Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 8, 29–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:48:48

УДК 517.444

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга

Получены локальные варианты теоремы Брауна–Шрейбера–Тейлора о спектральном анализе в $\mathbb{R}^n$ при самых общих предположениях. Это позволило, в частности, доказать эквивалентность глобального и локального свойств Помпейю для компакта $E \subset \mathbb{R}^n$ без каких-либо условий на E . Установлены точные аналоги этих результатов для систем уравнений свертки на редуцированной группе Гейзенберга H_{red}^n . В качестве приложения получена теорема о спектральном анализе для подпространств в $C(H_{\text{red}}^n)$, инвариантных относительно сдвигов и унитарных преобразований, аналоги которой были известны ранее лишь для функций медленного роста.

Библиография: 20 названий.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ – пространства распределений и распределений с компактным носителем на открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ соответственно. Для $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ символом $r(T)$ будем обозначать радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель T . Для непустого множества индексов A и заданного семейства $\mathcal{T} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим систему уравнений свертки

$$f * T_\alpha = 0, \quad \alpha \in A, \quad (1)$$

с неизвестным $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Для каких $\mathcal{T}$ эта система имеет только нулевое решение? Фундаментальная теорема Л. Шварца о спектральном анализе утверждает, что при $n = 1$ для этого необходимо и достаточно, чтобы множество общих нулей преобразований Фурье $\widehat{T}_\alpha$, $\alpha \in A$, было пустым (см., например, [1; теорема 2.11]). При $n \geq 2$ точный аналог теоремы Л. Шварца получен Л. Брауном, Б. М. Шрейбером и Б. А. Тейлором [2] в случае, когда все T_α являются радиальными. Как показано Д. И. Гуревичем в [3], условие радиальности, вообще говоря, убрать нельзя.

Если все T_α радиальны и $r(T_\alpha) < R$ для любого $\alpha \in A$, то естественно изучать систему (1) в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Эти исследования не только представляют значительный самостоятельный интерес, но и важны для многочисленных приложений в интегральной геометрии, в теории кратных тригонометрических рядов с лакунами, в теории аппроксимации, в комплексном анализе, в уравнениях с частными производными, в теории отображений, сохраняющих меру, и др. (см. [4; часть 5]). К. А. Беренштейн и Р. Гэй установили

[5; теорема 12], что класс

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{f \in \mathcal{D}'(B_R) : f * T_{\alpha} = 0 \text{ в } B_{R-r(T_{\alpha})} \forall \alpha \in A\} \quad (2)$$

содержит только нулевое распределение, если существует $\alpha_0 \in A$ такое, что T_{α_0} является гиперболическим,

$$R > r(T_{\alpha_0}) + \sup_{\alpha \in A} r(T_{\alpha}), \quad (3)$$

и $\{z \in \mathbb{C}^n : \hat{T}_{\alpha}(z) = 0 \forall \alpha \in A\} = \emptyset$ (здесь и далее $\mathbb{C}^n$ – комплексное евклидово пространство размерности n). Доказательство этого факта использует соответствующую версию аппроксимационной теоремы Хёрмандера–Напалкова на выпуклых областях в $\mathbb{R}^n$ (см. [6; гл. 16], [7; § 20]). Другие методы для изучения системы (1) на ограниченных областях были разработаны в [4]. В частности, для широкого класса семейств $\mathcal{T}$ было найдено описание класса $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R)$ в виде разложений по специальным функциям. Это позволило получить ряд окончательных результатов, усиливающих теорему Беренштейна–Гэя, в которых уточняется оценка (3) и учитывается скорость возможного сближения нулей $\hat{T}_{\alpha}$ на бесконечности (см. [4; часть 3]). Однако вопрос о справедливости теоремы Беренштейна–Гэя без каких-либо дополнительных ограничений на радиальные распределения T_{α} оставался открытым до настоящего времени.

Другим важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение подобных задач на группах Гейзенберга, которые широко используются в современных исследованиях по гармоническому анализу и уравнениям в частных производных (см., например, [8], [9]). Вещественная $(2n+1)$ -мерная группа Гейзенберга H^n представляет собой множество $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^1$ с законом умножения

$$(z, t)(w, s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} \right), \quad z, w \in \mathbb{C}^n, \quad t, s \in \mathbb{R}^1,$$

где $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}}$ – эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Факторизация H^n по подгруппе $\Gamma = \{(0, 2\pi k) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ порождает редуцированную группу Гейзенберга H^n_{red} , функции на которой отождествляются с 2π -периодическими по t функциями на H^n (см. [9; § 1.2]). Исследование аналогов системы (1) на H^n представляет интерес, по меньшей мере, в силу следующих причин. Во-первых, H^n является модельным представителем такого важного класса групп Ли как нильпотентные, и результаты, полученные на H^n , могут приводить к интересным задачам и гипотезам в общем случае. С другой стороны, H^n можно отождествить с помощью преобразования Кэли с единичной сферой S^{2n+1} в $\mathbb{C}^{n+1}$, касательные операторы Коши–Римана которой соответствуют основным левоинвариантным векторным полям на H^n . Тем самым системы типа (1) на H^n тесно связаны с $\bar{\partial}$ -уравнениями на комплексной сфере, а изучение их решений связано с проблемой о голоморфном продолжении внутрь области $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ функции, заданной на границе $\partial\mathcal{O}$ (см. [10; гл. 5]).

Используя подходящий вариант преобразования Фурье, уравнения свертки на группе H^n (соответственно H^n_{red}) можно свести к искаженным уравнениям свертки на $\mathbb{C}^n$ вида

$$\langle f \times T, \psi \rangle = \langle f(z), \langle T(w), \psi(z+w) e^{(i/2) \operatorname{Im} \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}}} \rangle \rangle = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n), \quad (4)$$

где $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{C}^n$. Для изучения (4) ранее применялись методы теории идеалов, преобразование Вейля, а также спектральная теория лапласиана Гейзенберга–Кона и оператора $i\frac{\partial}{\partial t}$, развитая Р. Стрихарцем (см. [11], [12] и библиографию к этим работам). Однако полученные при этом результаты были далеки от завершения. В частности, аналоги упомянутой выше теоремы Брауна–Шрейбера–Тейлора были доказаны лишь для функций медленного роста [12; теорема 4.3], а системы искаженных уравнений свертки на ограниченных областях в $\mathbb{C}^n$ исследованию не поддавались.

В настоящей работе предлагается принципиально новый подход к задачам указанного типа, который позволяет преодолеть перечисленные выше трудности и состоит в следующем. Для изучения (1) и (4) в §§ 2, 7 вводятся и исследуются операторы, заданные на основных инвариантных подпространствах решений (1) и (4), которые устанавливают гомеоморфизмы между этими подпространствами и пространствами решений специальных одномерных систем уравнений свертки. Их определение существенно опирается на сферическое преобразование в $\mathbb{R}^n$ и его аналоги для искаженной свертки, введенные в § 6. Построенные гомеоморфизмы в некотором обобщенном смысле коммутируют с оператором свертки (искаженной свертки), что позволяет свести ряд проблем, связанных с (1) и (4), к одномерному случаю (см. теоремы 5 и 9, (i)). Наконец, для исследования одномерной ситуации важную роль играет теорема 3 о полноте некоторых систем функций (см. также следствие 2). Ее доказательство опирается на свойства целых функций вполне регулярного роста и аналог теоремы Винера–Пэли для аналитических функционалов (см. [6; теорема 15.1.5]).

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получен локальный аналог теоремы Беренштейна–Гэя без каких-либо ограничений на радиальные распределения T_α и с неухудшаемыми условиями на R , ослабляющими (3) (см. теорему 6).

2. Доказана эквивалентность локального и глобального свойства Помпейю в самом общем случае (см. теорему 7 и следствие 3). Отметим, что немногочисленные предшествующие результаты в этом направлении были получены в [13], [4; часть 4] и содержали различные дополнительные требования, связанные с регулярностью границы рассматриваемых множеств.

3. Получены точные аналоги указанных выше евклидовых результатов для систем уравнений свертки на редуцированной группе Гейзенберга (в частности, для систем искаженных уравнений свертки в шаре из $\mathbb{C}^n$), см. теоремы 10, 12. В качестве приложения доказана теорема 11 о спектральном анализе для подпространств в $C(H_{\text{red}}^n)$, инвариантных относительно сдвигов и унитарных преобразований, аналога которой были известны ранее лишь для функций медленного роста (см. [12; теоремы 4.3, 6.2]).

Некоторые промежуточные результаты работы представляют самостоятельный интерес (см. теоремы 3, 4, 8).

Результаты § 2 и теорема 11 получены авторами совместно. Основные результаты §§ 3, 4 принадлежат В. В. Волчкову, а §§ 5–7 – Вит. В. Волчкову.

Относительно других аспектов теории уравнений свертки и их приложений см. [6; гл. 16], [7], [14; гл. 5] и библиографию к этим работам.

§ 1. Основные конструкции и обозначения

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества целых, целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно; $[\lambda]$ – целая часть числа $\lambda \in \mathbb{R}$; $\binom{j}{k}$ – биномиальные коэффициенты; Γ – гамма-функция; $(a)_j = \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, – символ Похгаммера; $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq n$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – длина мультииндекса α ; z^α – голоморфный моном в $\mathbb{C}^n$, т.е. $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ при $z = (z_1, \dots, z_n)$; $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$) – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций; $\text{RA}(\mathcal{O})$ – класс вещественно-аналитических в $\mathcal{O}$ функций. Положим также $\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ для функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

$$r_0(T) = \inf\{r > 0 : \text{supp } T \subset B_r\},$$

где $\text{supp } T$ – носитель T . Преобразование Фурье $\hat{T}$ распределения T определяется равенством

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(x_1\zeta_1 + \dots + x_n\zeta_n)} \rangle, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Если $n = 1$ и T четно, положим $\tilde{T}(z) = \hat{T}(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Ниже мы определим аналог преобразования $\tilde{T}$ в многомерном случае.

Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = x/\rho$). Обозначим: $\mathcal{H}^{n,k}$ – пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$, рассматриваемое как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ (см. [15; гл. 4]); $d(n, k)$ – размерность $\mathcal{H}^{n,k}$; $\{Y_j^k\}$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$. Положим $Y_1^0(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$ для любого $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$, где $\omega_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Определим $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$ при $x = \rho\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Используя это соотношение, продолжим Y_j^k до многочлена на $\mathbb{C}^n$.

Пусть $T^n(\tau)$, $\tau \in O(n)$, – квазирегулярное представление ортогональной группы $O(n)$ в $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Тогда $T^n(\tau)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^{n,k}(\tau)$, действующих на $\mathcal{H}^{n,k}$ (см. [16; гл. 9, § 2.1]). Обозначим через $\{t_{i,j}^k(\tau)\}$ матрицу представления $T^{n,k}(\tau)$, т.е.

$$Y_j^k(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{i=1}^{d(n,k)} t_{i,j}^k(\tau) Y_i^k(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\tau\mathcal{O} = \mathcal{O}$ для любого $\tau \in O(n)$, $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ – класс локально суммируемых в $\mathcal{O}$ функций. Ряд Фурье функции $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma), \quad x \in \mathcal{O}, \quad (5)$$

где

$$f_{k,j}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_j^k(\sigma)} d\omega(\sigma)$$

и $d\omega$ – элемент площади на $\mathbb{S}^{n-1}$. По теореме Фубини функции $f_{k,j}$ корректно определены для почти всех $\rho \in \{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$, где $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Более того, функции $f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_j^k(\sigma)$ принадлежат $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$. Обозначим через $d\tau$ меру Хаара на $O(n)$, нормированную так, что мера $O(n)$ равна единице. Отображение $f \rightarrow f^{k,j}$ и разложение (5) можно продолжить на расширение $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$\langle f^{k,j}, \psi \rangle = \left\langle f, d(n, k) \int_{O(n)} \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^k(\tau) d\tau \right\rangle = \langle f, \overline{(\bar{\psi})_{k,j}(\rho)} \overline{Y_j^k(\sigma)} \rangle, \quad (6)$$

$$\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),$$

и

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j} \quad (7)$$

(см. [4; часть 1, п. 5.2]). Отметим, что для любого $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно, $f \in C^\infty(\mathcal{O})$) ряд в правой части (7) сходится к f в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно, в $C^\infty(\mathcal{O})$).

