Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Бородачов, Э. Б. Сафф, Д. П. Хардин, Асимптотика плотнейших взвешенных упаковок на спрямляемых множествах, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 11, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:44:17

УДК 514.174

С. В. Бородачов, Э. Б. Сафф, Д. П. Хардин

Асимптотика плотнейших взвешенных упаковок на спрямляемых множествах

Исследуется асимптотическое поведение с ростом N наибольшего значения минимума взвешенных расстояний между парами точек из системы N точек спрямляемого компакта в евклидовом пространстве. Находится предельное распределение асимптотически оптимальных конфигураций.

Библиография: 23 названия.

Классической задачей о плотных упаковках является поиск конфигурации N “максимально разделенных” точек фиксированного компакта A (доставляющих наибольший возможный минимум расстояний между парами точек). Поставленная для $\mathbb{R}^d$, она становится задачей о наибольшей плотности равных неналегающих шаров в $\mathbb{R}^d$. Ряд важных результатов и обзоры литературы по этой задаче можно найти в [1]–[6]. К примеру, известно, что для некоторых плоских множеств A решение этой задачи дается асимптотически оптимальными узлами кубатурных формул (см., например, [7]).

Задача о плотной упаковке двойственна задаче о ε -сложности компакта A , в которой при фиксированном $\varepsilon > 0$ требуется найти максимальное число точек в A , лежащих на расстоянии не меньше ε друг от друга. Понятие ε -сложности было первоначально введено А. Н. Колмогоровым и В. М. Тихомировым [8] и имеет, например, приложения к исследованию сложности поведения орбит динамических систем (см., например, [9]).

Вышеупомянутые задачи рассматривались и в других метрических пространствах. В настоящей работе мы изучаем взвешенный вариант задачи о плотнейшей упаковке, который в известном смысле аналогичен введению некоторой метрики или последовательности метрик. Решение этой задачи может быть использовано в конструкции оптимальных взвешенных кубатурных формул (см., к примеру, [10]) и в компьютерном геометрическом моделировании, например, когда требуется расположить точки на поверхности в соответствии с заданным неравномерным распределением (скажем, так, чтобы точки плотнее заполняли области большей кривизны на поверхности).

§ 1. Определения, обозначения и известные результаты

Пусть A – бесконечное подмножество $\mathbb{R}^p$, где p – натуральное число. Для набора различных точек $\omega_N := \{x_1, \dots, x_N\} \subset A$ и функции $w: A \times A \rightarrow [0, \infty]$

Исследования были частично поддержаны NSF (у первого автора – гранты №№ DMS-0505756, DMS-0532154, у второго автора – гранты №№ DMS-0532154, DMS-0603828, у третьего автора – гранты №№ DMS-0603828, DMS-0532154.)

положим

$$\delta^w(\omega_N) := \min_{1 \leq i \neq j \leq N} w(x_i, x_j) |x_i - x_j|,$$

где $|\cdot|$ – евклидово расстояние в $\mathbb{R}^p$. Также введем *расстояние плотнейшей взвешенной N -точечной упаковки на A*

$$\delta_N^w(A) := \sup\{\delta^w(\omega_N) : \omega_N \subset A, \#\omega_N = N\}, \quad (1)$$

где $\#X$ – мощность множества X . Нас интересует асимптотика (при $N \rightarrow \infty$) величин (1), а также асимптотика конфигураций, доставляющих верхнюю грань правой части (1).

Мы можем считать без ограничения общности, что w – симметричная функция, так как при $v(x, y) := \min\{w(x, y), w(y, x)\}$ имеем $\delta^v(\omega_N) = \delta^w(\omega_N)$ для всякой конфигурации ω_N .

При отсутствии веса ($w \equiv 1$) мы получаем классическую задачу о наилучшей упаковке (при $w \equiv 1$ опускаем верхний индекс w в определении (1) и вообще всюду). В этом случае (возможно, неединственные) конфигурации ω_N , доставляющие верхнюю грань в (1), называются *конфигурациями плотнейшей упаковки в A* . Заметим, что в случае, когда A – сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$, точное решение задачи о плотнейшей упаковке было получено при $N = 2, \dots, 12$ и $N = 24$ (см. ссылки в [4] или [5]). Асимптотическое поведение при $N \rightarrow \infty$ расстояния плотнейшей упаковки на S^2 (с точностью до следующего по порядку члена) было найдено Хабиштом и ван дер Варденом в [11] и [12].

В работе [13] авторы проанализировали асимптотическое поведение расстояния плотнейшей упаковки в невзвешенном случае для d -спрямляемых множеств и их счетных объединений.

В настоящей статье мы обозначаем через $\mathcal{H}_\alpha$, где $\alpha \leq p$, хаусдорфову α -меру в $\mathbb{R}^p$. Если $\alpha = d$ – целое число, мы выберем нормализацию, при которой изометрическая копия куба $[0, 1]^d$ имеет $\mathcal{H}_d$ -меру 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ *d -спрямляемое* для $d \leq p$, если оно является образом ограниченного подмножества T пространства $\mathbb{R}^d$ относительно липшицева отображения, т.е. относительно отображения $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^p$, которое для некоторой постоянной λ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda |x - y|, \quad x, y \in T \quad (2)$$

(см. [14], [15]).

В дальнейшем будем считать, что A – компакт. В первой части статьи мы рассмотрим задачу взвешенной плотнейшей упаковки для фиксированного веса на $A \times A$, удовлетворяющего следующим условиям. Будем называть $w: A \times A \rightarrow [0, \infty]$ *CBD-весом на $A \times A$* , если:

- (a) w непрерывен (как функция на $A \times A$) в $\mathcal{H}_d$ -почти всякой точке диагонали $D(A) := \{(x, x) : x \in A\}$;
- (b) существует окрестность G (в $A \times A$) диагонали $D(A)$, где $\sup_G w < \infty$;
- (c) $\inf_B w > 0$ на всяком замкнутом подмножестве B произведения $A \times A$, удовлетворяющем условию $B \cap D(A) = \emptyset$.

Мы используем обозначение CBD, чтобы подчеркнуть непрерывность и ограниченность на диагонали. В частности, условия (a)–(c) выполнены при w , превосходящем на $A \times A$ положительную константу и непрерывном на диагонали $D(A)$ (где непрерывность в точке диагонали (x_0, x_0) подразумевается в смысле пределов на $A \times A$).

Заметим, что $w(x, y)|x - y|$, вообще говоря, не метрика, однако если метрика $\rho(x, y)$ непрерывна относительно евклидовой метрики на $\mathbb{R}^p$ и предел

$$f(z) := \lim_{(x, y) \rightarrow (z, z)} \frac{\rho(x, y)}{|x - y|}, \quad (x, y) \in (A \times A) \setminus D(A), \quad z \in A,$$

существует и непрерывен, то мы получим результаты о плотнейших упаковках в метрике $\rho(x, y)$, полагая

$$w(x, y) := \begin{cases} \rho(x, y)/|x - y| & \text{при } x \neq y, \\ f(z) & \text{при } x = y = z. \end{cases}$$

Обзор результатов по упаковкам в неевклидовых пространствах см., например, в [16], [17].

