Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 6, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3942>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 07:59:12

УДК 517.956

А. В. Покровский

Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме

Пусть $\mathcal{L}$ – линейный равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющий свойству слабой единственности. В работе изучается устранимость компактных подмножеств области $D \subset \mathbb{R}^n$ для слабых решений (в смысле Крылова и Сафонова) уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в некоторых классах непрерывных функций в D . В частности, получен метрический критерий устранимости в классах Гёльдера с малым показателем гладкости.

Библиография: 27 названий.

Введение

Классическая теорема об устранимой особенности для гармонических функций утверждает, что любая функция $u(x)$, гармоническая и ограниченная в проколоте единичном шаре $B \setminus \{O\}$ в $\mathbb{R}^n$ и стремящаяся к нулю при $|x| \rightarrow 1$, тождественно равна нулю в $B \setminus \{O\}$, где $n \geq 2$, $B := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, O – начало координат в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы Литтмана, Стампакки и Вайнбергера [1] о существовании и двухсторонних оценках функции Грина в шаре для дивергентного линейного равномерно эллиптического оператора L второго порядка без младших членов с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами следует, что сформулированный результат остается в силе для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$.

Для линейных равномерно эллиптических операторов второго порядка в недивергентной форме ситуация иная. Впервые на это обратили внимание Д. Гилбарг и Дж. Серрин [2], которые привели пример такого оператора $\mathcal{L}$ без младших членов с вещественно-аналитическими коэффициентами в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, для которого функция $1 - |x|^\alpha$ является при некотором $\alpha \in (0, 1)$ классическим решением уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в $B \setminus \{O\}$. Заметим, что функция в этом примере принадлежит классу $C^\alpha(B)$, который состоит из всех непрерывных функций, удовлетворяющих в B условию Гёльдера с показателем α .

С другой стороны, по теореме Карлесона [3; гл. 7, теорема 2] компакт $K \subset B$ является устранимым для гармонических функций в классе $C^\alpha(B)$ (это означает, что любая функция $u \in C^\alpha(B)$, гармоническая в $B \setminus K$, продолжается как

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0107V002027.

гармоническая функция с $B \setminus K$ на B) тогда и только тогда, когда его хаусдорфова мера $\text{mes}^{n-2+\alpha} K$ порядка $n-2+\alpha$ равна нулю, $0 < \alpha < 1$. В работе [4] показано, что при малых показателях гладкости α результат Л. Карлесона переносится на обобщенные решения уравнения $Lf = 0$ с дивергентным линейным равномерно эллиптическим оператором L второго порядка без младших членов с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами. На самом деле, в [4] показано, что условие $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$ характеризует устранимые компакты для обобщенных решений уравнения $Lf = 0$ в некотором классе непрерывных функций $U_L^\alpha(B)$, $0 < \alpha \leq 2$, содержащим все обобщенные решения уравнения $Lf = 0$ в шаре B и включающего в себя класс $C^\alpha(B)$ при $0 < \alpha < 1$. Кроме того, в этой работе сформулированный выше результат об устранимости в классе $C^\alpha(B)$ при малых α установлен в качестве следствия из теоремы об устранимых особенностях в классе $U_L^\alpha(B)$.

Целью настоящей работы является получение аналогов упомянутых результатов работы [4] для уравнения $\mathcal{L}f = 0$, где $\mathcal{L}$ – не содержащий младших членов линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка в недивергентной форме с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющий так называемому условию слабой единственности (см. определение ниже). Точнее, нами рассматривается задача об устранимости компактных подмножеств ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ для слабых решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в некоторых классах непрерывных функций в D . Под слабым решением здесь понимается предел последовательности классических решений однородных линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, сходящимися почти всюду к соответствующим коэффициентам оператора $\mathcal{L}$. Левые части этих уравнений представляют собой недивергентные операторы без младших членов, постоянные эллиптичности которых ограничены снизу постоянной эллиптичности оператора $\mathcal{L}$, а предел понимается в смысле равномерной сходимости на компактных подмножествах области D .

Опишем кратко содержание работы. Основным ее результатом является теорема 1, в которой в метрических терминах дано необходимое и достаточное условие устранимости компакта $K \subset D$ для слабых решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$. Устранимость здесь рассматривается в классах непрерывных функций в D , определяемых с помощью локальных приближений слабыми решениями уравнения $\mathcal{L}f = 0$. Доказательство этой теоремы основано на технике построения барьеров и важную роль в нем играет понятие нормализованной функции Грина для оператора $\mathcal{L}$, введенное в работах П. Бауман [5], [6]. Из теоремы 1 следуют сформулированная выше теорема Карлесона и ряд известных результатов других авторов, а также выводится неустраиваемость множества $K = \{O\}$ для слабых решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в классе непрерывных функций в примере Гилбарга и Серрина.

Теорема 2 устанавливает связь классов функций в теореме 1 с классами Гёльдера–Зигмунда. Из теорем 1 и 2 следует теорема 3 о метрической характеристике устранимых множеств для слабых решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в классах Гёльдера с малым показателем гладкости. Теорема 1 дополняется

теоремой 4, в которой дано описание слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ типа известной теоремы Привалова об эквивалентном определении гармонической функции. В теореме 5 получено в терминах хаусдорфовых мер неувлучшаемое достаточное условие устранимости компакта K для классических решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$, коэффициенты которого непрерывны по Дини в области D .

Работа имеет следующую структуру. В §1 приводятся необходимые определения и формулируются основные результаты с комментариями, касающимися истории рассматриваемого вопроса. Параграфы 2–5 посвящены доказательству теорем 1, 2, 4 и 5 соответственно.

§ 1. Определения и основные результаты

Напомним определения некоторых известных функциональных классов, рассматриваемых в настоящей работе.

Под функциональным классом в области $D \subset \mathbb{R}^n$ мы понимаем линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, состоящее из вещественных функций в D (в дальнейшем речь будет идти только об измеримых функциях). Как обычно, $C(D)$ – множество всех непрерывных функций в области D , $C^1(D)$ – множество всех функций, непрерывно дифференцируемых в D , $C_0^\infty(D)$ – множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций в D , $L_p(D)$ – линейное пространство, состоящее из всех функций f , определенных в D , для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p(D)} := \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty,$$

$L_\infty(D)$ – пространство всех существенно ограниченных функций в D ,

$$\|f\|_{L_\infty(D)} := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Для заданного $\alpha \in (0, 1)$ обозначим через $C^\alpha(D)$ множество всех функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α в области D , $C^{1,\alpha}(D)$ – множество всех функций f , непрерывно дифференцируемых в D , первые частные производные которых принадлежат $C^\alpha(D)$, $Z(D)$ – множество всех функций $f \in C(D)$, удовлетворяющих условию Зигмунда $|f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)| \leq C|h|$ для всех $[x-h, x+h] \subset D$ (с не зависящей от $x \in D$ и $h \in \mathbb{R}^n$ величиной $C \geq 0$). При $0 < \alpha < 2$ мы определяем класс Гёльдера–Зигмунда $\Lambda^\alpha(D)$ следующими равенствами: $\Lambda^\alpha(D) = C^\alpha(D)$ при $0 < \alpha < 1$; $\Lambda^1(D) = Z(D)$; $\Lambda^\alpha(D) = C^{1,\alpha-1}(D)$ при $1 < \alpha < 2$.

Пусть

$$\mathfrak{L}f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} f, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D, \quad \partial_{ij} f = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j},$$

– равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными и измеримыми действительными коэффициентами

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что существует такое действительное $\lambda \in (0, 1]$, что для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\lambda |\xi|^2 := \lambda (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda^{-1} |\xi|^2.$$

Наибольшее такое λ называется *постоянной эллиптичности оператора* $\mathfrak{L}$ и обозначается через $\lambda_{\mathfrak{L}}$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ мы обозначаем через $B(x, r)$ и $S(x, r)$ открытый евклидов шар с центром в точке x и радиусом r и его границу соответственно. Как обычно, $\mathbb{N}$ – множество всех целых положительных (натуральных) чисел.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. Последовательность дифференциальных операторов

$$\mathfrak{L}_k f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)}(x) \partial_{ij} f, \quad k \in \mathbb{N},$$

назовем *аппроксимирующей для оператора $\mathfrak{L}$ в области D* , если все их коэффициенты $a_{ij}^{(k)}(x)$ определены и бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$, операторы $\mathfrak{L}_k$ равномерно эллиптичны в $\mathbb{R}^n$ с постоянными эллиптичности $\lambda_{\mathfrak{L}_k} \geq \lambda_{\mathfrak{L}}$, $k \in \mathbb{N}$, и для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ последовательность функций $\{a_{ij}^{(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к функции $a_{ij}(x)$ почти всюду в D .