Действительно, если $f \in C^\infty(\mathcal{O})$, то при произвольном $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем (см. [16; гл. 9, § 5, п. 1, формула (7)])

$$\begin{aligned} f^{k,j}(x) &= \frac{1}{(k(2-n-k))^m} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Delta_0^m(f(\rho\eta)) \overline{Y_j^k(\eta)} d\omega(\eta) Y_j^k(\sigma) \\ &= \frac{1}{(k(2-n-k))^m} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (L^m f)(\rho\eta) \overline{Y_j^k(\eta)} d\omega(\eta) Y_j^k(\sigma) \\ &= \frac{1}{(k(2-n-k))^m} (L^m f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \\ &= \frac{d(n, k)}{(k(2-n-k))^m} \int_{O(n)} (L^m f)(\tau^{-1}x) \overline{t_{j,j}^k(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

где Δ_0 – оператор Лапласа на $\mathbb{S}^{n-1}$ и

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2.$$

Учитывая, что

$$d(n, k) = \frac{(2k+n-2)(n+k-3)!}{(n-2)! k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \int_{O(n)} |t_{i,j}^k(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{d(n, k)}$$

(см. [16; гл. 9, § 2, п. 5, формула (11) и гл. 1, § 4, п. 3, формула (3)]), получаем сходимость ряда (7) к f в пространстве $C^\infty(\mathcal{O})$. Пусть теперь $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Если $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, то по доказанному выше ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} \overline{(\bar{\psi})^{k,j}}$$

сходится к ψ в пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. Этот факт и соотношение (6) влекут сходимость ряда (7) к f в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Для всякого множества $\mathfrak{W}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ положим

$$\mathfrak{W}_{k,j}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{k,j}\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$ совпадает с множеством радиальных распределений из $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$. В дальнейшем мы пишем $\mathfrak{W}_{\natural}(\mathcal{O})$ вместо $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$. Пусть $R \in (0, +\infty]$. Для любого класса $\mathfrak{W}(-R, R)$ распределений на интервале $(-R, R) \subset \mathbb{R}^1$ символом $\mathfrak{W}_{\natural}(-R, R)$ обозначается множество всех четных распределений из $\mathfrak{W}(-R, R)$.

Если $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$, $r(T) < R \leq +\infty$ и $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, то из (6) следует, что в $B_{R-r(T)}$

$$(f * T)^{k,j} = f^{k,j} * T. \quad (8)$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$ определим

$$\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(x) = 2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} Y_j^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{\varkappa} \left(\frac{J_{n/2+k-1}(w|x|)}{(w|x|)^{n/2+k-1}}\right) \Big|_{w=\lambda}, \quad (9)$$

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν ,

$$\varkappa = \eta, \text{ если } \lambda \neq 0, \quad \text{и} \quad \varkappa = 2\eta, \text{ если } \lambda = 0. \quad (10)$$

Пусть Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Используя дифференциальное уравнение для функций Бесселя [17; п. 7.2, формула (1)] и теорему Эйлера об однородных функциях, из равенства (9) имеем $(\Delta + \lambda^2)\Phi_{\lambda,0,k,j} = 0$. Теперь индукцией по η нетрудно проверить, что

$$(\Delta + \lambda^2)^\eta \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = \begin{cases} (-\eta)_\eta (2\lambda)^\eta \Phi_{\lambda,0,k,j}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ (-1)^\eta (-2\eta)_{2\eta} \Phi_{0,0,k,j}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Из (9), (10) и интегрального представления Пуассона [17; п. 7.12, формула (8)] находим

$$\Phi_{\lambda,0,k,j}(x) = \frac{2^{1-k} \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi} \Gamma((n-1)/2 + k)} Y_j^k(x) \int_0^1 (1-t^2)^{(n-3)/2+k} \cos(\lambda|x|t) dt. \quad (12)$$

Далее, из обобщения Гегенбауэра интеграла Пуассона [17; п. 7.8, формула (11)] и формулы Функа–Гекке [17; п. 11.4, формула (23)] получаем

$$\Phi_{\lambda,0,k,j}(x) = \frac{\Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}}{2\pi^{n/2} (i\lambda)^k} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\lambda \langle x, \eta \rangle_{\mathbb{R}}} Y_j^k(\eta) d\omega(\eta), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Если $N \in \mathbb{Z}_+$, $R \in (0, +\infty)$ и $\overline{B_R} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$, то из этого соотношения следует оценка

$$\|\Phi_{\lambda,0,k,j}\|_{C^N(\overline{B_R})} \leq c(1 + |\lambda|)^{N-k} e^{R|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (13)$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ , R . Кроме того, для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ имеем (см. (6))

$$\widehat{f}(\zeta) = \frac{2\pi^{n/2}}{i^k \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}} Y_j^k(\zeta) \mathcal{F}_j^k(f) \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right), \quad (14)$$

где

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \langle f, \overline{\Phi_{z,0,k,j}} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Если $f \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$, то функция $\tilde{f}(z) = \mathcal{F}_1^0(f)(z)$, $z \in \mathbb{C}$, называется *сферическим преобразованием* f .

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\Phi_{\lambda,0,k,j} * T = \tilde{T}(\lambda) \Phi_{\lambda,0,k,j} \quad (16)$$

по теореме о среднем для собственных функций оператора Δ (см. (11)). Отсюда

$$\mathcal{F}_j^k(f * T) = \mathcal{F}_j^k(f) \tilde{T} \quad \text{для всех } f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n), \quad T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n). \quad (17)$$

В частности,

$$\mathcal{F}_j^k(P(\Delta)f)(z) = P(-z^2) \mathcal{F}_j^k(f)(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

для любого многочлена P .

Далее нам потребуются подобные конструкции для пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Здесь мы рассмотрим аналоги разложений (5)–(7) для унитарной группы $U(n)$ на $\mathbb{C}^n$ и аналог соотношения (8) для искаженной свертки. Построения, связанные с аналогами равенств (9)–(18), содержатся в §§ 5, 6 ниже.

Пусть $\mathcal{H}^{n,p,q}$ – пространство сферических гармоник бистепени (p, q) на $\mathbb{S}^{2n-1}$ (см. [18; гл. 12]). Как известно [18; теоремы 12.2.7, 12.2.8], квазирегулярное представление группы $U(n)$ в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1})$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, действующих на $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Обозначим через $d(n, p, q)$ размерность $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Пусть $\{S_l^{p,q}\}$, $l \in \{1, \dots, d(n, p, q)\}$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Положим $S_1^{0,0}(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{2n-1}}$ для любого $\sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}$. Всякой функции $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – непустое открытое $U(n)$ -инвариантное множество в $\mathbb{C}^n$, соответствует ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f_{p,q,l}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma), \quad z = \varrho\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}, \quad (19)$$

где

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\varrho\sigma) \overline{S_l^{p,q}(\sigma)} d\omega(\sigma).$$

Разложение (19) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$f \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,l},$$

где распределение $f^{p,q,l}$ действует по правилу

$$\langle f^{p,q,l}, \psi \rangle = \langle f, \overline{(\psi)_{p,q,l}(\varrho)} S_l^{p,q}(\sigma) \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Для заданного класса $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$ распределений на $\mathcal{O}$ положим

$$\mathfrak{W}_{p,q,l}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{p,q,l}\}.$$

При $p = q = 0, l = 1$ будем писать $\mathfrak{W}_{\natural}(\mathcal{O})$ вместо $\mathfrak{W}_{0,0,1}(\mathcal{O})$.

Введем специальный оператор Эрмита (искаженный лапласиан)

$$\mathfrak{L} = \frac{|z|^2}{4} \text{Id} + \sum_{k=1}^n \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - 4 \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} \right), \quad (20)$$

где Id – тождественный оператор. Тогда $\mathfrak{L}$ инвариантен относительно искаженных сдвигов $\tau(w)h(z) = h(z+w)e^{\frac{i}{2} \text{Im}\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}}}$, т.е.

$$\mathfrak{L}(\tau(w)h(z)) = \tau(w)(\mathfrak{L}h)(z). \quad (21)$$

Если $f \in C_{p,q,l}^2(\mathcal{O})$, то из (20) непосредственным вычислением получаем соотношение

$$(\mathfrak{L}f)(z) = (\mathfrak{L}_{p,q} f_{p,q,l})(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma), \quad (22)$$

где

$$\mathfrak{L}_{p,q} = -\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{2n-1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} + \left(\frac{(p+q)(2n+p+q-2)}{\varrho^2} + \frac{1}{4} \varrho^2 + p - q \right) \text{Id}.$$

Пусть $\mathcal{B}_R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$. Как и в случае $\mathbb{R}^n$, для $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ обозначим $r(T)$ радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{C}^n$, содержащего носитель T . Если $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$, $r(T) < R \leq +\infty$ и $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{B}_R)$, то имеем следующий аналог равенства (8) в $\mathcal{B}_{R-r(T)}$:

$$(f \times T)^{p,q,l} = f^{p,q,l} \times T. \quad (23)$$

В частности, $(P(\mathfrak{L})f)^{p,q,l} = P(\mathfrak{L})f^{p,q,l}$ для любого многочлена P (см. предложение 1, (vii), (ix) ниже).

Для полноты изложения приведем в заключение элементарные свойства искаженной свертки, которые используются далее. Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. Если $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, то распределение $T(\cdot)$ обозначим через $\check{T}$. Пусть также δ_0 – мера Дирака в нуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что $T_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, 2, 3$, и хотя бы два из распределений T_i имеют компактный носитель.*

Тогда:

- (i) $(\lambda T_1 + \mu T_2) \times T_3 = \lambda(T_1 \times T_3) + \mu(T_2 \times T_3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;
- (ii) $(T_1 \times T_2)^{\check{}} = \check{T}_1 \times \check{T}_2$;
- (iii) $\text{supp}(T_1 \times T_2) \subset \text{supp } T_1 + \text{supp } T_2$;
- (iv) $\check{T}_1 \times \check{T}_2 = \check{T}_2 \times \check{T}_1$;
- (v) $(T_1 \times T_2)(\bar{z}) = (T_2 \times T_1)(z)$, если $T_i(z) = T_i(\bar{z})$, $i = 1, 2$; в частности, $T_1 \times T_2 = T_2 \times T_1$ для $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$;

$$(vi) (T_1 \times T_2) \times T_3 = T_1 \times (T_2 \times T_3);$$

$$(vii) T_1 \times \delta_0 = \delta_0 \times T_1 = T_1;$$

$$(viii) (\tau(w)T_1) \times T_2 = \tau(w)(T_1 \times T_2);$$

$$(ix) \mathfrak{L}(T_1 \times T_2) = T_1 \times \mathfrak{L}T_2, \mathfrak{L}^*(T_1 \times T_2) = (\mathfrak{L}^*T_1) \times T_2, (\mathfrak{L}T_1) \times T_2 = T_1 \times \mathfrak{L}^*T_2,$$

где $\mathfrak{L}^*$ – сопряженный к оператору $\mathfrak{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (i)–(viii) следуют из определения искаженной свертки (см. (4)) с помощью простых преобразований. Чтобы доказать (ix), достаточно использовать (21).

§ 2. Гомеоморфизмы со свойством трансмутации

В этом параграфе мы определим оператор, позволяющий свести ряд проблем для уравнений свертки в $\mathbb{R}^n$ к одномерному случаю.