В настоящей работе найдено асимптотическое поведение величины (1), а также *-слабое предельное распределение асимптотически экстремальных конфигураций для d -спрямляемых компактов. Затем мы обобщаем эти результаты в двух направлениях, рассматривая переменные веса и допуская наличие особенностей у веса. Если вес может принимать большие значения, то это может существенно повлиять на расстояния между оптимальными точками, что приводит к существенным техническим сложностям для весов с особенностями.

Положим

$$C_{\infty, d} := \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N([0, 1]^d) N^{1/d}.$$

Пусть Δ_d наибольшая плотность упаковки из равных неналегающих шаров в $\mathbb{R}^d$ (точное определение см. в [3]), и пусть β_d – мера Лебега единичного шара в $\mathbb{R}^d$. В силу определения

$$C_{\infty, d} = 2 \left(\frac{\Delta_d}{\beta_d} \right)^{1/d}. \quad (3)$$

Плотность Δ_d (и, соответственно, константа $C_{\infty, d}$) вычислена только при $d = 2$ (ср. [1]), а также недавно – при $d = 3$ (ср. [6]). Эти результаты показывают, что

$$C_{\infty, 2} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad C_{\infty, 3} = \sqrt[6]{2}$$

(ясно, что $C_{\infty, 1} = 1$).

Задача о плотнейшей упаковке – предельный случай при $s \rightarrow \infty$ следующей задачи о минимуме энергии:

$$\mathcal{E}_s^w(A, N) = \inf_{x_1, \dots, x_N \in A} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{w(x_i, x_j)}{|x_i - x_j|^s}.$$

Мы рассмотрели эту задачу в [18] для класса весов w , включающего в себя функции, обратные (вида $1/f$) к CBD-весам, а также более общие веса с конечным числом нулей на диагонали. Мы показали, что если $A \subset \mathbb{R}^p$ – замкнутое d -спрямляемое множество и $s > d$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_s^w(A, N)}{N^{1+s/d}} = C_{s,d} \left(\int_A (w(x, x))^{-d/s} d\mathcal{H}_d(x) \right)^{-s/d}, \quad (4)$$

где $C_{s,d}$ – положительная константа, не зависящая от A . При $w \equiv 1$ мы получаем (безвесовую) задачу о минимуме энергии (см. [19]–[23] и ссылки в этих работах).

Предельное распределение асимптотически оптимальных конфигураций понимается в следующем смысле. Если $A \subset \mathbb{R}^p$ – компакт и если ν и $\{\nu_N\}_{N=1}^\infty$ суть вероятностные борелевские меры на A , то говорится, что последовательность $\{\nu_N\}_{N=1}^\infty$ **-слабо сходится* к ν (мы пишем $\nu_N \xrightarrow{*} \nu$, $N \rightarrow \infty$), если для всякой непрерывной функции f на A

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A f d\nu_N = \int_A f d\nu.$$

Будем говорить, что последовательность конфигураций $\{\omega_N\}_{N=2}^\infty$, $\omega_N = \{x_{1,N}, \dots, x_{N,N}\} \subset A$, $N = 2, 3, \dots$, имеет предельную вероятностную меру ν , если

$$\nu(\omega_N) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_{k,N}} \xrightarrow{*} \nu, \quad N \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где δ_x – точечная вероятностная мера на $\mathbb{R}^p$ в точке $x \in \mathbb{R}^p$.

Для доказательства (5) достаточно показать, что для всякого $B \subset A$, относительная граница которого в A имеет ν -меру нуль,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\omega_N \cap B)}{N} = \nu(B). \quad (6)$$

В статьях [22] и [23] была доказана равномерность предельного распределения конфигураций минимальной s -энергии на d -спрямляемых подмножествах $\mathbb{R}^p$ при $s \geq d$. В [18] авторы показали, что плотность предельного распределения конфигураций, асимптотически минимизирующих взвешенную энергию в (4), пропорциональна $(w(x, x))^{-d/s}$, $s > d$. В. Афраимович и Л. Глебский (см. [9]) изучали свойства предельного распределения (в смысле сходимости по ультрафильтру) конфигураций оптимальной ε -сложности на компактных подмножествах $\mathbb{R}^d$ с переменной метрикой.

Нашей первой целью будет весовой аналог следующего результата из [13].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть d и p – целые числа, $d \leq p$, и пусть $A \subset \mathbb{R}^p$ – бесконечное замкнутое d -спрямляемое множество. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(A) N^{1/d} = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d(A)^{1/d} = 2 \left(\frac{\Delta_d}{\beta_d} \right)^{1/d} \mathcal{H}_d(A)^{1/d}. \quad (7)$$

При $\mathcal{H}_d(A) > 0$ для всякой последовательности $\{\bar{\omega}_N\}_{N=2}^\infty$ конфигураций плотнейшей упаковки на A такой, что $\#\bar{\omega}_N = N$, $N = 2, 3, \dots$, выполнено

$$\nu(\bar{\omega}_N) \xrightarrow{*} \frac{\mathcal{H}_d|_A(\cdot)}{\mathcal{H}_d(A)}, \quad N \rightarrow \infty.$$

§ 2. Основные результаты

Пусть $\mathcal{H}_d^w$ и h_d^w – следующие борелевские меры с носителем в A :

$$\mathcal{H}_d^w(B) = \int_B w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x)$$

и

$$h_d^w(B) = \frac{\mathcal{H}_d^w(B)}{\mathcal{H}_d^w(A)}$$

для всякого борелевского множества $B \subset A$. Будем говорить, что последовательность $\{\omega_N\}_{N=2}^\infty$, $\#\omega_N = N$, $N = 2, 3, \dots$, конфигураций в A реализует асимптотически w -плотнейшую упаковку на A , если

$$\delta^w(\omega_N) = \delta_N^w(A)(1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $d \leq p$ для целых d и p . Пусть $A \subset \mathbb{R}^p$ – замкнутое бесконечное d -спрямляемое множество, и пусть w – CBD-весовая функция на $A \times A$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d} = C_{\infty, d} \left(\int_A w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x) \right)^{1/d}, \quad (8)$$

где $C_{\infty, d}$ та же, что и в (3).

