Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, О существовании обобщенного решения задачи сопряжения для системы Навье–Стокса, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 12, 63–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:07:42

УДК 517.957

Л. И. Сазонов

О существовании обобщенного решения задачи сопряжения для системы Навье–Стокса

Задачей сопряжения будем называть задачу об определении решения $u(t)$ нестационарной системы Навье–Стокса в некоторой области на определенном временном интервале $[0, T]$, причем для решения должны выполняться некоторые условия. А именно, его значение на границе равно нулю, задано условие сопряжения, которое состоит в том, что начальное значение решения связано с его значениями на всем временном интервале с помощью некоторого линейного оператора, определенного на решениях: $u(0) = U[u]$. В частном случае, когда значения решения на концах временного интервала совпадают, получается задача о периодическом решении.

Для задачи сопряжения установлено существование обобщенного решения в случае ограниченных и неограниченных областей произвольной размерности при различных предположениях относительно оператора сопряжения. Особенностью неограниченных областей является тот факт, что решение задачи сопряжения может не быть квадратично интегрируемым.

Библиография: 8 названий.

Задачей линейного сопряжения для системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p + f(x, t), \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

в области Ω с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (0.2)$$

будем называть задачу об определении решения системы (0.1)–(0.2) на отрезке $t \in [0, T]$, удовлетворяющего условию сопряжения

$$U[u] = u(0), \quad (0.3)$$

где U – некоторый линейный оператор, определенный на решениях системы (0.1).

В частности, при $U[u] = u(T)$ получаем задачу о периодическом решении.

Ниже устанавливается существование слабых решений задачи сопряжения в областях (как ограниченных, так и неограниченных) пространства $\mathbb{R}^m$. Приводимые доказательства аналогичны доказательствам из [1], [2]. Особенностью

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00099-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ 5747.2006.1).

неограниченных областей является тот факт, что периодическое решение или в общем случае решение задачи сопряжения может не быть квадратично суммируемым на Ω . Это приводит к необходимости изменения определения обобщенного решения и доказательства его существования.

§ 1. Вспомогательные предложения

Ниже приводятся используемые в дальнейшем некоторые вспомогательные утверждения, часть из которых хорошо известна. В основном это леммы о компактности и ε -оценках, позволяющие выбирать из последовательности галёркинских приближений сильно сходящиеся подпоследовательности в подходящих банаховых пространствах.

ЛЕММА 1.1 (см. [3]). Пусть $j: V \rightarrow H$ – оператор непрерывного плотного вложения вещественных гильбертовых пространств V и H , V^* и H^* – их сопряженные пространства. Тогда сопряженный оператор $j^*: H^* \rightarrow V^*$ осуществляет плотное вложение $H^* \subset V^*$.

При отождествлении H и H^* с помощью изоморфизма Рисса $r: H \rightarrow H^*$ пространство V^* отождествляется с пространством Y , являющимся пополнением H по норме

$$\|y\|_Y = \sup_{v \neq 0} \frac{|(jv, y)_H|}{\|v\|_V}, \quad y \in Y,$$

причем отождествление осуществляется сопоставлением элементу $y \in Y$ функционала

$$F_y(v) = \lim_{y_n \rightarrow y} (y_n, jv)_H, \quad y_n \in H.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В силу леммы 1.1 билинейная форма $(v, h) = (jv, h)_H$, $v \in V$, $h \in H$, расширяется по непрерывности на $V \times V^*$. Сохраняя за расширением обозначение (v, v^*) , для любого функционала $v^* \in V^*$ имеем $v^*(v) = (v, v^*)$.

ЛЕММА 1.2 (неравенство Фридрихса). Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, V – гильбертово пространство, компактно вложенное в H , P_n – последовательность ортопроекторов в H , сильно сходящаяся к единичному оператору.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого элемента $v \in V$

$$\|v\|_H \leq \varepsilon \|v\|_V + \|P_N v\|_H.$$

В дальнейшем будет использовано некоторое обобщение леммы 1.2 (лемма 1.4). Предварительно установим некоторое свойство проекторов.

ЛЕММА 1.3. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность проекторов в X , сильно сходящихся к единичному оператору и таких, что $P_n P_m = P_n$ при $n < m$. Тогда последовательность сопряженных операторов P_n^* также сильно сходится к единичному оператору в сопряженном пространстве X^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $P_m^* P_n^* = P_n^*$ при $n < m$ следует, что $P_n^* X^* \subset P_m^* X^*$. Поэтому для любого $\phi \in P_n^* X^*$ имеем $P_m^* \phi \rightarrow \phi$, так как $P_m^* \phi = \phi$ при $m > n$. Следовательно, $P_m^* \phi \rightarrow \phi$ для любого $\phi \in L = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^* X^*$. Остается показать, что $L = X^*$. Если $L \neq X^*$, то ввиду рефлексивности X существуют элементы $\phi \in X^*$, $\phi \notin L$, и $x \in X$ такие, что $\langle \phi, x \rangle = 1$ и $\langle \psi, x \rangle = 0$ для всех $\psi \in L$. Но тогда для всех m и $g \in X^*$ имеем $\langle P_m^* g, x \rangle = \langle g, P_m x \rangle = 0$. Поэтому для всех m выполняется $P_m x = 0$, что влечет $x = 0$, противоречащее $\langle \phi, x \rangle = 1$.

ЛЕММА 1.4. Пусть Z – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, Z^* – его сопряженное, X и Y – банаховы пространства и имеют место непрерывные вложения $Z \subset X \subset Y \subset Z^*$, причем вложение $X \subset Y$ компактно. Пусть $P_n: Z \rightarrow Z$ – последовательность проекторов, сильно сходящихся к единичному оператору в Z , причем $P_m P_n = P_m$ при $m < n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$ и $C = C(\varepsilon)$ такие, что для любого $x \in X$

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C(\varepsilon) \|P_N^* x\|_{Z^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом от противного. Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого N существует x_N , для которого

$$\|x_N\|_Y > \varepsilon \|x_N\|_X + N \|P_N^* x_N\|_{Z^*}.$$

Можно считать, что $\|x_N\|_X = 1$, тогда

$$\|x_N\|_Y > \varepsilon + N \|P_N^* x_N\|_{Z^*}. \quad (1.1)$$

Ввиду компактности вложения $X \subset Y$ можно считать, что $x_N \rightarrow y$ в пространстве Y . Тогда $x_N \rightarrow y$ и $P_N^* x_N \rightarrow y$ в пространстве Z^* , так как P_N^* сильно сходятся в Z^* к единичному оператору. Поэтому $\|P_N^* x_N\|_{Z^*} \rightarrow \|y\|_{Z^*}$, а так как из (1.1) следует, что $\|P_N^* x_N\|_{Z^*} \rightarrow 0$, то $y = 0$. Но это противоречит неравенству $\|y\|_Y > 0$.

ЛЕММА 1.5. Пусть B – шар в $\mathbb{R}^m$, W – ограниченное множество в пространстве $L_2((0, T), W_2^1(B))$ (W_2^1 – пространство Соболева), элементы которого удовлетворяют при некотором $\gamma > 0$ равномерной оценке

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2\gamma} \|f_n\|_{L_2(B)}^2 \leq C^2,$$

где

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{-\frac{i2\pi n t}{T}\right\} f(t) dt$$

– коэффициенты Фурье элемента $f \in W$.

Тогда W относительно компактно в $L_2((0, T) \times B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду компактности вложения $W_2^1(B) \subset L_2(B)$ множество отрезков рядов Фурье $\{\sum_{|n| < N} f_n \exp\{i2\pi n t/T\}\}$ элементов $f \in W$ при любом фиксированном N относительно компактно в $L_2((0, T) \times B)$.

Из оценки

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|n| \geq N} f_n \exp \left\{ \frac{i2\pi nt}{T} \right\} \right\|_{L_2((0,T) \times B)} &= \left\{ \sum_{|n| \geq N} \|f_n\|_{L_2(B)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{N^\gamma} \left\{ \sum_{|n| \geq N} |n|^{2\gamma} \|f_n\|^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^\gamma} \end{aligned}$$

следует, что N -отрезки образуют относительно компактную (C/N^γ) -сеть для множества W .

