, \beta, r) \lambda_n \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Так как $\omega_\alpha(f_8^{(\lambda, \beta)}, 1/n)_1 \geq C(\alpha, \beta, r) \lambda_n \varepsilon_n$, то $\omega_\alpha(f_8^{(\lambda, \beta)}, 1/n)_1 \geq C(\alpha, \beta, r) J_2$. Итак,

$$C(\alpha, \beta, r) [J_1 + J_2] \leq \omega_\alpha \left((f_6 + f_8)^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n} \right)_p = O \left[\varphi \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

т.е. необходимость в (19) доказана.

Шаг 8. Мы доказываем необходимость в (19) в случае $\sin(\pi\beta/2) = 0$. Пусть $H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi]$, и пусть ε — это $q_{\alpha+r, 1}(\omega)$ -последовательность. Так как

$\sin(\pi\beta/2) = 0$, то из (45) следует

$$\begin{aligned} & \lambda_{n+1}\omega\left(\frac{1}{n+1}\right) + n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \nu^{r+\alpha} (\nu^{-r}\lambda_{\nu} - (\nu+1)^{-r}\lambda_{\nu+1})\omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ & \quad + \left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu})\omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ & \leq C(\alpha, \beta, r) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_{\nu}(\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu+1}) + n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu}\varepsilon_{\nu}\nu^{\alpha-1} \right) \\ & =: C(\alpha, \beta, r)(J_3 + J_4). \end{aligned} \quad (73)$$

Шаг 8(a): $p = \infty$ и $\cos(\pi\alpha/2) \neq 0$. Применяя неравенство Джексона и лемму 4.3, получим

$$\omega_{\alpha}\left(f_{10}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{2^m}\right)_p \geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=m}^{\infty} \lambda_{2^{\nu}}(\varepsilon_{2^{\nu}} - \varepsilon_{2^{\nu+1}}). \quad (74)$$

Мы также заметим, что по лемме 4.3 неравенство (71) справедливо для всех $\alpha > 0$. Тогда это замечание и (74) позволяют записать

$$\omega_{\alpha}\left(f_{10}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p \geq C(\alpha, \beta)(J_3 + J_4).$$

Используя условие (73) и $f_{10} \in H_{\alpha+r}^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} H_{\alpha}[\varphi]$, мы приходим к соотношению в правой части (19).

Шаг 8(b): $p = \infty$ и $\cos(\pi\alpha/2) = 0$. Тогда рассмотрим f_{10} и $f_{11} := \tilde{f}_{10}$. Ясно, что $f_{11} \in L_p$ и $f_{10} + f_{11} \in H_{\alpha+r}^p[\omega]$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha}\left(f_{10}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p \geq C(\alpha, \beta)J_3, \quad \omega_{\alpha}\left(f_{11}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p \geq C(\alpha, \beta)J_4, \\ & \omega_{\alpha}\left(f_{10}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p + \omega_{\alpha}\left(f_{11}^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p \asymp \omega_{\alpha}\left((f_{10} + f_{11})^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n+1}\right)_p. \end{aligned}$$

Шаг 8(c): $p = 1$ и $\cos(\pi\alpha/2) \neq 0$. Так как

$$f_8^{(\lambda, \beta)}(x) \sim \pm \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} b_{\nu} \sin \nu x,$$

то по леммам 3.1 и 4.1 мы запишем (см. шаг 7(d))

$$\omega_{\alpha}\left(f_8^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n}\right)_p \geq C(\alpha) n^{-\alpha} \|V_n^{(\alpha)}(f_8^{(\lambda, \beta)})(\cdot)\|_p \geq C(\alpha, \beta)J_4. \quad (75)$$

Далее, применяя лемму 4.1 и неравенство Джексона (24), имеем

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha}\left(f_8^{(\lambda, \beta)}, \frac{1}{n}\right)_1 \geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_{\nu} \frac{b_{\nu}}{\nu} \geq C(\alpha, \beta) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_{\nu} \sum_{j=2\nu-1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}}{j+1} \\ & \geq C(\alpha, \beta, r) \sum_{j=4n-1}^{\infty} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) \lambda_{\nu}. \end{aligned}$$

Используя свойства модуля гладкости, получаем (19).

Шаг 8(d): $p = 1$ и $\cos(\pi\alpha/2) = 0$. Мы используем тот факт, что $f_{12} := \tilde{f}_8 \in L_1$ и $E_n(f_{12})_p \leq C\varepsilon_{n+1}$ (см. [48]). Тогда $f_8 + f_{12} \in H_{\alpha+r}^p[\omega]$ и

$$\omega_\alpha\left(f_8^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_1 \geq C(\alpha, \beta)J_3, \quad \omega_\alpha\left(f_{12}^{(\lambda,\beta)}, \frac{1}{n}\right)_1 \geq C(\alpha, \beta)J_4.$$

Теорема 1 доказана полностью.