Далее, если $\mathcal{H}_d(A) > 0$, то для всякой последовательности конфигураций на A , асимптотически реализующей w -плотнейшую упаковку $\tilde{\omega}_N = \{x_1^N, \dots, x_N^N\}$, $N = 2, 3, \dots$, выполняется

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k^N} \xrightarrow{*} h_d^w, \quad N \rightarrow \infty. \quad (9)$$

ПРИМЕР 2.2. Пусть $\mathbb{D}$ – открытый единичный диск в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть A – бесконечное замкнутое 1-спрямляемое подмножество в $\mathbb{D}$ (к примеру, спрямляемая дуга или кривая) положительной длины (т.е. $\mathcal{H}_1(A) > 0$). Допустим, что $\omega_N^* = \{z_{1,N}^*, \dots, z_{N,N}^*\}$ максимизирует минимальное псевдогиперболическое расстояние $d(z, \zeta) = |(z - \zeta)/(1 - z\bar{\zeta})|$ среди всех N -точечных подмножеств. Тогда из теоремы 2.1 с весом $w(z, \zeta) = 1/|1 - z\bar{\zeta}|$, $z, \zeta \in \mathbb{D}$, следует, что точки ω_N^* асимптотически равномерно распределены относительно инфинитезимальной метрики Бергмана (Пуанкаре) $|dz|/(1 - |z|^2)$.

Аналогично, если A – замкнутое подмножество D положительной площади (т.е. $\mathcal{H}_2(A) > 0$), то для того же веса, что и раньше, конфигурации, реализующие w -плотнейшую упаковку, имеют асимптотическую плотность $1/(1 - |z|^2)^2$ относительно плоской меры (т.е. $\mathcal{H}_2$).

В теореме 2.1 рассматриваются ограниченные веса на $D(A)$. Ниже мы обсуждаем случай, когда вес может иметь особенности на $D(A)$. Пусть $B(a, r)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^p$ радиуса $r > 0$ с центром в точке a . Для $t > 0$ скажем, что у функции $w: A \times A \rightarrow [0, \infty]$ имеется *особенность в $(a, a) \in D(A)$ порядка не выше t* , если существуют положительные постоянные C и δ , для которых

$$w(x, y) \leq \frac{C}{|x - a|^t}, \quad x, y \in A \cap B(a, \delta).$$

Если у w есть особенность $(a, a) \in D(A)$ слишком высокого порядка, то она может играть роль притягивающего стока для оптимальных конфигураций, и в результате $\delta_N^w(A) = \infty$. К примеру, пусть A – замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в начале координат, и пусть $w(x, y) = |x|^{-t} + |y|^{-t}$, $x, y \in A$, $t > 1$. Если $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ – конфигурация N различных точек A , то $\delta^w(\gamma\omega_N) = \gamma^{1-t}\delta^w(\omega_N)$ для всякого $0 < \gamma < 1$. Положив $\gamma \rightarrow 0$, мы видим, что $\delta_N^w(A) = \infty$.

Говорят, что замкнутое подмножество $A \subset \mathbb{R}^p$ α -регулярно в точке $a \in A$, если существуют такие положительные постоянные C_0 и δ_0 , что

$$C_0^{-1}r^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha(A \cap B(x, r)) \leq C_0r^\alpha \quad (10)$$

для всех $x \in A \cap B(a, \delta_0)$ и $0 < r < \delta_0$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $A \subset \mathbb{R}^p$ – бесконечное замкнутое d -спрямляемое множество $d \leq p$. Для конечного набора точек $a_1, \dots, a_n \in A$ допустим, что A α_i -регулярно в a_i с $\alpha_i \leq d$, $i = 1, \dots, n$, и пусть $w: A \times A \rightarrow [0, \infty]$ – CBD-весовая функция на $K \times K$ для любого компакта $K \subset A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Если w имеет особенности порядка $t < 1$ в точках (a_i, a_i) , то результаты теоремы 2.1 остаются в силе.

Теперь при подходящих предположениях мы опишем асимптотику поведения взвешенных плотнейших упаковок в случае веса, зависящего от N . Пусть $\{v_N\}_{N=2}^\infty$ – последовательность неотрицательных весовых функций на $A \times A$. Скажем, что последовательность конфигураций $\{\omega_N\}_{N=2}^\infty$ на A , где $\#\omega_N = N$, $N = 2, 3, \dots$, асимптотически оптимальна для этой последовательности весов, если

$$\delta^{v_N}(\omega_N) = \delta_N^{v_N}(A)(1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $d \leq p$ целые, и пусть $A \subset \mathbb{R}^p$ – произвольное бесконечное замкнутое d -спрямляемое множество. Пусть либо w – CBD-вес на $A \times A$, либо множество A и вес w удовлетворяют условиям теоремы 2.3. Пусть $\{v_N\}_{N=2}^\infty$ – последовательность таких неотрицательных функций на $A \times A$, что

$$(1 - \varepsilon_N)w(x, y) \leq v_N(x, y) \leq (1 + \varepsilon_N)w(x, y), \quad (x, y) \in A \times A, \quad (11)$$

где $\{\varepsilon_N\}_{N=2}^\infty \subset (0, 1)$ – последовательность, сходящаяся к нулю. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^{v_N}(A)N^{1/d} = C_{\infty, d} \left(\int_A w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x) \right)^{1/d}.$$

Более того, если $\mathcal{H}_d(A) > 0$, то для всякой последовательности конфигураций $\omega_N := \{x_1^N, \dots, x_N^N\}$, $N = 2, 3, \dots$, асимптотически оптимальной для последовательности весов $\{v_N\}_{N=2}^\infty$, выполняется

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k^N} \xrightarrow{*} h_d^w, \quad N \rightarrow \infty. \quad (12)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам будет удобно положить величину $\delta_N^w(A)$ равной нулю для конечных множеств при $N > \#A$. Для фиксированных натуральных чисел $d \leq p$ положим

$$\underline{g}_d^w(A) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d}, \quad \bar{g}_d^w(A) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d}$$

и

$$g_d^w(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d}, \quad (13)$$

если этот предел существует. При $w \equiv 1$ обозначим вышеуказанные пределы соответственно через $\underline{g}_d(A)$, $\bar{g}_d(A)$ и $g_d(A)$. Для доказательства теорем 2.1 и 2.3 начнем со следующих аналогов лемм 1 и 2 из [18].

ЛЕММА 3.1. Пусть B и D суть ограниченные подмножества $\mathbb{R}^p$, и пусть $w: (B \cup D) \times (B \cup D) \rightarrow [0, \infty]$ – произвольная весовая функция. Тогда

$$\bar{g}_d^w(B \cup D)^d \leq \bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d. \quad (14)$$

Более того, если $\bar{g}_d^w(B), \bar{g}_d^w(D) < \infty$ и хотя бы одна из этих величин положительна, то

$$\lim_{\mathcal{N} \ni N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap B)}{N} = \frac{\bar{g}_d^w(B)^d}{\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d} \quad (15)$$

для всякой последовательности $\{\tilde{\omega}_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ таких N -точечных конфигураций в $B \cup D$, что

$$\lim_{\mathcal{N} \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\tilde{\omega}_N) N^{1/d} = (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d}, \quad (16)$$