Пусть $g \in C(\partial D)$. Следуя работе [7], будем говорить, что функция $u \in C(\overline{D})$ является *слабым решением задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в D , $f \equiv g$ на ∂D* , если существует последовательность дифференциальных операторов $\{\mathfrak{L}_k\}_{k=1}^{\infty}$, аппроксимирующая оператор $\mathfrak{L}$ в области D , такая, что последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset C(\overline{D})$ классических (т.е. дважды непрерывно дифференцируемых в D) решений задачи Дирихле $\mathfrak{L}_k f = 0$ в D , $f \equiv g$ на ∂D , сходится к $u(x)$ равномерно на $\overline{D}$. Отметим, что при сделанных предположениях относительно коэффициентов операторов $\mathfrak{L}_k$ последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ существует (для заданной последовательности операторов $\{\mathfrak{L}_k\}_{k=1}^{\infty}$) и определена единственным образом. Существование слабого решения задачи Дирихле в D следует из результатов Н. В. Крылова и М. В. Сафонова [8], [9] (см. также [10]–[12]) об априорной оценке нормы Гёльдера классического решения задачи Дирихле для недивергентного линейного равномерно эллиптического уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в D .

Функцию $u \in C(D)$ назовем *слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в D* , если для каждой подобласти $D_0 \Subset D$ с границей класса $C^{2,\alpha}$ ($\alpha \in (0, 1]$ зависит от D_0) она является слабым решением задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в D_0 , $f \equiv u$ на ∂D_0 . Множество всех слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в области D будем обозначать через $A_{\mathfrak{L}}(D)$.

Если $x \in D$, а коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ определены и бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$, то существует единственная функция

$$G_{\mathfrak{L},D}(x, \cdot) \in L_{n/(n-1)}(D)$$

такая, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$ функция

$$u(x) = \int_D G_{\mathfrak{L},D}(x, y) \varphi(y) dy$$

является единственным классическим решением уравнения $\mathfrak{L}f = -\varphi$ в D , которое продолжается, как непрерывная функция, нулем на ∂D . Эту функцию $G_{\mathfrak{L},D}(x, \cdot)$ назовем, как обычно, *функцией Грина для оператора $\mathfrak{L}$ в области D с полюсом в точке x* . Для оператора $\mathfrak{L}$ с ограниченными и измеримыми коэффициентами в D , следуя [13], определим функцию Грина $G_{\mathfrak{L},D}(x, \cdot)$ для оператора $\mathfrak{L}$ в области D с полюсом в точке x как элемент пространства $L_{n/(n-1)}(D)$, являющийся слабым пределом в $L_{n/(n-1)}(D)$ последовательности функций Грина $G_{\mathfrak{L}_k,D}(x, \cdot)$, соответствующих какой-нибудь последовательности дифференциальных операторов $\{\mathfrak{L}_k\}_{k=1}^\infty$, аппроксимирующей $\mathfrak{L}$ в области D . Существование такой функции вытекает из принципа максимума А. Д. Александрова (см., например, [10] или [11]).

Следуя [13], будем говорить, что *оператор $\mathfrak{L}$ обладает свойством слабой единственности в области D* , если для любой точки $x \in D$ существует единственная функция Грина $G_{\mathfrak{L},D}(x, \cdot)$ (т.е. она не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности дифференциальных операторов $\{\mathfrak{L}_k\}_{k=1}^\infty$). Будем говорить, что $\mathfrak{L}$ обладает свойством слабой единственности в $\mathbb{R}^n$, если свойство слабой единственности выполнено для $\mathfrak{L}$ в любой ограниченной области $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ с границей класса $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$ зависит от D_0 . Как показано в [13], выполнение свойства слабой единственности для оператора $\mathfrak{L}$ в D равносильно существованию одной точки $x \in D$, для которой имеет место единственность функции Грина $G_{\mathfrak{L},D}(x, \cdot)$.

Содержательность приведенного определения была подтверждена примером Н. С. Надирашвили [14] (см. также [7]) оператора $\mathfrak{L}$, определенного в единичном шаре $B := B(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$, для которого нарушается слабая единственность в B . С другой стороны, слабая единственность для оператора $\mathfrak{L}$ в D всегда имеет место при $n = 2$, а при $n \geq 3$ – в случае, когда замыкание множества точек разрыва коэффициентов оператора $\mathfrak{L}$ не более чем счетно (см. [13]). Более того, М. В. Сафонов [15] установил слабую единственность для оператора $\mathfrak{L}$ в D в предположении, что множество точек разрыва его коэффициентов замкнуто и имеет достаточно малую хаусдорфову размерность (зависящую от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$).

Для формулировки и доказательства основного результата нам потребуется понятие решения уравнения, сопряженного к уравнению $\mathfrak{L}f = 0$, и нормализованной функции Грина для оператора $\mathfrak{L}$, введенные в работах П. Бауман [5], [6]. А именно, будем говорить, что функция $u(x)$, локально интегрируемая в области $D \subset \mathbb{R}^n$, является решением уравнения $\mathfrak{L}^*f = 0$ в D , если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполняется равенство

$$\int_D u(x) \mathfrak{L} \varphi(x) dx = 0.$$

В [16; теорема 1.4] показано, что выполнение свойства слабой единственности для оператора $\mathfrak{L}$ в $\mathbb{R}^n$ равносильно существованию единственного неотрицательного решения $W_{\mathfrak{L}}(x)$ уравнения $\mathfrak{L}^*f = 0$, определенного в $\mathbb{R}^n$ и нормированного условием $\int_B W_{\mathfrak{L}}(x) dx = 1$.

Всюду ниже мы считаем, что для оператора $\mathfrak{L}$ выполнено свойство слабой единственности в $\mathbb{R}^n$, $W_{\mathfrak{L}}(x)$ – неотрицательное решение уравнения $\mathfrak{L}^*f = 0$ в $\mathbb{R}^n$, $\int_B W_{\mathfrak{L}}(x) dx = 1$.

В дальнейшем нам потребуется понятие (непрерывного) слабого решения $u(x)$ уравнения $\mathfrak{L}f = -\varphi$ в области D с нулевыми предельными значениями на ∂D в случае, когда функция φ принадлежит классу $L_n(D)$, а ее носитель компактен в D . Оно будет пониматься как

$$\int_D G_{\mathfrak{L},D}(x, y) \varphi(y) dy$$

и вне носителя функции φ этот интеграл будет совпадать со слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в указанном выше смысле (см., например, [10]).

Нормализованной функцией Грина для оператора $\mathfrak{L}$ в области D с полюсом в точке $x \in D$ мы, следуя работам [6], [10], [16], назовем функцию $\overline{G}_{\mathfrak{L},D}(x, y) := G_{\mathfrak{L},D}(x, y)/W_{\mathfrak{L}}(y)$. Заметим, что при фиксированном x функция $G_{\mathfrak{L},D}(x, y)$ может быть существенно неограниченной в подобласти $D_0 \Subset D \setminus \{x\}$, однако функция $\overline{G}_{\mathfrak{L},D}(x, y)$ непрерывна в $D \times D \setminus \{x, y \in D : x = y\}$ (см., например, [6]).

Если $r > 0$, $B(x, r) \Subset D$ и $u \in C(S(x, r))$, то через $u_{\mathfrak{L},x,r}$ мы обозначаем функцию, непрерывную на замкнутом шаре $\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r\}$, которая является слабым решением задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в $B(x, r)$, $f \equiv u$ на $S(x, r)$. Как уже упоминалось выше, существование такой функции следует из результатов Крылова и Сафонова, а ее единственность обеспечивается выполнением условия слабой единственности для оператора $\mathfrak{L}$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что непрерывная в области D функция $u(y)$ принадлежит классу $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$, если существует такое $C \geq 0$, зависящее только от функции u , что для каждого шара $B(x, r) \Subset D$ выполняется неравенство

$$\sup_{y \in B(x, r)} |u(y) - u_{\mathfrak{L},x,r}(y)| \leq Cr^{\alpha}.$$

Определим класс $C_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$ как множество всех функций $u \in C(D)$, для каждой из которых существует такое $C \geq 0$, зависящее только от u , что для любого шара $B(x, r) \Subset D$ имеет место неравенство $|u(x) - u_{\mathfrak{L},x,r}(x)| \leq Cr^{\alpha}$.

Предположим, что для каждой области $D \subset \mathbb{R}^n$ задан некоторый класс $H(D)$ функций, определенных в этой области, и при этом сужение на D_1 любой функции $f \in H(D_2)$ принадлежит классу $H(D_1)$ для любых областей $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{R}^n$. Тогда, как обычно, $H(D)_{\text{loc}}$ обозначает множество всех функций f , определенных в D , обладающих следующим свойством: для любой точки $x \in D$ существует область $D_x \subset D$, содержащая x , такая, что сужение f на D_x принадлежит классу $H(D_x)$.

Пусть $H(D)$ – некоторый класс функций, непрерывных в области D , K – компакт в D . Мы назовем K *устранимым для слабых решений уравнения* $\mathfrak{L}f = 0$ (или $\mathfrak{L}$ -устранимым) в классе $H(D)$, если для любой функции $u \in H(D)$, являющейся слабым решением этого уравнения в $D \setminus K$, существует такая функция $\bar{u} \in H(G) \cap A_{\mathfrak{L}}(D)$, что $u \equiv \bar{u}$ на $D \setminus K$.