Согласно теореме Винера–Пэли [6; теорема 7.3.1], для любого $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ существует распределение $\Lambda(T) \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ такое, что

$$\widehat{\Lambda(T)} = \tilde{T}, \quad r(\Lambda(T)) = r(T). \quad (24)$$

Более того, отображение $\Lambda: \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$ является биекцией.

Далее на протяжении этого параграфа мы предполагаем, что $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ положим

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{R}^1} \psi(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$. Рассмотрим основные свойства отображения $f \rightarrow \mathfrak{A}_{k,j}(f)$.

ЛЕММА 1. (i) Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ справедливо соотношение

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f * T) = \mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T). \quad (26)$$

(ii) Пусть $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^{N+n+k+2})(\mathbb{R}^n)$ при некотором $N \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$ и

$$f_{k,j}(\varrho) = \frac{2^{1-k}\Gamma(n/2)\sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2+k)} \int_0^\varrho \mathfrak{A}_{k,j}(f)(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{(n-3)/2+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt. \quad (27)$$

(iii) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$, $r \in (0, +\infty]$. Тогда $f = 0$ на B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (26) легко выводится с помощью (25), (24) и (17). Предположим теперь, что выполнены условия пункта (ii). Тогда

$$\lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) = O(\lambda^{-N-3})$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ (см. (14)). Отсюда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$ и

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f)(t) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda. \quad (28)$$

Используя [15; гл. 4, теорема 3.10], (28), (12) и формулу обращения для преобразования Фурье, получаем (27). Утверждение (iii) следует из (27) стандартным приемом сглаживания (см. (24), (26) и [4; часть 1, лемма 8.1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положив в (26) $T = \Delta\delta_0$, находим, что

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Delta f) = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))''. \quad (29)$$

Таким образом, $\mathfrak{A}_{k,j}$ обладает трансмутационным свойством (см., например, [19; формула (2.31)]).

Утверждение (iii) леммы 1 позволяет продолжить $\mathfrak{A}_{k,j}$ на пространство $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_{k,j}(f\eta), \psi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R), \quad \psi \in \mathcal{D}(-R, R), \quad (30)$$

где $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ выбирается так, что $\eta = 1$ в $B_{r_0(\psi)+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$. Тогда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ и $\mathfrak{A}_{k,j}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}_{k,j}(f)|_{(-r,r)}$ для всех $r \in (0, R]$.

ТЕОРЕМА 1. При $R \in (0, +\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu = N + n + k + 2$ имеют место следующие утверждения.

- (i) Если $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ и $r(T) < R$, то (26) справедливо на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$.
- (ii) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.
- (iii) Если $f \in C^{\nu}_{k,j}(B_R)$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C^N_{\natural}(-R, R)$ и (27) выполнено при $\varrho \in (0, R)$.
- (iv) Отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ непрерывно из $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ и из $C^{\nu}_{k,j}(B_R)$ в $C^N_{\natural}(-R, R)$.
- (v) При $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,\mu,k,j}) = u_{\lambda,\mu}, \quad \text{где } u_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \frac{(it)^{\mu} e^{i\lambda t} + (-it)^{\mu} e^{-i\lambda t}}{2}, & \lambda \neq 0, \\ (-1)^{\mu} t^{2\mu}, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение $\mathfrak{A}_{k,j}$ на $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и лемма 1 влекут (i)–(iii). В (iv) предположим сначала, что $f_q \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $q = 1, 2, \dots$, и $f_q \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(B_R)$ при $q \rightarrow +\infty$. Возьмем $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$ и выберем $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ так, что $\eta = 1$ в $B_{r_0(\psi)+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$. Положим $\eta_{\lambda}(x) = \overline{\Phi_{\lambda,0,k,j}(x)}\eta(x)$. Тогда интеграл

$$\frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^{\infty} \lambda^{n+2k-1} \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda t) dt \eta_{\lambda}(x) d\lambda$$

сходится в $\mathcal{D}(B_R)$ (см. (13)). Обозначая его значение через $\varphi(x)$, имеем

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f_q), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^{\infty} \lambda^{n+2k-1} \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda t) dt \langle f_q, \eta_{\lambda} \rangle d\lambda = \langle f_q, \varphi \rangle,$$

откуда $\mathfrak{A}_{k,j}(f_q) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(-R, R)$. Пусть теперь $f_q \in C_{k,j}^\nu(B_R)$, $q = 1, 2, \dots$, и $f_q \rightarrow 0$ в $C^\nu(B_R)$. Зафиксируем $r \in (0, R)$. Снова выберем $\eta \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(B_R)$ такую, что $\eta = 1$ в $B_{r+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r)$. Используя (28), (11) и (13), получаем $\|\mathfrak{A}_{k,j}(\eta f_q)\|_{C^N[-r,r]} \leq c\|\eta f_q\|_{C^\nu(E)}$, где $E = \text{supp } \eta$ и константа $c > 0$ не зависит от q . В силу этого и утверждения (ii) получаем, что $\lim_{q \rightarrow +\infty} \|\mathfrak{A}_{k,j}(f_q)\|_{C^N[-r,r]} = 0$. Таким образом, $\mathfrak{A}_{k,j}(f_q) \rightarrow 0$ в $C^N(-R, R)$ и (iv) установлено. Далее, благодаря (30), (27) и (12),

$$\int_0^\varrho (\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,0,k,j})(t) - \cos(\lambda t))(\varrho^2 - t^2)^{(n-3)/2+k} dt = 0$$

для всех $\varrho \in (0, R)$. Поэтому $\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,0,k,j})(t) = \cos(\lambda t)$, $t \in (-R, R)$ (см., например, [20; гл. 1, доказательство теоремы 2.6]). Дифференцируя последнее равенство по λ , приходим к (v).

Из утверждения (ii) теоремы 1 видно, что отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ инъективно. Наша дальнейшая цель – найти обратный оператор $\mathfrak{A}_{k,j}^{-1}$. Для $F \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ положим

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F), w \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F}(\lambda) \mathcal{F}_j^k(\overline{(\overline{w})_{k,j}(\varrho)} Y_j^k(\sigma))(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F}(\lambda) \langle w, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle d\lambda, \quad w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя (11), (13) и теорему Винера–Пэли, делаем вывод, что $\mathfrak{B}_{k,j}(F) \in \mathcal{D}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и отображение $\mathfrak{B}_{k,j}: \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathcal{D}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ является непрерывным.

ЛЕММА 2. (i) При $F \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\mathfrak{B}_{k,j}(F) * T = \mathfrak{B}_{k,j}(F * \Lambda(T)). \quad (33)$$

(ii) Пусть $F \in (\mathcal{E}'_{\mathfrak{h}} \cap C^s)(\mathbb{R}^1)$ для некоторого $s \geq 2$. Тогда $\mathfrak{B}_{k,j}(F) \in C_{k,j}^{s+k-2}(\mathbb{R}^n)$ и

$$(\mathfrak{B}_{k,j}(F))(x) = \frac{2^{1-k} \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi} \Gamma((n-1)/2 + k)} \int_0^\varrho F(t) \frac{(\varrho^2 - t^2)^{(n-3)/2+k}}{\varrho^{n+k-2}} dt Y_j^k(\sigma). \quad (34)$$

(iii) Пусть $F \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$ и $r \in (0, +\infty]$. Тогда $F = 0$ на $(-r, r)$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{B}_{k,j}(F) = 0$ в B_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Учитывая (24), (11) и (16), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F) * T, w \rangle &= \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F), w * T \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F}(\lambda) \langle w, \Phi_{\lambda,0,k,j} * T \rangle d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F}(\lambda) \widehat{\Lambda(T)}(\lambda) \langle w, \Phi_{\lambda,0,k,j} \rangle d\lambda = \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F * \Lambda(T)), w \rangle, \end{aligned}$$

что доказывает (33). Для проверки (ii) заметим, что при $F \in (\mathcal{E}'_{\mathfrak{h}} \cap C^s)(\mathbb{R}^1)$, $s \geq 2$,

$$\mathfrak{B}_{k,j}(F)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{F}(\lambda) \Phi_{\lambda,0,k,j}(x) d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (35)$$

(см. (32) и (13)). Теперь, применяя (12) и формулу обращения для косинус-преобразования Фурье, приходим к (ii). Утверждение (iii) следует из (ii) посредством сглаживания (см. (24) и (33)).

Ввиду утверждения (iii) леммы 2 отображение $\mathfrak{B}_{k,j}$ можно продолжить на пространство $\mathcal{D}'_k(-R, R)$, $R \in (0, +\infty]$, с помощью равенства

$$\langle \mathfrak{B}_{k,j}(F), w \rangle = \langle \mathfrak{B}_{k,j}(F\eta), w \rangle, \quad F \in \mathcal{D}'_k(-R, R), \quad w \in \mathcal{D}(B_R), \quad (36)$$

где $\eta \in \mathcal{D}_k(-R, R)$ и $\eta = 1$ на $(-r_0(w) - \varepsilon, r_0(w) + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r_0(w))$. При этом $\mathfrak{B}_{k,j}(F) \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и $\mathfrak{B}_{k,j}(F|_{(-r,r)}) = \mathfrak{B}_{k,j}(F)|_{B_r}$ для всех $r \in (0, R]$.

ТЕОРЕМА 2. Для $R \in (0, +\infty]$, $s \in \{2, 3, \dots\}$ справедливы следующие утверждения.

- (i) Пусть $F \in \mathcal{D}'_k(-R, R)$, $T \in \mathcal{E}'_k(\mathbb{R}^n)$ и $r(T) < R$. Тогда (33) выполнено в $B_{R-r(T)}$.
- (ii) Пусть $F \in \mathcal{D}'_k(-R, R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $F = 0$ на $(-r, r)$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{B}_{k,j}(F) = 0$ в B_r .
- (iii) Если $F \in C^{s,k}_k(-R, R)$, то $\mathfrak{B}_{k,j}(F) \in C^{s+k-2}_{k,j}(B_R)$ и (34) справедливо в $B_R \setminus \{0\}$.
- (iv) Отображение $\mathfrak{B}_{k,j}$ непрерывно из $\mathcal{D}'_k(-R, R)$ в $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и из $C^{s,k}_k(-R, R)$ в $C^{s+k-2}_{k,j}(B_R)$.
- (v) Если $F \in \mathcal{D}'_k(-R, R)$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(\mathfrak{B}_{k,j}(F)) = F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается незначительной модификацией рассуждений из теоремы 1 (см. лемму 2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $R \in (0, +\infty]$ преобразование $\mathfrak{A}_{k,j}$ устанавливает гомеоморфизм между:

- (i) $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и $\mathcal{D}'_k(-R, R)$;
- (ii) $C^{s,k}_{k,j}(B_R)$ и $C^{s,k}_k(-R, R)$.

Кроме того, $\mathfrak{A}_{k,j}^{-1} = \mathfrak{B}_{k,j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно вытекает из теорем 1 и 2.

§ 3. Вспомогательные результаты о полноте некоторых систем функций

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$ и $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$. По теореме Винера–Пэли [6; теорема 7.3.1]

$$|\widehat{T}(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(T)|\text{Im } z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (37)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ не зависят от z .