где $\mathcal{N}$ – бесконечное подмножество $\mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B \cup D$ – конечное множество, то результат леммы тривиально выполнен. Пусть $\mathcal{N}_1 \subset \mathbb{N}$ – бесконечное подмножество, и пусть $\{\omega_N\}_{N \in \mathcal{N}_1}$ – такая последовательность N -точечных конфигураций в $B \cup D$, что определен предел

$$\alpha := \lim_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \frac{\#(\omega_N \cap B)}{N}.$$

Покажем, что

$$\limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N) N^{1/d} \leq (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d}. \quad (17)$$

Пусть $N_B = \#(\omega_N \cap B)$ и $N_D = \#(\omega_N \setminus B)$, $N \in \mathcal{N}_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta^w(\omega_N) &= \min_{x \neq y \in \omega_N} w(x, y) |x - y| \\ &\leq \min\{\delta^w(\omega_N \cap B), \delta^w(\omega_N \setminus B)\} \leq \min\{\delta_{N_B}^w(B), \delta_{N_D}^w(D)\}. \end{aligned}$$

Если $0 < \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} &\limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N) N^{1/d} \\ &\leq \min\left\{ \limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta_{N_B}^w(B) N_B^{1/d} \left(\frac{N}{N_B}\right)^{1/d}, \limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta_{N_D}^w(D) N_D^{1/d} \left(\frac{N}{N_D}\right)^{1/d} \right\} \\ &\leq \min\{\bar{g}_d^w(B) \alpha^{-1/d}, \bar{g}_d^w(D) (1 - \alpha)^{-1/d}\} \leq (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d}. \end{aligned}$$

Если $\alpha = 0$, то

$$\begin{aligned} &\limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N) N^{1/d} \\ &\leq \limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N \setminus B) N^{1/d} \leq \limsup_{\mathcal{N}_1 \ni N \rightarrow \infty} \delta_{N_D}^w(D) N_D^{1/d} \left(\frac{N}{N_D}\right)^{1/d} \\ &\leq \bar{g}_d^w(D) \leq (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d}. \end{aligned}$$

Случай $\alpha = 1$ разбирается аналогично, что и завершает обоснование (17).

Пусть теперь $\{\bar{\omega}_N\}_{N=2}^\infty$ – такая последовательность N -точечных конфигураций в $B \cup D$, что для достаточно большого N

$$\begin{aligned} \delta^w(\bar{\omega}_N) &> \delta_N^w(B \cup D) - \frac{1}{N^{2/d}} \quad \text{при } \delta_N^w(B \cup D) < \infty, \\ \delta^w(\bar{\omega}_N) &> N \quad \text{при } \delta_N^w(B \cup D) = \infty, \quad N \geq 2. \end{aligned}$$

Поскольку $\{\#(\bar{\omega}_N \cap B)/N\}_{N=2}^\infty$ – ограниченная последовательность, то существует такое ограниченное подмножество $\mathcal{N}_2 \subset \mathbb{N}$, что

$$\bar{g}_d^w(B \cup D) = \lim_{\mathcal{N}_2 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\bar{\omega}_N) N^{1/d},$$

и существует предел

$$\lim_{\mathcal{N}_2 \ni N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{\omega}_N \cap B)}{N}.$$

Тогда в силу (17)

$$\bar{g}_d^w(B \cup D) = \lim_{\mathcal{N}_2 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\bar{\omega}_N) N^{1/d} \leq (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d},$$

что и доказывает (14).

Пусть теперь $\{\tilde{\omega}_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ – такая последовательность N -точечных конфигураций в $B \cup D$, что выполнено (16). Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}$, для которой существует предел

$$\beta := \lim_{\mathcal{N}_3 \ni N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap B)}{N}.$$

Предположим, что $\bar{g}_d^w(B)$ и $\bar{g}_d^w(D)$ положительны. Используя проведенные рассуждения и (16), получаем

$$\begin{aligned} (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d} &= \lim_{\mathcal{N}_3 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\tilde{\omega}_N) N^{1/d} \\ &\leq F(\beta) := \min\{\bar{g}_d^w(B)\beta^{-1/d}, \bar{g}_d^w(D)(1-\beta)^{-1/d}\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Функция $F(\beta)$ достигает максимума на $[0, 1]$ только в точке

$$\alpha^* := \frac{\bar{g}_d^w(B)^d}{\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d}$$

и $F(\alpha^*) = (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d}$. Теперь в силу (18) с необходимостью получаем, что $\beta = \alpha^*$.

Допустим теперь, что $\bar{g}_d^w(B) = 0$, но $\bar{g}_d^w(D) > 0$. Если $\beta > 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{g}_d^w(D) &= (\bar{g}_d^w(B)^d + \bar{g}_d^w(D)^d)^{1/d} = \lim_{\mathcal{N}_3 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\tilde{\omega}_N) N^{1/d} \\ &\leq \lim_{\mathcal{N}_3 \ni N \rightarrow \infty} \delta^w(\tilde{\omega}_N \cap B) N^{1/d} \leq \bar{g}_d^w(B)\beta^{-1/d} = 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию положительности $\bar{g}_d^w(D)$. Следовательно, $\beta = 0 = \alpha^*$. Если $\bar{g}_d^w(D) = 0$, то $\beta = 1 = \alpha^*$, так что всегда $\beta = \alpha^*$. Поскольку подпоследовательность $\mathcal{N}_3$ произвольна, приходим к (15).

ЛЕММА 3.2. Пусть B и D – подмножества $\mathbb{R}^p$, для которых $\text{dist}(B, D) > 0$. Пусть $w(x, y) > h$ при $(x, y) \in B \times D$ для некоторого $h > 0$. Тогда

$$\underline{g}_d^w(B \cup D)^d \geq \underline{g}_d^w(B)^d + \underline{g}_d^w(D)^d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что $0 < \underline{g}_d^w(B), \underline{g}_d^w(D) < \infty$, так как иначе лемма 3.2 тривиально выполняется. Пусть

$$\alpha_* := \frac{\underline{g}_d^w(B)^d}{\underline{g}_d^w(B)^d + \underline{g}_d^w(D)^d}$$

и $a := \text{dist}(B, D)$. Пусть $\{\omega_N^B\}_{N=2}^\infty$ и $\{\omega_N^D\}_{N=2}^\infty$ – такие последовательности N -точечных конфигураций соответственно из B и D , что

$$\underline{g}_d^w(B) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N^B) N^{1/d}, \quad \underline{g}_d^w(D) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_N^D) N^{1/d}$$

(мы можем выбрать эти последовательности так же, как $\{\bar{\omega}_N\}$ в доказательстве леммы 3.1). Для всякого $N \in \mathbb{N}$ пусть $N_B := \lfloor \alpha_* N \rfloor$ и $N_D := N - \lfloor \alpha_* N \rfloor$, где $\lfloor t \rfloor$ – целая часть числа t . Тогда

$$\delta_N^w(B \cup D) \geq \delta^w(\omega_{N_B}^B \cup \omega_{N_D}^D) \geq \min\{\delta^w(\omega_{N_B}^B), \delta^w(\omega_{N_D}^D), ha\}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \underline{g}_d^w(B \cup D) &= \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(B \cup D) N^{1/d} \\ &\geq \min\left\{\liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_{N_B}^B) N^{1/d}, \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_{N_D}^D) N^{1/d}, \lim_{N \rightarrow \infty} ha N^{1/d}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \left\{ \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_{N_B}^B) N_B^{1/d} \left(\frac{N}{N_B} \right)^{1/d}, \liminf_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\omega_{N_D}^D) N_D^{1/d} \left(\frac{N}{N_D} \right)^{1/d} \right\} \\
&\geq \min \{ \underline{g}_d^w(B)(\alpha^*)^{-1/d}, \underline{g}_d^w(D)(1 - \alpha_*)^{-1/d} \} = (\underline{g}_d^w(B)^d + \underline{g}_d^w(D)^d)^{1/d},
\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы 3.2.