§ 5. Следствия. Оценки преобразованных рядов Фурье

В теореме 1 фактически получены оценки норм и модулей гладкости преобразованных рядов Фурье, т.е. оценки $\|\varphi\|_p$ и $\omega_\alpha(\varphi, \delta)_p$, где $\varphi \sim \sigma(f, \lambda)$, через $\omega_\gamma(f, \delta)_p$. Анализируя полученные результаты, видим, что важную роль в этих оценках играют два обстоятельства: поведение преобразующей последовательности $\{\lambda_n\}$ и выбор рассматриваемого пространства (в связи со справедливостью неравенства Рисса (28) для L_p , $1 < p < \infty$ и отсутствием подобного неравенства для L_p , $p = 1, \infty$).

Разберем некоторые важные примеры подробнее: отдельно для L_p в случае $1 < p < \infty$ и в случае $p = 1, \infty$.

5.1. Случай $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta = \min(2, p)$, $\tau = \max(2, p)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\{n^{-\rho}\lambda_n\}$ не возрастает.

1. Если для $f \in L_p^0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^\theta - \lambda_n^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta\left(f, \frac{1}{n}\right)_p,$$

то существует функция $\varphi \in L_p^0$ с рядом Фурье $\sigma(f, \lambda)$, причем

$$\|\varphi\|_p \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \left\{ \lambda_1^\theta \|f\|_p^\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^\theta - \lambda_n^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \right\}^{1/\theta}, \quad (76)$$

и

$$\begin{aligned} & \omega_\alpha\left(\varphi, \frac{1}{n+1}\right)_p \\ & \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \left\{ n^{-\alpha\theta} \sum_{\nu=1}^n \nu^{(\rho+\alpha)\theta} (\nu^{-\rho\theta} \lambda_\nu^\theta - (\nu+1)^{-\rho\theta} \lambda_{\nu+1}^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\theta - \lambda_\nu^\theta) \omega_{\alpha+\rho}^\theta\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p + \lambda_{n+1}^\theta \omega_{\alpha+\rho}^\theta\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \right\}^{1/\theta}. \quad (77) \end{aligned}$$

II. Если для $f \in L_p^0$ существует функция $\varphi \in L_p$ с рядом Фурье $\sigma(f, \lambda)$, то

$$\left\{ \lambda_1^\tau \|f\|_p^\tau + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^\tau - \lambda_n^\tau) \omega_{\alpha+\rho}^\tau \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right\}^{1/\tau} \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \|\varphi\|_p, \quad (78)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ n^{-\alpha\tau} \sum_{\nu=1}^n \nu^{(\rho+\alpha)\tau} (\nu^{-\rho\tau} \lambda_\nu^\tau - (\nu+1)^{-\rho\tau} \lambda_{\nu+1}^\tau) \omega_{\alpha+\rho}^\tau \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^\tau - \lambda_\nu^\tau) \omega_{\alpha+\rho}^\tau \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p + \lambda_{n+1}^\tau \omega_{\alpha+\rho}^\tau \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \right\}^{1/\tau} \\ & \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \omega_\alpha \left(\varphi, \frac{1}{n+1} \right)_p, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\omega_{\alpha+\rho} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \frac{\|\varphi\|_p}{\lambda_n}, \quad (80)$$

$$\omega_{\alpha+\rho} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq C(p, \lambda, \alpha, \rho) \frac{\omega_\alpha(\varphi, 1/n)_p}{\lambda_n}. \quad (81)$$

Неравенства (76), (77) и (80), (81) были фактически доказаны в теореме 1 (см. доказательство достаточности в части I). Оценки (78), (79) доказываются совершенно аналогично: с использованием леммы 3.1, теорем Литтлвуда–Пели, Марцинкевича и неравенства Минковского (см. также [32] и [41]).

Важным следствием теоремы 2 является

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\theta = \min(2, p)$ и $\tau = \max(2, p)$. Тогда для любых $k, r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} C_1 \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\tau-1} \omega_{k+r}^\tau \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\tau} & \leq \omega_k \left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right)_p \\ & \leq C_2 \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \omega_{k+r}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\theta}, \end{aligned} \quad (82)$$

где $C_1 = C_1(p, k, r)$, $C_2 = C_2(p, k, r)$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что правая оценка в (82) для натуральных k и r показана в [18]. Два последних неравенства дают более точные по порядку оценки, чем (7) и (8). Действительно, используя свойства модуля гладкости и неравенство Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} n^r \omega_{k+r} \left(f, \frac{1}{n} \right)_p & \leq C(k, r) \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\tau-1} \omega_{k+r}^\tau \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\tau}, \\ \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \omega_{k+r}^\theta \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \right\}^{1/\theta} & \leq C(k, r) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_{k+r} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Пусть $\psi(t) = t^r \ln^{-A}(1/t)$ и $2 \leq p < \infty$, $1/2 < A < 1$. Если $\omega_{k+r}(f, t)_p \asymp \psi(t)$, то из неравенств (7) и (8) следует только $C \ln^{-A}(1/t) \leq \omega_k(f^{(r)}, t)_p$, в то время как (82) влечет

$$C_1 \ln^{-A+1/p} \left(\frac{1}{t} \right) \leq \omega_k(f^{(r)}, t)_p \leq C_2 \ln^{-A+1/2} \left(\frac{1}{t} \right),$$

что точнее.