Для произвольной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, введем следующие пространства m -мерных вектор-функций:

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \{u \in C_0^\infty(\mathcal{D}), \operatorname{div} u = 0\},$$

$H(\mathcal{D})$ – пополнение $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ по L_2 -норме

$$\|u\|^2 = \int_{\mathcal{D}} |u|^2 dx,$$

$V(\mathcal{D})$ – пополнение $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ по норме интеграла Дирихле

$$[u]^2 = \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx.$$

Так как по теореме вложения Соболева

$$\|u\|_{L_q(\mathcal{D})} \leq c[u],$$

где $1/q = 1/2 - 1/m$, то $[\cdot]$ действительно является нормой на $\mathcal{V}(\mathcal{D})$.

ЛЕММА 1.6. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию

$$V(\Omega) \text{ компактно вложено в } H(\Omega).$$

Тогда существует ортонормированный базис $\{a^l\}_{l=1}^\infty$ в $H(\Omega)$, состоящий из элементов $a^l \in \mathcal{V}(\Omega)$ и полный в $V(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно (см., например, [4]), при указанных предположениях существует положительный самосопряженный компактный оператор $S: H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ такой, что $\operatorname{Im} S \subset V(\Omega)$ и

$$(v, h)_{H(\Omega)} = (v, Sh)_{V(\Omega)}, \quad v \in V(\Omega), \quad h \in H(\Omega).$$

Если $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $H(\Omega)$, состоящий из собственных векторов оператора S , то $\{\sqrt{\lambda_j} w_j\}$ – ортонормированный базис в $V(\Omega)$.

Поэтому в $\mathcal{V}(\Omega)$ существует счетное линейно независимое подмножество, всюду плотное в $V(\Omega)$ и $H(\Omega)$. Применив к нему процесс ортогонализации в пространстве $H(\Omega)$, получим нужное утверждение.

Аналогичным образом устанавливается

ЛЕММА 1.7. Пусть $V(\Omega)$ компактно вложено в $H(\Omega)$ и $V^k(\Omega)$ – пополнение $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Тогда в $H(\Omega)$ существует ортонормированный базис $\{a^l\}_{l=1}^\infty$, $a^l \in \mathcal{V}(\Omega)$, полный в $V^k(\Omega)$.

Пусть $H_\gamma(\Omega)$ – замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по весовой норме пространства $L_2(\Omega, \gamma)$

$$\|v\|_{2,\gamma}^2 = \int_{\Omega} |v(x)|^2 \varrho^\gamma(x) dx,$$

где $\varrho(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

ЛЕММА 1.8. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$. Тогда $V(\Omega)$ компактно вложено в $H_\gamma(\Omega)$ при $\gamma < -2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме вложения Соболева $V(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ при $1/q = 1/2 - 1/m$. Неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \varrho^\gamma(x) dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega} \varrho^{\gamma r}(x) dx \right)^{1/(2r)} \leq c \|v\|_{L_q(\Omega)},$$

где $1/r = 1 - 2/q$, верное при $-m > \gamma r = \gamma/(1 - 2/q) = \gamma m/2$, устанавливает непрерывное вложение $V(\Omega)$ в $L^2(\Omega, \gamma)$.

При любом R оператор $v \mapsto \chi_R v$, где $\chi_R(x) = 1$ при $|x| < R$ и $\chi_R(x) = 0$ при $|x| > R$, компактен (см., например, [5]) как оператор из $V(\Omega)$ в $L_2(\Omega \cap \{|x| < R\})$. Далее, ввиду оценки

$$\begin{aligned} \|(1 - \chi_R)v\|_{2,\gamma} &= \left(\int_{\Omega \cap \{|x| > R\}} \varrho^\gamma(x) |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{R^{\varepsilon/2}} \left(\int_{\Omega} \varrho^{\gamma+\varepsilon}(x) |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{c_\varepsilon}{R^{\varepsilon/2}} \|v\|_{V(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, чтобы $\gamma + \varepsilon < -2$, оператор $v \mapsto (1 - \chi_R)v$ как оператор из $V(\Omega)$ в $L_2(\Omega, \gamma)$ имеет норму, которая стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Поэтому оператор вложения $V(\Omega) \subset L_2(\Omega, \gamma)$ является равномерным пределом компактных операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, и $V(\Omega)$ непрерывно вложено в $H(\Omega)$, тогда вложение $V(\Omega)$ в $H_\gamma(\Omega)$ компактно при $\gamma < 0$.

Пусть $V_\mu^k(\Omega)$ – пополнение $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{k,\mu}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=0}^k \varrho^{\mu+2|\alpha|} |\partial^\alpha v|^2 dx.$$

При $\mu \geq 0$ пространство $V_\mu^k(\Omega)$ непрерывно и плотно вложено в $H(\Omega)$. В силу леммы 1.1 имеют место непрерывные и плотные вложения

$$V_\mu^k(\Omega) \subset H(\Omega) \subset (V_\mu^k(\Omega))^*$$

и каждый функционал из $(V_\mu^k(\Omega))^*$ является расширением по непрерывности определенной на $\mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ билинейной формы

$$(v, w) = \int_{\Omega} vw \, dx.$$

Сопоставим $f \in H_\gamma(\Omega)$ функционал $F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ на $\mathcal{V}(\Omega)$ и выясним условия, при которых отображение $f \mapsto F$ является непрерывным вложением $H_\gamma(\Omega)$ в $(V_\mu^k(\Omega))^*$.

Из неравенства $|\nabla(\varrho^{\mu/2+1})| \leq c\varrho^{\mu/2}$ вытекает, что

$$\|\nabla(\varrho^{\mu/2+1}v)\|_{L_2(\Omega)} \leq c\|v\|_{1,\mu}.$$

Поэтому

$$\|\varrho^{\mu/2+1}v\|_{L_q(\Omega)} \leq c\|v\|_{1,\mu},$$

где $1/q = 1/2 - 1/m$.

Далее,

$$\left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \varrho^\gamma \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \varrho^{-\gamma} |v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Так как

$$\int_{\Omega} \varrho^{-\gamma} |v|^2 \, dx \leq \left(\int_{\Omega} (\varrho^{\mu+2} |v|^2)^{q/2} \, dx \right)^{2/q} \left(\int_{\Omega} \varrho^{-(\gamma+\mu+2)r} \, dx \right)^{1/r},$$

где $1/r = 1 - 2/q$, то для справедливости оценки

$$|F(v)| \leq c\|f\|_{L_2(\Omega, \gamma)} \|v\|_{1,\mu}$$

достаточно выполнения неравенства $\gamma + \mu > 0$ ($\gamma + \mu + 2 > m/r$).

Остается установить условие тривиальности ядра отображения $f \mapsto F$. Пусть для $f \in H_\gamma(\Omega)$ выполнено соотношение $(f, v) = 0$ для всех $v \in \mathcal{V}(\Omega)$. Тогда из характеристики градиента распределения вытекает, что $f = \nabla p$ для некоторого распределения $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Для вещественного числа γ введем в $L_2(\Omega, \gamma)$ подпространство

$$G_\gamma(\Omega) = \{\nabla p \in L_2(\Omega, \gamma), p \in \mathcal{D}'(\Omega)\}.$$

Таким образом, если f принадлежит ядру указанного отображения, то $f \in H_\gamma(\Omega) \cap G_\gamma(\Omega)$.

Следовательно, справедлива

ЛЕММА 1.9. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, такова, что при некотором $\gamma < -2$

$$H_\gamma(\Omega) \cap G_\gamma(\Omega) = \{0\}.$$

Тогда для данного γ при $\mu > -\gamma$, $k \geq 1$ имеют место непрерывные вложения

$$V_\mu^k(\Omega) \subset V(\Omega) \subset H_\gamma(\Omega) \subset (V_\mu^k(\Omega))^*,$$

причем вложение $V(\Omega) \subset H_\gamma(\Omega)$ компактно, а вложение $H_\gamma(\Omega) \subset (V_\mu^k(\Omega))^*$ осуществляется сопоставлением $f \in H_\gamma(\Omega)$ функционала

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad v \in V_\mu^k(\Omega).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, и $V(\Omega)$ непрерывно вложено в $H(\Omega)$, то утверждение остается справедливым, если условие леммы выполнено при некотором $\gamma < 0$.