§ 4. Случай веса, ограниченного на диагонали

Теорема 2.1 – следствие следующего результата.

ЛЕММА 4.1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^p$ – компактное множество с $\mathcal{H}_d(A) < \infty$, и пусть $w: A \times A \rightarrow [0, \infty]$ – CBD-весовая функция на $A \times A$. Предположим, далее, что для всякого компактного подмножества $K \subset A$ определен предел $g_d(K)$, заданный формулой

$$g_d(K) = C_{\infty, d} \mathcal{H}_d(K)^{1/d}. \quad (19)$$

Тогда:

(а) существует предел $g_d^w(A)$, заданный формулой

$$g_d^w(A) = C_{\infty, d} \mathcal{H}_d^w(A)^{1/d}, \quad (20)$$

(б) если последовательность $\{\tilde{\omega}_N\}_{N=2}^\infty$, где $\tilde{\omega}_N = \{x_1^N, \dots, x_N^N\}$, реализует асимптотически плотнейшую w -упаковку на множестве A и $\mathcal{H}_d(A) > 0$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x_k^N} \xrightarrow{*} h_d^w, \quad N \rightarrow \infty. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первой части леммы (соотношения (20)) разобьем A на непересекающиеся “куски” малого диаметра и оценим радиус w -наилучшей упаковки A , заменяя w ее супремумом или инфимумом на каждом из кусков и применяя леммы 3.1 и 3.2.

Предположим для $\delta > 0$, что $\mathcal{P}_\delta$ – такое разбиение A , что $\text{diam } P \leq \delta$ и $\mathcal{H}_d(\overline{P}) = \mathcal{H}_d(P)$ при $P \in \mathcal{P}_\delta$, где $\overline{B}$ есть замыкание множества B . Для всякого $P \in \mathcal{P}_\delta$ выберем такое замкнутое $Q_P \subset P$, чтобы $\mathcal{Q}_\delta := \{Q_P : P \in \mathcal{P}_\delta\}$ удовлетворяло соотношению

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \mathcal{H}_d(Q_P) \geq \mathcal{H}_d(A) - \delta. \quad (22)$$

Мы можем построить пример таких наборов $\mathcal{P}_\delta$ и $\mathcal{Q}_\delta$ следующим образом. Пусть $G_j[t]$ – гиперплоскость в $\mathbb{R}^p$, образованная точками с j -й координатой, равной t . Если $(-a, a)^p$ – куб, содержащий A , то для $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, m\}^p$ положим

$$R_{\mathbf{i}} := [t_{i_1-1}^1, t_{i_1}^1) \times \dots \times [t_{i_p-1}^p, t_{i_p}^p),$$

где число m и разбиения $-a = t_0^j < t_1^j < \dots < t_m^j = a$, $j = 1, \dots, p$, выбраны так, чтобы диаметр каждого R_i , $i \in \{1, \dots, m\}^p$, оказался меньше δ и $\mathcal{H}_d(G_j[t_i^j] \cap A) = 0$ для всех i и j . (Поскольку $\mathcal{H}_d(A) < \infty$, то множество t , для которых $\mathcal{H}_d(G_j[t] \cap A) > 0$, не более чем счетно.) Теперь можно выбрать

$$\mathcal{P}_\delta = \{R_i \cap A : i \in \{1, \dots, m\}^p\}$$

и $\gamma \in (0, 1)$, достаточно близкое к 1, такими, чтобы (22) выполнялось при $\mathcal{Q}_\delta = \{Q_i : i \in \{1, \dots, m\}^p\}$, где $Q_i = (\gamma(\bar{R}_i - c_i) + c_i) \cap A$ и c_i – центр R_i .

Для $B \subset A$ положим

$$\bar{w}_B := \sup_{x, y \in B} w(x, y), \quad \underline{w}_B := \inf_{x, y \in B} w(x, y)$$

и введем простые функции

$$\bar{w}_\delta(x) := \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{w}_P \chi_P(x), \quad \underline{w}_\delta(x) := \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \underline{w}_P \chi_P(x),$$

где χ_K – характеристическая функция множества K . Поскольку расстояние между любой парой множеств из $\mathcal{Q}_\delta$ строго положительно, то, применяя лемму 3.2 и равенство (19), получим

$$\begin{aligned} \underline{g}_d^w(A)^d &\geq \underline{g}_d^w\left(\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_\delta} Q\right)^d \geq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_\delta} \underline{w}_Q^d \underline{g}_d(Q)^d \\ &\geq C_{\infty, d}^d \sum_{Q \in \mathcal{Q}_\delta} \underline{w}_Q^d \mathcal{H}_d(Q) \geq C_{\infty, d}^d \int_{\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_\delta} Q} \underline{w}_\delta(x)^d d\mathcal{H}_d(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Мы полагаем здесь $\delta_N^w(Q) = 0$ при $\#Q$, равном 0 или 1.

С другой стороны, по лемме 3.1, теореме 1.1 и в силу свойств разбиения $\mathcal{P}_\delta$ мы получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \bar{g}_d^w(A)^d &= \bar{g}_d^w\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{P}\right)^d \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{g}_d^w(\bar{P})^d \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{w}_P^d \bar{g}_d(\bar{P})^d \\ &= C_{\infty, d}^d \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{w}_P^d \mathcal{H}_d(\bar{P}) = C_{\infty, d}^d \sum_{P \in \mathcal{P}_\delta} \bar{w}_P^d \mathcal{H}_d(P) \\ &= C_{\infty, d}^d \int_A \bar{w}_\delta(x)^d d\mathcal{H}_d(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку w – CBD-вес на $A \times A$, то существует окрестность G диагонали $D(A)$, в которой $\tau := \sup_G w < \infty$. При достаточно малом $\delta > 0$ получаем $P \times P \subset G$ для всякого $P \in \mathcal{P}_\delta$, так что $\underline{w}_\delta(x) \leq w(x, x) \leq \bar{w}_\delta(x) \leq \tau$ при $x \in A$. Более того, w непрерывна в $(x, x) \in D(A)$ для $\mathcal{H}_d$ -почти всех $x \in A$, так что $\bar{w}_\delta(x)$ и $\underline{w}_\delta(x)$ сходятся к $w(x, x)$ при $\delta \rightarrow 0$ для любого такого x . Значит, оба интеграла

$$\int_{\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_\delta} Q} \underline{w}_\delta(x)^d d\mathcal{H}_d(x), \quad \int_A \bar{w}_\delta(x)^d d\mathcal{H}_d(x)$$

сходятся к $\mathcal{H}_d^w(A)$ при $\delta \rightarrow 0$ по теореме Лебега о сходимости, так что, используя неравенство (23) и (24), получаем (20).