Для описания $\mathfrak{L}$ -устранимых множеств в классах $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$ и $\Lambda^{\alpha}(D)$ нам потребуется следующая метрическая характеристика множеств. А именно, пусть

$$s > 0, \quad W_{\mathfrak{L}}(B(x, r)) := \int_{B(x, r)} W_{\mathfrak{L}}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0.$$

Назовем (внешней) $\mathfrak{L}$ -мерой порядка s множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и обозначим через $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^s E$ конечный или равный $+\infty$ предел при $\delta \rightarrow 0$ величины

$$\inf \left(\sum_j r_j^{s-n} W_{\mathfrak{L}}(B(x_j, r_j)) \right),$$

где инфимум берется по всем не более чем счетным системам шаров $\{B(x_j, r_j)\}_j$, $r_j \leq \delta$, образующих покрытие множества E . Легко видеть, что для оператора Лапласа Δ величина $\text{mes}_{\Delta}^s E$ с точностью до положительного постоянного множителя совпадает с внешней мерой Хаусдорфа $\text{mes}^s E$ множества E порядка s . Точно так же, как и для хаусдорфовых мер, устанавливается, что функция $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^s E$ является мерой на борелевских множествах в $\mathbb{R}^n$.

Всюду ниже D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, K – компакт в D . В указанных выше обозначениях сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha \leq 2$. Тогда для $\mathfrak{L}$ -устранимости компакта K в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из приводимого ниже доказательства теоремы 1 и включения $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D) \subset C_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$, непосредственно вытекающего из определений классов $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$ и $C_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$, следует, что теорема 1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить класс $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$ на $C_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$.

В работах Л. Карлесона [3] ($0 < \alpha < 1$), Е.П. Долженко [17], [18] ($1 < \alpha < 2$), Х. Матеу и Х. Оробича [19] и Д. Ульриха [20] ($\alpha = 1$) показано, что в случае оператора Лапласа $\mathfrak{L} = \Delta$ условие $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$ необходимо и достаточно для Δ -устранимости компакта K в классе $\Lambda^{\alpha}(D)_{\text{loc}}$ ($0 < \alpha < 2$). С другой стороны (см. [21]), при всех $\alpha \in (0, 2)$ имеют место равенства $U_{\Delta}^{\alpha}(D)_{\text{loc}} = C_{\Delta}^{\alpha}(D)_{\text{loc}} = \Lambda^{\alpha}(D)_{\text{loc}}$. Поскольку условия $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$ и $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K = 0$ эквивалентны, то результаты упомянутых авторов являются частным случаем теоремы 1.

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 1 и леммы 1, необходимой для доказательства этой теоремы и являющейся частным случаем теоремы 1.4 из [6].

ЛЕММА 1. Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с $\text{mes}^n E > 0$ имеет место неравенство

$$\int_E W_{\mathfrak{L}}(y) dy > 0$$

и существует такое $C > 0$, зависящее только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r \in (0, 1]$ выполнено неравенство $W_{\mathfrak{L}}(B(x, 2r)) \leq C \cdot W_{\mathfrak{L}}(B(x, r))$.

Из этой леммы следует, что условия $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^n K = 0$ и $\text{mes}^n K = 0$ эквивалентны. Поэтому, принимая во внимание теорему 1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $\mathfrak{L}$ -устранимости компакта K в классе $U_{\mathfrak{L}}^2(D)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\text{mes}^n K = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 1 вытекает существование такого $C \geq 1$, зависящего только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$, что для произвольной пары пересекающихся шаров $B(x, r)$ и $B(y, r)$ с $0 < r \leq 1$ справедливо неравенство

$$C^{-1}W_{\mathfrak{L}}(B(x, r)) \leq W_{\mathfrak{L}}(B(y, r)) \leq C \cdot W_{\mathfrak{L}}(B(x, r)).$$

Отсюда в свою очередь следует, что если в определении $\mathfrak{L}$ -меры множества E порядка s дополнительно потребовать, чтобы центры шаров покрытий принадлежали множеству E , то мы получим метрическую характеристику, слабо эквивалентную исходной (с постоянными, зависящими лишь от n , $\lambda_{\mathfrak{L}}$ и s).

Прежде чем излагать дальнейшие результаты работы, проиллюстрируем применение теоремы 1 на упомянутом во введении примере Гилбарга и Серпина.

ПРИМЕР 1. Пусть $n \geq 2$, $\beta > n - 2$, $\alpha = (\beta - n + 2)/(1 + \beta)$, и пусть коэффициенты оператора $\mathfrak{L}f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}f$ заданы в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ равенствами $a_{ij}(x) := \delta_{ij} + \beta x_i x_j |x|^{-2}$, где δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, n}$). Тогда $0 < \alpha < 1$, оператор $\mathfrak{L}$ равномерно эллиптический и удовлетворяет условию слабой единственности в $\mathbb{R}^n$. Непосредственная проверка показывает, что функция $1 - |x|^\alpha$ является классическим (и, следовательно, слабым) решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, а ее сужение на единичный шар B принадлежит классам $C^\alpha(B)$ и $U_{\mathfrak{L}}^\alpha(B)$ (поскольку $C^\alpha(B) \subset U_{\mathfrak{L}}^\alpha(B)$ при $0 < \alpha < 1$).

С другой стороны (см. [16]), функция $W_{\mathfrak{L}}(x)$ с точностью до постоянного положительного множителя, зависящего лишь от n и β , совпадает в $\mathbb{R}^n$ с функцией

$$|x|^{\frac{-(n-1)\beta}{1+\beta}}.$$

Отсюда следует, что функция $W_{\mathfrak{L}}(B(0, r))$, $r > 0$, совпадает с функцией

$$cr^{\frac{-(n-1)\beta}{1+\beta} + n},$$

где c – постоянный положительный множитель, зависящий только от n и β . Поэтому

$$r^{(n-2+\alpha)-n}W_{\mathfrak{L}}(B(0, r)) = cr^{\frac{\beta-n+2}{1+\beta}-2+n-\frac{(n-1)\beta}{1+\beta}} = cr^0 = c$$

для всех $r > 0$. Следовательно (см. замечание 2), для множества $K = \{O\}$ выполняется условие $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K > 0$, и по теореме 1 это множество неустранимо для слабых решений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(B)$.

Проведенные вычисления показывают также, что для всех $\gamma > \alpha$ справедливо равенство $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\gamma} K = 0$. Поэтому при $\gamma > \alpha$ компакт $K = \{O\}$ является $\mathfrak{L}$ -устранимым в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(B)$.

Чтобы сформулировать следующий результат, введем обозначение: если $u \in C(\overline{B}(x, r))$, то

$$\text{osc}_{B(x, r)} u := \sup_{B(x, r)} u - \inf_{B(x, r)} u$$

– колебание функции u на шаре $B(x, r)$. Тогда упомянутая выше теорема Крылова и Сафонова может быть сформулирована следующим образом (см. [10; следствие 2.15]): для любой тройки концентрических шаров $B(x, r) \Subset B(x, R) \Subset B(x, R_0)$ с $R \leq 1$ и для каждой функции $u \in A_{\mathfrak{L}}(B(x, R_0))$ справедливо неравенство

$$\text{osc}_{B(x, r)} u \leq C \left(\frac{r}{R} \right)^{\gamma} \text{osc}_{B(x, R)} u, \quad (1)$$

где $C > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, C и γ зависят только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$. Всюду ниже γ – гёльдеров показатель в приведенной выше формулировке теоремы Крылова и Сафонова.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливо включение $\Lambda^{\alpha}(D)_{\text{loc}} \subset U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)_{\text{loc}}$, которое при $\alpha < \gamma$ становится равенством функциональных классов: $\Lambda^{\alpha}(D)_{\text{loc}} = U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)_{\text{loc}}$.

Из теорем 1 и 2 вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для $\mathfrak{L}$ -устранимости компакта K в классе $\Lambda^{\alpha}(D)_{\text{loc}}$ достаточно, а при $\alpha < \gamma$ – необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K = 0$.

Теорема 1 дополняется следующим результатом, обобщающим хорошо известную теорему Привалова об эквивалентном определении гармонической функции [22], [23]. Чтобы сформулировать его, для функции $u(x)$, непрерывной в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и меры μ из множества $P[0, 1]$ всех вероятностных борелевских мер на отрезке $[0, 1]$, не содержащих атомов в нуле, определим значения $\mathfrak{L}^{\mu}u(x)$ и $\mathfrak{L}_{\mu}u(x)$ как соответственно верхний и нижний пределы при $r \rightarrow 0+$ величины

$$r^{-2} \left(\int_0^1 u_{\mathfrak{L}, x, rt}(x) d\mu(t) - u(x) \right).$$

Из принципа максимума для слабых решений рассматриваемого уравнения и из равномерной непрерывности функции u на шаре $B(x, r)$ следует, что функция $u_{\mathfrak{L}, x, rt}(x)$ равномерно непрерывна (как функция от t) при $0 < t \leq 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u \in C(D)$, и пусть для каждой точки $x \in D$ найдутся такие меры $\mu, \nu \in P[0, 1]$, что $\mathfrak{L}_{\mu}u(x) \leq 0 \leq \mathfrak{L}^{\nu}u(x)$. Тогда функция u является слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в D .