Пусть $\mathcal{Z}(\widehat{T}) \neq \emptyset$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T) - 1\}$, где $m(\lambda, T)$ – кратность нуля λ функции $\widehat{T}$. Из (37) и теоремы Винера–Пэли следует, что существует $T^{\lambda, \eta} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ такое, что

$$\text{supp } T^{\lambda, \eta} \subset [-r(T), r(T)], \quad \widehat{T}^{\lambda, \eta}(z)(z - \lambda)^{\eta+1} = \widehat{T}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (38)$$

Из (38) находим

$$\left(-i\frac{d}{dt} - \lambda\right)^{\eta+1} T^{\lambda,\eta} = T. \quad (39)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $T \in (\mathcal{E}' \cap L^1)(\mathbb{R}^1)$, $r(T) > 0$, $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$, $f \in L^1[-r(T), r(T)]$ и

$$\langle T^{\lambda,\eta}, f \rangle = 0 \text{ для всех } \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}), \quad \eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T) - 1\}. \quad (40)$$

Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $r = r(T)$. Рассмотрим целую функцию

$$u(z) = e^{-irz} \int_{-r}^r f(x) \int_{-r}^x T(t) e^{iz(x-t)} dt dx, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (41)$$

Продолжая $f(x)$ нулем при $x \in \mathbb{R}^1 \setminus [-r, r]$, имеем

$$\begin{aligned} u(z) &= e^{-irz} \int_{-r}^r f(-x) \int_{-r}^{-x} T(t) e^{-iz(x+t)} dt dx \\ &= e^{-irz} \widehat{f}(-z) \widehat{T}(z) - e^{-irz} \int_{-r}^r f(-x) \int_{-x}^r T(t) e^{-iz(x+t)} dt dx \\ &= e^{-irz} \widehat{f}(-z) \widehat{T}(z) - e^{-2irz} v(z), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$v(z) = e^{irz} \int_{-r}^r f(-x) \int_{-r}^x T(-t) e^{iz(t-x)} dt dx. \quad (43)$$

Равенства (41) и (43) показывают, что

$$|u(z)| + |v(z)| \leq c_1 e^{r|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (44)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от z . Используя (39), получаем

$$T^{\lambda,\eta}(t) = \frac{i^{\eta+1}}{\eta!} \int_{-r}^t T(\xi) (t - \xi)^\eta e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (45)$$

Тогда из (40) и (41) имеем $u^{(\eta)}(\lambda) = 0$ для всех λ, η . Следовательно, функции $u_1 = u/\widehat{T}$ и $u_2 = v/\widehat{T}$ являются целыми (см. (42)). Соотношение (42) дает

$$u_1(z) e^{irz} + u_2(z) e^{-irz} = \widehat{f}(-z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (46)$$

Согласно [7; следствие 15.22], (44) и (37), для любого $\varepsilon > 0$ существует $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$ такая, что

$$|u_1(z)| + |u_2(z)| \leq c_2 e^{\varepsilon|z|} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (47)$$

Далее, пусть

$$\alpha \in (0, r), \quad \beta \in \left(0, \frac{r - \alpha}{2}\right),$$

$$E_{1,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : |z - r| \leq \beta\}, \quad E_{2,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : |z + r| \leq \beta\}.$$

Из оценки (47) следует существование мер μ_1 и μ_2 на $\mathbb{C}$ таких, что $\text{supp } \mu_j \subset E_{j,\beta}$, $j \in \{1, 2\}$, и $\mu_1(e^{-i\zeta(\cdot-r)}) + \mu_2(e^{-i\zeta(\cdot+r)}) = \widehat{f}(-\zeta)$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$ (см. [6; теорема 15.1.5] и (46)). Поскольку ζ является произвольным,

$$\mu_1(w(\cdot - r)) + \mu_2(w(\cdot + r)) = \int_{-r}^r f(-x)w(x) dx$$

для любой целой функции $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\left| \int_{-r}^r f(-x)w(x) dx \right| \leq c_3 \max_{z \in E_\beta} |w(z)|, \quad (48)$$

где $E_\beta = E_{1,\beta} \cup E_{2,\beta}$ и $c_3 > 0$ не зависит от w . Теперь определим

$$\varphi_k(z) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-(kz)^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (49)$$

Тогда $\varphi_k(z) \geq 0$ для $z \in \mathbb{R}^1$ и

$$\int_{\mathbb{R}^1} \varphi_k(t) dt = 1.$$

Полагая $w(z) = \varphi_k(z - \gamma)$, $\gamma \in (-\alpha, \alpha)$, из (48) и (49) видим, что

$$|(f * \varphi_k)(\gamma)| \leq c_3 \exp\left(-\frac{k^2}{4}((r - \alpha)^2 - 4\beta^2)\right),$$

где $c_3 > 0$ не зависит от k . Устремив k к бесконечности, отсюда получаем, что $f = 0$ на $(-\alpha, \alpha)$. В силу произвольности $\alpha \in (0, r)$ это завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $\text{supp } T \subset [-r(T), r(T)]$ и $\mathcal{Z}(\widehat{T}) \neq \emptyset$. Пусть также $R > r(T)$, $f \in \mathcal{D}'(-R, R)$ и

$$f * T^{\lambda, m(\lambda, T)-1} = 0 \quad \text{в } (-R + r(T), R - r(T)) \quad \text{для всех } \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}). \quad (50)$$

Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r(T) = 0$ утверждение следует из (38) и [4; часть 3, теорема 1.7]. Пусть $r(T) > 0$. Из (50) и (39) получаем, что $f * T^{\lambda, \eta} = 0$ при всех $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, T) - 1\}$. Кроме того, в рассматриваемом случае множество $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ является бесконечным и существуют многочлены p_1, p_2 такие, что $\mathcal{Z}(p_1) \cap \mathcal{Z}(p_2) = \emptyset$ и

$$p_1\left(-i\frac{d}{dt}\right)U_1 = p_2\left(-i\frac{d}{dt}\right)U_2 = T$$

для некоторых $U_1, U_2 \in (\mathcal{E}' \cap L^1)(\mathbb{R}^1)$. Пусть $j \in \{1, 2\}$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{U}_j)$, $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, U_j) - 1\}$. Тогда $r(U_j) = r(T)$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $m(\lambda, U_j) \leq m(\lambda, T)$ и

$$p_j\left(-i\frac{d}{dt}\right)U_j^{\lambda, \eta} = T^{\lambda, \eta}.$$

Таким образом,

$$p_j \left(-i \frac{d}{dt} \right) (f * \varphi * U_j^{\lambda, \eta}) = 0$$

для любой $\varphi \in \mathcal{D}(-R + r(T), R - r(T))$. В силу произвольности φ по теореме 3

$$p_j \left(-i \frac{d}{dt} \right) f = 0 \quad \text{на } (-R, R).$$

Поскольку $\mathcal{Z}(p_1) \cap \mathcal{Z}(p_2) = \emptyset$, отсюда следует требуемое утверждение.

До конца этого параграфа мы предполагаем, что $n \geq 1$, $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$ и $\mathcal{Z}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Используя теорему Винера–Пэли, для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})$ определим $T_{(\lambda)} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\tilde{T}_{(\lambda)}(z) = \begin{cases} \frac{\tilde{T}(z)}{(z^2 - \lambda^2)^{m(\lambda, T)}}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ \frac{\tilde{T}(z)}{z^{m(0, T)}}, & \text{если } \lambda = 0 \in \mathcal{Z}(\tilde{T}), \end{cases} \quad (51)$$

где $m(\lambda, T)$ – кратность нуля λ функции $\tilde{T}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $r(T) < R \leq +\infty$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и

$$f * T_{(\lambda)} = 0 \quad \text{в } B_{R-r(T)} \quad \text{для всех } \lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T}). \quad (52)$$

Тогда $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n = 1$. Тогда из (51), (52) и (38) следует равенство (50). Используя следствие 2, получаем $f = 0$. В случае $n \geq 2$ достаточно доказать, что $f^{k,j} = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ (см. (7)). Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\tilde{T})$, то

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f^{k,j}) * \Lambda(T_{(\lambda)}) = \mathfrak{A}_{k,j}(f^{k,j} * T_{(\lambda)}) = 0$$

ввиду (52), (6) и теоремы 1, (i). Осталось применить следствие 2 и утверждение (ii) теоремы 1.

§ 4. Системы уравнений свертки на ограниченных областях в $\mathbb{R}^n$

Пусть $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ – совокупность всех семейств $\mathcal{T} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A – фиксированное непустое множество индексов и $T_\alpha \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ при всех $\alpha \in A$. Для $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{T}} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(\tilde{T}_\alpha), \quad \Lambda(\mathcal{T}) = \{\Lambda(T_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

(см. (24)). Отметим, что $\Lambda(\mathcal{T}) \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^1)$. Пусть также $C_{\mathcal{T}}^\infty(B_R) = (\mathcal{D}'_{\mathcal{T}} \cap C^\infty)(B_R)$, где класс $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R)$ определяется равенством (2) при любом $n \geq 1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \geq 2$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$ и $r(T_\alpha) < R \leq +\infty$ для любого $\alpha \in A$. Тогда при фиксированных $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{0\}$;
- (ii) $(\mathcal{D}'_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R) = \{0\}$;
- (iii) $(\mathcal{D}'_{\Lambda(\mathcal{T})} \cap \mathcal{D}'_{\natural})(-R, R) = \{0\}$.

То же самое верно, если множества $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R)$, $(\mathcal{D}'_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$, $(\mathcal{D}'_{\Lambda(\mathcal{T})} \cap \mathcal{D}'_{\natural})(-R, R)$ заменить на $C^{\infty}_{\mathcal{T}}(B_R)$, $(C^{\infty}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$, $(C^{\infty}_{\Lambda(\mathcal{T})} \cap \mathcal{D}'_{\natural})(-R, R)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (i) $\implies$ (ii) очевидна. Далее, из утверждения (i) теоремы 2 и следствия 1 видно, что (ii) влечет (iii). Пусть теперь выполнено (iii) и предположим, что $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R)$. В силу (8) и теоремы 1, (i)

$$f^{k,j} \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R), \quad \mathfrak{A}_{k,j}(f^{k,j}) \in (\mathcal{D}'_{\Lambda(\mathcal{T})} \cap \mathcal{D}'_{\natural})(-R, R)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. В сочетании с (iii) и следствием 1 это дает $f^{k,j} = 0$ для всех k, j . Поэтому $f = 0$ и (i) является следствием (iii). Чтобы доказать тот же результат для классов $C^{\infty}_{\mathcal{T}}(B_R)$, $(C^{\infty}_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{D}'_{k,j})(B_R)$ и $(C^{\infty}_{\Lambda(\mathcal{T})} \cap \mathcal{D}'_{\natural})(-R, R)$, достаточно повторить рассуждения выше с использованием утверждения (i) теоремы 2 и следствия 1.

Далее, для любого семейства $\mathcal{T} = \{T_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ распределений класса $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ положим

$$r_*(\mathcal{T}) = \inf_{\alpha \in A} r(T_{\alpha}), \quad r^*(\mathcal{T}) = \sup_{\alpha \in A} r(T_{\alpha}), \quad R_{\mathcal{T}} = r_*(\mathcal{T}) + r^*(\mathcal{T}).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}} = \emptyset$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) если $r_*(\mathcal{T}) + r(T_{\alpha}) < R \leq +\infty$ для всех $\alpha \in A$, то $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{0\}$;
- (ii) если $r(T_{\alpha}) < r^*(\mathcal{T}) < +\infty$ для всех $\alpha \in A$ и $R_{\mathcal{T}} \leq R \leq +\infty$, то $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(B_R) = \{0\}$.

Кроме того, при $n = 1$ утверждения (i) и (ii) верны для любого семейства $\mathcal{T} = \{T_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ такого, что $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(\widehat{T}_{\alpha}) = \emptyset$.

Отметим, что условия на R в теореме 6 в общем случае ослабить нельзя (см. [4; часть 2, теорема 1.6 (5)]).

Для доказательства теоремы 6 потребуется следующая

ЛЕММА 3. Пусть U и V — ненулевые распределения класса $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$,

$$\text{supp } U \subset [-r(U), r(U)], \quad \text{supp } V \subset [-r(V), r(V)], \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{U}) \setminus \mathcal{Z}(\widehat{V}).$$

Предположим, что $R > r(U) + r(V)$, $f \in \mathcal{D}'(-R, R)$, $f * U = 0$ на $(-R + r(U), R - r(U))$ и $f * V = 0$ на $(-R + r(V), R - r(V))$.