В качестве примера области, для которой выполняется условие леммы 1.9, можно привести $\mathbb{R}^m$ ввиду следующего утверждения.

ЛЕММА 1.10. Пусть $-m < \gamma$, $m \geq 3$, тогда

$$H_\gamma(\mathbb{R}^m) \cap G_\gamma(\mathbb{R}^m) = \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу вложения $L_2(\Omega, \gamma_1) \subset L_2(\Omega, \gamma_2)$ при $\gamma_1 > \gamma_2$ можно считать, что $-m < \gamma < m$. Покажем, что для $\nabla p \in G_\gamma(\mathbb{R}^m)$ выполнено соотношение

$$\nabla \operatorname{div} N \nabla p = \nabla p,$$

где N – ньютоновский потенциал

$$N\phi = c \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\phi(y)}{|x-y|^{m-2}} dy$$

и c выбрано так, что $\Delta N\phi = \phi$ для любого $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Ввиду ограниченности сингулярного оператора $\nabla \operatorname{div} N$ в $L_2(\mathbb{R}^m, \gamma)$ при $-m < \gamma < m$ (см., например, [6]) для произвольной вектор-функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$(\phi, \nabla \operatorname{div} N \nabla p) = (\nabla \operatorname{div} N \phi, \nabla p).$$

Далее, для срезающей функции $\chi_R(x) = \chi(x/R)$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\chi(x) = 1$ при $|x| < 1$, $\chi(x) = 0$ при $|x| > 2$, вектор-функция $\partial_k(\chi_R(x)\partial_j N\phi)$ при $R \rightarrow \infty$ сходится к $\partial_k \partial_j N\phi$ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}^m, \gamma)$. Поэтому

$$(\phi, \nabla \operatorname{div} N \nabla p) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{i,j} (\partial_i(\chi_R \partial_j N\phi_i), \partial_j p).$$

Но в смысле распределений

$$(\partial_i(\chi_R \partial_j N\phi_i), \partial_j p) = (\partial_j(\chi_R \partial_j N\phi_i), \partial_i p).$$

Поэтому

$$(\phi, \nabla \operatorname{div} N \nabla p) = \sum_j (\Delta N\phi_j, \partial_j p) = (\phi, \nabla p).$$

То есть в смысле распределений

$$\nabla \operatorname{div} N \nabla p = \nabla p.$$

С другой стороны, для любой вектор-функции $v \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^m)$ имеем

$$\nabla \operatorname{div} N v = 0.$$

Поэтому в силу ограниченности сингулярного оператора $\nabla \operatorname{div} N$ в $L_2(\Omega, \gamma)$ при $-m < \gamma < m$

$$\nabla \operatorname{div} N v = 0 \quad \forall v \in H_\gamma(\mathbb{R}^m).$$

И, следовательно, для $w \in H_\gamma(\mathbb{R}^m) \cap G_\gamma(\mathbb{R}^m)$ имеем $0 = \nabla \operatorname{div} N w = w$.

Отметим, что лемма 1.10 верна и для внешних областей пространства $\mathbb{R}^m$ (см. [7]).

Примером области с непрерывным вложением $V(\Omega) \subset H_\gamma(\Omega)$, для которой верно утверждение леммы 1.9, является цилиндр в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

ЛЕММА 1.11. Пусть $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$, где ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{m-1}$ с достаточно гладкой границей. Тогда для любого $\gamma \geq -1$ выполняется соотношение

$$H_\gamma(\Omega) \cap G_\gamma(\Omega) = \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_n , λ_n , $n = 0, 1, \dots$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, – собственные функции и собственные значения задачи Неймана в области ω

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \omega} = 0. \end{cases}$$

Тогда для любой функции $\varphi \in W_2^1(\omega)$ имеем $(\nabla_0 \varphi, \nabla_0 u_n) = \lambda_n(\varphi, u_n)$, где ∇_0 – оператор ∇ по переменным $x \in \omega$.

Пусть ∇p , $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, – элемент из $H_\gamma(\Omega) \cap G_\gamma(\Omega)$. Тогда для любой функции g из $W_2^1(\Omega)$ с финитным носителем имеем $(\nabla p, \nabla g) = 0$ вследствие того, что ∇p есть предел последовательности полей из $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме $H_\gamma(\Omega)$. Выберем $g = \varphi(t)u_n(x)$, $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla p, \nabla g) &= (\partial_t p, \partial_t \varphi u_n) + (\nabla_0 p, \varphi \nabla_0 u_n) = ((\partial_t p, \partial_t \varphi), u_n) + (\nabla_0(p, \varphi), \nabla_0 u_n) \\ &= (\partial_t(p, u_n), \partial_t \varphi) + \lambda_n((p, u_n), \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в смысле распределений

$$\frac{d^2}{dt^2}(p, u_n) - \lambda_n(p, u_n) = 0$$

и, следовательно,

$$(p, u_0) = c_1 + c_2 t, \quad (p, u_n) = a_n \exp(-\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \exp \sqrt{\lambda_n} t.$$

Но $\partial_t(p, u_n) \in L_2(\mathbb{R}, (1+t^2)^{\gamma/2})$, поэтому при $\gamma \geq -1$ имеем $(p, u_0) = c_1$ и $(p, u_n) = 0$, $n > 0$. А так как $\{u_n\}$ полна в $L_2(\omega)$, то $\nabla p = 0$.

ЛЕММА 1.12. Пусть выполняются условия леммы 1.9 и $\{a^l\}_{l=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $V_\mu^k(\Omega)$, состоящий из элементов $a^l \in \mathcal{V}(\Omega)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$, $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $w \in V(\Omega)$ имеем

$$\|w\|_{H_\gamma(\Omega)} \leq \varepsilon \|w\|_{V(\Omega)} + c(\varepsilon) \left(\sum_{l=1}^N (a^l, w)^2 \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что для ортопроектора в $V_\mu^k(\Omega)$

$$P_n v = \sum_{l=1}^n (v, a^l)_{V_\mu^k} a^l$$

справедливо

$$(P_n^* w)(v) = w(P_n v) = (P_n v, w) = \sum_{l=1}^n (v, a^l)_{V_\mu^k} (a^l, w).$$

Поэтому

$$\|P_n^* w\|_{(V_\mu^k(\Omega))^*} = \left(\sum_{l=1}^n (a^l, w)^2 \right)^{1/2}.$$

После этого утверждение следует из леммы 1.4 в силу леммы 1.9.

§ 2. Существование слабых решений задачи сопряжения

Ниже устанавливается существование слабых решений задачи сопряжения при различных предположениях относительно области Ω .

2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3, \dots$, $\{a^l\}_{l=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $H(\Omega)$, состоящий из элементов $a^l \in \mathcal{V}(\Omega)$. Считая, что $f \in L_2((0, T), V^*(\Omega))$, будем искать приближенное решение задачи сопряжения в виде галёркинских приближений

$$v_n(t) = \sum_{l=1}^n c_l^n(t) a^l, \quad (2.1)$$

где

$$c_l^n(t) = (v_n(t), a^l) = \int_{\Omega} v_n(t, x) a^l(x) dx$$

удовлетворяют системе ОДУ

$$\frac{d}{dt} (v_n(t), a^l) = -\nu(\nabla v_n, \nabla a^l) - ((v_n, \nabla) v_n, a^l) + \langle f, a^l \rangle, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

и условию сопряжения

$$P_n U[v_n] = v_n(0), \quad (2.3)$$

здесь P_n – ортопроектор из $H(\Omega)$ на конечномерное подпространство $H_n(\Omega)$, порожденное $\{a^l\}_{l=1}^n$.

Аналогично [8] устанавливается, что задача Коши для системы (2.2) с начальным значением $u_n(0)$ имеет единственное решение $u_n(t)$ на $[0, T]$, причем справедливы оценки

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \gamma [u_n(t)]^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2, \quad (2.4)$$

$$\|u_n(t)\|^2 + \gamma \int_0^t [u_n(t)]^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt + \|u_n(0)\|^2, \quad (2.5)$$

где α – любое число из $(0, 2\nu)$, $\gamma = 2\nu - \alpha$.