Докажем теперь (21). Пусть $\mathcal{H}_d(A) > 0$, и пусть $\tilde{\omega}_N := \{x_1^N, \dots, x_N^N\}$, $N \in \mathbb{N}$, – последовательность конфигураций из A , реализующая асимптотически w -плотнейшую упаковку. Выберем подмножество $B \subset A$, относительная граница которого в A (мы обозначим ее $\partial_A B$) имеет $\mathcal{H}_d$ -меру нуль. Покажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap B)}{N} = h_d^w(B). \quad (25)$$

Заметим, что $\overline{B}$ и $\overline{A \setminus B}$ суть компакты конечной $\mathcal{H}_d$ -меры и что ограничение w на каждый из них остается CBD-весом. Всякое компактное подмножество этих множеств – компактное подмножество A , так что эти множества удовлетворяют условиям леммы 4.1. Более того, $\mathcal{H}_d^w(\partial_A \overline{B}) = \mathcal{H}_d^w(\partial_A \overline{A \setminus B}) = 0$. Таким образом,

$$g_d^w(\overline{B}) = C_{\infty, d} \mathcal{H}_d^w(\overline{B})^{1/d}, \quad g_d^w(\overline{A \setminus B}) = C_{\infty, d} \mathcal{H}_d^w(\overline{A \setminus B})^{1/d},$$

и, учитывая соотношение (20), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\tilde{\omega}_N) N^{1/d} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d} = g_d^w(A) = C_{\infty, d} \mathcal{H}_d^w(A)^{1/d} \\ &= C_{\infty, d} (\mathcal{H}_d^w(\overline{B}) + \mathcal{H}_d^w(\overline{A \setminus B}))^{1/d} = (g_d^w(\overline{B})^d + g_d^w(\overline{A \setminus B})^d)^{1/d}. \end{aligned}$$

В силу соотношения (16) из леммы 3.1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap \overline{B})}{N} = \frac{g_d^w(\overline{B})^d}{g_d^w(\overline{B})^d + g_d^w(\overline{A \setminus B})^d} = h_d^w(\overline{B}) = h_d^w(B). \quad (26)$$

Поскольку (26) выполнено для всякого замкнутого подмножества A с границей (относительно A) $\mathcal{H}_d$ -меры нуль, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap (\overline{B} \setminus B))}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\tilde{\omega}_N \cap \partial_A B)}{N} = h_d^w(\partial_A B) = 0.$$

Следовательно, равенство (25) выполняется для всех $B \subset A$ с границей (относительно A) нулевой $\mathcal{H}_d$ -меры. Как указано в § 1, отсюда следует (21), что и завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Поскольку A – спрямляемый компакт, то $\mathcal{H}_d(A) < \infty$, и всякое его замкнутое подмножество K также является d -спрямляемым компактом. По теореме 1.1 равенство (19) выполнено для K . Теорема 2.1 следует теперь из леммы 4.1.

§ 5. Случай веса с особенностями на диагонали

В этом параграфе мы исследуем асимптотическое поведение $\delta_N^w(A)$. Из условия теоремы 2.3 вытекает, что величина

$$\mathcal{H}_d^w(A) = \int_A w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x)$$

конечна и положительна (см. доказательство ниже), так что $g_d^w(A)$ имеет те же свойства. Следующая лемма, в которой предполагается регулярность снизу, оказывается важным компонентом доказательства теоремы 2.3. В духе определения α -регулярности (10) скажем, что множество $K \subset \mathbb{R}^p$ α -регулярно снизу в $a \in K$, если существуют такие положительные постоянные C_0 и r_0 , что

$$C_0^{-1}r^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha(K \cap B(x, r)), \quad x \in K \cap B(a, r_0), \quad 0 < r < r_0.$$

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\alpha > 0$, и пусть K – компакт в $\mathbb{R}^p$, α -регулярный снизу в $a \in K$. Пусть $w: K \times K \rightarrow [0, \infty]$ – вес с особенностью порядка не более $t < 1$ в a . Тогда существует такая константа $C_1 = C_1(w, K, t, \alpha)$, что для достаточно малых λ*

$$\bar{g}_\alpha^w(K \cap B(a, \lambda)) \leq C_1 \left(\int_{K \cap B(a, 2\lambda)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) \right)^{1/\alpha}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем r_0 и C_0 из определения α -регулярности снизу множества K в точке a , и пусть C и δ такие же, как в определении особенности w порядка не более $t < 1$ в точке a .

Выберем $0 < \lambda < \min\{r_0, \delta\}$. Пусть $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ – произвольная конфигурация N различных точек из $K \cap B(a, \lambda)$. Для $i = 1, \dots, N$ пусть $\rho_i = |x_i - a|$, $r_i = \min_{j: j \neq i} |x_j - x_i|$, и пусть y_i – такая точка в ω_N , что $|x_i - y_i| = r_i$.

Поскольку $K \cap B(a, \lambda)$ ограничено, то существует не более $L - 1$ таких точек $x_i \in \omega_N$ (например, можно положить $L = 3^p + 1$), что $r_i \geq \lambda$. Перенумеруем точки из ω_N так, чтобы $\rho_N \leq \rho_i$, $i = 1, \dots, N - 1$, и $r_i < \lambda$, $i = 1, \dots, N - L$. Тогда

$$\delta^w(\omega_N) = \min_{i \neq j} w(x_i, x_j) |x_i - x_j| \leq \min_{i=1, \dots, N-L} w(x_i, y_i) |x_i - y_i|.$$

Поскольку $x_i, y_i \in K \cap B(a, \lambda) \subset K \cap B(a, \delta)$ для всякого $i = 1, \dots, N - L$, то имеем

$$w(x_i, y_i) \leq \frac{C}{|x_i - a|^t}.$$

Следовательно,

$$\delta^w(\omega_N) \leq \min_{i=1, \dots, N-L} \frac{Cr_i}{|x_i - a|^t} = \min_{i=1, \dots, N-L} \frac{Cr_i}{\rho_i^t} \leq C \left(\frac{1}{N-L} \sum_{i=1}^{N-L} \frac{r_i^\alpha}{\rho_i^{t\alpha}} \right)^{1/\alpha}.$$

При $i = 1, \dots, N - 1$

$$r_i = \min_{j: j \neq i} |x_j - x_i| \leq |x_i - a| + \min_{j: j \neq i} |a - x_j| \leq \rho_i + \rho_N \leq 2\rho_i.$$

Для $x \in B(x_i, r_i/2)$, $i = 1, \dots, N - 1$, мы также имеем

$$|x - a| \leq |x - x_i| + |x_i - a| \leq \frac{r_i}{2} + \rho_i \leq 2\rho_i.$$

Учитывая α -регулярность снизу множества K в точке a , нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{r_i^\alpha}{\rho_i^{t\alpha}} &\leq 2^\alpha C_0 \mathcal{H}_\alpha \left(K \cap B \left(x_i, \frac{r_i}{2} \right) \right) \frac{1}{\rho_i^{t\alpha}} \\ &\leq 2^\alpha C_0 \int_{K \cap B(x_i, r_i/2)} \frac{1}{\rho_i^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) \leq 2^{\alpha(t+1)} C_0 \int_{K \cap B(x_i, r_i/2)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta^w(\omega_N) \leq 2^{t+1} C_0^{1/\alpha} C(N-L)^{-1/\alpha} \left(\sum_{i=1}^{N-L} \int_{K \cap B(x_i, r_i/2)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Поскольку ω_N – произвольный набор N точек из $K \cap B(a, \lambda)$ и $B(x_i, r_i/2) \cap B(x_j, r_j/2) = \emptyset$, $i \neq j$, мы можем записать

$$\delta_N^w(K \cap B(a, \lambda)) \leq 2^{t+1} C_0^{1/\alpha} C(N-L)^{-1/\alpha} \left(\int_{K \cap B(a, 2\lambda)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{g}_\alpha^w(K \cap B(a, \lambda)) &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(K \cap B(a, \lambda)) (N-L)^{1/\alpha} \\ &\leq C_1 \left(\int_{K \cap B(a, 2\lambda)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) \right)^{1/\alpha}, \end{aligned}$$

где $C_1 = 2^{t+1} C_0^{1/\alpha} C$, что и завершает доказательство леммы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Если K α -регулярно, $0 < \alpha \leq d$, а не просто α -регулярно снизу в a , то интеграл

$$\int_K \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x)$$

конечен (ср. [15; с. 109]), и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{K \cap B(a, 2\lambda)} \frac{1}{|x - a|^{t\alpha}} d\mathcal{H}_\alpha(x) = 0.$$

Теперь по лемме 5.1 получаем, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{g}_\alpha^w(K \cap B(a, \lambda)) = 0$ для всякого $0 < \alpha \leq d$. Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{g}_d^w(K \cap B(a, \lambda)) = 0$.

Из α_i -регулярности A в a_i и того факта, что w имеет в a_i особенность порядка не выше $t < 1$, $i = 1, \dots, n$, вытекает, что

$$\int_A w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x) < \infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По леммам 5.1 и 3.1 можно найти такое $\delta > 0$, что для $B_\delta := \bigcup_{i=1}^n A \cap B(a_i, \delta)$ мы имеем $\bar{g}_d^w(B_\delta) < \varepsilon$, и при $A_\delta := A \setminus B_\delta$

$$\mathcal{H}_d^w(A_\delta) = \int_{A_\delta} w(x, x)^d d\mathcal{H}_d(x) \geq (1 - \varepsilon) \mathcal{H}_d^w(A).$$

Поскольку w – CBD-вес на $A_\delta \times A_\delta$, то по теореме 2.1 получаем, что $g_d^w(A_\delta)$ определено и дано равенством $g_d^w(A_\delta) = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d^w(A_\delta)^{1/d}$. Теперь по лемме 3.1

$$\begin{aligned} \bar{g}_d^w(A) &\leq (\bar{g}_d^w(A_\delta)^d + \bar{g}_d^w(B_\delta)^d)^{1/d} \\ &\leq (C_{\infty,d}^d \mathcal{H}_d^w(A_\delta) + \varepsilon^d)^{1/d} \leq (C_{\infty,d}^d \mathcal{H}_d^w(A) + \varepsilon^d)^{1/d}. \end{aligned} \quad (28)$$

Кроме того,

$$g_d^w(A) \geq g_d^w(A_\delta) = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d^w(A_\delta)^{1/d} \geq C_{\infty,d} (1 - \varepsilon)^{1/d} \mathcal{H}_d^w(A)^{1/d}. \quad (29)$$

Взяв $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенствах (28) и (29), мы видим, что $g_d^w(A)$ определено и равенство (8) также выполняется в условиях теоремы 2.3.

Покажем, что (9) выполняется для веса с сингулярностями. Пусть $B \subset A$ – такое множество, что $\mathcal{H}_d(\partial_A B) = 0$. Для всякого $\delta > 0$, для которого $\mathcal{H}_d(A \cap \partial_{\mathbb{R}^p} B(a_i, \delta)) = 0$, $i = 1, \dots, n$ (это условие может нарушаться для не более чем счетного числа δ), рассмотрим множества $B_1 = B \cup (\bigcup_{i=1}^n A \cap B(a_i, \delta))$ и $A \setminus B_1$. Заметим, что $\mathcal{H}_d^w(\partial_A B_1) = \mathcal{H}_d^w(\partial_A A \setminus B_1) = 0$. Оба множества d -спрямляемые. Поскольку $A \setminus B_1$ тоже является компактным подмножеством $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, то w – CBD-весовая функция на $\overline{A \setminus B_1} \times \overline{A \setminus B_1}$. Теперь по теореме 2.1 получаем

$$g_d^w(\overline{A \setminus B_1}) = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d^w(A \setminus B_1)^{1/d}.$$

Множество $\overline{B_1}$ компактно, и при достаточно малом $\delta > 0$ оно α_i -регулярно в a_i , $i = 1, \dots, n$. Ограничение w на $\overline{B_1} \times \overline{B_1}$ оказывается весом с особенностями порядка не выше $t < 1$ в $a_1, \dots, a_n$, так что по (8) получаем

$$g_d^w(\overline{B_1}) = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d^w(B_1)^{1/d}.$$

Пусть $\{\bar{w}_N\}_{N=2}^\infty$, $\#\bar{w}_N = N$, – последовательность, реализующая w -плотнейшую упаковку. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \delta^w(\bar{w}_N) N^{1/d} &= g_d^w(A) = C_{\infty,d} \mathcal{H}_d^w(A)^{1/d} \\ &= C_{\infty,d} (\mathcal{H}_d^w(B_1) + \mathcal{H}_d^w(A \setminus B_1))^{1/d} = (g_d^w(\overline{B_1})^d + g_d^w(\overline{A \setminus B_1})^d)^{1/d}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{H}_d^w(A) > 0$, то одна из величин $\mathcal{H}_d^w(\overline{B_1})$ и $\mathcal{H}_d^w(\overline{A \setminus B_1})$ должна быть положительной. Используя соотношение (15) из леммы 3.1, получаем

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{w}_N \cap B)}{N} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{w}_N \cap \overline{B_1})}{N} = \frac{g_d^w(\overline{B_1})^d}{g_d^w(\overline{B_1})^d + g_d^w(\overline{A \setminus B_1})^d} = h_d^w(B_1).$$

Так как $\lim_{\delta \rightarrow 0} h_d^w(B_1) = h_d^w(B)$, то

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{w}_N \cap B)}{N} \leq h_d^w(B). \quad (30)$$

Повторяя эти рассуждения для $B_1 = (A \setminus B) \cup (\bigcup_{i=1}^n A \cap B(a_i, \delta))$, мы видим, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{w}_N \cap (A \setminus B))}{N} \leq h_d^w(A \setminus B).$$

Следовательно,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{\omega}_N \cap B)}{N} \geq h_d^w(B).$$

Вместе с (30) это соотношение показывает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\bar{\omega}_N \cap B)}{N} = h_d^w(B),$$

откуда следует, что (9) также выполнено в предположениях теоремы 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. В силу неравенств (11) для всякой конфигурации $\omega_N := \{x_1, \dots, x_N\} \subset A$ получаем

$$\begin{aligned} \delta^{v_N}(\omega_N) &= \min_{i \neq j} v_N(x_i, x_j) |x_i - x_j| \\ &\geq (1 - \varepsilon_N) \min_{i \neq j} w(x_i, x_j) |x_i - x_j| = (1 - \varepsilon_N) \delta^w(\omega_N). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично,

$$\delta^{v_N}(\omega_N) \leq (1 + \varepsilon_N) \delta^w(\omega_N). \quad (32)$$

Таким образом,

$$(1 - \varepsilon_N) \delta_N^w(A) \leq \delta_N^{v_N}(A) \leq (1 + \varepsilon_N) \delta_N^w(A),$$

и по теореме 2.1 или 2.3 получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^{v_N}(A) N^{1/d} = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^w(A) N^{1/d} = C_{\infty, d} (\mathcal{H}_d^w(A))^{1/d}. \quad (33)$$

Пусть теперь $\{\omega_N\}_{N=2}^\infty$ – асимптотически оптимальная последовательность конфигураций для последовательности весов $\{v_N\}_{N=2}^\infty$. Учитывая (33), получаем

$$\delta^{v_N}(\omega_N) = \delta_N^{v_N}(A)(1 + o(1)) = \delta_N^w(A)(1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

Из соотношений (31) и (32) следует также, что

$$\delta^{v_N}(\omega_N) = \delta^w(\omega_N)(1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\delta^w(\omega_N) = \delta_N^w(A)(1 + o(1)), \quad N \rightarrow \infty,$$

так что последовательность $\{\omega_N\}_{N=2}^\infty$ реализует асимптотически w -плотнейшую упаковку на A . Снова применяя теорему 2.1 или 2.3, мы приходим к (12).

Список литературы

- [1] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1953; рус. пер.: Л. Тот Фейеш, *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*, Физматгиз, М., 1958.
- [2] L. Fejes Tóth, *Regular figures*, Macmillan, New York; Pergamon Press, Oxford, 1964.

- [3] C. A. Rogers, *Packing and covering*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **54**, Cambridge Univ. Press, New York, 1964; рус. пер.: К. Роджерс, *Укладки и покрытия*, Мир, М., 1968.
- [4] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1999; рус. пер.: Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Мир, М., 1990.
- [5] K. Böröczky, jr., *Finite packing and covering*, Cambridge Tracts in Math., **154**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [6] Th. C. Hales, “A proof of the Kepler conjecture”, *Ann. of Math.* (2), **162**:3 (2005), 1065–1185.
- [7] V. F. Babenko, “On the optimal error bound for cubature formulae on certain classes of continuous functions”, *Anal. Math.*, **3**:1 (1977), 3–9.
- [8] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, “ ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах”, *УМН*, **14**:2 (1959), 3–86; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, V. M. Tikhomirov, “ ε -entropy and ε -capacity of sets in functional spaces”, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **17** (1961), 227–364.
- [9] V. Afraimovich, L. Glebsky, “Measures of ε -complexity”, *Taiwanese J. Math.*, **9**:3 (2005), 397–409.
- [10] E. V. Chornaya, “On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions”, *East J. Approx.*, **1**:1 (1995), 47–60.
- [11] W. Habicht, B. L. van der Waerden, “Lagerung von Punkten auf der Kugel”, *Math. Ann.*, **123**:1 (1951), 223–234.
- [12] B. L. van der Waerden, “Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze”, *Math. Ann.*, **125**:1 (1952), 213–222.
- [13] S. V. Borodachov, D. P. Hardin, E. B. Saff, “Asymptotics of best-packing on rectifiable sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:8 (2007), 2369–2380.
- [14] H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969; рус. пер.: Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [15] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability*, Cambridge Stud. Adv. Math., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [16] K. Böröczky, “Packing of spheres in spaces of constant curvature”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **32**:3–4 (1978), 243–261.
- [17] L. Bowen, Ch. Radin, “Densest packing of equal spheres in hyperbolic space”, *Discrete Comput. Geom.*, **29**:1 (2003), 23–39.
- [18] S. V. Borodachov, D. P. Hardin, E. B. Saff, “Asymptotics for discrete weighted minimal Riesz energy problems on rectifiable sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:3 (2008), 1559–1580.
- [19] В. А. Юдин, “Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов”, *Дискрет. матем.*, **4**:2 (1992), 115–121; англ. пер. V. A. Yudin, “The minimum of potential energy of a system of point charges”, *Discrete Math. Appl.*, **3**:1 (1993), 75–81.
- [20] Н. Н. Андреев, “Расположение точек на сфере с минимальной энергией”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 27–31; англ. пер. N. N. Andreev, “Disposition points on a sphere with minimum of energy”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219** (1997), 20–24.
- [21] A. V. Kolushov, V. A. Yudin, “Extremal dispositions of points on the sphere”, *Anal. Math.*, **23**:1 (1997), 25–34.
- [22] D. P. Hardin, E. B. Saff, “Discretizing manifolds via minimum energy points”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **51**:10 (2004), 1186–1194.

- [23] D. P. Hardin, E. B. Saff, “Minimal Riesz energy point configurations for rectifiable d -dimensional manifolds”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 174–204.

С. В. Бородачов (S. V. Borodachov)

School of Mathematics,

Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA

E-mail: borodasv@math.gatech.edu

Поступила в редакцию

11.09.2007 и 15.02.2008

Э. Б. Сафф (E. B. Saff)

Center for Constructive Approximation,

Department of Mathematics,

Vanderbilt University, Nashville, TN, USA

E-mail: Edward.B.Saff@Vanderbilt.Edu

Д. П. Хардин (D. P. Hardin)

Center for Constructive Approximation,

Department of Mathematics,

Vanderbilt University, Nashville, TN, USA

E-mail: Doug.Hardin@Vanderbilt.Edu