Тогда $f * U^{\lambda, \eta} = 0$ для любого $\eta \in \{0, \dots, m(\lambda, U) - 1\}$. В частности, $f = 0$, если $\mathcal{Z}(\widehat{U}) \cap \mathcal{Z}(\widehat{V}) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = f * U^{\lambda, \eta}$. Из (39) и условия на V получаем, что $F * V = 0$ и $(-i \frac{d}{dt} - \lambda)^{\eta+1} F = 0$ в $(-R + r(U), R - r(U))$. Поскольку $\lambda \notin \mathcal{Z}(\widehat{V})$, то $F = 0$ (см., например, [4; часть 3, теорема 1.7]). Более того, если $\mathcal{Z}(\widehat{U}) \cap \mathcal{Z}(\widehat{V}) = \emptyset$, то $f = 0$ ввиду следствия 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Сначала рассмотрим случай $n = 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{T}$ состоит из ненулевых распределений и $\mathcal{Z}(\hat{T}_\alpha) \neq \emptyset$ для любого α . Если $r_*(\mathcal{T}) = r(T)$ при некотором $T \in \mathcal{T}$, то требуемые утверждения очевидны в силу леммы 3 и следствия 2. Предположим теперь, что $r_*(\mathcal{T}) < r(T_\alpha)$ для всех α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon = \{\alpha \in A : r(T_\alpha) < r_*(\mathcal{T}) + \varepsilon\}$ непусто. Сначала рассмотрим случай, когда $r^*(\mathcal{T}) = r(T)$ при некотором $T \in \mathcal{T}$. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$, $\varepsilon = R - R_{\mathcal{T}}$. Докажем, что

$$f * T^{\lambda, m(\lambda, T) - 1} = 0. \quad (53)$$

Если существует $\alpha \in A_\varepsilon$ такое, что $\lambda \notin \mathcal{Z}(\hat{T}_\alpha)$, то это следует из леммы 3 при $U = T$ и $V = T_\alpha$. В противном случае $\lambda \in \bigcap_{\alpha \in A_\varepsilon} \mathcal{Z}(\hat{T}_\alpha)$. Поскольку $\mathcal{Z}(\mathcal{T}) = \emptyset$, существует $\beta \in A$ такое, что $\lambda \notin \mathcal{Z}(\hat{T}_\beta)$. Пусть $\gamma \in A_\varepsilon$ и $\eta = m(\lambda, T_\gamma) - 1$. Применяя лемму 3 при $U = T_\gamma$, $V = T_\beta$, получаем, что $f * T_\gamma^{\lambda, \eta} = 0$. Заметим, что $\lambda \notin \mathcal{Z}(\hat{T}_\gamma^{\lambda, \eta})$. Используя теперь лемму 3 при $U = T$ и $V = T_\gamma^{\lambda, \eta}$, приходим к (53). Утверждение (i) для $n = 1$ теперь получаем из следствия 2.

Для доказательства (ii) в одномерном случае выберем произвольное $T \in \mathcal{T}$ и установим (53) для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$. Пусть $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T})$. Если существует $\beta \in A$ такое, что $r(T_\beta) \leq r(T)$ и $\lambda \notin \mathcal{Z}(\hat{T}_\beta)$, то рассуждение выше показывает, что выполнено (53). Остается рассмотреть случай, когда $\lambda \in \mathcal{Z}(\hat{T}_\alpha)$ для любого $\alpha \in A$ такого, что $r(T_\alpha) \leq r(T)$. Так как $\mathcal{Z}(\mathcal{T}) = \emptyset$, имеем $\lambda \notin \mathcal{Z}(\hat{T}_\beta)$ при некотором $\beta \in A$ таком, что $r(T_\beta) > r(T)$. Полагая $\varepsilon = R - r(T_\beta)$, заключаем, что $f * T_\gamma^{\lambda, \eta} = 0$ при некотором $\gamma \in A_\varepsilon$, $\eta = m(\lambda, T_\gamma) - 1$ (см. лемму 3 при $U = T_\gamma$, $V = T_\beta$). Снова используя лемму 3 при $U = T$ и $V = T_\gamma^{\lambda, \eta}$, получаем (53). Из этого результата и следствия 2 получаем (ii). При $n \geq 2$ утверждения (i) и (ii) следуют из одномерного случая и теоремы 5.

Как уже отмечалось, для случая, когда существует $\alpha_0 \in A$ такое, что T_{α_0} является гиперболическим, $R > r(T_{\alpha_0}) + r^*(\mathcal{T})$ и $\{z \in \mathbb{C}^n : \hat{T}_\alpha(z) = 0 \forall \alpha \in A\} = \emptyset$, утверждение (i) теоремы 6 было доказано другими методами К. А. Беренштейном и Р. Гэем [5; теорема 12]. Отметим также, что теорема 6 усиливает второе утверждение в теореме 4.1 из [4; часть 3].

Далее, пусть $M(n)$ – группа движений в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для любых $\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in M(n)$ определим распределение $g\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\langle g\psi, f(x) \rangle = \langle \psi, f(g^{-1}x) \rangle, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Если $r(\psi) < R$, положим $M_{\psi, R} = \{g \in M(n) : \text{supp } g\psi \subset B_R\}$.

Пусть $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $r(\psi_\alpha) < R \leq +\infty$ для всех $\alpha \in A$ (здесь, как и выше, A – некоторое непустое множество индексов). Будем говорить, что Ψ имеет свойство Помпейю в шаре B_R , если для любой $f \in C^\infty(B_R)$ из условия

$$\langle g\psi_\alpha, f \rangle = 0 \quad \text{при всех } \alpha \in A \quad \text{и всех } g \in M_{\psi_\alpha, R} \quad (54)$$

следует, что $f = 0$. Наиболее интересный случай (соответствующий классической проблеме Помпейю) возникает, когда семейство Ψ состоит из единственного распределения ψ , совпадающего с характеристической функцией некоторого компакта E в $\mathbb{R}^n$. В этом случае E называется множеством Помпейю в шаре B_R , если соответствующее Ψ имеет свойство Помпейю в B_R .

Одним из важнейших приложений теоремы 6 является следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n \geq 2$ и $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $R_\Psi < R$ для некоторого $R > 0$.

Тогда Ψ имеет свойство Помпейю в шаре B_R тогда и только тогда, когда оно имеет свойство Помпейю в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ имеет свойство Помпейю в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\varepsilon = R - \inf_\alpha r(\psi_\alpha) - \sup_\alpha r(\psi_\alpha)$. Без ограничения общности можно считать, что $\text{supp } \psi_\alpha \subset \overline{B_{r(\psi_\alpha)}}$. Положим

$$\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} = \{h \in M(n) : h\overline{B_{r(\psi_\alpha)}} \subset B_{r(\psi_\alpha)+\varepsilon/3}\}.$$

Для $h \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ определим $T_{\alpha,h} \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R}^n)$ равенством $T_{\alpha,h} = (h\psi_j)^{0,1}$ (см. (6)). Заметим, что $\text{supp } T_{\alpha,h} \subset B_{r(\psi_\alpha)+\varepsilon/3}$. Предположим, что существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\widetilde{T_{\alpha,h}}(\lambda) = 0$ для всех α и всех $h \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Тогда функция $u = \Phi_{\lambda,0,0,1}$ удовлетворяет уравнению $u * T_{\alpha,h} = 0$ при всех α и всех $h \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ (см. (16)). Так как u является вещественно-аналитической, то $u * (g\psi_\alpha)^{0,1} = 0$ для всех α и всех $g \in M(n)$. Учитывая, что u является радиальной, получаем, что

$$\langle g\psi_\alpha, u \rangle = \langle (g\psi_\alpha)^{0,1}, u \rangle = 0$$

для всех $g \in M(n)$, $\alpha \in A$. Это противоречит условию на Ψ . Таким образом, $\bigcap_\alpha \bigcap_{h \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}} \mathcal{Z}(T_{\alpha,h}) = \emptyset$. Предположим теперь, что $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнено (54). Тогда $f * T_{\alpha,h} = 0$ для всех α и всех $h \in \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$. Из теоремы 6 следует, что Ψ имеет свойство Помпейю в B_R . Обратное утверждение тривиально.

Из теоремы 7 непосредственно получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть E – непустое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть r_E – радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$, содержащего E .

Тогда если E является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$ и $R > 2r_E$, то E является множеством Помпейю в шаре B_R .

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ из неравенства $R > (2 - \varepsilon)r_E$ не следует, вообще говоря, что E – множество Помпейю в B_R (см. [4; часть 4, теорема 1.6]). Аналоги следствия 3 при различных дополнительных ограничениях, связанных с регулярностью границы множества E , были получены в [13] и [4; часть 4].

§ 5. Функции $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}$

Пусть ${}_1F_1(a; b; \zeta)$ ($a, \zeta \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$) – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [17; гл. 6]. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta, p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(n, p, q)\}$ и $z = \varrho\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ определим

$$\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z) = \sqrt{\omega_{2n-1}} \phi_{\lambda,\eta,p,q}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma), \quad (55)$$

где

$$\phi_{\lambda,\eta,p,q}(\varrho) = \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^\infty \left(\varrho^{p+q} e_1^{-\varrho^2/4} F_1 \left(p + \frac{n-\zeta^2}{2}; n+p+q; \frac{\varrho^2}{2} \right) \right) \Big|_{\zeta=\lambda}, \quad (56)$$

причем $\varkappa = \eta$, если $\lambda \neq 0$, и $\varkappa = 2\eta$, если $\lambda = 0$. Легко видеть, что $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}$ допускает непрерывное продолжение в точку нуль. Далее считаем, что $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l}$ определена в нуле по непрерывности. Тогда $\phi_{\lambda,\eta,p,q,l} \in \text{RA}(\mathbb{C}^n)$.

Для любого $s \in \mathbb{Z}$ введем дифференциальные операторы $D_i(s), i = 1, 2$, действующие следующим образом:

$$(D_i(s)\varphi)(\varrho) = \varrho^s e^{(-1)^{(i+1)}\varrho^2/4} \frac{d}{d\varrho} (\varrho^{-s} e^{(-1)^i \varrho^2/4} \varphi(\varrho)), \quad \varphi \in C^1(0, +\infty).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $s = p + q$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_1(s)\phi_{\lambda,0,p,q} &= \frac{(n+2q+\lambda^2)}{-2(n+s)} \phi_{\lambda,0,p,q+1}, \\ D_2(s)\phi_{\lambda,0,p,q} &= \frac{(n+2p-\lambda^2)}{2(n+s)} \phi_{\lambda,0,p+1,q}, \end{aligned} \quad p, q \in \mathbb{Z}_+; \quad (57)$$

$$D_1(2-s-2n)\phi_{\lambda,0,p,q} = 2(n+s-1)\phi_{\lambda,0,p-1,q}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Z}_+; \quad (58)$$

$$D_2(2-s-2n)\phi_{\lambda,0,p,q} = 2(n+s-1)\phi_{\lambda,0,p,q-1}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу дифференцирования для функции ${}_1F_1$ (см. [17; п. 6.4, формула (8)]. Учитывая связь между смежными вырожденными гипергеометрическими функциями (см. [17; п. 6.4, формула (4) и п. 6.4, формула (5)]), приходим к (57)–(59).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеет место равенство

$$(\mathfrak{L} - \lambda^2 \text{Id})\phi_{\lambda,0,p,q,l} = 0. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (22) уравнение

$$(\mathfrak{L} - \lambda^2 \text{Id})(f(\varrho)S_l^{p,q}(\sigma)) = 0$$

можно переписать в виде

$$f''(\varrho) + \frac{f'(\varrho)}{\varrho}(2n-1) - \frac{f(\varrho)}{\varrho^2} \left((p+q)(2n+p+q-2) + (p-q-\lambda^2)\varrho^2 + \frac{1}{4}\varrho^4 \right) = 0.$$

Делая замену $f(\varrho) = \varrho^{p+q} e^{-\varrho^2/4} u(\varrho^2/2)$, приходим к вырожденному гипергеометрическому уравнению (см. [17; п. 6.1, формула (2)]). Это дает (60).