В конечномерном подпространстве $H_n(\Omega)$ отображение $\mathcal{F}_n: H_n(\Omega) \rightarrow H_n(\Omega)$ определим соотношением

$$\mathcal{F}_n(u_n(0)) = P_n U[u_n], \quad (2.6)$$

где $u_n(t)$ – решение системы (2.2) с начальным значением $u_n(0)$.

Если отображение $\mathcal{F}_n$ непрерывно, то согласно принципу Шаудера для доказательства существования решения, удовлетворяющего условию сопряжения (2.3), достаточно установить наличие у отображения $\mathcal{F}_n$ инвариантного пара. Непрерывность отображения $\mathcal{F}_n$ гарантируется непрерывностью оператора $U: X \rightarrow H(\Omega)$ при подходящем выборе пространства X .

Предварительно установим некоторые оценки для решений системы (2.2). Пусть c_n – наилучшая константа в неравенстве Фридрихса для $H_n(\Omega)$

$$\|w\|^2 \leq c_n \|\nabla w\|^2, \quad w \in H_n(\Omega).$$

Тогда из (2.4) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \|u_n(t)\|^2 + \frac{\gamma}{c_n} \|u_n(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2, \quad (2.7)$$

и интегрирование (2.7) приводит к оценке

$$\|u_n(t)\|^2 \leq \exp\left(-\frac{\gamma t}{c_n}\right) \|u_n(0)\|^2 + \varrho^2, \quad (2.8)$$

$$\varrho^2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt. \quad (2.9)$$

В частности, из (2.8) следует, что

$$\|u_n\|_{L_2((0,T),H(\Omega))}^2 \leq T\varrho^2 + \|u_n(0)\|^2 \int_0^T \exp\left(-\frac{\gamma t}{c_n}\right) dt, \quad (2.10)$$

а непосредственно из (2.5)

$$\|u_n\|_{L_2((0,T),V(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{\gamma} (\varrho^2 + \|u_n(0)\|^2). \quad (2.11)$$

Предположим, что оператор сопряжения имеет вид $U = \sum_{j=1}^3 W_j$, где

$$W_1: L_2((0,T),V(\Omega)) \rightarrow H(\Omega), \quad W_2: L_2((0,T),H(\Omega)) \rightarrow H(\Omega)$$

– ограниченные операторы,

$$(W_3 u)(t) = \int_0^T A(t) u(t) d\mu(t),$$

где μ – ограниченная борелевская мера на $[0, T]$, $A(t)$ – оператор-функция из $L_1((0, T), d\mu; \text{End } H(\Omega))$, а интеграл понимается в слабом смысле.

Для отображения $\mathcal{F}_n$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_n(u_n(0))\|^2 &\leq \left(\|W_1\| \|u_n\|_{L_2((0,T),V(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|W_2\| \|u_n\|_{L_2((0,T),H(\Omega))} + \int_0^T \|A(t)\| \|u_n(t)\| d\mu(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\|W_1\| \lambda_1 + \|W_2\| \lambda_2 + \int_0^T \|A(t)\| \lambda_3(t) d\mu(t) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\lambda_1} \|W_1\| \|u_n\|_{L_2((0,T),V(\Omega))}^2 + \frac{1}{\lambda_2} \|W_2\| \|u_n\|_{L_2((0,T),H(\Omega))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \frac{1}{\lambda_3(t)} \|A(t)\| \|u_n(t)\|^2 d\mu(t) \right). \end{aligned}$$

Используя приведенные выше в (2.8)–(2.11) оценки норм $u_n(t)$, входящих в последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_n(u_n(0))\|^2 &\leq \left(\|W_1\| \lambda_1 + \|W_2\| \lambda_2 + \int_0^T \|A(t)\| \lambda_3(t) d\mu(t) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\|W_1\|}{\gamma \lambda_1} (\varrho^2 + \|u_n(0)\|^2) + \frac{\|W_2\|}{\lambda_2} \left(T \varrho^2 + \|u_n(0)\|^2 \int_0^T \exp\left(-\frac{\gamma t}{c}\right) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \frac{\|A(t)\|}{\lambda_3(t)} \left(\varrho^2 + \exp\left(-\frac{\gamma t}{c}\right) \|u_n(0)\|^2 \right) d\mu(t) \right), \end{aligned}$$

где $c = \sup_n c_n$ (допускается $c = \infty$.)

Полагая

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \quad \lambda_2 = \left(\int_0^T \exp\left(-\frac{\gamma t}{c}\right) dt \right)^{1/2}, \quad \lambda_3(t) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2c}\right)$$

и вводя обозначения

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \frac{\|W_1\|}{\sqrt{\gamma}} + \|W_2\| \left(\int_0^T \exp\left(-\frac{\gamma t}{c}\right) dt \right)^{1/2} + \int_0^T \|A(t)\| \exp\left(-\frac{\gamma t}{2c}\right) d\mu(t), \\ B_\gamma &= \frac{\|W_1\|}{\sqrt{\gamma}} + \|W_2\| T \left(\int_0^T \exp\left(-\frac{\gamma t}{c}\right) dt \right)^{-1/2} + \int_0^T \|A(t)\| \exp\left(-\frac{\gamma t}{2c}\right) d\mu(t), \end{aligned}$$

получаем

$$\|\mathcal{F}_n(u_n(0))\|^2 \leq A_\gamma^2 \|u_n(0)\|^2 + A_\gamma B_\gamma \varrho^2.$$

Отсюда, предполагая выполненным условие

$$A_{2\nu} = \frac{\|W_1\|}{\sqrt{2\nu}} + \|W_2\| \left(\int_0^T \exp\left(-\frac{2\nu t}{c}\right) dt \right)^{1/2} + \int_0^T \|A(t)\| \exp\left(-\frac{\nu t}{c}\right) d\mu(t) < 1, \quad (2.12)$$

можно выбрать γ настолько близким к 2ν , что $A_\gamma < 1$, и тогда отображение $\mathcal{F}_n$ будет сохранять шар в $H_n(\Omega)$ с центром в нуле радиуса

$$R = \frac{\sqrt{A_\gamma B_\gamma} \varrho}{\sqrt{1 - A_\gamma^2}}.$$

Таким образом, при выполнении для оператора сопряжения условия (2.12) существует последовательность галёркинских приближений $v_n(t)$, удовлетворяющих равномерным по n оценкам

$$\sup_t \|v_n(t)\|^2 + \int_0^T \|\nabla v_n(t)\|^2 dt \leq c. \quad (2.13)$$

Далее, функции $c_l^n(t) = (v_n(t), a^l)$ при любом фиксированном l образуют равномерно ограниченное и равномерно непрерывное множество. Осуществляя диагонализацию, можно считать, что существует подпоследовательность $v_{n_k}(t)$, слабо сходящаяся в $H(\Omega)$ равномерно по t . Доказательство этих фактов осуществляется аналогично [8]. Следовательно, существует вектор-функция $v(t)$, принадлежащая $H(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$, слабо непрерывная по t в $H(\Omega)$, удовлетворяющая оценке

$$\|v(t)\|^2 \leq R^2 + \varrho^2, \quad (2.14)$$

причем $(v_{n_k}(t), w)$ равномерно по $t \in [0, T]$ сходится к $(v(t), w)$ при любом $w \in H(\Omega)$.

Рассмотрим пространство $L_2((0, T), H(\Omega)) \cap L_2((0, T), V(\Omega))$, являющееся гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u, v) = (u, v)_{L_2((0, T), H(\Omega))} + (u, v)_{L_2((0, T), V(\Omega))}.$$

Последовательность $\{v_{n_k}\}$ равномерно ограничена в этом пространстве, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $v_{n_k}(t)$ слабо сходится в пространстве $L_2((0, T), H(\Omega)) \cap L_2((0, T), V(\Omega))$ к некоторому элементу

$$\tilde{v}(t) \in L_2((0, T), H(\Omega)) \cap L_2((0, T), V(\Omega)).$$

Равномерная по t слабая сходимост в пространстве $H(\Omega)$ влечет слабую сходимост в $L_2((0, T), H(\Omega))$. Поэтому $v(t)$ и $\tilde{v}(t)$ совпадают как элементы пространства $L_2((0, T), H(\Omega))$.