Выбирая в качестве мер μ и ν в теореме 4 единичную меру, сосредоточенную в точке $t = 1$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\alpha > 2$ имеет место равенство функциональных классов $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D) = C_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D) = A_{\mathfrak{L}}(D)$.

Если $\mathfrak{L} = \Delta$, $d\mu(t) = nt^{n-1}dt$, то

$$\int_0^1 u_{\mathfrak{L},x,rt}(x) d\mu(t)$$

представляет собой среднее значение функции u по шару $B(x, r)$. При этом величины $\mathfrak{L}_{\mu}u(x)$ и $\mathfrak{L}^{\mu}u(x)$ с точностью до положительного множителя, зависящего только от размерности n , совпадают соответственно с нижним $\underline{\Delta}^*u(x)$ и верхним $\bar{\Delta}^*u(x)$ обобщенными параметрами Лапласа от функции u в точке x , введенными И. И. Приваловым в работах [22] и [23; гл. 1]. В этих работах показано, что для гармоничности функции $u \in C(D)$ достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы в каждой точке $x \in D$ выполнялось условие $\underline{\Delta}^*u(x) \leq 0 \leq \bar{\Delta}^*u(x)$. Таким образом, теорема 4 является обобщением сформулированного результата Привалова на случай уравнений вида $\mathfrak{L}f = 0$.

В заключение приведем один результат об $\mathfrak{L}$ -устранимости компактных множеств в случае, когда $n \geq 3$, а коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны по Дини в $\mathbb{R}^n$. Последнее, напомним, означает, что коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны в $\mathbb{R}^n$ и для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ функция

$$\omega_{\mathfrak{L},E}(t) := \sup_{x,y \in E, |x-y| \leq t} \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) - a_{ij}(y))^2 \right)^{1/2}, \quad t > 0,$$

удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathfrak{L},E}(t)}{t} dt < \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \geq 3$, $0 < \alpha \leq 2$, коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны по Дини в $\mathbb{R}^n$, и пусть выполнено условие $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$. Тогда компакт K является $\mathfrak{L}$ -устранимым в классе $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$.

Принимая во внимание теорему 2, получаем из теоремы 5 следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \geq 3$, $0 < \alpha < 2$, коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны по Дини в $\mathbb{R}^n$, и пусть выполнено условие $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$. Тогда компакт K является $\mathfrak{L}$ -устранимым в классе $\Lambda^{\alpha}(D)$.

В связи с формулировками теоремы 5 и следствия 3 отметим, что для оператора $\mathfrak{L}$ с коэффициентами, непрерывными по Дини в $\mathbb{R}^n$, слабое решение уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ на произвольном открытом множестве является классическим, т.е. дважды непрерывно дифференцируемой функцией, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество (см., например, [24]).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Достаточность установим с помощью модификации и обобщения рассуждений из работы [20]. Не ограничивая общности, можно, очевидно, считать, что D – область с границей класса C^3 . Пусть K – компакт в D , $\text{mes}_{\mathfrak{L}}^{n-2+\alpha} K = 0$. Применяя лемму 1, для каждого натурального m выберем конечное число шаров $B(x_{m,1}, r_{m,1}), \dots, B(x_{m,k_m}, r_{m,k_m})$ таких, что их центры принадлежат множеству K (см. замечание 2), где

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, r_{m,k}) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 8r_{m,k}) \Subset D, \\ \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} W_{\mathfrak{L}}(B(x_{m,k}, 4r_{m,k})) \leq 4^{-m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Зафиксируем неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1))$, равную единице в шаре $B(0,1/2)$, и обозначим

$$\varphi_{m,k}(x) := \varphi\left(\frac{x - x_{m,k}}{4r_{m,k}}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, k_m}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} G_{\mathfrak{L},D}(x,y) \varphi_{m,k}(y) dy \right). \quad (3)$$

При каждом натуральном m и $k = \overline{1, k_m}$ функция

$$\bar{h}_{m,k}(x) := \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} G_{\mathfrak{L},D}(x,y) \varphi_{m,k}(y) dy \quad (4)$$

непрерывна на замыкании области D и равна нулю на ее границе. Кроме того, эта функция является суперрешением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в следующем смысле: для любого шара $B(x,r) \Subset D$ и для любой точки $y \in B(x,r)$ значение в точке y непрерывного продолжения этой функции со сферы $S(x,r)$ на $\bar{B}(x,r)$ как слабого решения уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ меньше либо равно $\bar{h}_{m,k}(y)$ (см., например, [6], [11], [10]). С другой стороны, сумма $h(x)$ ряда в (3) является полунепрерывной снизу функцией в D , так как это предел возрастающей последовательности непрерывных функций. Покажем, что на множестве $D \setminus K$ функция $h(x)$ конечна, непрерывна и является суперрешением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$.

Для этого перепишем (4) в виде

$$\bar{h}_{m,k}(x) := \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} \bar{G}_{\mathfrak{L},D}(x,y) W_{\mathfrak{L}}(y) \varphi_{m,k}(y) dy \quad (5)$$

и возьмем произвольную область $D_0 \Subset D \setminus K$. Тогда существует такое натуральное m_0 , что

$$\inf \left\{ |x - y| : x \in D_0, y \in \bigcup_{m > m_0} \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 4r_{m,k}) \right\} > 0,$$

а величина

$$M := \sup \left\{ \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) : x \in D_0, y \in \bigcup_{m > m_0} \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 4r_{m,k}) \right\}$$

конечна. Используя (2) и (5), получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} 0 \leq R_{m_0}(x) &:= \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} G_{\mathfrak{L}, D}(x, y) \varphi_{m,k}(y) dy \right) \\ &\leq \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} M \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} W_{\mathfrak{L}}(y) dy \right) \\ &= M \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} W_{\mathfrak{L}}(B(x_{m,k}, 4r_{m,k})) \right) \\ &\leq M \sum_{m=m_0+1}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-m_0} M. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $R_{m_0}(x)$ непрерывна в области D_0 и является в D_0 слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ как сумма равномерно сходящегося ряда, состоящего из слабых решений рассматриваемого уравнения. Заметим, что последнее вытекает, например, из теоремы 4, доказательство которой не использует предшествующих ей результатов настоящей работы.

С другой стороны, функция

$$S_{m_0}(x) := \sum_{m=1}^{m_0} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} G_{\mathfrak{L}, D}(x, y) \varphi_{m,k}(y) dy \right),$$

как было показано выше, является непрерывным суперрешением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в D . Поэтому функция $h(x) \equiv S_{m_0}(x) + R_{m_0}(x)$ – непрерывное суперрешение этого уравнения в D_0 . Поскольку область D_0 в этих рассуждениях выбиралась произвольным образом, то доказано, что функция $h(x)$ непрерывна и является суперрешением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в $D \setminus K$.

Пусть теперь $u(x)$ – произвольная функция из класса $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$, которая является в $D \setminus K$ слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$. Зафиксируем область $D_0 \Subset D$ с границей класса C^3 , содержащую замыкание множества

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 8r_{m,k}).$$

Определим функцию $u_0(x)$, непрерывную на $\overline{D_0}$, как слабое решение задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в D_0 , $u_0(x) = u(x)$ на ∂D_0 . Аналогичным образом определим функцию $h_0 \in C(\overline{D_0})$ как слабое решение задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в D_0 , $h_0(x) = h(x)$ на ∂D_0 (существование и единственность этих функций вытекает из условий, наложенных на оператор $\mathfrak{L}$). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$w_{\varepsilon}(x) := u(x) - u_0(x) + \varepsilon(h(x) - h_0(x)), \quad x \in D_0.$$

Из определения следует, что функция $w_\varepsilon(x)$ полунепрерывна снизу в D_0 , непрерывна в $D_0 \setminus K$ и по непрерывности продолжается нулем на ∂D_0 . Следовательно, она достигает своего минимума в некоторой точке $z \in \partial D_0 \cap K$: $w_\varepsilon(z) = \inf_{x \in D_0} w_\varepsilon(x)$. Покажем, что этот минимум не может быть отрицательным.

Для этого предположим противное, т.е. что $w_\varepsilon(z) < 0$. Поскольку $w_\varepsilon(x) \equiv 0$ на ∂D_0 , то $z \in K$ и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{\alpha-2} \int_{B(x_{m,k}, 4r_{m,k})} G_{\mathfrak{L}, D}(z, y) \varphi_{m,k}(y) dy \right)$$

сходится к конечному положительному значению $h(z)$. Далее нам потребуются две леммы. Для формулировки первой из них напомним понятие $\mathfrak{L}$ -гармонической меры.

Если $B(x, r) \Subset D$, то отображение, которое каждой функции $f \in C(S(x, r))$ ставит в соответствие число $f_{\mathfrak{L}, x, r}(x)$, является непрерывным линейным функционалом на $C(S(x, r))$, который принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях f . Поэтому имеет место представление

$$f_{\mathfrak{L}, x, r}(x) = \int_{S(x, r)} f(y) d\omega_{\mathfrak{L}, x, r}(y),$$

где $\omega_{\mathfrak{L}, x, r}$ – вероятностная борелевская мера на сфере $S(x, r)$. Будем называть эту меру $\mathfrak{L}$ -гармонической мерой на сфере $S(x, r)$. В случае оператора Лапласа $\mathfrak{L}$ -гармоническая мера называется, как обычно, гармонической и с точностью до постоянного множителя совпадает с $(n-1)$ -мерной мерой Лебега на сфере $S(x, r)$.

ЛЕММА 2. Пусть $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность непрерывных неотрицательных суперрешений уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в области D и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x_0)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in D$. Тогда для каждого $r > 0$ такого, что $B(x_0, r) \Subset D$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится почти всюду относительно $\mathfrak{L}$ -гармонической меры на сфере $S(x_0, r)$, его сумма $v(x)$ интегрируема по этой мере и справедливы соотношения

$$v(x_0) \geq \int_{S(x_0, r)} v(y) d\omega_{\mathfrak{L}, x_0, r}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S(x_0, r)} v_k(y) d\omega_{\mathfrak{L}, x_0, r}(y),$$

в которых последний ряд сходится.

Доказательство леммы 2 вытекает из почленного суммирования неравенств

$$\int_{S(x_0, r)} v_k(y) d\omega_{\mathfrak{L}, x_0, r}(y) \leq v_k(x_0), \quad k \in \mathbb{N},$$

и из теоремы Леви о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Следующее утверждение представляет собой частный случай леммы 3.3 из работы [10].

ЛЕММА 3. Существует такое $C > 0$, зависящее лишь от размерности n и постоянной эллиптичности $\lambda_{\mathfrak{L}}$ оператора $\mathfrak{L}$, что для всех $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $x \in B(x_0, r)$ имеет место неравенство

$$\int_{B(x_0, r)} G_{\mathfrak{L}, B(x_0, 5r)}(x, y) dy \geq Cr^2.$$

Чтобы продолжить доказательство теоремы 1, введем следующее обозначение: если $m \in \mathbb{N}$, то $k(m, z)$ – наименьший номер $k \in \{1, \dots, k_m\}$, при котором точка z принадлежит шару $B(x_{m,k}, r_{m,k})$. Определим в области D функции

$$h_{m,k}(x) := 2^m (r_{m,k})^{\alpha-2} \bar{h}_{m,k}(x), \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, k_m},$$

$$h_m(x) := \sum_{k=1}^{k_m} h_{m,k}(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применяя лемму 2, заключаем, что функция $h(x)$ суммируема по $\mathfrak{L}$ -гармонической мере на каждой сфере $S(z, r)$ такой, что $B(z, r) \Subset D$, и справедливо неравенство

$$\int_{S(z, r)} h(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, r}(x) \leq h(z).$$

Используя теперь лемму 3, включения

$$B(x_{m,k(m,z)}, r_{m,k(m,z)}) \subset B(x_{m,k(m,z)}, 4r_{m,k(m,z)}) \subset B(z, 5r_{m,k(m,z)}),$$

равенство $\varphi_{m,k(m,z)}(y) = 1$ при $y \in B(z, r_{m,k(m,z)})$ и то, что носитель функции $\varphi_{m,k(m,z)}(y)$ содержится в шаре $B(z, 5r_{m,k(m,z)})$, для каждого $m \in \mathbb{N}$ получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} h(z) - \int_{S(z, 5r_{m,k(m,z)})} h(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, 5r_{m,k(m,z)}}(x) \\ &\geq h_m(z) - \int_{S(z, 5r_{m,k(m,z)})} h_m(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, 5r_{m,k(m,z)}}(x) \\ &\geq \sum_{k=1}^{k_m} \left(h_{m,k}(z) - \int_{S(z, 5r_{m,k(m,z)})} h_{m,k}(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, 5r_{m,k(m,z)}}(x) \right) \\ &\geq h_{m,k(m,z)}(z) - \int_{S(z, 5r_{m,k(m,z)})} h_{m,k(m,z)}(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, 5r_{m,k(m,z)}}(x) \\ &= 2^m (r_{m,k(m,z)})^{\alpha-2} \int_{B(z, 5r_{m,k(m,z)})} G_{\mathfrak{L}, B(z, 5r_{m,k(m,z)})}(z, y) \varphi_{m,k(m,z)}(y) dy \\ &\geq 2^m (r_{m,k(m,z)})^{\alpha-2} \int_{B(x_{m,k(m,z)}, r_{m,k(m,z)})} G_{\mathfrak{L}, B(x_{m,k(m,z)}, r_{m,k(m,z)})}(z, y) dy \\ &\geq 2^m (r_{m,k(m,z)})^{\alpha-2} C (r_{m,k(m,z)})^2 = C 2^m (r_{m,k(m,z)})^{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $h(x)$ суммируема по $\mathfrak{L}$ -гармонической мере на каждой сфере $S(z, r)$ такой, что $B(x, r) \Subset D$, и справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(h(z) - \int_{S(z, r)} h(x) d\omega_{\mathfrak{L}, z, r}(x) \right) = +\infty. \quad (6)$$

С другой стороны, из условия $u \in U_{\Sigma}^{\alpha}(D)$ следует, что

$$\begin{aligned} -\infty &< \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(u(z) - \int_{S(z,r)} u(x) d\omega_{\Sigma,z,r}(x) \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(u(z) - \int_{S(z,r)} u(x) d\omega_{\Sigma,z,r}(x) \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (6) получаем равенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(w_{\varepsilon}(z) - \int_{S(z,r)} w_{\varepsilon}(x) d\omega_{\Sigma,z,r}(x) \right) = +\infty,$$

которое противоречит тому, что функция $w_{\varepsilon}(x)$ достигает в точке z своего минимума на множестве $\overline{D}_0$. Следовательно, $w_{\varepsilon}(x) \geq 0$ для любых $x \in D_0$ и предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0+$ получаем, что функция $w_0(x) := u(x) - u_0(x)$ неотрицательна всюду в D_0 .

Рассматривая теперь функцию $w_{\varepsilon}(x)$ при отрицательных значениях ε и повторяя проведенные выше рассуждения с предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0-$, мы устанавливаем неположительность функции $w_0(x)$ всюду в области D_0 . Это означает, что $w_0(x) \equiv 0$ в D_0 , т.е. $u(x) \equiv u_0(x)$ – слабое решение уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в D .

Достаточность условия $\text{mes}_{\Sigma}^{n-2+\alpha} K = 0$ в теореме 1 установлена. Докажем его необходимость.

Необходимость. Для этого воспользуемся рассуждениями, которые являются некоторой модификацией рассуждений, принадлежащих О. Фростману (см. [25; лемма 5.4]). Как обычно, двоичным кубом в $\mathbb{R}^n$ назовем множество вида $[l_1 2^k, (l_1 + 1) 2^k] \times \cdots \times [l_n 2^k, (l_n + 1) 2^k]$, где $l_1, \dots, l_n$ – целые числа, k – натуральное число.

Пусть $\text{mes}_{\Sigma}^{n-2+\alpha} K > 0$. Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что область D является шаром $B(0, R_0)$ с $R_0 \geq 8$, который содержит единичный куб $Q_0 := [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ и $K \subset Q_0 \cap B(0, 1)$. В случае $\text{mes}^n K > 0$ можно также считать, что компакт K не содержит внутренних точек. Этого можно добиться, выбрасывая из K счетное число попарно непересекающихся открытых шаров таких, что сумма их хаусдорфовых мер порядка n меньше, чем $\text{mes}^n K$, и каждая внутренняя точка множества K является предельной для объединения удаляемых шаров.

Для $k \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}_k$ совокупность всех двоичных кубов, содержащихся в Q_0 , с длиной стороны 2^{-k} ; $\overline{\mathcal{M}}_k$ – совокупность всех двоичных кубов, содержащихся в Q_0 , с длиной стороны больше или равной 2^{-k} . На двоичных кубах $Q \subset Q_0$ определим функцию $g(Q)$ так:

$$\text{если } Q \in \mathcal{M}_k, \quad \text{то } g(Q) := (2^{-k})^{\alpha-2} \int_Q W_{\Sigma}(y) dy.$$