Напомним теперь разложение Трикоми ${}_1F_1(a; b; \zeta)$ в ряд по функциям Бесселя (см. [17; п. 6.12, формула (11)]). Положим

$$A_k(\mu, \lambda) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^k \left(e^{2\mu\zeta} (1-\zeta)^{\mu-\lambda} (1+\zeta)^{-\mu-\lambda} \right) \Big|_{\zeta=0}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Коэффициенты $A_k(\mu, \lambda)$ обладают следующими свойствами:

$$1) A_0(\mu, \lambda) = 1, A_1(\mu, \lambda) = 0, A_2(\mu, \lambda) = \lambda,$$

$$(k+1)A_{k+1}(\mu, \lambda) = (k+2\lambda-1)A_{k-1}(\mu, \lambda) - 2\mu A_{k-2}(\mu, \lambda) \quad \text{при } k \geq 2; \quad (61)$$

2) если $a_{m,k}(\lambda) = \frac{1}{m!} \left(\frac{d}{d\mu} \right)^m (A_k(\mu, \lambda)) \Big|_{\mu=0}$, то

$$A_k(\mu, \lambda) = \sum_{m=0}^{[k/3]} a_{m,k}(\lambda) \mu^m; \quad (62)$$

3) $A_k(-\mu, \lambda) = (-1)^k A_k(\mu, \lambda)$.

Формула Трикоми имеет вид

$$e^{-\zeta/2} {}_1F_1(a; b; \zeta) = \Gamma(b)(c\zeta)^{(1-b)/2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(c, \frac{b}{2}\right) \left(\frac{\zeta}{4c}\right)^{k/2} J_{k+b-1}(2\sqrt{c\zeta}), \quad (63)$$

где

$$c = \frac{b}{2} - a. \quad (64)$$

Мы используем (63) для представления ${}_1F_1(a; b; \zeta)$ в виде одномерного преобразования Фурье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\operatorname{Re} b > 1/2$ и $x > 0$. Тогда

$$x^{b-1} e^{-x/2} {}_1F_1(a; b; x) = \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}t) k_b(x, t) dt, \quad (65)$$

где c определяется равенством (64) и

$$\begin{aligned} k_b(x, t) &= \frac{\Gamma(b)}{\sqrt{\pi} 2^{2b-3}} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b+k-1/2) 8^k} \sum_{m=0}^{[k/3]} (-1)^m a_{m,k} \left(\frac{b}{2} \right) \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} ((4x-t^2)^{k-3/2+b}). \end{aligned} \quad (66)$$

При этом $k_b(x, t)(4x-t^2)^{-b+3/2}$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменных x, t на $\mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}} ((4x-t^2)^{k-3/2+b}) = \sum_{j=0}^m c_{j,m,k}(b) t^{2j} (4x-t^2)^{k-3/2+b-m-j},$$

где

$$|c_{j,m,k}(b)| \leq (2(k+|b|+3m+2))^{2m}, \quad 0 \leq j \leq m. \quad (67)$$

Кроме того, используя индукцию по k , из (61) и (62) легко получить неравенство

$$\left| a_{m,k} \left(\frac{b}{2} \right) \right| \leq (|b|+2)^k, \quad 0 \leq m \leq \left[\frac{k}{3} \right]. \quad (68)$$

Оценки (67) и (68) показывают, что функция (66) определена корректно и

$$k_b(x, t)(4x-t^2)^{-b+3/2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Далее, ввиду (63) и представления Пуассона для функций Бесселя (см. [17; п. 7.12, формула (8)]),

$$\begin{aligned} & x^{b-1} e^{-x/2} {}_1F_1(a; b; x) \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\sqrt{\pi} 2^{2b-3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(c, b/2)}{\Gamma(b+k-1/2)} \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}t) (4x-t^2)^{k-3/2+b} dt. \end{aligned} \quad (69)$$

Повторное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} & c^j \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}t) (4x-t^2)^{k-3/2+b} dt \\ &= (-1)^j \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}t) \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} ((4x-t^2)^{k-3/2+b}) dt \end{aligned}$$

при $0 \leq j \leq k/2$. Отсюда (см. (62))

$$\begin{aligned} & A_k\left(c, \frac{b}{2}\right) \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\cos(\sqrt{c}t)}{(4x-t^2)^{3/2-k-b}} dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{c}t) \sum_{m=0}^{[k/3]} (-1)^m a_{m,k} \left(\frac{b}{2}\right) \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} ((4x-t^2)^{k-3/2+b}) dt. \end{aligned} \quad (70)$$

Подставляя (70) в (69) и принимая во внимание (67) и (68), получаем интегральное представление (65).

СЛЕДСТВИЕ 4. *Справедливо интегральное представление*

$$\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{2n-1}}} \int_0^{\varrho} \cos(\lambda t) \mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t) dt, \quad (71)$$

где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, \cdot) \in L^1[0, \varrho]$. При этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{n,p,p}(\varrho, t) &= 4^{n+2p-1} \sqrt{\omega_{2n-1}} \frac{(\varrho^2 - t^2)^{n+2p-3/2}}{\varrho^{2n+2p-2}} \\ &\quad \times \left(k_{n+2p}(u, v) (4u - v^2)^{3/2-n-2p} \right) \Big|_{u=\varrho^2/2, v=\sqrt{2}t}, \end{aligned}$$

где $k_{n+2p}(u, v)$ определяется равенством (66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (56) и предложению 4

$$\phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{n+b-2}} \int_0^{\varrho} \cos(\sqrt{\lambda^2 + q - pt}) (\varrho^2 - t^2)^{n+p+q-3/2} \mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho, t) dt, \quad (72)$$

где

$$\mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho, t) = 4^{n+p+q-1} k_{n+p+q}(u, v) (4u - v^2)^{3/2-n-p-q} \Big|_{u=\varrho^2/2, v=\sqrt{2}t}.$$

Используя (72), асимптотику для ${}_1F_1$ (см. [17; п. 6.13, формула (26)]) и теорему Винера–Пэли, мы получаем (71).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $0 < r < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\sup_{z \in \mathcal{B}_r} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \phi_{\lambda, \eta, p, q, l}(z) \right| = O(|\lambda|^{|\alpha|+|\beta|-p-q} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}). \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f(t) = e^{-t/4} {}_1F_1\left(p + \frac{n - \lambda^2}{2}; n + p + q; \frac{t}{2}\right).$$

Индукцией по $|\alpha| + |\beta|$ легко доказать, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \phi_{\lambda, 0, p, q, l}(z) = \sum_{k \geq \max\{0, m/2\}}^{\alpha+|\beta|} f^{(k)}(|z|^2) Q_{2k-m}(z), \quad (74)$$

где $m = |\alpha| + |\beta| - p - q$ и Q_{2k-m} является однородным многочленом в $\mathbb{C}^n$ степени $2k - m$. В силу формулы дифференцирования для ${}_1F_1$ (см. [17; п. 6.4, формула (8)]) мы можем записать (74) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \phi_{\lambda, 0, p, q, l}(z) &= \sum_{k \geq \max\{0, m/2\}}^{\alpha+|\beta|} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{j}{k} \frac{2^j}{4^k} \frac{(p + (n - \lambda^2)/2)_j}{(n + p + q)_j} \\ &\times {}_1F_1\left(p + j + \frac{n - \lambda^2}{2}; n + p + q + j; \frac{|z|^2}{2}\right) Q_{2k-m}(z) e^{-|z|^2/4}. \end{aligned} \quad (75)$$

Предположим, что $|\lambda|^{-1} \leq |z| \leq r$. Тогда из (75) и асимптотики для ${}_1F_1$ (см. [17; п. 6.13, формула (26)]) имеем

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \phi_{\lambda, 0, p, q, l}(z) = O(|\lambda|^{|\alpha|+|\beta|-p-q} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}). \quad (76)$$

Аналогично, при $|z| \leq |\lambda|^{-1}$ соотношение (75) и [17; п. 6.13, формула (15)] дают

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \phi_{\lambda, 0, p, q, l}(z) = O(|\lambda|^{|\alpha|+|\beta|-p-q}). \quad (77)$$

Комбинируя (76) и (77), получаем (73) для $\eta = 0$. Отсюда и из интегральной формулы Коши следует (73) в общем случае.

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\lambda_j = \sqrt{2p + n + 2j}, \quad \mu_j = \frac{2^{1-n-p-q}}{\omega_{2n-1}(n + p + q - 1)!} \binom{n + p + q + j - 1}{n + p + q - 1}. \quad (78)$$

В терминах многочленов Лагерра L_j^α (см. [17; п. 6.9, формула (36)]) имеем

$$\binom{n + p + q + j - 1}{n + p + q - 1} \phi_{\lambda_j, 0, p, q}(\varrho) = \varrho^{p+q} e^{-\varrho^2/4} L_j^{n+p+q-1}\left(\frac{\varrho^2}{2}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Система функций $\{\phi_{\lambda_j, 0, p, q, l}\}_{j=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $L^2_{p, q, l}(\mathbb{C}^n)$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\phi_{\lambda_j, 0, p, q, l}(z)|^2 dm_n(z) = \frac{1}{\mu_j},$$

где $dm_n(z)$ – мера Лебега на $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$g \in L^2((0, +\infty), t^{n+p+q-1} e^{-t} dt), \quad G(z) = \varrho^{p+q} e^{-\varrho^2/4} g\left(\frac{\varrho^2}{2}\right) S_l^{p, q}(\sigma).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} |G(z)|^2 dm_n(z) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \varrho^{2(n+p+q)-1} e^{-\varrho^2/2} \left| g\left(\frac{\varrho^2}{2}\right) \right|^2 |S_l^{p, q}(\sigma)|^2 d\varrho d\omega(\sigma) \\ &= 2^{n+p+q-1} \int_0^\infty t^{n+p+q-1} e^{-t} |g(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Поэтому отображение $g \rightarrow G$ является изоморфизмом пространства $L^2((0, +\infty), (2t)^{n+p+q-1} e^{-t} dt)$ на пространство $L^2_{p, q, l}(\mathbb{C}^n)$. Это завершает доказательство, поскольку многочлены L_j^α , $j \in \mathbb{Z}_+$, образуют ортогональный базис в пространстве $L^2((0, +\infty), t^\alpha e^{-t} dt)$ и

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_j^\alpha(t))^2 dt = \frac{\Gamma(\alpha + j + 1)}{j!}$$

(см. [17; п. 10.12, формула (2)]).