Следовательно, вектор-функция $v(t)$ принадлежит пространству

$$L_2((0, T), V(\Omega)) \cap L_\infty((0, T), H(\Omega)),$$

слабо непрерывна по $t \in [0, T]$ в $H(\Omega)$, последовательность v_{n_k} слабо сходится к $v(t)$ в $L_2((0, T), V(\Omega) \cap H(\Omega))$ и слабо сходится к $v(t)$ в $H(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Установленных свойств последовательности $v_{n_k}(t)$ достаточно для предельного перехода в условии сопряжения. Для операторов W_1 и W_2 это очевидно. Для оператора W_3 заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует оператор-функция $A_\varepsilon(t) = \sum \chi_j(t) A_j$, где χ_j – характеристические функции μ -измеримых множеств, такая, что

$$\int_0^T \|A(t) - A_\varepsilon(t)\| d\mu < \varepsilon.$$

Поэтому для любого $h \in H(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_0^T A(t)(v_{n_k}(t) - v(t)) d\mu, h \right) \right| &= \left| \int_0^T (A(t)(v_{n_k}(t) - v(t)), h) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_0^T (A_\varepsilon(t)(v_{n_k}(t) - v(t)), h) d\mu \right| + 2\varepsilon \|h\| \sup_t \|v_{n_k}(t)\| \end{aligned}$$

и

$$(A_\varepsilon(t)(v_{n_k}(t) - v(t)), h) = \sum \chi_j(t)(v_{n_k}(t) - v(t), A_j^* h) \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Следовательно, для v справедливо условие сопряжения

$$v(0) = W_1[v] + W_2[v] + \int_0^T A(t)v(t) d\mu(t). \quad (2.15)$$

Теперь установим интегральное тождество для v . Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть область Ω такова, что имеет место компактное вложение $V(\Omega) \subset H(\Omega)$. Тогда последовательность $v_{n_k}(t)$ сходится к $v(t)$ по норме $L_2((0, T), H(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 1.2 для системы проекторов $P_n f = \sum_{l=1}^n (f, a^l) a^l$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для $v_{km}(t) = v_{n_k}(t) - v_{n_m}(t)$ справедливо неравенство

$$\|v_{km}(t)\| \leq \varepsilon [v_{km}(t)] + \left\{ \sum_{l=1}^N (v_{km}(t), a^l)^2 \right\}^{1/2}.$$

Оценивая норму функции $\|v_{km}(t)\|$ в пространстве $L_2(0, T)$ и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, ограниченность $v_{n_k}(t)$ по норме $L_2((0, T), V(\Omega))$, ее равномерную по t слабую сходимость в $H(\Omega)$, устанавливаем фундаментальность $\{v_{n_k}\}$ в $L_2((0, T), H(\Omega))$. Учитывая, что $v_{n_k}(t)$ слабо сходится в пространстве $L_2((0, T), H(\Omega))$ к элементу $v(t)$, получаем ее сильную сходимост к этому элементу.

Рассмотрим систему пробных функций

$$\Phi^{(n)} = \sum_{l=1}^n \alpha_l(t) a^l, \quad \alpha_l(t) \in C_0^\infty(0, T).$$

Тогда при $n < n_k$ из системы ОДУ (2.2) вытекает тождество

$$\int_0^T \{-(v_{n_k}, \Phi_t^{(n)}) + ((v_{n_k}, \nabla) v_{n_k}, \Phi^{(n)}) + \nu(\nabla v_{n_k}, \nabla \Phi^{(n)}) - \langle f, \Phi^{(n)} \rangle\} dt = 0,$$

в котором можно перейти к пределу при $n_k \rightarrow \infty$, в результате чего получается интегральное тождество для v

$$\int_0^T \{-(v, \Phi_t^{(n)}) + ((v, \nabla) v, \Phi^{(n)}) + \nu(\nabla v, \nabla \Phi^{(n)}) - \langle f, \Phi^{(n)} \rangle\} dt = 0. \quad (2.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Интегральное тождество верно для любой пробной функции Φ из $C_0^1((0, T), V^k(\Omega))$ (при $k+1 \geq m/2$) – множества финитных в $(0, T)$ C^1 -гладких вектор-функций со значениями в пространстве $V^k(\Omega)$, которое является пополнением $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме соболевского пространства $W_2^k(\Omega)$. Действительно, множество функций $\{\Phi^{(n)}\}$ всюду плотно в $C_0^1((0, T), V^k(\Omega))$ по норме $C^1([0, T], V^k(\Omega))$. Доказательство плотности проводится следующим образом. Можно считать, что базис $\{a^l\}$ полный в $V^k(\Omega)$ и, следовательно, существует ортонормированный базис $\{b^l\}$ в $V^k(\Omega)$, элементы которого принадлежат

линейной оболочке $L\{a^l\}$. Далее, $C_0^\infty((0, T), V^k(\Omega))$ плотно в пространстве $C_0^1((0, T), V^k(\Omega))$, а любую функцию $f \in C_0^\infty((0, T), V^k(\Omega))$ можно с любой степенью точности аппроксимировать в норме $C_0^1((0, T), V^k(\Omega))$ элементами вида

$$\chi(t) \sum_{k, l=-N}^N c_{kl} e^{i2\pi kt/T} b^l,$$

$\chi \in C_0^\infty(0, T)$ и равна единице на носителе f в $[0, T]$.

После этого остается заметить, что по теореме вложений Соболева $V^k(\Omega) \subset L_m(\Omega)$ при $k+1 \geq m/2$, и ввиду неравенства (см., например, [2])

$$|((v, \nabla)v, \Phi)| \leq c \|\nabla v\|^2 \|\Phi\|_{L_m(\Omega)}$$

можно перейти к пределу по $\Phi^{(n)}$ в интеграле

$$\int_0^T ((v, \nabla)v, \Phi^{(n)}) dt;$$

предельный переход в остальных членах интегрального тождества очевиден.

Отметим, что вследствие приведенного выше неравенства можно было бы рассматривать пробные функции из пространства $C_0^1((0, T), V(\Omega) \cap L_m(\Omega))$, которое совпадает с $C_0^1((0, T), V(\Omega))$ лишь при $m = 2, 3, 4$ (см. [2]). Однако, следуя [2], в дальнейшем мы остаемся в рамках гильбертовых пространств $V^k(\Omega)$.

Предположим теперь, что Ω – произвольная область из $\mathbb{R}^m$ при $m \leq 4$. Справедлива

ЛЕММА 2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3, 4$. Тогда существует подпоследовательность последовательности v_{n_k} , которая сходится в пространстве $L_2((0, T) \times B)$, где B – любой шар из Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем коэффициенты Фурье

$$v_n^k = \frac{1}{T} \int_0^T v_n(t) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Умножая систему ОДУ на $\exp(-i2\pi kt/T)/T$ и интегрируя по t на $[0, T]$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} (v_n(T) - v_n(0), a^l) + \frac{i2\pi k}{T} (v_n^k, a^l) \\ &= -\nu(\nabla v_n^k, \nabla a^l) - \frac{1}{T} \int_0^T \{((v_n, \nabla)v_n, a^l) - \langle f, a^l \rangle\} \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть $v_n^k = \sum_{l=1}^n v_{nl}^k a^l$. Тогда, умножая (2.17) на v_{nl}^{-k} и суммируя по l , выводим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} (v_n(T) - v_n(0), v_n^{-k}) + \frac{i2\pi k}{T} (v_n^k, v_n^{-k}) \\ &= -\nu(\nabla v_n^k, \nabla v_n^{-k}) - \frac{1}{T} \int_0^T \{((v_n, \nabla)v_n, v_n^{-k}) - \langle f, v_n^{-k} \rangle\} \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Заметим, что справедлива оценка

$$\left| \int_0^T ((v_n, \nabla) v_n, v_n^{-k}) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt \right| = \left| \int_0^T ((v_n, \nabla) v_n^{-k}, v_n) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt \right| \\ \leq \|v_n^k\|_{V(\Omega)} \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} |v_n(t)|^4 dx \right\}^{1/2} dt. \quad (2.19)$$