Построим последовательность борелевских мер $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, сосредоточенных на Q_0 , следующим образом.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. На кубах $Q \in \mathcal{M}_k$, имеющих непустое пересечение с компактом K , определим меру $\mu_{k,k}$ как меру, абсолютно непрерывную относительно меры Лебега с плотностью $(2^{-k})^{\alpha-2} W_{\mathcal{L}}(y)$; на кубах из $\mathcal{M}_k$, которые не пересекаются с K , полагаем эту меру тождественно равной нулю. Теперь определим меру $\mu_{k,k-1}$ так: если куб $Q \in \mathcal{M}_{k-1}$ пересекается с компактом K и $\mu_{k,k}(Q) \leq g(Q)$, то мера $\mu_{k,k-1}$ совпадает на Q с мерой $\mu_{k,k}$; если куб $Q \in \mathcal{M}_{k-1}$ пересекается с компактом K и $\mu_{k,k}(Q) > g(Q)$, то меры $\mu_{k,k-1}$ и $\mu_{k,k}$ отличаются на Q на положительный постоянный множитель, который однозначно задан условием $\mu_{k,k-1}(Q) = g(Q)$; на кубах из $\mathcal{M}_{k-1}$, которые не пересекаются с K , мера $\mu_{k,k-1}$ тождественно равна нулю. Далее, по мере $\mu_{k,k-1}$ аналогичным способом построим меру $\mu_{k,k-2}$: если куб $Q \in \mathcal{M}_{k-2}$ пересекается с компактом K и $\mu_{k,k-1}(Q) \leq g(Q)$, то мера $\mu_{k,k-2}$ совпадает на Q с мерой $\mu_{k,k-1}$; если куб $Q \in \mathcal{M}_{k-1}$ пересекается с компактом K и $\mu_{k,k-1}(Q) > g(Q)$, то меры $\mu_{k,k-2}$ и $\mu_{k,k-1}$ отличаются на положительный постоянный множитель, однозначно заданный условием $\mu_{k,k-2}(Q) = g(Q)$; на кубах из $\mathcal{M}_{k-2}$, которые не пересекаются с K , мера $\mu_{k,k-2}$ тождественно равна нулю. Продолжая этот процесс, построим меры $\mu_{k,k}, \mu_{k,k-1}, \dots, \mu_{k,1}, \mu_{k,0}$. По определению полагаем, что мера μ_k совпадает с мерой $\mu_{k,0}$.

Непосредственно из построения следует, что для каждого куба $Q \in \overline{\mathcal{M}}_k$ выполняется неравенство $\mu_k(Q) \leq g(Q)$, в частности $\mu_k(Q_0) \leq g(Q_0)$. Заметим, что из условия $\text{mes}_{\mathcal{L}}^{n-2+\alpha} K > 0$ и из леммы 1 вытекает существование такого $\nu > 0$, что для любой конечной совокупности двоичных кубов $Q_1, \dots, Q_l$, $l \in \mathbb{N}$, с попарно непересекающимися внутренностями, $\bigcup_{i=1}^l Q_i \supset K$, выполняется неравенство $\sum_{j=1}^l g(Q_j) > \nu$. С другой стороны, из проведенного построения следует, что каждая точка $x \in K$ содержится в некотором кубе $Q \in \overline{\mathcal{M}}_k$, для которого выполняется неравенство $\mu_k(Q) = g(Q)$. Поскольку любые два двоичных куба либо содержатся один в другом, либо имеют непересекающиеся внутренности, то компакт K содержится в объединении конечного числа кубов $Q_1, \dots, Q_l \in \overline{\mathcal{M}}_k$, $l \in \mathbb{N}$, с попарно непересекающимися внутренностями, таких, что $\mu_k(Q_j) = g(Q_j)$, $j = \overline{1, l}$. Поэтому $\mu_k(Q_0) > \nu$.

Поскольку вариации всех мер μ_k , $k \in \mathbb{N}$, ограничены в совокупности, то (см., например, [25; теорема 5.3]) существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k(p)\}_{p=1}^{\infty}$, что последовательность мер $\{\mu_{k(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ слабо сходится при $p \rightarrow \infty$ к некоторой борелевской мере, сосредоточенной на компакте K . Фиксируя произвольным образом неотрицательную финитную непрерывную функцию $\varphi(x)$, равную единице в некоторой окрестности компакта K , мы, в силу сказанного выше, будем иметь соотношения (для достаточно больших номеров p)

$$\int \varphi(x) d\mu(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int \varphi(x) d\mu_{k(p)}(x) \geq \int d\mu_{k(p)}(x) = \mu_{k(p)}(Q_0) > \nu.$$

Следовательно, $\mu(Q_0) > 0$. Далее зафиксируем двоичный куб Q с длиной стороны d и обозначим через $2Q$ гомотетичный ему куб с коэффициентом гомотетии 2 и центром (гомотетии), совпадающим с центром куба Q . Возьмем финитную непрерывную функцию $\varphi(x)$, равную единице на Q и нулю вне $2Q$.

Тогда справедливы соотношения

$$\int_Q d\mu(x) \leq \int_{2Q} \varphi(x) d\mu(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{2Q} \varphi(x) d\mu_{k(p)}(x) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{k(p)}(2Q).$$

С другой стороны, используя тот факт, что куб $2Q$ содержится в объединении не более чем 3^n двоичных кубов с длиной стороны d , и лемму 1, мы для всех достаточно больших номеров p имеем оценку $\mu_{k(p)}(2Q) \leq Cg(Q)$, в которой $C > 0$ зависит только от размерности n и постоянной эллиптичности $\lambda_{\mathcal{L}}$. Следовательно,

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(x) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_{k(p)}(2Q) \leq Cg(Q).$$

Снова применяя лемму 1, заключаем, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $r \in (0, 1]$ имеет место оценка

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^{\alpha-2} W_{\mathcal{L}}(B(x, r)), \quad (7)$$

в которой $C > 0$ зависит только от n и $\lambda_{\mathcal{L}}$.

Рассмотрим функцию

$$u(x) := \int_K \overline{G}_{\mathcal{L}, D}(x, y) d\mu(y).$$

Пользуясь непрерывностью функции $\overline{G}_{\mathcal{L}, D}(x, y)$ вне диагонали и определением последовательности мер $\{\mu_{k(p)}\}_{p=1}^{\infty}$, заключаем, что каждая из функций

$$u_{k(p)}(x) := \int_K \overline{G}_{\mathcal{L}, D}(x, y) d\mu_{k(p)}(y)$$

непрерывна вне носителя меры $\mu_{k(p)}$. Кроме того, на любом компакте $K_1 \Subset D \setminus K$ все такие функции, начиная с некоторого достаточно большого номера p , ограничены сверху и снизу некоторыми положительными постоянными. С другой стороны, из построения меры $\mu_{k(p)}$ следует, что функция $u_{k(p)}(x)$ имеет вид

$$u_{k(p)}(x) = \sum_{j=1}^l c_j \int_{Q_j} \overline{G}_{\mathcal{L}, D}(x, y) W_{\mathcal{L}}(y) dy = \sum_{j=1}^l c_j \int_{Q_j} G_{\mathcal{L}, D}(x, y) dy,$$

где $l \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_l$ – положительные постоянные, $Q_1, \dots, Q_l$ – двоичные кубы с длиной стороны $2^{-k(p)}$, внутренности которых попарно не пересекаются.

Но для каждого $j = 1, \dots, l$ функция $\int_{Q_j} G_{\mathcal{L}, D}(x, y) dy$ является слабым решением уравнения $\mathcal{L}f = 0$ в $D \setminus Q_j$. Следовательно, функция $u_{k(p)}(x)$ является слабым решением этого уравнения на открытом множестве, полученном из области D удалением носителя меры $\mu_{k(p)}$. Применяя теорему Крылова и Сафонова об априорной оценке нормы Гёльдера слабых решений уравнения $\mathcal{L}f = 0$ (см. неравенство (1)) и теорему Арцела–Асколи и выделяя, при необходимости, подпоследовательность, можно считать, что последовательность функций

$\{u_{k(p)}(x)\}_{p=1}^{\infty}$ равномерно сходится при $p \rightarrow \infty$ к функции $u(x)$ на каждом компактном подмножестве множества $D \setminus K$. Поэтому функция $u(x)$ является в $D \setminus K$ положительным слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$, продолжаемым по непрерывности нулем на границу области D .

Покажем, что функция $u(x)$ после возможного ее переопределения на K будет принадлежать классу $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$. Для этого нам потребуется следующий результат Бауман [6; теорема 2.3] (см. также [16; теорема 2.7]).

ЛЕММА 4. *Существует такое $C \geq 1$, зависящее лишь от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$, что для любых $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $x, y \in B(x_0, R/4)$, $x \neq y$, имеет место двойное неравенство*

$$C^{-1} \int_{|x-y|}^R \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \leq \overline{G}_{\mathfrak{L}, B(x_0, R)}(x, y) \leq C \int_{|x-y|}^R \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds.$$

Вводя обозначение

$$K_j(x) := K \cap (B(x, 2^{-j}R_0) \setminus B(x, 2^{-j-1}R_0)), \quad j \in \mathbb{N},$$

и применяя правое неравенство леммы 4 и лемму 1, получим при $x \in B \setminus K$ следующую оценку сверху для $u(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_K \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) d\mu(y) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K_j(x)} \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) d\mu(y) \\ &\leq C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{2^{-j-1}R_0}^{2^{-j}R_0} \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \right) \cdot \mu(K_j(x)) \\ &= C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \int_{2^{-k-1}R_0}^{2^{-k}R_0} \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \right) \cdot \mu(K_j(x)) \\ &= C_1 \int_{2^{-1}R_0}^{R_0} \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \sum_{j=1}^{\infty} \mu(K_j(x)) \\ &\quad + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}R_0}^{2^{-k}R_0} \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \sum_{j=k}^{\infty} \mu(K_j(x)) \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B(x, 2^{-k}R_0)) \int_{2^{-k-1}R_0}^{2^{-k}R_0} \frac{s}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, s))} ds \\ &\leq C_3 \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}R_0)^{\alpha-2} W_{\mathfrak{L}}(B(x, 2^{-k}R_0)) \frac{(2^{-k}R_0 - 2^{-k-1}R_0)2^{-k}R_0}{W_{\mathfrak{L}}(B(x, 2^{-k-1}R_0))} \\ &\leq C_4(R_0)^{\alpha}, \end{aligned}$$

где положительные величины C_1 , C_2 и C_3 зависят только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$, а C_4 – от n , $\lambda_{\mathfrak{L}}$ и α . Отсюда, в частности, следует, что функция $u(x)$ ограничена в $D \setminus K$.

Возьмем теперь произвольный шар $B(x_0, R) \subset B$ с $R \leq 1/4$. Из определения меры μ следует, что функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= \int_{K \setminus B(x_0, 2R)} \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) d\mu(y), \\ u_2(x) &:= \int_{K \cap B(x_0, 2R)} \left(\overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) - \overline{G}_{\mathfrak{L}, B(x_0, 4R)}(x, y) \right) d\mu(y) \end{aligned}$$

и, следовательно, их сумма $u_3(x) := u_1(x) + u_2(x)$ являются в $B(x_0, R)$ слабыми решениями уравнения $\mathfrak{L}f = 0$. Рассмотрим при $x \in B(x_0, R) \setminus K$ функцию

$$\begin{aligned} u(x) - u_3(x) &= \int_K \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) d\mu(y) - \int_{K \setminus B(x_0, 2R)} \overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) d\mu(y) \\ &\quad - \int_{K \cap B(x_0, 2R)} (\overline{G}_{\mathfrak{L}, D}(x, y) - \overline{G}_{\mathfrak{L}, B(x_0, 4R)}(x, y)) d\mu(y) \\ &= \int_{K \cap B(x_0, 2R)} \overline{G}_{\mathfrak{L}, B(x_0, 4R)}(x, y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Повторяя проведенную выше оценку сверху для функции $u(x)$ в $B \setminus K$ с заменой R_0 на R , получаем

$$u(x) - u_3(x) = \int_{K \cap B(x_0, 2R)} \overline{G}_{\mathfrak{L}, B(x_0, 4R)}(x, y) d\mu(y) \leq C_4 R^\alpha \leq C_4 (R_0)^\alpha \quad (8)$$

с тем же $C_4 > 0$, что и выше. Это влечет оценку

$$|u_3(x)| \leq 2C_4 (R_0)^\alpha, \quad x \in B(x_0, R) \setminus K, \quad (9)$$

которая ввиду непрерывности функции $u_3(x)$ и отсутствия внутренних точек у компакта K на самом деле имеет место при всех $x \in B(x_0, R)$. Применяя неравенство Крылова и Сафонова (1), получаем из (9) цепочку соотношений

$$\text{osc}_{B(x_0, R^2)} u_3 \leq C \left(\frac{R^2}{R} \right)^\gamma \text{osc}_{B(x_0, R)} u_3 \leq CR^\gamma 2C_4 (R_0)^\alpha,$$

откуда с помощью (8) получаем неравенство

$$\text{osc}_{B(x_0, R^2) \setminus K} u \leq 2CC_4 (R_0)^\gamma R^\alpha + 2C_4 R^\alpha,$$

выражающее равномерную непрерывность функции $u(x)$ в $B \setminus K$. Следовательно, она продолжается как непрерывная функция с $D \setminus K$ на D , и принадлежность продолженной таким образом функции (для которой мы сохраняем прежнее обозначение $u(x)$) к классу $U_{\mathfrak{L}}^\alpha(D)$ вытекает из (8) и из принципа максимума. С другой стороны, функция $u(x)$ является в $D \setminus K$ положительным слабым решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ и продолжается, как непрерывная функция, нулем на ∂D . Поскольку компакт K не имеет внутренних точек, то функция u не может быть продолжена с $G \setminus K$ на G как слабое решение уравнения $\mathfrak{L}f = 0$: если бы такое продолжение существовало, то по непрерывности при всех $x \in K$ оно совпадало бы с $u(x)$ и по принципу максимума было бы $u(x) \equiv 0$ в D .

Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Включение $\Lambda^\alpha(D)_{\text{loc}} \subset U_{\mathfrak{L}}^\alpha(D)_{\text{loc}}$ при $0 < \alpha < 2$ следует из хорошо известного описания классов $\Lambda^\alpha(D)_{\text{loc}}$ в терминах локальных приближений полиномами. А именно, если $0 < \alpha < 2$ и $u \in \Lambda^\alpha(D)_{\text{loc}}$, то для произвольной подобласти $D_0 \Subset D$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждого шара $B(x_0, r) \subset D_0$ найдется линейная функция $l(x)$, удовлетворяющая неравенству $\sup_{B(x_0, r)} |u(x) - l(x)| \leq Cr^\alpha$ (см., например, [21]). Поскольку любая линейная функция является классическим решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$, то, используя принцип максимума для решений рассматриваемого уравнения, получаем требуемое включение.

Установим теперь обратное включение $U_{\mathfrak{L}}^\alpha(D)_{\text{loc}} \subset \Lambda^\alpha(D)_{\text{loc}}$. Пусть γ – гёльдеров показатель в приведенной выше формулировке теоремы Крылова и Сафонова, и пусть $u \in U_{\mathfrak{L}}^\alpha(D)$. Тогда для любой пары концентрических шаров $B(x, r) \Subset B(x, R) \Subset D$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \text{osc}_{B(x, r)} u &\leq 2 \sup_{B(x, r)} |u - u_{\mathfrak{L}, x, R}| + \text{osc}_{B(x, r)} u_{\mathfrak{L}, x, R} \\ &\leq 2AR^\alpha + \text{osc}_{B(x, r)} u_{\mathfrak{L}, x, R} \leq 2AR^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \text{osc}_{B(x, R)} u_{\mathfrak{L}, x, R} \\ &\leq 2AR^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma (2AR^\alpha + \text{osc}_{B(x, R)} u) \\ &\leq 2A(C+1)R^\alpha + C \left(\frac{r}{R} \right)^\gamma \text{osc}_{B(x, R)} u, \end{aligned}$$

где $A, C \geq 0$, A зависит только от функции u и α , а C – только от n и $\lambda_{\mathfrak{L}}$. Отсюда получаем заключение теоремы, применяя следующую лемму.

ЛЕММА 5 (см. [26]). Пусть $\varphi(t)$ – неотрицательная и неубывающая функция аргумента $t > 0$, $0 < \alpha < \gamma$, и пусть $R_0 > 0$. Кроме того, пусть для всех $r, R > 0$, $r < R \leq R_0$, выполнено неравенство $\varphi(r) \leq AR^\alpha + B(r/R)^\gamma \varphi(R)$, где $A, B > 0$. Тогда существует такое $C > 0$, зависящее только от B, α и γ , что для всех $r, R \in (0, R_0]$, $r < R$, имеет место неравенство

$$\varphi(r) \leq C \left[Ar^\alpha + \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \varphi(R) \right].$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 4

В основе доказательства этой теоремы лежат рассуждения Привалова [22], [23], относящиеся к случаю $\mathfrak{L} = \Delta$.

Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда зафиксируем произвольный шар $B(x_0, R) \Subset D$ и рассмотрим функцию $g(x) := R^2 - |x - x_0|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$. В этом случае $-\mathfrak{L}g(x) = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \geq 2n\lambda_{\mathfrak{L}}$ почти всюду в D . Применяя

лемму 3, для каждого шара $B(x, rt) \subseteq B(x_0, R)$, $r > 0$, $0 < t \leq 1$, имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} g(x) - g_{\mathfrak{L}, x, rt}(x) &= \int_{B(x, rt)} G_{\mathfrak{L}, B(x, rt)}(x, y) \left(2 \sum_{i=1}^n a_{ii}(y) \right) dy \\ &\geq 2n\lambda_{\mathfrak{L}} \int_{B(x, rt)} G_{\mathfrak{L}, B(x, rt)}(x, y) dy \\ &\geq 2n\lambda_{\mathfrak{L}} C \left(\frac{rt}{5} \right)^2 = 2n\lambda_{\mathfrak{L}} \frac{C}{25} (rt)^2 \end{aligned}$$

с тем же самым $C > 0$, что и в лемме 3. Отсюда следует неравенство

$$g(x) - \int_0^1 g_{\mathfrak{L}, x, rt}(x) d\mu(t) \geq 2n\lambda_{\mathfrak{L}} \frac{C}{25} r^2 \int_0^1 t^2 d\mu(t),$$

которое означает существование такого $C_1 > 0$, что $\mathfrak{L}^\mu g(x) < -C_1$ всюду в $B(x_0, R)$.

Рассмотрим семейство функций

$$u_\varepsilon(x) := u(x) - u_{\mathfrak{L}, x_0, R}(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in B(x_0, R),$$

зависящее от вещественного параметра ε . Из условий, наложенных на функцию $u(x)$, следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ функция $u_\varepsilon(x)$ продолжается по непрерывности нулем на границу шара $B(x_0, R)$ и в каждой точке $x \in B(x_0, R)$ выполняется двойное неравенство $\mathfrak{L}_\mu u_\varepsilon(x) \leq \mathfrak{L}_\mu u(x) + \varepsilon \mathfrak{L}^\mu g(x) < 0$. Это означает, что функция u_ε не может принимать в точке x своего минимума на замкнутом шаре $\overline{B}(x_0, R)$. Поскольку точка x в этих рассуждениях – произвольная точка шара $B(x_0, R)$, то $u_\varepsilon(x) \geq 0$ при всех $x \in B(x_0, R)$. Предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0+$ отсюда получаем, что функция $u_0(x)$ принимает в шаре $B(x_0, R)$ только неотрицательные значения.

Аналогично, заменяя меру μ на ν и рассматривая функцию $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon < 0$, устанавливаем, что функция $u_0(x)$ принимает в шаре $B(x_0, R)$ только неположительные значения. Следовательно, $u_0(x) = u(x) - u_{\mathfrak{L}, x_0, R}(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv u_{\mathfrak{L}, x_0, R}(x)$ – слабое решение уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в $B(x_0, R)$.

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 5

Доказательство этой теоремы в значительной степени повторяет доказательство достаточности в теореме 1. Поэтому мы укажем только основные изменения, которые нужно внести в соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1. Основу доказательства составляет следующий вспомогательный результат, установленный А. А. Новрузовым в [27].

ЛЕММА 6. Пусть $n \geq 3$ и коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ непрерывны по Дини в единичном шаре B :

$$\int_0^1 \frac{\omega_{\mathfrak{L}, B}(t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда для любого $x \in B(0, 1/2)$ существует функция $g_{\mathfrak{L},x}(y)$, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая при $y \in B \setminus \{x\}$ и продолжаемая по непрерывности нулем на границу шара B , такая, что $\mathfrak{L}g_{\mathfrak{L},x}(y) \leq 0$ для любых $y \in B \setminus \{x\}$ и при всех $y \in B(0, 1/2) \setminus \{x\}$ справедливо неравенство

$$C^{-1}|x - y|^{2-n} \leq g_{\mathfrak{L},x}(y) \leq C|x - y|^{2-n}, \quad (10)$$

в котором $C \geq 1$ зависит только от оператора $\mathfrak{L}$.

Переходя к доказательству теоремы 5, без ограничения общности будем считать, что D – область с границей класса C^3 , $D \Subset B(0, 1/2)$. Пусть K – компакт в D с $\text{mes}^{n-2+\alpha} K = 0$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ выберем конечное число шаров $B(x_{m,1}, r_{m,1}), \dots, B(x_{m,k_m}, r_{m,k_m})$, центры которых принадлежат множеству K , таких, что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, r_{m,k}) \subset \bigcup_{k=1}^{k_m} B(x_{m,k}, 8r_{m,k}) \Subset D, \quad \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{n-2\alpha-2} \leq 4^{-m},$$

и рассмотрим функцию

$$h(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \left(2^m \sum_{k=1}^{k_m} (r_{m,k})^{n-2+\alpha} g_{\mathfrak{L},x_{m,k}}(x) \right), \quad x \in D.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве достаточности в теореме 1, заключаем, что функция $h(x)$ положительна и полунепрерывна снизу в D , непрерывна в $D \setminus K$, является суперрешением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в $D \setminus K$, суммируема по мере $\omega_{\mathfrak{L},x_0,r}(x)$ на каждой сфере $S(x_0, r) \Subset B(0, 1/2)$ и для каждой точки $x \in K$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \left(h(x) - \int_{S(x,r)} h(x) d\omega_{\mathfrak{L},x,r}(y) \right) = +\infty.$$

Предположим теперь, что u – функция из класса $U_{\mathfrak{L}}^{\alpha}(D)$, которая в $D \setminus K$ является решением уравнения $\mathfrak{L}f = 0$, а w – решение задачи Дирихле $\mathfrak{L}f = 0$ в D , $f = u$ на ∂D . Рассматривая при $\varepsilon > 0$ функцию $u_{\varepsilon}(x) := u(x) - w(x) + \varepsilon h(x)$, $x \in D$, так же, как и в теоремах 1 и 4, заключаем, что эта функция неотрицательна в области D и предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$ показывает, что функция $u_0(x) := u(x) - w(x)$ также неотрицательна всюду в D .

Аналогично, рассматривая функцию $u_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon < 0$, устанавливаем, что функция $u_0(x)$ принимает в D только неположительные значения. Следовательно, $u_0(x) = u(x) - w(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv w(x)$ – решение уравнения $\mathfrak{L}f = 0$ в области D .

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] У. Литтман, Г. Стампаккья, Г. Ф. Вейнбергер, “Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами”, *Математика. Сб. пер.*, **9:2** (1965), 72–97; пер. с англ.: W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, “Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 43–77.

- [2] Д. Гилбарг, Дж. Серрин, “Изолированные особенности решений эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка”, *Математика. Сб. пер.*, **2**:6 (1958), 63–86; пер. с англ.: D. Gilbarg, J. Serrin, “On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations”, *J. Analyse Math.*, **4**:1 (1954), 309–340.
- [3] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Van Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1967.
- [4] А. В. Покровский, “Устранимые особенности решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:2 (2008), 44–55.
- [5] P. Bauman, “Positive solutions of elliptic equations in nondivergence form and their adjoints”, *Ark. Mat.*, **22**:1 (1984), 153–173.
- [6] P. Bauman, “A Wiener test for nondivergence structure, second-order elliptic equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **34**:4 (1985), 825–844.
- [7] M. V. Safonov, “Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients”, *SIAM J. Math. Anal.*, **30**:4 (1999), 879–895.
- [8] Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, “Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 161–175; англ. пер.: N. V. Krylov, M. V. Safonov, “A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients”, *Math. USSR-Izv.*, **16**:1 (1981), 151–164.
- [9] М. В. Сафонов, “Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гёльдеровость их решений”, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **96**, Наука, Л., 1980, 272–287; англ. пер.: M. V. Safonov, “Harnack’s inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions”, *J. Soviet Math.*, **21**:5 (1983), 851–863.
- [10] С. Е. Кениг, “Potential theory of non-divergence form elliptic equations”, *Dirichlet forms* (Varenna, Italy, 1992), *Lecture Notes in Math.*, **1563**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 89–128.
- [11] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка”, *Дифференциальные уравнения с частными производными*. 3, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, **32**, ВИНТИ, М., 1988, 99–215; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, E. M. Landis, “Qualitative theory of second order linear partial differential equations”, *Partial differential equations*. III, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 87–192.
- [12] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, *Grundlehren Math. Wiss.*, **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [13] N. V. Krylov, “On one-point weak uniqueness for elliptic equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:11–12 (1992), 1759–1784.
- [14] N. Nadirashvili, “Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **24**:3 (1997), 537–550.
- [15] M. V. Safonov, “On a weak uniqueness for some elliptic equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **19**:5–6 (1994), 943–957.
- [16] L. Escauriaza, “Bounds for the fundamental solution of elliptic and parabolic equations in nondivergence form”, *Comm. Partial Differential Equations*, **25**:5–6 (2000), 821–845.
- [17] Е. П. Долженко, “О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:5 (1964), 1113–1130.

- [18] Е. П. Долженко, “Об особых точках непрерывных гармонических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1251–1270.
- [19] J. Mateu, J. Orobitg, “Lipschitz approximation by harmonic functions and some applications to spectral synthesis”, *Indiana Univ. Math. J.*, **39**:3 (1990), 703–736.
- [20] D. C. Ullrich, “Removable sets for harmonic functions”, *Michigan Math. J.*, **38**:3 (1991), 467–473.
- [21] А. В. Покровский, “Классы функций, определяемые с помощью локальных приближений решениями гипоеллиптических уравнений”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:2 (2006), 394–413; англ. пер.: A. V. Pokrovskii, “Function classes defined from local approximations by solutions to hypoelliptic equations”, *Siberian Math. J.*, **47**:2 (2006), 324–340.
- [22] I. Privaloff, “Sur les fonctions harmoniques”, *Матем. сб.*, **32** (1925), 464–471.
- [23] И. И. Привалов, *Субгармонические функции*, ОНТИ, М., 1937.
- [24] М. Д. Иванович, “О характере непрерывности решений линейных эллиптических уравнений второго порядка”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **21**:3 (1966), 37–47.
- [25] У. Хейман, П. Кеннеди, “Субгармонические функции”, т. 1, Мир, М., 1980; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, “Subharmonic functions”, vol. 1, London Math. Soc. Monogr. Ser., **9**, Academic Press, London–New York–San Francisco, 1976.
- [26] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. of Math. Stud., **105**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [27] А. А. Новрузов, И. Т. Мамедов, “Об устранимой особенности решений линейных эллиптических уравнений с непрерывными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **17**:11 (1981), 2064–2070; англ. пер.: A. A. Novruzov, I. T. Mamedov, “Removable singularities of solutions of linear elliptic equations with continuous coefficients”, *Differential Equations*, **17**:11 (1982), 1316–1321.

А. В. Покровский (A. V. Pokrovskii)

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию

10.09.2007