§ 6. Аналоги сферического преобразования

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(n, p, q)\}$. Для любого $f \in \mathcal{E}'_{p, q, l}(\mathbb{C}^n)$ положим

$$\mathcal{F}_l^{p, q}(f)(\lambda) = \langle f, \overline{\phi_{\lambda, 0, p, q, l}} \rangle = \sqrt{\omega_{2n-1}} \langle f, \phi_{\lambda, 0, p, q}(\varrho) \overline{S_l^{p, q}(\sigma)} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (79)$$

Согласно (55) $\mathcal{F}_l^{p, q}(f)$ является четной целой функцией по λ . Если $f \in \mathcal{E}'_{\frac{1}{4}}(\mathbb{C}^n)$, то мы во многих случаях будем писать $\tilde{f}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}_1^{0, 0}(f)(\lambda)$, т.е. $\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \phi_{\lambda, 0, 0, 0, 1} \rangle$. Изучим основные свойства преобразования $\mathcal{F}_l^{p, q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\frac{1}{4}}(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что $R \in (r(T), +\infty]$, $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{B}_R)$ и $\mathfrak{L}f = \lambda^2 f$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда в шаре $\mathcal{B}_{R-r(T)}$

$$f \times T = \tilde{T}(\lambda) f. \quad (80)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{L}$ является эллиптическим оператором, распределение f принадлежит $\text{RA}(\mathcal{B}_R)$ (см. [6; гл. 8.6]). Зафиксируем $w \in \mathcal{B}_{R-r(T)}$ и введем функцию (см. § 1)

$$f_w(z) = \int_{U(n)} (\tau(w)f)(Uz) dU, \quad z \in \mathcal{B}_{R-|w|},$$

где dU – нормированная мера Хаара на группе $U(n)$. Из определения f_w видно, что

$$f_w \in \text{RA}_{\mathfrak{h}}(\mathcal{B}_{R-|w|}), \quad f_w(0) = f(w). \quad (81)$$

Кроме того, ввиду условия на f и (21)

$$(\mathfrak{L}f_w)(z) = \lambda^2 f_w(z), \quad z \in \mathcal{B}_{R-|w|}. \quad (82)$$

Используя (81), (82) и (22), получаем, что $f_w(z) = f(w)\phi_{\lambda,0,0,0,1}(z)$. Поскольку $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}^n)$, то

$$\tilde{T}(\lambda)f(w) = \langle T(z), f_w(z) \rangle = \langle T(z), \tau(w)f(z) \rangle = (f \times T)(w),$$

что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}^n)$, то

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f \times T)(\lambda) = \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)\tilde{T}(\lambda). \quad (83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (60) и (80) имеем

$$\langle f \times T, \overline{\phi_{\lambda,0,p,q,l}} \rangle = \langle f, \overline{\phi_{\lambda,0,p,q,l} \times \tilde{T}} \rangle = \langle f, \overline{\tilde{T}(\bar{\lambda})\phi_{\lambda,0,p,q,l}} \rangle = \tilde{T}(\lambda)\langle f, \overline{\phi_{\lambda,0,p,q,l}} \rangle,$$

что доказывает (83) (см. (79) и (23)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Преобразование $\mathcal{F}_l^{p,q}$ инъективно на $\mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{F}_l^{p,q}(f) = 0$. В соответствии с (83)

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f \times \varphi)(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (84)$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}^n)$. Соотношения (84) и (72) влекут

$$\int_0^a \cos(\sqrt{\lambda^2 + q - p}x) \int_x^a \varrho^{1-p-q}(f \times \varphi)_{p,q,l}(\varrho) \times (\varrho^2 - x^2)^{n+p+q-3/2} \mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho, x) d\varrho dx = 0,$$

где $a = r(f \times \varphi)$. Отсюда

$$\int_x^a \varrho^{1-p-q}(f \times \varphi)_{p,q,l}(\varrho)(\varrho^2 - x^2)^{n+p+q-3/2} \mathcal{K}_{n,p,q}(\varrho, x) d\varrho = 0$$

при $0 < x < a$. Используя стандартный метод решения интегрального уравнения Абеля (см., например, [20; гл. 1, доказательство теоремы 2.6]), получаем

$$\frac{(f \times \varphi)_{p,q,l}(\sqrt{t})}{(\sqrt{t})^{p+q}} - \int_t^{a^2} \frac{(f \times \varphi)_{p,q,l}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{p+q}} k(s, t) ds = 0,$$

где

$$k(s, t) = \frac{2^{n+p+q-2}}{(2n+2p+2q-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n+2p+2q-1} ((s-t)^{2n+2p+2q-2} g(s, t)),$$

$$g(s, t) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n+p+q-3/2} \mathcal{K}_{n,p,q} \left(\sqrt{s}, \sqrt{\frac{s+t-(s-t)x}{2}} \right) dx.$$

Так как $g(s, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, то функция $(\sqrt{t})^{-p-q}(f \times \varphi)_{p,q,l}(\sqrt{t})$ является решением однородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром $k \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Поэтому $(f \times \varphi)_{p,q,l} = 0$ и $f \times \varphi = 0$. В силу произвольности φ заключаем, что $f = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. (i) Пусть $f \in (C^s \cap \mathcal{E}'_{p,q,l})(\mathbb{C}^n)$ при некотором $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leq c \frac{e^{r(f)|\operatorname{Im} \lambda|}}{(1 + |\lambda|)^{s+p+q}}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где константа c не зависит от λ .

(ii) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j) = O(j^{-n-(p+q+s)/2-1}), \quad j \rightarrow +\infty,$$

где λ_j определяется равенством (78). Тогда $f \in C^s(\mathbb{C}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Согласно (79) имеем

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \sqrt{\omega_{2n-1}} \int_0^\infty \varrho^{2n-1} f_{p,q,l}(\varrho) \phi_{\lambda,0,p,q}(\varrho) d\varrho. \quad (85)$$

Для функции $\phi_{\lambda,0,p,q}$ мы имеем формулы дифференцирования (57)–(59). Поэтому повторное интегрирование по частям в (85) дает

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda) = \kappa \int_0^{r(f)} \varrho^{2n-1} (d_2^{s-2[s/2]} (d_1 d_2)^{[s/2]} f_{p,q,l})(\varrho) \phi_{\lambda,0,p+s-2[s/2],q}(\varrho) d\varrho,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1(1 - 2n - p - q), & d_2 &= D_2(p + q), \\ \kappa &= \sqrt{\omega_{2n-1}} (2p + n - \lambda^2)^{-[s/2]} (-2(n + p + q))^{-s+2[s/2]}. \end{aligned}$$

Теперь (i) следует из (73). Утверждение (ii) доказывается непосредственно с помощью предложения 6, (79) и (73).

Для $r \in [0, +\infty)$ положим $\overline{\mathcal{B}_r} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq r\}$. Следующее утверждение является аналогом теоремы Винера–Пэли для $\mathcal{F}_l^{p,q}$.

ТЕОРЕМА 8. (i) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{B}_r}$. Тогда

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{c_2} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|} \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (86)$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ . Обратно, для каждой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (86), существует такое распределение $f \in \mathcal{E}'_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$, что

$$\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{B}_r}, \quad \mathcal{F}_l^{p,q}(f) = w. \quad (87)$$

(ii) Если $f \in \mathcal{D}_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{B}_r}$, то для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $c_N > 0$ такая, что

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leq c_N(1 + |\lambda|)^{-N} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (88)$$

Обратно, для каждой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (88) для всех $N \in \mathbb{Z}_+$, существует функция $f \in \mathcal{D}_{p,q,l}(\mathbb{C}^n)$ такая, что выполнены условия (87).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Используя (73), получаем для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$|\mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda)| \leq \kappa_\varepsilon (1 + |\lambda|)^{\text{ord}(f) - p - q} e^{(r+\varepsilon)|\text{Im } \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\text{ord}(f)$ – порядок распределения f , а $\kappa_\varepsilon > 0$ не зависит от λ . Применяя принцип Фрагмена–Линделёфа (см., например, доказательство леммы 4.3 в [15; гл. 3]), приходим к (86).

Докажем обратное утверждение. Сначала предположим, что число нулей функции w конечно. Тогда по теореме Адамара w является четным членом. Рассмотрим дифференциальный оператор $S_l^{p,q}(\partial)$, ассоциированный с $S_l^{p,q}(z) = \varrho^{p+q} S_l^{p,q}(\sigma)$, т.е. каждый моном $z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \bar{z}_1^{\beta_1} \cdots \bar{z}_n^{\beta_n}$ заменяется в $S_l^{p,q}(z)$ на

$$2^{p+q} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{\beta_n}.$$

Для $g \in C^{p+q}(B_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$S_l^{p,q}(\partial)(|z|^{2N} g(z))(0) = 0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}_l^{p,q}(S_l^{p,q}(\partial)^* \delta_0)(\lambda) = \frac{2^{p+q}(n+p+q-1)!}{\sqrt{\omega_{2n-1}}(n-1)!},$$

где оператор $S_l^{p,q}(\partial)^*$ является сопряженным к оператору $S_l^{p,q}(\partial)$. Комбинируя последнее равенство с предложением 8, делаем вывод, что условия (87) выполнены для распределения

$$f = P_1(\mathfrak{L}) S_l^{p,q}(\partial)^* \delta_0, \quad \text{где } P_1(\lambda) = \frac{\sqrt{\omega_{2n-1}}(n-1)!}{2^{p+q}(n+p+q-1)!} w(\sqrt{\lambda}).$$

Далее, пусть функция w имеет бесконечно много нулей. Выберем четный полином $P_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для которого функция w/P_2 является целой и

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{(1 + |\lambda|)^{2n+3}}{e^{r|\text{Im } \lambda|}} \left| \frac{w(\lambda)}{P_2(\lambda)} \right| < \infty.$$

По теореме Винера–Пэли существует четная функция $\varphi \in C^{2n}(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\text{supp } \varphi \subset [-r, r]$ и

$$\frac{w(\lambda)}{P_2(\lambda)} = \int_0^r \cos(\lambda t) \varphi(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (89)$$

Пусть $\psi \in C(0, r]$ и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) = \omega_{2n-1} \int_t^r \varrho \psi(\varrho) (\varrho^2 - t^2)^{n-3/2} \mathcal{K}_{n,0,0}(\varrho, t) d\varrho, \quad 0 < t < r \quad (90)$$

(как и выше, это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода). Положим $h(z) = \psi(|z|)$ при $z \in \mathcal{B}_r$ и $h(z) = 0$, если $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{B}_r$. Нетрудно видеть, что $h \in L(\mathbb{C}^n)$. Кроме того, в силу (71), (89) и (90) имеем

$\tilde{h}(\lambda) = w(\lambda)/P_2(\lambda)$. Теперь, как и в первом случае, заключаем, что условия (87) выполнены для распределения

$$f = P_3(\mathfrak{L})S_l^{p,q}(\partial)^* \delta_0 \times h, \quad \text{где } P_3(\lambda) = \frac{\sqrt{\omega_{2n-1}}}{2^{p+q}(n)_{p+q}} P_2(\sqrt{\lambda}).$$

Таким образом, утверждение (i) доказано. Утверждение (ii) непосредственно следует из (i) и предложения 10.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $r > 0$, $u \in L[0, r]$ и

$$\int_0^{\varrho} u(t) \mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t) dt = 0$$

для почти всех $\varrho \in (0, r)$, где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t)$ определено в (71). Тогда $u = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{h}}(-r, r)$. По теореме Винера–Пэли и теореме 8 существует функция $h \in \mathcal{D}_{p,q,1}(\mathbb{C}^n)$ с носителем в $\mathcal{B}_r$ такая, что $\hat{\psi} = \mathcal{F}_1^{p,q}(h)$. Используя (71) и (79), из этого равенства находим

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \int_t^r \varrho^{2n-1} h_{p,q,1}(\varrho) \mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t) d\varrho, \quad t \in (0, r).$$

Тогда по условию получаем

$$\int_0^r u(t) \psi(t) dt = 0.$$

Поскольку функция ψ выше выбиралась произвольно, u является нулевой на $[0, r]$.

В заключение приведем формулу обращения для $\mathcal{F}_l^{p,q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $f \in (\mathcal{E}'_{p,q,l} \cap C^s)(\mathbb{C}^n)$ при некотором $s \geq 2n + 2$. Тогда

$$\mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j) = O(j^{(2n+p+q-2-s)/2}), \quad j \rightarrow +\infty, \quad (91)$$

и

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f)(\lambda_j) \phi_{\lambda_j, 0, p, q, l}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (92)$$

где λ_j и μ_j определены в (78).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (91) следует из предложения 10, (i). Соотношение (92) является частным случаем разложения по многочленам Лагерра (см. предложения 5 и 6).

§ 7. Уравнения свертки на редуцированной группе Гейзенберга

Сначала мы определим оператор $\mathfrak{A}_{p,q,l}$, который является аналогом оператора $\mathfrak{A}_{k,j}$ из § 2 для искаженной свертки на $\mathbb{C}^n$.

В силу теоремы 8 и теоремы Винера–Пэли отображение $\Lambda: \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^1)$, заданное равенством

$$\widehat{\Lambda(T)}(\lambda) = \tilde{T}(\lambda) = \langle T, \phi_{\lambda, 0, 0, 0, 1} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (93)$$

является биекцией и $r(\Lambda(T)) = r(T)$.