Далее, ввиду оценок (2.13) последовательность v_n равномерно ограничена в $L_2((0, T), W_2^1(\Omega))$, а ввиду вложения $W_2^1(\Omega) \subset L_4(\Omega)$ при $m \leq 4$ равномерно ограничена и в $L_2((0, T), L_4(\Omega))$. Выделяя в (2.18) мнимую часть, приходим к равномерной по n и k оценке

$$|k| \|v_n^k\|^2 \leq c(\|v_n^k\| + \|\nabla v_n^k\|). \quad (2.20)$$

Из неравенства

$$\sum |k|^{2\gamma} \|v_n^k\|^2 \leq c \sum |k|^{2\gamma-1} (\|v_n^k\| + \|\nabla v_n^k\|) \\ \leq c \left(\sum |k|^{4\gamma-2} \right)^{1/2} \left(\sum (\|v_n^k\| + \|\nabla v_n^k\|)^2 \right)^{1/2}$$

получаем, что при $0 < \gamma < 1/4$ справедлива равномерная по n оценка

$$\sum |k|^{2\gamma} \|v_n^k\|^2 \leq c(\|v_n\|_{L_2((0,T),H(\Omega))} + \|v_n\|_{L_2((0,T),V(\Omega))}) \leq \text{const}.$$

Согласно лемме 1.5 для любого шара $B \subset \Omega$ последовательность $v_n(t)$ относительно компактна в $L_2((0, T) \times B)$. Выбирая последовательность шаров $\{B_n\}$ таких, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, и применяя диагонализацию, устанавливаем существование нужной подпоследовательности.

Установленных в лемме свойств последовательности v_{n_k} достаточно для предельного перехода в интегральном тождестве. Замечание 2.1 справедливо и в данном случае, но теперь ввиду $m \leq 4$ интегральное тождество верно для всех пробных функций из $C_0^1((0, T), V^1(\Omega))$. Отметим, что для неограниченных областей, вообще говоря, $V^1(\Omega) \neq V(\Omega)$.

В заключение этого пункта рассмотрим случай неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m > 4$, причем будем считать, что для области Ω выполнены условия леммы 1.9. Считаем, что при построении галёркинских приближений использован базис $\{a^l\}_{l=1}^{\infty}$, полный в пространстве $V_{\mu}^k(\Omega)$.

В данном случае роль предыдущих лемм играет следующий результат.

ЛЕММА 2.3. *Существует подпоследовательность функций $v_{n_k}(t)$, сходящаяся в пространстве $L_2((0, T), H_{\gamma}(\Omega))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{b^l\}_{l=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $V_{\mu}^k(\Omega)$, где b^l – элементы линейной оболочки $\{a^l\}$. Из леммы 1.12 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$ и $C(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\|v_{km}\|_{L_2((0,T),H_{\gamma}(\Omega))} \leq \varepsilon \|v_{km}\|_{L_2((0,T),V(\Omega))} + c(\varepsilon) \left\{ \int_0^T \sum_{l=1}^N (v_{km}, b^l)^2 dt \right\}^{1/2},$$

что влечет фундаментальность последовательности $v_{n_k}(t)$ в $L_2((0, T), H_{\gamma}(\Omega))$ и ее сходимости в этом пространстве к элементу $v(t)$.

Как и выше, на основании этой леммы устанавливается интегральное тождество для $v(t)$, причем замечание 2.1 верно и в этом случае.

Таким образом, установлена

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$, причем выполняется одно из следующих предположений:

- а) имеет место компактное вложение $V(\Omega) \subset H(\Omega)$;
 - б) $m = 2, 3, 4$;
 - в) выполнено условие леммы 1.9;
- оператор сопряжения имеет вид

$$U = W_1 + W_2 + W_3,$$

где

$$W_1: L_2((0, T), V(\Omega)) \rightarrow H(\Omega), \quad W_2: L_2((0, T), H(\Omega)) \rightarrow H(\Omega)$$

– ограниченные операторы,

$$W_3(u) = \int_0^T A(t)u(t) d\mu(t),$$

здесь μ – конечная борелевская мера на $[0, T]$, $A(t) \in L_1((0, T), d\mu; \text{End } H(\Omega))$, и выполнено условие

$$\frac{\|W_1\|}{\sqrt{2\nu}} + \|W_2\| \left(\int_0^T \exp\left(-\frac{2\nu t}{c}\right) dt \right)^{1/2} + \int_0^T \|A(t)\| \exp\left(-\frac{\nu t}{c}\right) d\mu < 1,$$

где c – константа Фридрихса для области Ω .

Тогда существует векторное поле $v(t)$, принадлежащее пространству

$$L_2((0, T), V(\Omega)) \cap L_\infty((0, T), H(\Omega)),$$

слабо непрерывное в $H(\Omega)$, удовлетворяющее условию сопряжения $v(0) = U[v]$ и интегральному тождеству

$$\int_0^T \{-(v, \Phi_t) + ((v, \nabla)v, \Phi) + \nu(\nabla v, \nabla \Phi) - \langle f, \Phi \rangle\} dt = 0$$

для любой пробной функции $\Phi \in C_0^1((0, T), V^k(\Omega))$ при $k + 1 \geq m/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если константа Фридрихса $c = \infty$, то приведенного результата недостаточно для существования периодического решения. Исследование этого случая содержится в следующем пункте.

2.2. В данном пункте предполагаем, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, – семейство областей, для которых вложения $V(\Omega_n) \subset H(\Omega_n)$ компактны, причем для констант Фридрихса выполняется соотношение $\sup_n c(\Omega_n) = \infty$, а условие сопряжения имеет вид

$$v(0) = U[v] = W[v] + \sum_{j=1}^N U_j v(t_j), \quad t_N = T, \quad (2.21)$$

где

$$W: L_2((0, T), H(\Omega)) \rightarrow H(\Omega), \quad U_j: H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$$

– ограниченные операторы, для которых выполняется соотношение

$$\|W\|T^{1/2} + \sum_{j=1}^N \|U_j\| = 1. \quad (2.22)$$

Заметим, что случай строгого неравенства в формуле (2.22) рассмотрен в теореме 2.1 для оператора сопряжения более общего вида.

Продолжив элементы из $H(\Omega_n)$ нулем на Ω/Ω_n , будем считать, что $H(\Omega_n)$ – подпространство в $H(\Omega)$. Пусть Q_n – ортопроектор из $H(\Omega)$ на $H(\Omega_n)$ и v_n – решение задачи сопряжения в Ω_n с оператором сопряжения $Q_n U$.

Установим некоторые равномерные по n оценки для v_n . Пусть v_{nk} – галёркинские приближения для v_n . Тогда справедливы оценка

$$\|v_{nk}(t)\|^2 + \gamma \int_0^t \|\nabla v_{nk}(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt + \|v_{nk}(0)\|^2 \quad (2.23)$$

и условие сопряжения

$$v_{nk}(0) = P_{nk} Q_n U[v_{nk}], \quad (2.24)$$

где P_{nk} – ортопроектор в $H(\Omega_n)$ на $H_k(\Omega_n)$. Из условия сопряжения вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|v_{nk}(0)\|^2 &\leq \left(\|W\| \sqrt{T} + \sum_{j=1}^N \|U_j\| \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{T}} \|v_{nk}\|_{L_2((0,T), H(\Omega_n))}^2 + \sum_{j=1}^N \|U_j\| \|v_{nk}(t_j)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

С другой стороны, используя (2.23) и (2.22), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|W\|}{\sqrt{T}} \|v_{nk}\|_{L_2((0,T), H(\Omega_n))}^2 + \sum_{j=1}^N \|U_j\| \|v_{nk}(t_j)\|^2 + \frac{\gamma \|W\|}{\sqrt{T}} \int_0^T \|\nabla v_{nk}(t)\|^2 (T-t) dt \\ + \gamma \sum_{j=1}^N \|U_j\| \int_0^{t_j} \|\nabla v_{nk}(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt + \|v_{nk}(0)\|^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

что с учетом (2.25) приводит к неравенству

$$\int_0^T \|\nabla v_{nk}(t)\|^2 \varrho(t) dt \leq \frac{1}{\alpha \gamma} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt, \quad (2.27)$$

где

$$\varrho(t) = \frac{\|W\|}{\sqrt{T}} (T-t) + \sum_{j=1}^N \|U_j\| \chi_{[0, t_j]}(t). \quad (2.28)$$

Мы можем считать, что v_{nk} слабо сходится к v_n в $L_2((0, T), V(\Omega))$, и так как $t_N = T$, то справедлива оценка

$$\int_0^T \|\nabla v_n(t)\|^2 dt \leq c \int_0^T \|f(t)\|_{V^*(\Omega)}^2 dt. \quad (2.29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Мы не исследуем случай $t_N < T$. Заметим только, что, основываясь на неравенстве (2.27), можно установить существование слабого решения в весовом (по времени) пространстве, определяемом неравенством (2.27) при условии $W \neq 0$.

В интегральном тождестве для v_n положим

$$\Phi = \psi(t)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{V}(\Omega), \quad \psi \in C_0^\infty(0, T).$$

При достаточно большом $n > N(\varphi)$ таком, что $\text{supp } \varphi \subset \Omega_n$, будем рассматривать его как определение распределения $\frac{d}{dt}(v_n, \varphi)$ из $\mathcal{D}'(0, T)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}(v_n, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle - \nu(\nabla v_n, \nabla \varphi) - (v_n, \nabla)v_n, \varphi).$$

Из равномерной оценки v_n по норме $L_2((0, T), V(\Omega))$ вытекает, что при любом фиксированном φ равномерно по n

$$\|(v_n, \varphi)\|_{L_2(0, T)} \leq c \|v_n\|_{L_2((0, T), V(\Omega))} \|\varphi\|_{L_{p'}(\Omega)},$$

где $1/p' + 1/p = 1$, $1/p = 1/2 - 1/m$, а для распределения $\frac{d}{dt}(v_n, \varphi)$ при $n > N(\varphi)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(v_n, \varphi) \right\|_{L_1(0, T)} &\leq c(\|v_n\|_{L_2((0, T), V(\Omega))} + \|f\|_{L_2((0, T), V^*(\Omega))}) \|\varphi\|_{V(\Omega)} \\ &\quad + \|v_n\|_{L_2((0, T), V(\Omega))}^2 \|\varphi\|_{L_m(\Omega)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом фиксированном $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$ равномерно по n при $n > N(\varphi)$

$$\|(v_n, \varphi)\|_{L_2(0, T)} \leq c, \tag{2.30}$$

$$\left\| \frac{d}{dt}(v_n, \varphi) \right\|_{L_1(0, T)} \leq c. \tag{2.31}$$

ЛЕММА 2.4. Пусть для области Ω выполнены условия леммы 1.9, v_n – решение задачи сопряжения в области Ω_n с оператором сопряжения $Q_n U$. Тогда существует подпоследовательность v_{n_k} последовательности v_n , которая сходится в пространстве $L_2((0, T), H_\gamma(\Omega))$ и слабо сходится в $L_2((0, T), V(\Omega))$ к некоторому элементу $v(t) \in L_2((0, T), V(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу критерия компактности Рисса из (2.30), (2.31) следует, что можно выбрать подпоследовательность $v_{n_k}(t)$ такую, что $(v_{n_k}(t), a^l)$ сходится в $L_2(0, T)$ при любом фиксированном l . Вследствие леммы 1.12 для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$ и $c(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого $w \in L_2((0, T), V(\Omega))$ справедливо неравенство

$$\|w\|_{L_2((0, T), H_\gamma(\Omega))} \leq \varepsilon \|w\|_{L_2((0, T), V(\Omega))} + c(\varepsilon) \left\{ \int_0^T \sum_{l=1}^N (w, a^l)^2 dt \right\}^{1/2}. \tag{2.32}$$

Полагая в этом неравенстве $w = v_{n_k} - v_{n_m}$, устанавливаем, что

$$\|v_{n_k} - v_{n_m}\|_{L_2((0,T), H_\gamma(\Omega))} \rightarrow 0$$

при $k, m \rightarrow \infty$. Следовательно, существует $v(t) \in L_2((0,T), H_\gamma(\Omega))$, к которому сходится v_{n_k} . Так как $\|v_{n_k}\|_{L_2((0,T), V(\Omega))}$ равномерно ограничены, то можно считать, что v_{n_k} слабо сходятся в $L_2((0,T), V(\Omega))$, и очевидно, что слабый предел совпадает с $v(t)$.

Установленных в лемме 2.4 свойств последовательности v_{n_k} достаточно для предельного перехода в интегральном тождестве. В результате получаем, что для $v(t)$ справедливо тождество

$$\int_0^T \{-(v, \Phi_t) + ((v, \nabla)v, \Phi) + \nu(\nabla v, \nabla \Phi) - \langle f, \Phi \rangle\} dt = 0 \quad (2.33)$$

для любого $\Phi \in C_0^\infty((0,T), \mathcal{V}(\Omega))$.

Заметим, что интегральное тождество распространяется на пробные функции Φ из пространства $C_0^\infty((0,T), X)$, где X – замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $L_{2m/(m+2)}(\Omega) \cap L_m(\Omega) \cap V(\Omega)$, m – размерность области Ω . Это следует из оценок

$$\begin{aligned} |(v, \varphi)| &\leq \|v\|_{L_p(\Omega)} \|\varphi\|_{L_{p'}(\Omega)} \leq c \|v\|_{V(\Omega)} \|\varphi\|_{L_{p'}(\Omega)}, \\ \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{m+2}{2m}, \\ |((v, \nabla)v, \varphi)| &\leq \|v\|_{L_p(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{L_m(\Omega)}. \end{aligned}$$

Заметим также, что $V_\mu^k(\Omega) \subset X$ при $k \geq 1$ и, следовательно, интегральное тождество верно для $\Phi \in C_0^\infty((0,T), V_\mu^k(\Omega))$.

Тот факт, что $v(t)$ удовлетворяет тождеству (2.33), пока означает лишь, что $v(t)$ является слабым решением системы Навье–Стокса. Поэтому дальнейшей целью является выяснение вопроса о том, в каком смысле это решение удовлетворяет условию сопряжения. Мы покажем, что при дополнительных ограничениях на оператор сопряжения интегральное тождество (2.33) распространяется на некоторый класс разрывных пробных функций и вследствие этого поле $v(t)$ удовлетворяет некоторому более слабому условию сопряжения.

Предварительно установим свойство непрерывности $v(t)$. Для этого рассмотрим функционал

$$F_v(t)(\varphi) = (v(t), \varphi) = \int_\Omega v(t, x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Из оценок

$$\begin{aligned} |(v(t), \varphi)| &\leq \|v\|_{L_p(\Omega)} \|\varphi\|_{L_{p'}(\Omega)}, \\ \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} = \frac{m+2}{2m}, \\ \|\varphi\|_{L_{p'}(\Omega)} &\leq \left\{ \int_\Omega \varphi^2 \varrho^\mu dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega \varrho^{-\mu m/2} dx \right\}^{1/m} \end{aligned}$$

имеем

$$|F_v(t)(\varphi)| \leq c \|v(t)\|_{V(\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\Omega, \mu)} \left\{ \int_{\Omega} \varrho^{-\mu m/2} dx \right\}^{1/m}.$$

Следовательно, при $\mu > 2$ функционал $F_v(t)$ является элементом пространства $L_2((0, T), (V_{\mu}^k(\Omega))^*)$, $k \geq 1$.

Будем рассматривать $F_v(t)$ как векторное распределение на $(0, T)$ со значениями в $(V_{\mu}^k(\Omega))^*$:

$$\langle F_v(t), \psi(t) \rangle = \int_0^T F_v(t) \psi(t) dt, \quad \psi \in C_0^{\infty}(0, T).$$

Тогда обычным образом определено векторное распределение $\frac{d}{dt} F_v(t)$ со значениями в $(V_{\mu}^k(\Omega))^*$:

$$\left\langle \frac{d}{dt} F_v(t), \psi(t) \right\rangle = - \int_0^T F_v(t) \psi'(t) dt.$$

Из интегрального тождества для $v(t)$ при $\Phi = \psi(t)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$, следует, что

$$\left\langle \frac{d}{dt} F_v(t), \psi(t) \right\rangle = - \int_0^T \{ \nu(\nabla v, \nabla \varphi) - ((v, \nabla)v, \varphi) + \langle f, \varphi \rangle \} \psi dt.$$

Из оценки

$$\begin{aligned} & |\nu(\nabla v, \nabla \varphi) - ((v, \nabla)v, \varphi) + \langle f, \varphi \rangle| \\ & \leq \nu \|v\|_{V(\Omega)} \|\varphi\|_{V(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)} \|\varphi\|_{L_m(\Omega)} + \|f\|_{V^*(\Omega)} \|\varphi\|_{V(\Omega)} \\ & \leq c \{ \nu \|v\|_{V(\Omega)} + \|v\|_{V(\Omega)}^2 + \|f\|_{V^*(\Omega)} \} \|\varphi\|_{V_{\mu}^k(\Omega)} \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{d}{dt} F_v(t) \in L_1((0, T), (V_{\mu}^k(\Omega))^*).$$

Поэтому, изменяя в случае необходимости функционал $F_v(t)$ на множестве $\mathcal{N} \subset [0, T]$ меры нуль, будем считать, что $F_v(t)$ является элементом пространства $C([0, T], (V_{\mu}^k(\Omega))^*)$. Заметим, что соответствие $v(t) \mapsto F_v(t)$ взаимно однозначно. Поэтому, отождествляя $v(t)$ и $F_v(t)$, в дальнейшем считаем, что $v(t) \in C([0, T], (V_{\mu}^k(\Omega))^*)$.

Теперь распространим интегральное тождество на некоторый класс разрывных пробных функций при некоторых дополнительных условиях на оператор сопряжения. Предположим, что для операторов U_j^* , сопряженных к операторам U_j в пространстве $H(\Omega)$, выполняется соотношение $U_j^* \mathcal{V}(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega)$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ и $\Psi(t) \in C^{\infty}([0, T], \mathcal{V}(\Omega))$ удовлетворяет условиям

$$\Psi(t_j) = \tilde{U}_j \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{V}(\Omega),$$

где $\tilde{U}_0 = I$, $\tilde{U}_j = ((-1)^{j-1}/2) U_j^*$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, $\tilde{U}_N = (-1)^{N-1} U_N^*$.

Таким образом, обозначив через $\mathcal{F}$ класс пробных функций вида $\chi\Psi + \Phi$, где $\Psi \in C^\infty([0, T], \mathcal{V}(\Omega))$ и удовлетворяет указанным выше свойствам, $\Phi \in C_0^\infty((0, T), \mathcal{V}(\Omega))$, получаем, что при достаточно большом n верно интегральное тождество

$$\int_0^T \{-(v_n, \chi\Psi_t + \Phi_t) + \nu(\nabla v_n, \nabla(\chi\Psi + \Phi)) + ((v_n, \nabla)v_n, \chi\Psi + \Phi) - \langle f, \chi\Psi + \Phi \rangle\} dt = (W[v_n], \Psi(0)).$$

Теперь перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Установленных свойств последовательности v_{n_k} достаточно для предельного перехода в левой части. Что же касается правой части, то будем предполагать, что оператор W является ограниченным оператором из $L_2((0, T), V(\Omega))$ в $V(\Omega)$. Тогда $(W[v_{n_k}], \varphi) \rightarrow (W[v], \varphi)$. При этих предположениях верно интегральное тождество

$$\int_0^T \{-(v, \chi\Psi_t + \Phi_t) + \nu(\nabla v, \nabla(\chi\Psi + \Phi)) + ((v, \nabla)v, \chi\Psi + \Phi) - \langle f, \chi\Psi + \Phi \rangle\} dt = (W[v], \Psi(0)).$$

Векторное поле $v(t) \in L_2((0, T), V(\Omega)) \cap C([0, T], (V_\mu^k(\Omega))^*)$, удовлетворяющее этому интегральному тождеству, будем называть *слабым решением задачи сопряжения*.

Заметим, что из интегрального тождества вытекает некоторый слабый вариант условия сопряжения. Для доказательства этого факта выберем пробную функцию в виде $\chi\Psi_\varepsilon(t)$, где

$$\Psi_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^N \left(1 - \sigma\left(\frac{t - t_j}{\varepsilon}\right)\right) \tilde{U}_j \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{V}(\Omega),$$

и перейдем в интегральном тождестве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T (v(t), \chi\Psi_{\varepsilon,t}) dt = -(W[v], \varphi).$$

С другой стороны, из принадлежности $v(t)$ пространству $C([0, T], (V_\mu^k(\Omega))^*)$ аналогично предыдущему устанавливаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T (v(t), \chi\Psi_{\varepsilon,t}) dt = -(v(0), \varphi) + \sum_{j=1}^N (v(t_j), U_j^* \varphi)$$

и, таким образом, для слабого решения $v(t)$ выполняется условие сопряжения

$$(v(0), \varphi) = \sum_{j=1}^N (v(t_j), U_j^* \varphi) + (W[v], \varphi).$$

Предположив ограниченность операторов $U_j: (V_\mu^k(\Omega))^* \rightarrow (V_\mu^k(\Omega))^*$, получаем

$$v(0) = W[v] + \sum_{j=1}^N U_j v(t_j)$$

в смысле равенства элементов пространства $(V_\mu^k(\Omega))^*$.

Таким образом, установлен следующий результат о существовании слабого решения задачи сопряжения.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, – область с константой Фридрихса $c(\Omega) = \infty$, удовлетворяющая условиям леммы 1.9, оператор сопряжения имеет вид

$$U[v] = W[v] + \sum_{j=1}^N U_j v(t_j),$$

где $W: L_2((0, T), X) \rightarrow X$ – ограниченный оператор как при $X = H(\Omega)$, так и при $X = V(\Omega)$, $U_j: H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ – ограниченные операторы, для которых $U_j^* \mathcal{V}(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega)$, причем выполняется условие

$$T^{1/2} \|W\|_{L_2((0, T), H(\Omega) \rightarrow H(\Omega))} + \sum_{j=1}^N \|U_j\| = 1.$$

Тогда существует вектор-функция, принадлежащая пространству

$$L_2((0, T), V(\Omega)) \cap C([0, T], (V_\mu^k(\Omega))^*),$$

удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T \{ -(v, \chi \Psi_t + \Phi_t) + \nu(\nabla v, \nabla(\chi \Psi + \Phi)) + ((v, \nabla)v, \chi \Psi + \Phi) \\ - \langle f, \chi \Psi + \Phi \rangle \} dt = (W[v], \Psi(0)) \end{aligned}$$

для любой пробной функции $\chi \Psi + \Phi \in \mathcal{F}$.

Список литературы

- [1] В. И. Юдович, “Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости”, *Докл. АН СССР*, **130**:6 (1960), 1214–1217; англ. пер.: V. I. Yudovich, “Periodic motions of a viscous incompressible fluid”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 168–172.
- [2] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [3] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Т. I, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [4] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, Наука, М., 1989.
- [5] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [6] Е. М. Дынькин, “Методы теории сингулярных интегралов (преобразование Гильберта и теория Кальдерона–Зигмунда)”, *ВИНИТИ: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **15** (1987), 197–292; англ. пер. Е. М. Dynkin, “Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderón–Zygmund theory”, *Commutative harmonic analysis*, I, Encyclopaedia Math. Sci., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 167–259.

- [7] Л. И. Сазонов, *Гидродинамический проектор во внешней области*, деп. в ВИНТИ № 3148-B00.
- [8] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, ГИФМЛ, М., 1961; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London, 1963.

Л. И. Сазонов (L. I. Sazonov)

Южный федеральный университет,

г. Ростов-на-Дону

E-mail: sazonov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию

23.07.2002 и 09.04.2007