Доказательство следствия 1 вытекает из (77) и (79) для $r = \rho$, так как если $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, то можно считать, что $f^{(r)} \sim \sigma(f, \lambda)$ для $\{\lambda_n = n^r\}$.

Оценки (7), (8) и (82) показывают, что $\omega_\alpha(f^{(\gamma)}, 1/n)_p$ естественно оценивать через $\omega_{\alpha+r}(f, 1/\nu)_p$. Дальнейшие исследования позволили выделить три различных типа таких оценок (далее нам будет удобно записывать неравенства в интегральной форме):

1) $\gamma = r$ (см. следствие 1)⁶,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^\delta t^{-r\tau-1} \omega_{r+\alpha}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau} &\ll \omega_\alpha(f^{(r)}, \delta)_p \\ &\ll \left\{ \int_0^\delta t^{-r\theta-1} \omega_{r+\alpha}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}; \end{aligned} \quad (83)$$

2) $\gamma = r - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < r$ (см. теорему 2 для $\rho = r$ и $\lambda_n = n^{r-\varepsilon}$),

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^\delta t^{-(r-\varepsilon)\tau-1} \omega_{r+\alpha}^\tau(f, t)_p dt + \delta^{\alpha\tau} \int_\delta^1 t^{-(r-\varepsilon+\alpha)\tau-1} \omega_{r+\alpha}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \\ \ll \omega_\alpha(f^{(r-\varepsilon)}, \delta)_p, \end{aligned} \quad (84)$$

$\omega_\alpha(f^{(r-\varepsilon)}, \delta)_p$

$$\ll \left\{ \int_0^\delta t^{-(r-\varepsilon)\theta-1} \omega_{r+\alpha}^\theta(f, t)_p dt + \delta^{\alpha\theta} \int_\delta^1 t^{-(r-\varepsilon+\alpha)\theta-1} \omega_{r+\alpha}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}; \quad (85)$$

3) $\gamma = r + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \alpha$ (см. [50]),

$$\left\{ \int_0^\delta t^{-(r+\varepsilon)\tau-1} \omega_{r+\alpha}^\tau(f, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \ll \delta^{\alpha-\varepsilon} \left\{ \int_\delta^1 t^{-(\alpha-\varepsilon)\theta-1} \omega_\alpha^\theta(f^{(r+\varepsilon)}, t)_p dt \right\}^{1/\theta}, \quad (86)$$

$$\delta^{\alpha-\varepsilon} \left\{ \int_\delta^1 t^{-(\alpha-\varepsilon)\tau-1} \omega_\alpha^\tau(f^{(r+\varepsilon)}, t)_p dt \right\}^{1/\tau} \ll \left\{ \int_0^\delta t^{-(r+\varepsilon)\theta-1} \omega_{r+\alpha}^\theta(f, t)_p dt \right\}^{1/\theta}. \quad (87)$$

⁶Здесь и далее $\tau = \max(2, p)$, $\theta = \min(2, p)$. Мы запишем $A_1 \ll A_2$, если $A_1 \leq C A_2$, $C \geq 1$. Также, если $A_1 \ll A_2$ и $A_2 \ll A_1$, то $A_1 \asymp A_2$.

Некоторые более общие оценки модулей гладкости преобразованных рядов Фурье вида (84)–(87) можно получить (см. [41], [50], [51]), используя последовательности вида (см., например, [41], [52]) $\{\Lambda_n(s) := \Lambda(s, 1/n)\}$, где

$$\Lambda(s, t) = \Lambda(s, r, t) = \left(\int_t^1 \xi(u) du + t^{-rs} \int_0^t u^{rs} \xi(u) du \right)^{1/s}, \quad (88)$$

а неотрицательная на $[0, 1]$ функция $\xi(u)$ такова, что $u^{rs}\xi(u)$ суммируема.

5.2. Случай $p = 1, \infty$. Оценки $\omega_\alpha(\varphi, t)_p$ через $\omega_{r+\alpha}(f, t)_p$ для этого случая следуют из теоремы 1 (см. п. II). Остановимся лишь на часто используемых оценках $\omega_\alpha(f^{(r)}, t)_p$ и $\omega_\alpha(\tilde{f}^{(r)}, t)_p$ через $\omega_{r+\alpha}(f, t)_p$ (см. также [27]–[29]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $p = 1, \infty$, то неравенства (7), (8) справедливы для любых $k, r > 0$.

При $\{\lambda_n = n^\rho\}$, $\rho \geq 0$ и $\beta = \rho + 1$ теорема 1 влечет следующее

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $p = 1, \infty$. Тогда

$$H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset \widetilde{W}_p^\rho \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Отметим, что в случае $p = 1, \rho = 0$ и $\alpha = 1$ следствие 3 дает ответ на вопрос Ф. Морица (см. [53]) о необходимых условиях вложения $H_{\alpha+\rho}^p[\omega] \subset \widetilde{W}_p^\rho$. Мы также упоминаем статьи [8], [43] и [54], где теоремы вложения доказаны в части необходимости.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $p = 1, \infty$, и пусть $r, \alpha, \varepsilon > 0$.

I. Если для $f \in L_p$ ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_{r+\alpha+\varepsilon}(f, 1/\nu)_p$$

сходится, то существует $\tilde{f}^{(r)} \in L_p$ и

$$\begin{aligned} \omega_\alpha\left(\tilde{f}^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p &\leq C(r, \alpha, \varepsilon) \left(n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \nu^{r+\alpha-1} \omega_{r+\alpha+\varepsilon}\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_{r+\alpha+\varepsilon}\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

II. Если для $f \in L_p$ существует $\tilde{f}^{(r)} \in L_p$, то

$$\omega_{r+\alpha+\varepsilon}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C(r, \alpha, \varepsilon)}{n^r} \omega_\alpha\left(\tilde{f}^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (89)$$

Используя прямые и обратные теоремы теории приближений, мы можем записать неравенство из п. I предыдущего следствия в следующем эквивалентном виде (см. также [20], [26; т. 2, гл. 6, 7], [27]–[29]).

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $p = 1, \infty$, и пусть $r \geq 0$, $\alpha > 0$. Если для $f \in L_p$ ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu}(f)_p$ сходится, то существует $\tilde{f}^{(r)} \in L_p$ и

$$\omega_{\alpha}\left(\tilde{f}^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C(r, \alpha, \varepsilon) \left(n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^n \nu^{r+\alpha-1} E_{\nu}(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu}(f)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

§ 6. Замечания

1. Теоремы вложения классов $H_l^p[\omega]$, W_p^r и $W_p^r H_k[\varphi]$ в части необходимости изучались, в частности, в работах Н. К. Бари и С. Б. Стечкина ($H_1^p[\varphi] \subset H_1^p[\omega]$; см. [20]), В. Э. Гейта ($H_l^p[\varphi] \subset H_k^p[\omega]$, $H_l^p[\varphi] \subset \tilde{H}_k^p[\omega]$, $p = 1, \infty$; см. [47]), Н. А. Ильясова ($H_l^p[\varphi] \subset W_p^r$, $H_l^p[\omega] \subset W_p^r H_k[\varphi]$, $r, k \in \mathbb{N}$; см. [55]). Отметим также, что все оценки в теореме 1 являются “правильными” (по терминологии Стечкина), т.е. порядковая точность реализуется с помощью индивидуальных функций. Мы благодарим Н. А. Ильясова за данное замечание.

Теорема 1 уточняет предыдущие результаты как в части необходимости, так и в части достаточности. Достаточные условия для вложений $H_l^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta} H_k[\varphi]$ и $H_l^p[\omega] \subset W_p^{\lambda, \beta}$ изучались в работах [26], [28], [29]. Из этих работ, в частности, для важного типового примера $f^{(\lambda, \beta)} \equiv f^{(r)}$, $r > 0$, следуют оценки

$$E_n(f^{(r)})_p \leq C(k, p) \left(n^r E_n(f)_p + \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r\theta-1} E_k^{\theta}(f)_p \right\}^{1/\theta} \right), \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p &\leq \frac{C(k, r, p)}{n^k} \left(\sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{(k+r)\theta-1} E_{\nu}^{\theta}(f)_p \right)^{1/\theta} \\ &\quad + C(k, r, p) \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} E_{\nu}^{\theta}(f)_p \right)^{1/\theta}, \end{aligned} \quad (91)$$

где $\theta = 1$. Вместе с тем для случая $1 < p < \infty$ из теоремы 3 и теоремы 1 соответственно видно⁷, что эти же оценки справедливы с $\theta = \min(2, p)$, причем эта степень неулучшаема.

2. Обобщением класса $W_p^r E[\xi]$ является класс

$$W_p^{\lambda, \beta} E[\omega] = \{f \in W_p^{\lambda, \beta} : E_n(f^{(\lambda, \beta)})_p = O[\omega_n]\}.$$

Здесь мы не будем подробно рассматривать теоремы вложения классов $W_p^{\lambda, \beta} E[\omega]$, $W_p^{\lambda, \beta} H_{\alpha}[\varphi]$ и $E_p[\varepsilon] \equiv W_p^{\{1\}, 0} E[\varepsilon]$. Отметим, что некоторые из таких теорем легко вытекают из теоремы 1 с использованием прямых и обратных теорем (1)–(4), (6), а некоторые приводятся в [22], [23], [26; т. 2, гл. 6, 7] и [29]. Полное решение задачи о вложении классов $W_p^{\lambda, \beta}$, $W_p^{\lambda, \beta} E[\xi]$ и $E_p[\varepsilon]$ для случая, когда λ_n удовлетворяет Δ_2 -условию, описывается следующим результатом.

⁷Из теоремы 1 следует неравенство (85), которое эквивалентно (с использованием прямых и обратных теорем) неравенству (91).

ТЕОРЕМА 3 (см. [56]). Пусть $1 < p < \infty$, $\theta = \min(2, p)$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая Δ_2 -условию, т.е. $\lambda_{2n} \leq C\lambda_n$. Пусть также $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ и $\omega = \{\omega_n\}$ суть невозрастающие нуль-последовательности.

I. Если $1 < p < \infty$, то

$$\begin{aligned} E_p[\varepsilon] \subset W_p^{\lambda, \beta} &\iff \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1}^{\theta} - \lambda_n^{\theta}) \varepsilon_n^{\theta} < \infty, \\ E_p[\varepsilon] \subset W_p^{\lambda, \beta} E[\omega] &\iff \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1}^{\theta} - \lambda_{\nu}^{\theta}) \varepsilon_{\nu}^{\theta} \right\}^{1/\theta} + \lambda_n \varepsilon_n = O[\omega_n], \\ W_p^{\lambda, \beta} \subset E_p[\varepsilon] &\iff \frac{1}{\lambda_n} = O[\varepsilon_n], \\ W_p^{\lambda, \beta} E[\omega] \subset E_p[\varepsilon] &\iff \frac{\omega_n}{\lambda_n} = O[\varepsilon_n]. \end{aligned}$$

II. Пусть $p = 1$ или $p = \infty$.

(a) Если $\Delta\lambda_n \leq C\Delta\lambda_{2n}$ и $\Delta^2\lambda_n \geq 0$ (или ≤ 0), то

$$\begin{aligned} E_p[\varepsilon] \subset W_p^{\lambda, \beta} &\iff \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \varepsilon_n + \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty, \\ E_p[\varepsilon] \subset W_p^{\lambda, \beta} E[\omega] &\iff \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_{\nu}) \varepsilon_{\nu} + \lambda_n \varepsilon_n \\ &\quad + \left| \sin \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_{\nu} \frac{\varepsilon_{\nu}}{\nu} = O[\omega_n]. \end{aligned}$$

(b) Если для $\beta = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, выполнено условие $\Delta^2(1/\lambda_n) \geq 0$, а для $\beta \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, выполнены условия $\Delta^2(1/\lambda_n) \geq 0$ и $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} 1/(\nu\lambda_{\nu}) \leq C/\lambda_n$, то

$$\begin{aligned} W_p^{\lambda, \beta} \subset E_p[\varepsilon] &\iff \frac{1}{\lambda_n} = O[\varepsilon_n], \\ W_p^{\lambda, \beta} E[\omega] \subset E_p[\varepsilon] &\iff \frac{\omega_n}{\lambda_n} = O[\varepsilon_n]. \end{aligned}$$

3. Класс Вейля $W_p^{\lambda, \beta}$ совпадает с классом функций из $L(0, 2\pi)$, ряд Фурье которых представим в виде

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda_{\nu}} \int_0^{2\pi} \psi(x-t) \cos\left(\nu t - \frac{\pi\beta}{2}\right) dt, \quad \psi(x) \in L^0.$$

Далее рассмотрим случай, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}} \cos\left(\nu t - \frac{\pi\beta}{2}\right)$$

есть ряд Фурье суммируемой функции $D_{\lambda,\beta}(t)$. Это заведомо так, например, когда $\{\lambda_\nu \uparrow \infty\}$ ($n \uparrow$) и $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/(\nu\lambda_\nu) < \infty$ (см. [21; гл. 5]). Тогда элементы $W_p^{\lambda,\beta}$ могут отличаться от функций, представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x-t) D_{\lambda,\beta}(t) dt, \quad \psi(x) \in L^0,$$

только свободным членом.

Тогда ψ совпадает почти всюду с $f^{(\lambda,\beta)}$ (см., например, [39; гл. 11]). Подобные вопросы подробно обсуждаются также в книге [26; т. 1, гл. 3]. Отметим, что представление в виде свертки впервые рассматривалось в [35].

4. Результаты §2 и §5 могут быть перенесены на многомерный случай. Запишем только следующие оценки для смешанных модулей гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ порядков α_1 и α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) функции f (в метрике L_p) по переменным x_1 и x_2 соответственно⁸.

ТЕОРЕМА 4 (см. также [50]). Пусть $f(x_1, x_2) \in L_p$, $1 < p < \infty$, $\theta = \min(2, p)$, $\tau = \max(2, p)$, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2 > 0$.

I. Если

$$J_1(\theta) := \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-r_1\theta-1} t_2^{-r_2\theta-1} \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta} < \infty,$$

то f имеет смешанную производную в смысле Вейля $f^{(r_1, r_2)} \in L_p$, причем

$$\|f^{(r_1, r_2)}\|_p \leq C(p, r_1, r_2) J_1(\theta)$$

и

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(r_1, r_2)}, \delta_1, \delta_2)_p \leq C(p, \alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \times \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-r_1\theta-1} t_2^{-r_2\theta-1} \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}^\theta(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \right)^{1/\theta} =: C J_2(\theta).$$

II. Если f имеет смешанную производную в смысле Вейля $f^{(r_1, r_2)} \in L_p$, то

$$J_1(\tau) \leq C(p, r_1, r_2) \|f^{(r_1, r_2)}\|_p,$$

$$J_2(\tau) \leq C(p, \alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(r_1, r_2)}, \delta_1, \delta_2)_p.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(x_1, x_2) \in L_p$, $p = 1, \infty$, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2 > 0$.

I. Если

$$J_3 := \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-r_1-1} t_2^{-r_2-1} \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 < \infty,$$

то f имеет смешанную производную в смысле Вейля $f^{(r_1, r_2)} \in L_p$, причем

$$\|f^{(r_1, r_2)}\|_p \leq C(r_1, r_2) J_3$$

⁸Определение смешанного модуля гладкости и смешанной производной в смысле Вейля можно найти, например, в [50].

u

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(r_1, r_2)}, \delta_1, \delta_2)_p \\ & \leq C(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-r_1-1} t_2^{-r_2-1} \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}(f, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

II. Если f имеет смешанную производную в смысле Вейля $f^{(r_1, r_2)} \in L_p$, то

$$\begin{aligned} \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p & \leq C(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \delta_1^{T_1} \delta_2^{T_2} \|f^{(r_1, r_2)}\|_p, \\ \omega_{r_1+\alpha_1, r_2+\alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p & \leq C(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \delta_1^{T_1} \delta_2^{T_2} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f^{(r_1, r_2)}, \delta_1, \delta_2)_p. \end{aligned}$$

Подробнее об оценках преобразованных рядов в многомерном случае см. работы [50], [51].

5. В связи с неравенствами (83) и (84)–(87) возникает задача нахождения оценок $\omega_\alpha(\varphi, t)_p$ через $\omega_{\alpha+r}(f, t)_p$, например, для случая $\varphi \sim \sigma(f, \lambda)$, где $\lambda_n = n^r \ln^A n$. Если $A < 0$ (это аналог случая $\lambda_n = n^{r-\varepsilon}$), то оценки $\omega_\alpha(\varphi, t)_p$ следуют из работы [57].

Например, если $p = 2$ и $\varphi \sim \sigma(f, n^r \ln^A n)$, $A < 0$, то

$$\omega_\beta^2(\varphi, \delta)_2 \asymp \int_0^\delta \frac{t^{-2r-1}}{\ln^{2|A|}(2/t)} \omega_{r+\beta}^2(f, t)_2 dt + \delta^{2\beta} \int_\delta^1 \frac{t^{-2(r+\beta)-1}}{\ln^{1+2|A|}(2/t)} \omega_{r+\beta}^2(f, t)_2 dt. \quad (92)$$

Заметим, что отличия между (92) и (84)–(85) связаны только с заменой $n^{-\varepsilon}$ на $\ln^A n$.

Случай $A > 0$ (т.е. аналог случая $\lambda_n = n^{r+\varepsilon}$) интересен. Для $p = 2$ и $\varphi \sim \sigma(f, n^r \ln^A n)$, $A > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \delta^{2\beta} \ln^{2A} \left(\frac{2}{\delta} \right) \int_\delta^1 \frac{t^{-2\beta-1}}{\ln^{1+2A}(2/t)} \omega_\beta^2(\varphi, t)_2 dt + \omega_\beta^2(\varphi, \delta)_2 \\ & \asymp \int_0^\delta t^{-2r-1} \ln^{2A} \left(\frac{2}{t} \right) \omega_{r+\beta}^2(f, t)_2 dt. \end{aligned} \quad (93)$$

Сравнивая эти соотношения с оценками (86), (87), можно заметить, что в (93) появляется новое слагаемое $\omega_\beta^2(\varphi, \delta)_2$. Таким образом, в этом случае возникают существенные отличия. Подробнее об этом см. работы [51], [57].

6. При определении класса $W_p^{\lambda, \beta} H_\alpha[\varphi]$ мы предполагаем, что $\varphi \in \Phi_\alpha$. Данное ограничение является естественным для мажоранты модуля гладкости порядка α (см. [58]).

7. В теореме 1, п. II мы использовали неравенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu \lambda_\nu} \leq \frac{C}{\lambda_n},$$

которое эквивалентно следующему условию: существует такое $\varepsilon > 0$, что последовательность $\{n^{-\varepsilon} \lambda_n\}$ почти возрастает, т.е. $n^{-\varepsilon} \lambda_n \leq C m^{-\varepsilon} \lambda_m$, $C \geq 1$, $n \leq m$. Это и другие условия можно найти в работах [20] и [59].

Список литературы

- [1] С. Н. Бернштейн, *Полное собрание сочинений*, т. 1, 2, Изд-во АН СССР, М., 1952–1954.
- [2] В. В. Жук, Г. И. Натансон, “С. Н. Бернштейн и прямые и обратные теоремы конструктивной теории функций”, Тр. СПбМО, **8**, Научная книга, Новосибирск, 2000, 70–95; англ. пер.: V. V. Zhuk, G. I. Natanson, “S. N. Bernstein and direct and converse theorems of constructive function theory”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **205**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 59–82.
- [3] С. А. Теляковский, “О работах С. Б. Стечкина по приближению периодических функций полиномами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 1059–1068.
- [4] A. Pinkus, “Negative theorems in approximation theory”, *Amer. Math. Monthly*, **110**:10 (2003), 900–911.
- [5] S. Bernstein, “Sur les recherches recentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes”, *Proc. 5. Intern. Math. Congr.* 1, 1913, 256–266; перепечатано в: С. Н. Бернштейн, *Полное собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН СССР, М., 1954, 112–124; доступно онлайн: <http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/ber.pdf>.
- [6] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung Stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebenen Ordnung*, Thesis, Göttingen, 1911.
- [7] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.
- [8] С. Н. Бернштейн, “О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени”, *Сообщ. Харьк. МО*, 2, **13** (1912), 49–194; перепечатано в: С. Н. Бернштейн, *Полное собрание сочинений*, т. 1, Изд. АН СССР, М., 1952, 11–104; см. также [9].
- [9] S. Bernstein, “Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné”, *Mém. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg.*, **4** (1912), 1–103; доступно онлайн: <http://www.math.technion.ac.il/hat/fpapers/ber2.pdf>.
- [10] Ch. J. Vallée-Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.
- [11] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [12] М. Ф. Тиман, “О неравенстве Джексона в пространствах L_p ”, *Укр. матем. журн.*, **18**:1 (1966), 134–137; англ. пер.: M. F. Timan, “On Jackson's theorem in L_p -spaces”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **74**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 194–198.
- [13] О. В. Бесов, “Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения”, *Сборник статей*, Тр. МИАН, **60**, М., Изд-во АН СССР, 1961, 42–81; англ. пер.: O. V. Besov, “Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964, 85–126.
- [14] A. Zygmund, “Smooth functions”, *Duke Math. J.*, **12**:1 (1945), 47–76.
- [15] H. Johnen, “Inequalities connected with the moduli of smoothness”, *Mat. Vesnik*, **9**:24 (1972), 289–303.
- [16] H. Johnen, K. Scherer, “On the equivalence of the K -functional and moduli of continuity and some applications”, *Constructive theory of functions of several variables* (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1976), Lecture Notes in Math., **571**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1977, 119–140.
- [17] J. Marcinkiewicz, “Sur quelques intégrales du type de Dini”, *Ann. Soc. Polonaise Math.*, **17** (1938), 42–50.

- [18] Z. Ditzian, S. Tikhonov, “Moduli of smoothness of functions and their derivatives”, *Studia Math.*, **180**:2 (2007), 143–160.
- [19] I. I. Privalov, “Sur les fonctions conjuguées”, *Bull. Soc. Math. France*, **44** (1916), 100–103.
- [20] Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, Тр. ММО, **5**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1956, 483–522.
- [21] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. I, II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [22] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Some properties of fractional integrals. I”, *Math. Z.*, **27**:1 (1928), 565–606.
- [23] И. И. Огиевицкий, “Интегрирование и дифференцирование дробного порядка периодических функций и конструктивная теория функций”, *Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций*, Физматгиз, М., 1961, 159–164.
- [24] P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens, “Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes”, *Canad. J. Math.*, **29**:4 (1977), 781–793.
- [25] R. Taberski, “Differences, moduli and derivatives of fractional orders”, *Comment. Math. Prace Mat.*, **19**:2 (1977), 389–400.
- [26] А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, т. I, II, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2002; англ. пер.: A. I. Stepanets, *Methods of approximation theory*, VSP, Leiden, 2005.
- [27] С. Г. Самко, А. Я. Якубов, “Оценка Зигмунда для модуля непрерывности дробного порядка сопряженной функции”, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, № 12, 49–53; англ. пер.: S. G. Samko, A. Ya. Yakubov, “A Zygmund estimate for the modulus of continuity of fractional order of an adjoint function”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **29**:12 (1985), 66–72.
- [28] А. И. Степанец, “Обратные теоремы приближения периодических функций”, *Укр. матем. журн.*, **47**:9 (1995), 1266–1273; англ. пер.: A. I. Stepanets, “Inverse theorems on approximation of periodic functions”, *Ukrainian Math. J.*, **47**:9 (1995), 1441–1448.
- [29] А. И. Степанец, Е. И. Жукина, “Обратные теоремы приближения (ψ, β) -дифференцируемых функций”, *Укр. матем. журн.*, **41**:8 (1989), 1106–1112; англ. пер.: A. I. Stepanets, E. I. Zhukina, “Inverse theorems for the approximation of (ψ, β) -differentiable functions”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:8 (1989), 953–959.
- [30] R. Taberski, “Trigonometric approximation in the spaces L^p ($1 \leq p \leq \infty$)”, *Comment. Math.*, **2** (1979), 315–328.
- [31] М. К. Потапов, “О взаимосвязи некоторых классов функций”, *Матем. заметки*, **2** (1967), 361–372; англ. пер.: M. K. Potapov, “Interconnection between certain classes of functions”, *Math. Notes*, **2**:4 (1967), 706–714.
- [32] Б. В. Симонов, *О свойствах преобразованного ряда Фурье*, деп. в ВИНТИ 3031-81, 1981.
- [33] E. Cohen, “On the degree of approximation of a function by the partial sums of its Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235** (1978), 35–74.
- [34] J. T. Scheick, “Polynomial approximation of functions analytic in a disk”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**:6 (1966), 1238–1243.
- [35] B. Szökefalvi-Nagy, “Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall”, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig*, **90** (1938), 103–134.

- [36] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, vol. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [37] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **223**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976; рус. пер.: Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.
- [38] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [39] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*, vol. 1: One-dimensional theory, Pure and Applied Mathematics, **40**, Academic Press, New York–London; Birkhäuser, Basel, 1971.
- [40] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматлит, М., 1961.
- [41] М. К. Потопов, В. В. Симонов, “On the interrelation of the generalized Besov–Nikol'skiĭ and Weyl–Nikol'skiĭ classes of functions”, *Anal. Math.*, **22**:4 (1996), 299–316.
- [42] Z. Ditzian, V. N. Hristov, K. G. Ivanov, “Moduli of smoothness and K -functionals in L_p , $0 < p < 1$ ”, *Constr. Approx.*, **11**:1 (1995), 67–83.
- [43] С. Б. Стечкин, “О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **20**:2 (1956), 197–206.
- [44] С. А. Теляковский, “Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через ее коэффициенты Фурье”, *Матем. заметки*, **52**:5 (1992), 107–112; англ. пер.: S. A. Telyakovskii, “Lower bounds of the integral modulus of continuity of a function in terms of its Fourier coefficients”, *Math. Notes*, **52**:5 (1992), 1149–1153.
- [45] М. Ф. Тиман, “О вложении $L_p^{(k)}$ -классов функций”, *Изв. вузов. Матем.*, 1974, № 10(149), 61–74.
- [46] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω ”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 3–20; англ. пер.: Sh. U. Azhgaliev, N. Temirgaliev, “Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω ”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1535–1551.
- [47] В. Э. Гейт, “Условия вложения классов $H_\omega^{k,R}$ и $\tilde{H}_{k,R}^\omega$ ”, *Матем. заметки*, **13**:2 (1973), 169–178; англ. пер.: V. É. Geit, “The conditions for the imbedding of the classes $H_\omega^{k,R}$ and $\tilde{H}_{k,R}^\omega$ ”, *Math. Notes*, **13**:2 (1973), 101–106.
- [48] В. Э. Гейт, “О точности некоторых неравенств в теории приближений”, *Матем. заметки*, **10** (1971), 571–582; англ. пер.: V. É. Geit, “The accuracy of certain inequalities in approximation theory”, *Math. Notes*, **10**:5 (1971), 768–776.
- [49] Н. К. Бари, “О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:5 (1955), 285–302.
- [50] М. К. Потопов, В. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “О классах Бесова, Бесова–Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения: Сборник статей*, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 244–256; англ. пер.: M. K. Potapov, V. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, “On the Besov and Besov–Nikol'skiĭ classes and on estimates for the mixed moduli of smoothness of fractional derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **243**:4 (2003), 234–246.
- [51] М. К. Потопов, В. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “Преобразование рядов Фурье с помощью степенных и слабо колеблющихся последовательностей”, *Матем. заметки*, **77**:1 (2005), 99–116; англ. пер.: M. K. Potapov, V. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, “Transformation of fourier series using power and weakly oscillating sequences”, *Math. Notes*, **77**:1–2 (2005), 90–107.

- [52] П. Л. Ульянов, “Об эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов для тригонометрической системы”, *Докл. РАН*, **343**:4 (1995), 458–462; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “Equivalent conditions of convergence of series and integrals for a trigonometric system”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **52**:1 (1995), 66–70.
- [53] F. Moricz, “A quantitative version of the Young test for the convergence of conjugate series”, *J. Approx. Theory*, **81**:2 (1995), 207–216.
- [54] M. Hasson, O. Shisha, “On the condition $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} E_n^*(f) < \infty$ ”, *J. Approx. Theory*, **39**:4 (1983), 389–393.
- [55] Н. А. Ильясов, “Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p , $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Докл. АН СССР*, **276**:6 (1984), 1301–1304; англ. пер.: N. A. Il’yasov, “Imbedding theorems for some classes of periodic functions in L_p , $1 \leq p \leq \infty$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **29**:3 (1984), 675–678.
- [56] B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov, “On embeddings of function classes defined by constructive characteristics”, *Approximation and probability* (Bedlewo, Poland, 2004), Banach Center Publ., **72**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006, 285–307.
- [57] S. Yu. Tikhonov, “Moduli of smoothness and the interrelation of some classes of functions”, *Function spaces, interpolation theory and related topics* (Lund, Sweden, 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, 413–423.
- [58] S. Tikhonov, “On moduli of smoothness of fractional order”, *Real Anal. Exchange*, **30**:2 (2005), 507–518.
- [59] С. Ю. Тихонов, “Обобщенные классы Липшица и коэффициенты Фурье”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 947–951; англ. пер.: S. Yu. Tikhonov, “Generalized Lipschitz classes and Fourier coefficients”, *Math. Notes*, **75**:5–6 (2004), 885–889.

Б. В. Симонов (B. V. Simonov)

Волгоградский государственный технический
университет
E-mail: htf@vstu.ru

Поступила в редакцию

10.09.2007 и 07.03.2008

С. Ю. Тихонов (S. Yu. Tikhonov)

Scuola Normale Superiore di Pisa, Italia;
Institutió Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA),
Barcelona, Spain
E-mail: s.tikhonov@sns.it