Пусть $R \in (0, +\infty]$, $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$. Для $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$ выберем $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(\mathcal{B}_R)$ так, что $\eta = 1$ в $\mathcal{B}_{r_0(\psi)+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$, где $r_0(\psi) = \inf\{r > 0 : \text{supp } \psi \subset \mathcal{B}_r\}$. Положим

$$\langle \mathfrak{A}_{p,q,l}(f), \psi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \mathcal{F}_l^{p,q}(f\eta)(\lambda_j) \int_{-R}^R \psi(t) \cos(\lambda_j t) dt \quad (94)$$

(см. (78)). Учитывая (71) и предложения 8 и 11, видим из следствия 5 и доказательства леммы 1, что $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f)$ корректно определено посредством (94) как распределение в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ и $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f|_{\mathcal{B}_r}) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f)|_{(-r,r)}$ для любого $r \in (0, R]$. Кроме того, используя (73), (60), (80) и повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. *При $R \in (0, +\infty]$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu = 2 + 2n + p + q + N$ имеют место следующие утверждения.*

- (i) *Если $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$, $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{C}^n)$ и $r(T) < R$, то на $(r(T) - R, R - r(T))$ справедливо соотношение $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f \times T) = \mathfrak{A}_{p,q,l}(f) * \Lambda(T)$.*
- (ii) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ на $\mathcal{B}_r$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) = 0$ на $(-r, r)$.*
- (iii) *Если $f \in C^{\nu}_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$, то $\mathfrak{A}_{p,q,l}(f) \in C^N_{\natural}(-R, R)$. Кроме того,*

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_0^{\varrho} \mathfrak{A}_{p,q,l}(f)(t) \mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t) dt, \quad 0 < \varrho < R,$$

где $\mathfrak{K}_{n,p,q}(\varrho, t)$ задается равенством (71).

- (iv) *Отображение $\mathfrak{A}_{p,q,l}$ непрерывно из $\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, а также из $C^{\nu}_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$ в $C^N_{\natural}(-R, R)$.*
- (v) *Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ имеем $\mathfrak{A}_{p,q,l}(\phi_{\lambda,\mu,p,q,l}) = u_{\lambda,\mu}$, где $u_{\lambda,\mu}$ — функция в правой части (31).*

Далее, пусть $F \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, $w \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_R)$. Рассмотрим $\eta \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ такую, что $\eta = 1$ на $(-r_0(w) - \varepsilon, r_0(w) + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r_0(w))$. Тогда, как и выше, из доказательства леммы 2 и теоремы 2 следует, что равенство

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}_{p,q,l}(F), w \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{F\eta}(\lambda) \mathcal{F}_l^{p,q}((w)_{(p,q),l}(\varrho) S_l^{p,q}(\varrho))(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{F\eta}(\lambda) \langle w, \phi_{\lambda,0,p,q,l} \rangle d\lambda \end{aligned}$$

определяет $\mathfrak{B}_{p,q,l}(F)$ как распределение в $\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$, а отображение $\mathfrak{B}_{p,q,l}$ является гомеоморфизмом $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ на $\mathcal{D}'_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$ и $C^{\infty}_{\natural}(-R, R)$ на $C^{\infty}_{p,q,l}(\mathcal{B}_R)$. Кроме того, $\mathfrak{B}_{p,q,l}^{-1} = \mathfrak{A}_{p,q,l}$.

Построенные операторы позволяют получить в случае групп Гейзенберга аналогии ряда евклидовых результатов для уравнений свертки из [4; часть 3]. Мы остановимся более детально на аналогах теорем 6 и 7.

Пусть T — распределение с компактным носителем на H_{red}^n . Положим

$$r(T) = \inf\{r > 0 : \text{supp } T \subset C_r\},$$

где

$$C_r = \{(z, t + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\} \in H_{\text{red}}^n : z \in \mathcal{B}_r, 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Для $f \in \mathcal{D}'(C_r)$ определим $f_k = \langle f, e^{-ikt} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Звездочкой $*$ обозначим свертку на группе H_{red}^n . Пусть также ζ_a ($a > 0$) – оператор растяжения на $\mathbb{C}^n$, переводящий распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ в распределение $f(az)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений с компактными носителями на H_{red}^n , которые являются радиальными по переменной z . Предположим, что $r(T_\nu) + \inf_{\alpha \in A} r(T_\alpha) < R \leq +\infty$ для любого $\nu \in A$ и

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(\mathcal{Z}_1^{0,0}(\zeta_{1/\sqrt{|k|}}(T_\alpha)_k)) = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(\widetilde{(T_\alpha)_0}) = \emptyset,$$

где $\widetilde{(T_\alpha)_0}$ – евклидово сферическое преобразование распределения $(T_\alpha)_0$ на $\mathbb{C}^n$. Тогда

$$\{f \in \mathcal{D}'(C_R) : f * T_\alpha = 0 \text{ в } C_{R-r(T_\alpha)} \forall \alpha \in A\} = \{0\}.$$

Если $\sup_{\alpha \in A} r(T_\alpha) < +\infty$, то сформулированное выше утверждение справедливо и при $R = \inf_{\alpha \in A} r(T_\alpha) + \sup_{\alpha \in A} r(T_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{D}'(C_R)$. Нетрудно видеть, что

$$(f * T_\alpha)_k = f_k \times_{-k} (T_\alpha)_k \quad \text{в } \mathcal{B}_{R-r(T_\alpha)}, \quad (95)$$

где распределение в правой части $((-k)$ -искаженная свертка f_k и $(T_\alpha)_k$) определяется равенством

$$\begin{aligned} \langle f_k \times_{-k} (T_\alpha)_k, \psi \rangle &= \langle f_k(z), \langle (T_\alpha)_k(w), \psi(z+w) e^{-ik \operatorname{Im}(z,w)c/2} \rangle \rangle = 0, \\ \psi &\in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{R-r(T_\alpha)}). \end{aligned}$$

Применяя теперь теорему 6 в одномерном случае, (23) и утверждение (i) теоремы 9, получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство радиальных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$. Предположим, что $r(T_\nu) + \inf_{\alpha \in A} r(T_\alpha) < R \leq +\infty$ для любого $\nu \in A$ и $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(\mathcal{Z}_1^{0,0}(T_\alpha)) = \emptyset$.

Тогда

$$\{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{B}_R) : f \times T_\alpha = 0 \text{ в } \mathcal{B}_{R-r(T_\alpha)} \forall \alpha \in A\} = \{0\}.$$

Если $\sup_{\alpha \in A} r(T_\alpha) < +\infty$, то сформулированное выше утверждение справедливо и при $R = \inf_{\alpha \in A} r(T_\alpha) + \sup_{\alpha \in A} r(T_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая соотношение (95) при $k = -1$, заключаем, что достаточно использовать теорему 10 для распределений вида $T(z)e^{-it}$.

Одним из приложений теоремы 10 является

ТЕОРЕМА 11. (i) Пусть V – ненулевое подпространство в $C(H_{\text{red}}^n)$, инвариантное относительно групповых сдвигов и действия унитарной группы $U(n)$.

Тогда V содержит хотя бы одну из функций

$$(\lambda|z|)^{-n+1} J_{n-1}(\lambda|z|), \quad \phi_{\lambda,0,0,0}(\sqrt{|k|}|z|) e^{ikt}$$

при некоторых $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) Пусть V – ненулевое подпространство в $C(\mathbb{C}^n)$, инвариантное относительно искаженных сдвигов $\tau(w)$ (см. § 1) и унитарных преобразований.

Тогда подпространство V содержит функцию $\phi_{\lambda,0,0,0}(|z|)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из теоремы Хана–Банаха следует (см. [12; § 4]), что

$$V = \{f \in C(H_{\text{red}}^n) : f * T_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in A\}$$

для некоторого семейства $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ненулевых радиальных распределений на H_{red}^n с компактными носителями. Применяя теорему 10, (80) и теорему о среднем для собственных функций евклидова лапласиана, мы завершаем доказательство (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично (см. следствие 6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечалось, для подпространств V , порождаемых функциями медленного роста, аналоги теоремы 11 были доказаны С. Сангавелу (см. [12; теоремы 4.3, 6.2]). Там же высказана гипотеза относительно общей ситуации. В частности, в случае (ii) теоремы 11 предполагается, что V содержит функцию $f(z) = e^{i[z,\zeta]} L_k^{n-1}(|z|^2/2)$ при некоторых $\zeta \in \mathbb{C}^{2n}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, где $[z,\zeta]$ – симплектическая форма. Однако нетрудно проверить, что $\mathcal{L}f \neq \lambda f$ для $\lambda \notin n + 2\mathbb{Z}_+$. Поэтому инвариантное подпространство $\{g \in C(\mathbb{C}^n) : \mathcal{L}g = \lambda g\}$, где $\lambda \notin n + 2\mathbb{Z}_+$, не содержит f . Это опровергает гипотезу С. Сангавелу.

В заключение мы приведем аналог теоремы 7 для искаженной свертки. Пусть $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ такое, что $r(\psi_\alpha) < R \leq +\infty$ для всех $\alpha \in A$. Говорят, что семейство $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ имеет *искаженное свойство Помпейю* в шаре $\mathcal{B}_R$, если не существует ненулевой функции $f \in C^\infty(\mathcal{B}_R)$ такой, что

$$(f \circ \tau) \times \psi_\alpha = 0 \quad \text{в } \mathcal{B}_{R-r(\psi_\alpha)} \quad \text{для всех } \tau \in U(n), \alpha \in A.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\Psi = \{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство распределений класса $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ таких, что $\sup_\alpha r(\psi_\alpha) < +\infty$. Тогда при $R > \inf_\alpha r(\psi_\alpha) + \sup_\alpha r(\psi_\alpha)$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) семейство Ψ имеет искаженное свойство Помпейю в шаре $\mathcal{B}_R$;
- (ii) семейство Ψ имеет искаженное свойство Помпейю в $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 7 (но теперь используя (60), (80), утверждение (viii) предложения 1 и следствие 6), получаем требуемый результат.

Список литературы

- [1] К. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Комплексный анализ. Многие переменные* – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 5–111; англ. пер.: С. А. Berenstein, D. C. Struppa, *Several complex variables. V. Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopaedia Math. Sci., **54**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

- [2] L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, “Spectral synthesis and the Pompeiu problem”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **23**:3 (1973), 125–154.
- [3] Д. И. Гуревич, “Контрпримеры к проблеме Л. Шварца”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 29–35; англ. пер.: D. I. Gurevich, “Counterexamples to a problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 116–120.
- [4] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [5] C. A. Berenstein, R. Gay, “A local version of the two-circles theorem”, *Israel J. Math.*, **55**:3 (1986), 267–288.
- [6] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, 2, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vols. 1, 2, Grundlehren Math. Wiss., **256–257**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [7] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [8] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Ann. of Math. Stud., **122**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [9] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Math. Notes, **42**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [10] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979; англ. пер.: L. A. Aizenberg, A. P. Yuzhakov, *Integral representations and residues in multi-dimensional complex analysis*, Transl. Math. Monogr., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [11] S. Thangavelu, “Spherical means and CR functions on the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **63** (1994), 255–286.
- [12] S. Thangavelu, “Mean periodic functions on phase space and the Pompeiu problem with a twist”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **45**:4 (1995), 1007–1035.
- [13] C. A. Berenstein, R. Gay, “Le problème de Pompeiu local”, *J. Analyse Math.*, **52**:1 (1981), 133–166.
- [14] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.
- [15] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [16] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, 2-е изд., Наука, М., 1991; англ. пер. 1-го изд.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [18] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* , Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Grundlehren Math. Wiss., **241**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980.
- [19] R. A. Askey, Т. Н. Koornwinder, W. Schempp (eds.), *Special functions: group theoretical aspects and applications*, Math. Appl., **18**, Reidel Publ., Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984.

- [20] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

В. В. Волчков (V. V. Volchkov)

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступила в редакцию

12.09.2007 и 21.03.2008

Вит. В. Волчков (Vit. V. Volchkov)

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua