Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Каржеманов, О трехмерных многообразиях Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 8, 111–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:27:28

УДК 512.776

И. В. Каржеманов

О трехмерных многообразиях Фано с каноническими горенштейновыми особенностями

Дана классификация трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, степень которых больше шестидесяти четырех.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: многообразие Фано, антиканоническая степень, канонические особенности.

§ 1. Введение

В настоящей статье изучаются трехмерные многообразия¹ Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Из основного результата работы [1] следует, что (антиканоническая) степень таких многообразий ограничена. При более сильных условиях на особенности имеет место точная оценка, а именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [2]–[5]). *Пусть X – неособое трехмерное многообразие Фано. Тогда $-K_X^3 \leq 64$ и равенство возможно лишь при $X = \mathbb{P}^3$.*

Для трехмерных многообразий Фано с терминальными горенштейновыми особенностями имеет место

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [6]). *Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями. Тогда существует плоская деформация X в неособое многообразие Фано. В частности, $-K_X^3 \leq 64$.*

Еще более общее утверждение доказано в [7].

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть X – трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Тогда $-K_X^3 \leq 72$ и равенство возможно лишь при $X = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ или $X = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В работе [8] получена точная оценка для степени торических многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями в любой размерности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00395-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1987.2008.1).

¹Все многообразия предполагаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

Кроме того, в [7] было высказано предположение о том, что для трехмерного многообразия Фано X с особенностями типа сDV имеет место оценка $-K_X^3 \leq 64$. В настоящей работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями такое, что $64 < -K_X^3 \leq 70$. Тогда X является одним из следующих многообразий:

- 1) X_{70} : образ антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из особой точки на $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ типа сDV ; в этом случае $-K_X^3 = 70$ и особенности X хуже чем сDV ;
- 2) X_{66} : антиканонический образ $\mathbb{P}^2$ -расслоения $\text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$; в этом случае $-K_X^3 = 66$ и особенности X хуже чем сDV .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Многообразие X из теоремы 1.5 с $-K_X^3 = 70$ было найдено И. А. Чельцовым.

Из формулы Римана–Роха следует, что для трехмерного многообразия Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями степень $-K_X^3$ – четное число. Таким образом, теоремы 1.3 и 1.5 исчерпывают все трехмерные многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, степень которых больше шестидесяти четырех. Более того, так как особенности многообразий $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ и $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ хуже чем сDV , то из теорем 1.3 и 1.5 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с особенностями типа сDV . Тогда $-K_X^3 \leq 64$.

Следствие 1.7 является подтверждением следующей гипотезы из [7].

ГИПОТЕЗА 1.8. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с особенностями типа сDV . Тогда существует плоская деформация X в неособое многообразие Фано.

Дадим теперь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Трехмерное многообразие U с каноническими особенностями называется *многообразием Фано–Энриквеса*, если $-K_U$ не является дивизором Картье, но $-K_U \equiv H$ для некоторого обильного дивизора Картье H .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Изучение трехмерных многообразий, содержащих неособую поверхность Энриквеса в качестве обильного дивизора, было начато Дж. Фано в [9] (см. также [10], [11]). Легко видеть (см., например, [12]), что если такое многообразие имеет канонические особенности, то оно является многообразием Фано–Энриквеса. С другой стороны, согласно [13; предложение 3.1] и [13; предложение 3.3] общая поверхность $S \in |H|$ на многообразии Фано–Энриквеса U имеет лишь дювалевские особенности и минимальное разрешение S является поверхностью Энриквеса. Более того, если особенности U изолированные и $H^3 \neq 2$, то общий элемент в $|H|$ является неособой поверхностью Энриквеса (см. [13; следствие 3.7]).

Далее, в силу [12] на многообразии Фано–Энриквеса U имеем $2(K_U + S) \sim 0$. В частности, $-K_U \sim_{\mathbb{Q}} H$. Более того, согласно [14; предложение 14] если

$-K_U \sim_{\mathbb{Q}} nH'$ для некоторого целого $n > 0$ и дивизора Картье H' , то $n = 1$. В частности, трехмерные многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано индекса Фано один составляют подкласс многообразий Фано-Энриквеса. Трехмерные многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано индекса Фано один с циклическими факторособенностями были классифицированы в [15] и [16].

Пусть U – многообразие Фано-Энриквеса такое, что $-K_U \equiv H$ для некоторого дивизора Картье H . Согласно [13; лемма 2.2] $g := \frac{1}{2}H^3 + 1$ – целое число; это – $\text{род } U$. Проблема получения точной оценки для рода многообразий Фано-Энриквеса изучалась в [17] и [18]. В [17] была установлена точная оценка $g \leq 17$ в предположении, что особенности U изолированные. В нашей ситуации имеет место

СЛЕДСТВИЕ 1.11. *Пусть U – многообразие Фано-Энриквеса рода g . Тогда $g \leq 17$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $2(K_U + S) \sim 0$ для $S \in |H|$ (см. замечание 1.10), то существует глобальное логканоническое накрытие $\pi: X \rightarrow U$ относительно $K_U + S$ (см. [19]). Здесь степень морфизма π равна двум и $\pi^*(K_U + S) \sim 0$. Кроме того, π разветвлен в точности в тех точках на U , где K_U не является дивизором Картье. Так как особенности многообразия U канонические, то число таких точек конечно. Отсюда следует, что $-K_X \sim \pi^*(S)$ и X – трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, причем его степень $-K_X^3 = 4g - 4$. Кроме того, по построению инволюция Галуа двойного накрытия π задает автоморфизм τ многообразия X порядка два с конечным числом неподвижных точек.

Пусть $g > 17$. Тогда должно быть $-K_X^3 > 64$. А так как $-K_X^3 = 4g - 4$ делится на четыре, то из теорем 1.3 и 1.5 получаем, что $X = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ или $X = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$.

Если $X = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$, то линейная система $|\frac{1}{2}K_X|$ задает вложение многообразия X в $\mathbb{P}^{10}$ такое, что образ X есть конус над поверхностью дель Пеццо степени девять. Так как $|\frac{1}{2}K_X|$ является τ -инвариантной линейной системой, то найдется τ -инвариантное гиперплоское сечение H_0 конуса X , которое не проходит через вершину. Тогда $H_0 \simeq \mathbb{P}^2$, откуда следует, что τ имеет бесконечно много неподвижных точек на H_0 , что невозможно.

Таким образом, должно быть $X = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Тогда найдутся взвешенные проективные координаты x_0, x_1, x_2, x_3 на X такие, что $\deg x_0 = 6, \deg x_1 = 4, \deg x_2 = \deg x_3 = 1$ и x_i являются собственными функциями относительно τ с собственными значениями $\pm 1, 0 \leq i \leq 3$. Если обе координаты x_0, x_1 (соответственно x_2, x_3) имеют одно и то же собственное значение, то кривая на X , заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$ (соответственно $x_0 = x_1 = 0$), состоит из τ -неподвижных точек, что невозможно. Значит, можно считать, что τ действует на X следующим образом:

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 : -x_1 : x_2 : -x_3].$$

Но снова кривая на X , заданная уравнениями $x_1 = x_3 = 0$, состоит из τ -неподвижных точек. Полученное противоречие завершает доказательство следствия 1.11.

В доказательстве теоремы 1.5 использованы основные идеи работы [7]. А именно, для данного многообразия Фано X , удовлетворяющего условиям теоремы 1.5, существует терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация $\varphi: Y \rightarrow X$. Здесь φ – крепантный бирациональный морфизм, а многообразие Y имеет терминальные факториальные особенности. В частности, $-K_Y^3 = -K_X^3$.

Для Y имеется полное описание K -отрицательных экстремальных стягиваний, благодаря которому в § 3 настоящей работы найдено многообразие X_{70} . Там же доказательство теоремы 1.5 сводится к случаю, когда на Y нет K -отрицательных экстремальных бирациональных стягиваний на многообразия с терминальными факториальными особенностями и с численно эффективным и объемным антиканоническим классом. Из результатов [7] тогда следует, что X особо вдоль прямой или содержит плоскость.

В § 4, следуя [7], строится расслоение Мори W с бирациональным отображением $W \dashrightarrow X$, заданным линейной подсистемой в $|-K_W|$. Из результатов [7] следует, что W не может быть многообразием $\mathbb{Q}$ -Фано.

В § 5 для случая, когда W – расслоение на поверхности дель Пеццо, найдено многообразие X_{66} . Там же доказательство теоремы 1.5 сводится к случаю, когда W есть расслоение на коники. В § 6 доказано, что последний случай не возможен.

§ 2. Основные понятия и утверждения

Мы используем стандартные понятия и факты теории минимальных моделей (см., например, [20]). Напомним, что алгебраическое многообразие X называется *многообразием Фано*, если дивизор $-K_X$ является обильным $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором. Если же дивизор $-K_X$ лишь численно эффективен и объемен, то X называется *слабым многообразием Фано*. В настоящей работе рассматриваются трехмерные (слабые) многообразия Фано лишь с (не более чем) каноническими горенштейновыми особенностями.

Пусть X – трехмерное многообразие Фано. Из формулы Римана–Роха и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль следует формула для размерности антиканонической линейной системы на X (см. [21]):

$$\dim |-K_X| = -\frac{1}{2}K_X^3 + 2.$$

Число $-K_X^3$ называется *степенью* многообразия X , а $g := -\frac{1}{2}K_X^3 + 1$ – *родом* X . Таким образом, $\dim |-K_X| = g + 1$ и $-K_X^3 = 2g - 2$. В частности, $-K_X^3$ – четное число и для X , удовлетворяющего условиям теоремы 1.5, получаем, что $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$.

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [21]). *Общая поверхность $L \in |-K_X|$ имеет лишь дублевские особенности.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (см. [22]). Если $\text{Bs}|-K_X| \neq \emptyset$, то $-K_X^3 \leq 22$.

Для подвижной антиканонической линейной системы $|-K_X|$ обозначим через $\varphi_{|-K_X|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ задаваемое ей рациональное отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 (см. [23; теорема 1.5]). Если $\varphi_{|-K_X|}$ – морфизм, не являющийся вложением, то $-K_X^3 \leq 40$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 (см. [23; теорема 1.6]). Если $\varphi_{|-K_X|}$ – вложение и образ $\varphi_{|-K_X|}(X)$ не является пересечением квадратик, тогда $-K_X^3 \leq 54$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Из предложений 2.2–2.4 следует, что для трехмерного многообразия Фано X с $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$ линейная система $|-K_X|$ свободна и задает вложение $\varphi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^{g+1}$, где $g \in \{34, 35, 36\}$, такое, что образ $\varphi_{|-K_X|}(X)$ есть пересечение квадратик.

Рассмотрим теперь несколько бирациональных свойств трехмерных многообразий Фано.

ТЕОРЕМА 2.6 (см. [20]). Пусть V – трехмерное многообразие с каноническими особенностями. Тогда существует многообразие W с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и бирациональное стягивание $\phi: W \rightarrow V$, для которых $K_W = \phi^*K_V$. Такое W (или ϕ) называется терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией V .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Пусть W и W' – две терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные модификации V . Тогда W и W' являются относительными минимальными моделями над V (см. [20]). Таким образом, бирациональное отображение $W \dashrightarrow W'$ есть либо изоморфизм, либо композиция флопов над V (см. [24; теорема 4.3]).

Применяя теорему 2.6 к трехмерному многообразию Фано X , получим трехмерное многообразие Y с терминальными горенштейновыми $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями и бирациональное стягивание $\varphi: Y \rightarrow X$ такие, что $K_Y = \varphi^*K_X$. В частности, Y является слабым многообразием Фано и $-K_Y^3 = -K_X^3$. Более того, согласно [19; лемма 5.1] Y имеет факториальные особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Наоборот, для любого трехмерного слабого многообразия Фано Y с терминальными факториальными особенностями его образ $X := \varphi_{|-nK_Y|}(Y)$ при морфизме, заданном кратной антиканонической линейной системой $|-nK_Y|$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, является трехмерным многообразием Фано таким, что $K_Y = \varphi^*K_X$. В частности, X имеет канонические горенштейновы особенности (см. [19]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9 (см. [7; леммы 4.2, 4.3]). Конус Мори $\overline{NE}(Y)$ полиэдрален и порожден стягиваемыми экстремальными лучами (т.е. такими лучами R , для которых существует стягивание $\varphi_R: Y \rightarrow Y'$ на нормальное многообразие Y' такое, что кривая C отображается морфизмом φ_R в точку только когда $[C] \in R$ для класса численной эквивалентности кривой C).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Из теоремы 1.2 следует, что для трехмерного многообразия Фано X с $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$ выполнено $X \neq Y$. В частности, для

числа Пикара многообразия Y имеем $\rho(Y) > 1$. Значит, согласно предложению 2.9 антиканонический дивизор $-K_Y$ определяет грань конуса Мори $\overline{NE}(Y)$ и $\varphi: Y \rightarrow X$ есть стягивание этой грани.

ПРИМЕР 2.11. Рассмотрим $\mathbb{P}^1$ -расслоение $Y := \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$ над $\mathbb{P}^2$. Для тавтологического расслоения $\mathcal{O}_Y(1)$ линейная система $|\mathcal{O}_Y(1)|$ задает бирациональное стягивание $\varphi: Y \rightarrow X$ отрицательного сечения на Y . Так как $-K_Y \sim \mathcal{O}_Y(2)$, то $K_Y = \varphi^*K_X$. Это означает, что X является многообразием Фано с каноническими горенштейновыми особенностями (см. замечание 2.8) и Y есть терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация X . Более того, по построению индекс многообразия X равен двум, а его степень равна семидесяти двум. Из теоремы 1.3 тогда следует, что $X \simeq \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. В обозначениях из примера 2.11 морфизм φ является экстремальным стягиванием и φ -исключительное множество изоморфно $\mathbb{P}^2$. Отсюда, в частности, следует, что на Y нет малых K -тривиальных экстремальных стягиваний. Тогда согласно замечанию 2.7 все терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные модификации многообразия $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ изоморфны Y .

ПРИМЕР 2.13. Рассмотрим взвешенное проективное пространство $X := \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Множество особых точек многообразия X есть кривая $L \simeq \mathbb{P}^1$ такая, что для двух точек P и Q на L особенности $P \in X$ и $Q \in X$ имеют тип $\frac{1}{6}(4, 1, 1)$ и $\frac{1}{4}(2, 1, 1)$ соответственно, а для любой точки $O \in L \setminus \{P, Q\}$ особенность $O \in X$ аналитически изоморфна особенности $(0, o) \in \mathbb{C}^1 \times U$, где $o \in U$ есть особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1)$ (см. [25; 5.15]). Так как дивизор $-K_X \sim \mathcal{O}_X(12)$ обилен, то отсюда следует, что X является многообразием Фано с каноническими горенштейновыми особенностями.

Пусть $\sigma_1: Y_1 \rightarrow X$ – раздутие точки P с весами $\frac{1}{6}(4, 1, 1)$. Тогда множество особых точек многообразия Y_1 есть кривая L_1 такая, что для двух точек P_1 и Q_1 на L_1 особенности $P_1 \in Y_1$ и $Q_1 \in Y_1$ имеют тип $\frac{1}{4}(2, 1, 1)$, а для любой точки $O \in L_1 \setminus \{P_1, Q_1\}$ особенность $O \in Y_1$ аналитически изоморфна особенности $(0, o) \in \mathbb{C}^1 \times U$, где $o \in U$ – особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1)$.

Пусть $\sigma_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ – раздутие точек P_1 и Q_1 с весами $\frac{1}{4}(2, 1, 1)$. Тогда множество особых точек многообразия Y_2 есть кривая $L_2 \simeq \mathbb{P}^1$ такая, что для любой точки O на L_2 особенность $O \in Y_2$ аналитически изоморфна особенности $(0, o) \in \mathbb{C}^1 \times U$, где $o \in U$ есть особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1)$.

Наконец, раздутие $\sigma_3: Y \rightarrow Y_2$ кривой L_2 на Y_2 приводит к неособому многообразию Y и бирациональному стягиванию $\varphi: Y \rightarrow X$. По построению, морфизмы σ_i , $1 \leq i \leq 3$, крепантны и морфизм φ есть композиция σ_i . Отсюда следует, что $K_Y = \varphi^*K_X$ и Y является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией X .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. В обозначениях из примера 2.13 морфизм φ является композицией экстремальных стягиваний и φ -исключительное множество имеет чистую коразмерность один. Отсюда, в частности, следует, что на Y нет малых K -тривиальных экстремальных стягиваний. Тогда согласно замечанию 2.7 все

терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные модификации многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ изоморфны Y .

Используя предыдущие обозначения, рассмотрим K -отрицательное экстремальное стягивание $f: Y \rightarrow Y'$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15 (см. [7; предложения 4.11, 5.2]. *Если $\dim Y' < \dim Y$, то $-K_X^3 \notin \{66, 68, 70\}$.*

Предположим теперь, что стягивание f бирационально. Тогда согласно [26; (2.3.2)] морфизм f является дивизориальным. Пусть E – f -исключительный дивизор. Из классификации в [27] экстремальных лучей на трехмерных многообразиях с терминальными факториальными особенностями следует

ЛЕММА 2.16. *Если $f(E)$ – точка, то справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) Y' имеет терминальные факториальные особенности и является слабым многообразием Фано, для которого $-K_{Y'}^3 > -K_Y^3$;
- 2) $E \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ и $f(E) \in Y'$ – особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Пусть выполнены условия леммы 2.16. Если $f(E) \in Y'$ – особенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, то $\varphi(E)$ – плоскость на X (т.е. поверхность $\Pi \simeq \mathbb{P}^2$ такая, что $K_X^2 \cdot \Pi = 1$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E \simeq \mathbb{P}^2$ и $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, то

$$K_Y^2 \cdot E = \left(f^* K_{Y'} + \frac{1}{2} E \right)^2 \cdot E = \frac{1}{4} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))^2 = 1.$$

Отсюда получаем, что $\varphi(E)$ – поверхность $\Pi \simeq \mathbb{P}^2$ на X и $K_X^2 \cdot \Pi = K_Y^2 \cdot E = 1$.

ЛЕММА 2.18. *Если $f(E)$ – кривая, то Y' имеет лишь терминальные факториальные особенности и справедливо одно из следующих утверждений:*

- 1) Y' есть слабое многообразие Фано, для которого $-K_{Y'}^3 \geq -K_Y^3$;
- 2) для кривой $C := f(E)$ имеем $K_{Y'} \cdot C > 0$ и C – единственная кривая, положительно пересекающая $K_{Y'}$ (здесь $C \simeq \mathbb{P}^1$ и $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или $E \simeq \mathbb{F}_1$).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Мы используем рассуждения из доказательства предложения-определения 4.5 из [7]. Согласно [27] многообразие Y' неособо в окрестности кривой C и морфизм f является раздутием C . Отсюда, в частности, следует, что Y' имеет лишь терминальные факториальные особенности.

Далее, имеем $K_Y = f^* K_{Y'} + E$. Отсюда получаем, что

$$K_Y^3 = K_{Y'}^3 + 3f^* K_{Y'} \cdot E^2 + E^3,$$

и если Y' – слабое многообразие Фано, то

$$0 \leq (-K_Y)^2 \cdot E = 2f^* K_{Y'} \cdot E^2 + E^3, \quad 0 \leq (-K_Y) \cdot (-f^* K_{Y'}) \cdot E = f^* K_{Y'} \cdot E^2.$$

Это дает неравенство $-K_{Y'}^3 \geq -K_Y^3$.

Далее, если Y' не является слабым многообразием Фано, то $K_{Y'} \cdot Z > 0$ для некоторой неприводимой кривой Z . Легко видеть, что $Z = C$. Тогда из лемм 4.2 и 4.3 из [7] и следствия 1.3 из [26] получаем, что $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Таким образом, $E \simeq \mathbb{F}_n$ для некоторого $n \geq 0$. Так как $-K_Y|_E$ есть сечение расслоения $E \rightarrow C$, то

$$-K_Y|_E \sim h + (n + a)l,$$

где $a \in \mathbb{Z}$, h – минимальное сечение, а l – слой на E . Кроме того, $a \geq 0$, так как дивизор $-K_Y|_E$ численно эффективен. Тогда получаем

$$0 > -K_{Y'} \cdot C = K_Y^2 \cdot E - 2 + 2p_a(C) = (-K_Y|_E)^2 - 2 = n + 2a - 2,$$

откуда $a = 0$ и $n \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.19. Пусть выполнены условия леммы 2.18. Тогда

- 1) если $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то $\varphi(E)$ – прямая на X (т.е. кривая $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$ такая, что $-K_X \cdot \Gamma = 1$) и X особо вдоль $\varphi(E)$;
- 2) если $E \simeq \mathbb{F}_1$, то $\varphi(E)$ – плоскость на X (т.е. поверхность $\Pi \simeq \mathbb{P}^2$ такая, что $K_X^2 \cdot \Pi = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения из доказательства леммы 2.18. Если $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то $-K_Y \cdot h = 0$ и $-K_Y \cdot l = 1$. Отсюда следует, что $\varphi(E)$ есть кривая $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$ на X , для которой $-K_X \cdot \Gamma = 1$.

Если $E \simeq \mathbb{F}_1$, то $-K_Y \cdot h = 0$ и h – единственная кривая на E , пересекающая $-K_Y$ по нулю. Отсюда следует, что $\varphi(E)$ есть поверхность $\Pi \simeq \mathbb{P}^2$ на X , для которой $K_X^2 \cdot \Pi = K_Y^2 \cdot E = 1$.

В заключение напомним, что нормальная трехмерная особенность $o \in V$ называется *особенностью типа cDV*, если она аналитически изоморфна гиперповерхностной особенности $f(x, y, z) + tg(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{C}^4$ с координатами x, y, z, t , где $f(x, y, z) = 0$ – уравнение дювалевской особенности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.20 (см. [28]). Если $o \in V$ – особенность типа cDV, то дискрепантность любого неприводимого исключительного дивизора с центром в точке o строго положительна.

СЛЕДСТВИЕ 2.21. Изолированная особенность типа cDV является терминальной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22 (см. [28; следствие 2.10]). Пусть V проективно. Тогда точка $o \in V$ является особенностью типа cDV только когда для общего гиперплоского сечения H многообразия V , проходящего через точку o , особенность $o \in H$ дювалевская.

§ 3. Начало доказательства теоремы 1.5: предварительные результаты

Мы используем обозначения и соглашения из § 2. Пусть X – многообразие Фано, удовлетворяющее условиям теоремы 1.5, и Y – его терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация.

Рассмотрим K -отрицательное экстремальное стягивание $f: Y \rightarrow Y'$. Согласно предложению 2.15 и [26; (2.3.2)] f является бирациональным морфизмом с исключительным дивизором E .

В этом параграфе мы предполагаем, что Y' имеет терминальные факториальные особенности и дивизор $-K_{Y'}$ численно эффективен. Согласно леммам 2.16 и 2.18 отсюда, в частности, следует, что Y' есть слабое многообразие Фано.

Далее, согласно замечанию 2.8 многообразие Y' является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией некоторого многообразия Фано X' с каноническими горенштейновыми особенностями. Обозначим через $\psi: Y' \rightarrow X'$ соответствующий крепантный морфизм.

ЛЕММА 3.1. *Если $f(E)$ – точка, то $-K_{Y'}^3 \neq 72$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-K_{Y'}^3 = 72$. Тогда по теореме 1.3 и замечанию 2.8 многообразие Y' является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией либо многообразия $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$, либо многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. В частности, в силу замечаний 2.12 и 2.14 многообразие Y' неособо.

Далее, согласно [27] морфизм f является раздутием точки $f(E) \in Y'$. Так как многообразие Y' неособо, то отсюда, в частности, следует, что $K_Y = f^*K_{Y'} + 2E$ и $E^3 = 1$. Тогда

$$-K_Y^3 = 72 - 8E^3 = 64.$$

Получаем противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $f(E)$ – кривая и $-K_{Y'}^3 = 72$, то $-K_Y^3 = 70$ и X является образом антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из особой точки на $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ типа cDV.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.3 и замечанию 2.8 многообразие Y' является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией либо многообразия $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$, либо многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. В частности, $X' = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ или $X' = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ (см. замечание 2.10), откуда согласно замечаниям 2.12 и 2.14 многообразие Y' изоморфно одному из многообразий, построенных в примерах 2.11 и 2.13.

Положим $C := f(E)$. Согласно [27] кривая C приведена и неприводима. Кроме того, морфизм f является раздутием C . В частности, имеет место равенство

$$K_Y = f^*K_{Y'} + E. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3.3. *Имеем $X' \neq \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X' = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$. Тогда согласно примеру 2.11 ψ -исключительное множество E_ψ является неприводимым дивизором, который стягивается в единственную особую точку на X' .

Имеем $E_\psi \cap C = \emptyset$. Покажем это. Предположим, что это не так. Так как $\psi(E_\psi)$ – точка на X' , то найдется кривая $Z \subset Y$ такая, что $K_{Y'} \cdot f_*Z = 0$

и $E \cdot Z > 0$. Тогда из равенства (3.1) получим $K_Y \cdot Z > 0$, что невозможно, так как дивизор $-K_Y$ численно эффективен.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xleftarrow{f'} & X' \end{array}$$

Морфизм φ задан линейной системой $|-K_Y| = |f^*(-K_{Y'}) - E|$, поэтому отображение $\varphi \circ f^{-1}$ задается линейной системой $|-K_{Y'} - C|$. Так как $E_\psi \cap C = \emptyset$, то отображение f' задается линейной системой $|-K_{X'} - \psi(C)|$. Согласно предложениям 2.2 и 2.3 многообразие X' может быть антиканонически вложено в $\mathbb{P}^{38}$. Отсюда следует, что кривая $\psi(C)$ на $X' \simeq \varphi_{|-K_{X'}|}(X') \subset \mathbb{P}^{38}$ высекается некоторым линейным подпространством V . С другой стороны, имеем $X \simeq \varphi_{|-K_X|}(X) \subset \mathbb{P}^{g+1}$, где $g \in \{34, 35, 36\}$ (см. замечание 2.5). Таким образом, получаем, что $\dim V \leq 2$ и $-K_{X'} \cdot \psi(C) \leq 2$, так как $\varphi_{|-K_{X'}|}(X')$ является пересечением квадратик (см. предложение 2.4).

Но для $X' = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ имеем $-K_{X'} \sim \mathcal{O}_{X'}(6)$ (см. [25]). Тогда

$$0 < \mathcal{O}_{X'}(1) \cdot \psi(C) \leq \frac{1}{3},$$

откуда следует, что кривая $\psi(C)$ проходит через особую точку на X' . Это противоречит тому, что $E_\psi \cap C = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Используя обозначения, введенные в начале настоящего параграфа, рассмотрим многообразие X' . Пусть E_ψ – ψ -исключительное множество и $C := f(E)$ – кривая. Тогда согласно лемме 2.18 имеем $-K_{Y'}^3 \geq -K_Y^3$. Более того, из рассуждений в доказательстве леммы 3.3 непосредственно следует, что если $\psi(C)$ – кривая на X' , то $E_\psi \cap C = \emptyset$ и $-K_{X'}^3 > -K_X^3$. Если же $\psi(C)$ – точка на X' , то $C \simeq \mathbb{P}^1$ и она принадлежит той компоненте дивизора E_ψ , которая отображается морфизмом ψ на кривую. В частности, снова $-K_{X'}^3 > -K_X^3$ (см. вычисления в доказательстве леммы 2.18).

Таким образом, Y' является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией $X' = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Пусть P и Q – две точки на X' из примера 2.13.

ЛЕММА 3.5. В предыдущих обозначениях $\psi(C)$ – точка на X' , отличная от P и Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(C)$ – кривая. Тогда для ψ -исключительного множества E_ψ имеем $E_\psi \cap C = \emptyset$ (см. замечание 3.4). Отсюда, как и в доказательстве леммы 3.3, найдем, что $-K_{X'} \cdot \psi(C) \leq 2$. Но для $X' = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ имеем $-K_{X'} \sim \mathcal{O}_{X'}(12)$ (см. [25]). Тогда

$$0 < \mathcal{O}_{X'}(1) \cdot \psi(C) \leq \frac{1}{6},$$

откуда следует, что кривая $\psi(C)$ проходит через особые точки на X' . Это противоречит тому, что $E_\psi \cap C = \emptyset$. Значит, $\psi(C)$ – точка. Тогда согласно замечанию 3.4 и рассуждениям в примере 2.13 имеем $\psi(C) \neq P$ и $\psi(C) \neq Q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Положим $O := \psi(C)$. Согласно лемме 3.5 и примеру 2.13 точка $O \in X'$ – особенность типа cA_1 . В частности, имеем $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Согласно предложениям 2.2 и 2.3 многообразие X' может быть антиканонически вложено в $\mathbb{P}^{38}$. Всюду далее X' рассматривается по отношению к этому вложению. Пусть π – проекция многообразия X' из точки O , определенной в замечании 3.6.

ЛЕММА 3.7. *Проекция π бирациональна и $\pi(X')$ есть трехмерное многообразие Фано степени семьдесят.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma: W \rightarrow X'$ – раздутие точки O на X' . Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tau \\ X' & \dashrightarrow \pi & \pi(X') \end{array}$$

Отображение проекции π задается линейной системой $\mathcal{H} \subset |-K_{X'}|$ всех гиперплоских сечений многообразия X' , проходящих через точку O . Так как $O \in X'$ – особенность типа cA_1 (см. замечание 3.6), то для общей поверхности $H \in \mathcal{H}$ имеем

$$\sigma_*^{-1}H = \sigma^*(H) - E_\sigma,$$

где E_σ – σ -исключительный дивизор. С другой стороны, из формулы присоединения следует, что

$$K_W = \sigma^*K_{X'} + E_\sigma.$$

Таким образом, морфизм $\tau: W \rightarrow \pi(X')$ задается линейной системой $\sigma_*^{-1}\mathcal{H} \subseteq |-K_W|$. В частности, W является слабым многообразием Фано, так как $\sigma_*^{-1}\mathcal{H}$ свободна и $-K_W^3 = 70$. Отсюда получаем, что $\dim \pi(X') = 3$ и проекция π бирациональна, поскольку согласно предложению 2.4 многообразие X' является пересечением квадрик в $\mathbb{P}^{38}$. Тогда, так как многообразие W имеет канонические горенштейновы особенности и τ является крепантным морфизмом, особенности $\pi(X')$ также канонические горенштейновы (см. [19]); кроме того, $-K_{\pi(X')} \sim \mathcal{O}_{\pi(X')}(1)$. Отсюда следует, что $\pi(X') \subset \mathbb{P}^{37}$ – многообразие Фано степени семьдесят.

ЛЕММА 3.8. *Имеем $X = \pi(X')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 3.3, отображение

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}: X' \dashrightarrow X$$

задается линейной системой $|-K_{X'} - \psi(C)|$. Но в предыдущих обозначениях $\psi(C) = O$. Значит, X есть образ X' при проекции из точки O , откуда следует, что $\pi(X') = X$.

Предложение 3.2 полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть выполнены условия предложения 3.2. Тогда многообразие X имеет единственную особую точку, не являющуюся cDV.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях из примера 2.13 пусть L – множество особых точек многообразия $\mathbb{P} := \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$.

ЛЕММА 3.10. Множество L – это прямая на $\mathbb{P}$ (т.е. $L \simeq \mathbb{P}^1$ и $-K_{\mathbb{P}} \cdot L = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кривая L задана уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, где x_0, x_1, x_2, x_3 – однородные координаты на $\mathbb{P}$ с весами 6, 4, 1, 1 соответственно (см. [25; 5.15]). Отсюда, в частности, следует, что $L \simeq \mathbb{P}^1$. Остается показать, что $-K_{\mathbb{P}} \cdot L = 1$.

Пусть S – поверхность на $\mathbb{P}$, заданная уравнением $x_3 = 0$. Тогда $L \subset S$ и

$$-K_{\mathbb{P}} \cdot L = -K_{\mathbb{P}}|_S \cdot L,$$

где последнее пересечение берется на $S = \mathbb{P}(6, 4, 1) \simeq \mathbb{P}(3, 2, 1)$ (см. [25; 5.7]).

Так как $-K_{\mathbb{P}} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(12)$, то общий элемент $D \in |-K_{\mathbb{P}}|$ задается уравнением

$$a_0 x_0^2 + a_6(x_2, x_3)x_0 + a_2(x_2, x_3)x_0 x_1 + a_4(x_2, x_3)x_1^2 + a_8(x_2, x_3)x_1 + a_{12}(x_2, x_3) = 0,$$

где $a_i(x_2, x_3)$ – однородные многочлены степени i от переменных x_2, x_3 .

Если y_0, y_1, y_2 – однородные координаты на поверхности S с весами 3, 2, 1 соответственно, то $D|_S$ задается уравнением (см. [25; 5.10])

$$b_0 y_0^2 + b_1 y_0 y_3^3 + b_2 y_0 y_1 y_2 + b_3 y_1^3 + b_4 y_1^2 y_2^2 + b_5 y_1 y_2^4 + b_6 y_2^6 = 0$$

на S , где $b_i \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $D|_S \sim \mathcal{O}_S(6)$. Таким образом, получаем, что

$$-K_{\mathbb{P}} \cdot L = -K_{\mathbb{P}}|_S \cdot L = \mathcal{O}_S(6) \cdot \mathcal{O}_S(1) = 1,$$

где последнее пересечение берется на $S = \mathbb{P}(3, 2, 1)$ (см. [29]).

Согласно предложениям 2.2 и 2.3 многообразие $\mathbb{P}$ может быть антиканонически вложено в $\mathbb{P}^{38}$. Всюду далее $\mathbb{P}$ рассматривается по отношению к этому вложению.

ЛЕММА 3.11. Прямая L – единственная прямая на $\mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_0 \neq L$ – другая прямая на $\mathbb{P}$. Так как $-K_{\mathbb{P}} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(12)$ (см. [25]), то

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \cdot L_0 = \frac{1}{12}, \quad (3.2)$$

откуда $L \cap L_0 \neq \emptyset$.

Рассмотрим T – терминальную $\mathbb{Q}$ -факториальную модификацию многообразия $\mathbb{P}$. Обозначим через $\phi: T \rightarrow \mathbb{P}$ соответствующий крепантный морфизм, а через L'_0 – собственный прообраз прямой L_0 на T . Положим $E_Q := \phi^{-1}(Q)$, $E_L := \phi^{-1}(L)$, $E_P := \phi^{-1}(P) = E_P^{(1)} \cup E_P^{(2)}$ – компоненты ϕ -исключительного множества, где $E_P^{(i)}$ – неприводимые компоненты дивизора E_P такие, что $E_P^{(1)} \cap E_L = \emptyset$, а $E_P^{(2)} \cap E_L \neq \emptyset$ (см. пример 2.13).

Так как $\rho(\mathbb{P}) = 1$, то конус Мори $\overline{NE}(T)$ многообразия T порожден гранью, содержащей все ϕ -исключительные кривые, и K -отрицательным экстремальным лучом $R := \mathbb{R}_+[L^*]$ для некоторой кривой L^* на T (см. предложение 2.9 и замечание 2.10). В частности, так как $-K_T \cdot L'_0 = 1$, то

$$L'_0 \equiv L^* + E^* \quad (3.3)$$

на T , где E^* есть линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами неприводимых ϕ -исключительных кривых.

Далее, отображение проекции π_L многообразия $\mathbb{P}$ из прямой L задается линейной системой $\mathcal{H} \subset |-K_{\mathbb{P}}|$ всех гиперплоских сечений, содержащих L . При этом π_L стягивает прямую L_0 в точку, так как $L \cap L_0 \neq \emptyset$. С другой стороны, морфизм $\phi: T \rightarrow \mathbb{P}$ пропускается через раздутие прямой L (см. пример 2.13). Следовательно, линейная система $\phi_*^{-1}\mathcal{H}$ свободна на T и $H \cdot L'_0 = 0$ для $H \in \phi_*^{-1}\mathcal{H}$. Отсюда в силу условий $-K_T \cdot L'_0 = 1$, $L \cap L_0 \neq \emptyset$ следует, что $H \in |-K_T - E_L|$.

Таким образом, грань конуса $\overline{NE}(T)$, соответствующая численно эффективному дивизору $H \in |-K_T - E_L|$, содержит класс кривой L'_0 . Тогда согласно (3.3) имеем $H \cdot L^* = 0$, $H \cdot E^* = 0$. В частности, дивизор H пересекает любую кривую из носителя $\text{Supp}(E^*)$ цикла E^* по нулю. С другой стороны, если $\text{Supp}(E^*) \neq \emptyset$, то $\text{Supp}(E^*)$ содержит e_P , e_Q или e_L – неприводимые кривые на E_P , E_Q или E_L соответственно. Но пересечения $H \cdot e_P$, $H \cdot e_Q$ и $H \cdot e_L$ не равны нулю для $e_P \subset E_P^{(2)}$. Поэтому

$$\text{Supp}(E^*) = \emptyset \quad \text{или} \quad \text{Supp}(E^*) = e_P, \quad (3.4)$$

где $e_P \subset E_P^{(1)}$.

Из [7; предложения 4.11, 5.2], [26; (2.3.2)] и [27] следует, что экстремальное стягивание $\varphi_R: T \rightarrow T'$ луча R бирационально и отображает φ_R -исключительный дивизор E_R на кривую. Более того, если T' – слабое многообразие Фано, то из леммы 2.18 получаем, что $-K_{T'}^3 \geq -K_T^3 = 72$. Поэтому по теореме 1.3 и замечанию 2.8 T' является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией либо многообразия $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$, либо многообразия $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Тогда согласно замечаниям 2.12 и 2.14 либо $T' \simeq T$, либо T' изоморфно многообразию из примера 2.11. Отсюда следует, что $\rho(T')$ должно быть равно пяти или двум, но $\rho(T') = \rho(T) - 1 = 4$. Получаем противоречие.

Значит, по лемме 2.18 дивизор $-K_{T'}$ не является численно эффективным и $E_R = \mathbb{F}_1$ или $E_R = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Но если $E_R = \mathbb{F}_1$, то согласно рассуждениям в доказательстве следствия 2.19 $\phi(E_R)$ есть плоскость на многообразии $\mathbb{P}$ такая, что $L \not\subset \phi(E_R)$. Отсюда следует, что на $\mathbb{P}$ найдется прямая, не пересекающая L , а это невозможно (см. (3.2)).

Наконец, в случае $E_R = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ согласно следствию 2.19 имеем $L^* \subset E_R = E_L$. Если в (3.4) $\text{Supp}(E^*) = \emptyset$, то $L'_0 \subset E_R = E_L$, откуда следует, что $L_0 = L$. Получаем противоречие. Случай $\text{Supp}(E^*) = e_P$, где $e_P \subset E_P^{(1)}$ – неприводимая кривая (см. (3.4)), невозможен, так как на E_R имеем

$$L^* \sim l, \quad E_P|_{E_R} = E_P^{(2)}|_{E_R} \sim h \sim E_Q|_{E_R},$$

где h – минимальное сечение, а l – слой на поверхности E_R (см. доказательство леммы 2.18). Отсюда следует, что $E_P^{(2)} \cdot L^* = E_Q \cdot L^* = 1$. С другой стороны, так как $L_0 \neq L$, то либо $E_P^{(2)} \cdot L'_0 = 0$, либо $E_Q \cdot L'_0 = 0$. Поэтому, пересекая (3.3) с $E_P^{(2)}$ и с E_Q , получаем противоречие, так как $E_P^{(2)} \cdot e_P \geq 0$.

Воспользуемся обозначениями из доказательства предложения 3.2. Согласно леммам 3.10 и 3.11 бирациональный морфизм $\tau: W \rightarrow X = \pi(X')$ стягивает лишь собственный прообраз L' прямой L в единственную особую точку $o := \tau(L')$ на X .

ЛЕММА 3.12. *Особенность $o \in X$ хуже чем cDV.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $o \in X$ – особенность типа cDV, то согласно следствию 2.21 многообразие X имеет терминальные горенштейновы особенности. Но это противоречит теореме 1.2, так как $-K_X^3 = 70$.

Предложение 3.9 полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.13. Пусть выполнены условия предложения 3.2. Тогда для многообразия Фано X справедливо равенство $\rho(X) = 1$ (см. доказательство леммы 3.7). Обозначим это X через X_{70} . По построению многообразие X_{70} единственно с точностью до изоморфизма.

ЛЕММА 3.14. *Любая терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация многообразия X_{70} неособа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассуждений в примере 2.13 и из построения многообразия X_{70} в лемме 3.7 следует, что существует неособая терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация этого многообразия. Теперь из теоремы 2.4 в [24] и замечания 2.7 получаем, что любая терминальная $\mathbb{Q}$ -факториальная модификация X_{70} неособа.

ЛЕММА 3.15. *Если $f(E)$ – точка, то $X' \neq X_{70}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X' = X_{70}$. Тогда согласно лемме 3.14 многообразие Y' неособо. Отсюда, как и в доказательстве леммы 3.1, получаем, что $-K_{Y'}^3 = 62$, т.е. противоречие.

ЛЕММА 3.16. *Если $f(E)$ – кривая, то $X' \neq X_{70}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X' = X_{70}$. Положим $C := f(E)$. Тогда для ψ -исключительного множества E_ψ имеем $E_\psi \cap C = \emptyset$, так как многообразие X' имеет изолированные особенности (см. предложение 3.9 и замечание 3.4). Отсюда, как и в доказательстве леммы 3.3, найдем, что многообразие X является образом многообразия X' при бирациональной проекции из кривой $\psi(C)$ на X' такой, что

$$-K_{X'} \cdot \psi(C) = 1.$$

С другой стороны, согласно замечанию 3.13 имеем $\rho(X_{70}) = 1$. Поэтому, как и в доказательстве леммы 3.11, на многообразии Y' найдется кривая Z такая, что $-K_{Y'} \cdot Z = 1$ и $R := R_+[Z]$ – экстремальный луч; при этом экстремальное стягивание луча R бирационально и отображает исключительный

дивизор на кривую. Так как (в обозначениях из доказательства леммы 3.7) $-K_W \cdot \Sigma = -E_\sigma \cdot \Sigma \geq 2$ на W для любой кривой $\Sigma \subset E_\sigma$, то из построения многообразия X_{70} в лемме 3.7 и из леммы 3.11 следует, что прямая $\psi(Z)$ на X' не проходит через особую точку. Тогда из рассуждений в доказательстве следствия 2.19, из замечания 3.4 и из теоремы 1.3 получаем, что выполнены условия предложения 3.2, откуда согласно лемме 3.5 $Z \cap E_\psi \neq \emptyset$. Получено противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. Из теоремы 1.3, лемм 3.1, 3.15, 3.16, 2.16 и 2.18, замечания 3.4, предложений 3.2 и 3.9 следует, что для завершения доказательства теоремы 1.5 остается разобрать случай, когда на Y нет K -отрицательных экстремальных бирациональных стягиваний на слабые многообразия Фано с терминальными факториальными особенностями. Тогда согласно следствиям 2.17 и 2.19 соответствующее многообразие Фано X особо вдоль прямой или содержит плоскость.

§ 4. Редукция к лограсслоению Мори

В этом параграфе мы следуем § 6 работы [7]. Пусть X – многообразие Фано, удовлетворяющее условиям теоремы 1.5. Напомним, что, согласно замечанию 2.5 имеет место антиканоническое вложение многообразия X в $\mathbb{P}^{g+1}$, где $g \in \{34, 35, 36\}$ такое, что его образ $\varphi_{|-K_X|}(X)$ является пересечением квадрик. Всюду далее мы считаем, что $X = \varphi_{|-K_X|}(X)$.

Согласно замечанию 3.17 для завершения доказательства теоремы 1.5 можно считать, что X особо вдоль прямой Γ или содержит плоскость Π (случаи **A** и **B** соответственно). Также удобно выделить случай **C**: X содержит точку O , не являющуюся cDV.

Положим $\mathcal{L} := |-K_X|$ и рассмотрим следующие линейные системы $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &:= \{H \in \mathcal{L} \mid H \supset \Gamma\} && \text{в случае A,} \\ \mathcal{H} &:= \{H \mid H + \Pi \in \mathcal{L}\} && \text{в случае B,} \\ \mathcal{H} &:= \{H \in \mathcal{L} \mid H \ni O\} && \text{в случае C.}\end{aligned}$$

Возьмем терминальную $\mathbb{Q}$ -факториальную модификацию $\varphi: Y \rightarrow X$ многообразия X . Пусть $\mathcal{L}_Y$ и $\mathcal{H}_Y$ – собственные прообразы на Y линейных систем $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\varphi^* \mathcal{H} = \mathcal{H}_Y + D_Y,$$

где $D_Y \neq 0$ – эффективный φ -исключительный дивизор с целыми коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Согласно следствию 2.14 из [28] все неприводимые компоненты дивизора D_Y являются поверхностями отрицательной кодаировой размерности.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} K_Y + \mathcal{H}_Y + D_Y &= \varphi^*(K_X + \mathcal{H}) \sim 0 \quad \text{в случаях А и С,} \\ K_Y + \mathcal{H}_Y + D_Y &= \varphi^*(K_X + \mathcal{H} + \Pi) \sim 0 \quad \text{в случае В.} \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.2 (см. [7; лемма 6.5]). *Образ многообразия X при отображении $\varphi_{\mathcal{H}}$, заданном линейной системой $\mathcal{H}$, трезмерен.*

ЛЕММА 4.3 (см. [7; лемма 6.8]). *Многообразие Y можно выбрать таким, что*

- 1) *пара $(Y, \mathcal{H}_Y)$ канонична;*
- 2) *линейная система $\mathcal{H}_Y$ численно эффективна и составлена из дивизоров Картье.*

К паре $(Y, \mathcal{H}_Y)$ из леммы 4.3 применим $(K_Y + \mathcal{H}_Y)$ -программу минимальных моделей. На каждом шаге имеет место равенство $K + \mathcal{H} \equiv -D$ для некоторого дивизора $D > 0$. Тогда в конце программы получим пару $(W, \mathcal{H}_W)$ с $(K_W + \mathcal{H}_W)$ -отрицательным стягиванием $g: W \rightarrow V$ на многообразии V меньшей размерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Согласно [7; лемма 3.4] $(K_Y + \mathcal{H}_Y)$ -программа минимальных моделей сохраняет свойства линейной системы $\mathcal{H}_Y$ быть численно эффективной и состоять из дивизоров Картье. Отсюда следует, что многообразие W имеет лишь терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. Кроме того, обозначим через $\mathcal{L}_W$ собственный прообраз на W линейной системы $\mathcal{L}_Y$. Тогда $K_W + \mathcal{L}_W \sim 0$ и по лемме 3.1 из [7] пара $(W, \mathcal{L}_W)$ канонична. В частности, линейная система $|-K_W|$ подвижна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. По построению исходное многообразие Фано X является образом многообразия W при бирациональном отображении $\varphi_{\mathcal{L}_W}$, заданном линейной системой $\mathcal{L}_W \subset |-K_W|$. Кроме того, из леммы 4.2 следует, что линейная система $\mathcal{H}_W$ обильна над V и подвижна.

Далее, на W для некоторого $D_W > 0$ имеем

$$K_W + \mathcal{H}_W + D_W \sim 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Согласно замечанию 4.5 имеем $\dim |-K_W| \geq \dim \mathcal{L}_W = \dim |-K_X|$, а по построению линейной системы $\mathcal{H}$ $\dim \mathcal{H} \geq \dim |-K_X| - 3$. Тогда из условия $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$ следует, что $\dim |-K_W| \geq 35$ и $\dim |H| \geq 32$, где $H \in \mathcal{H}_W$ — общий дивизор.

По построению многообразие V является точкой, кривой или поверхностью. Более того, если V — точка, то из [7; предложение 7.2] следует, что $\dim |-K_W| \leq 34$. Это противоречит оценке в замечании 4.6.

Ниже будут отдельно рассмотрены случаи, когда V есть кривая и поверхность.

§ 5. Доказательство теоремы 1.5 в случае, когда V – кривая

Мы используем обозначения и соглашения из § 4. Из спектральной последовательности Лере и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль следует, что $H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^1(W, \mathcal{O}_W) = 0$. Таким образом, имеем $V \simeq \mathbb{P}^1$.

Общий слой W_η стягивания $g: W \rightarrow V$ является неособой поверхностью дель Педро. По построению для $H \in \mathcal{H}_W$ дивизор $-(K_{W_\eta} + H|_{W_\eta})$ обилен. С другой стороны, согласно замечанию 4.5 дивизор $H|_{W_\eta}$ также обилен. Отсюда следует, что $W_\eta \simeq \mathbb{P}^2$ или $W_\eta \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Кроме того, для $W_\eta \simeq \mathbb{P}^2$ имеем $H|_{W_\eta} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ или $H|_{W_\eta} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$.

ЛЕММА 5.1. *Если $W_\eta \simeq \mathbb{P}^2$ и $H|_{W_\eta} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, то W является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. При этом $W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ или $W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 8.1, предложения 8.2 из [7], замечания 4.4 следует, что $W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ со следующими возможными значениями для (d_1, d_2) :

$$(1, 1), \quad (2, 1), \quad (2, 2), \quad (3, 1), \quad (3, 2), \quad (4, 1), \quad (4, 2), \quad (5, 2), \quad (6, 2).$$

Во всех случаях, кроме двух последних, имеем $\dim |-K_W| \leq 33$ (см., например, [30; 2.5]). Значит, согласно замечанию 4.6 имеем $(d_1, d_2) = (5, 2)$ или $(d_1, d_2) = (6, 2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть выполнены условия леммы 5.1. Если*

$$W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}),$$

то $-K_X^3 = 66$ и X является антиканоническим образом многообразия W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ имеем $\dim |-K_W| = 35$. Тогда из замечания 4.6 следует равенство $|-K_W| = \mathcal{L}_W$. В частности, для исходного многообразия Фано X имеем $-K_X^3 = 66$. Покажем, что этот случай действительно возможен.

На W имеем $-K_W \sim 3M - 5L$, где M – тавтологический дивизор, а L – слой морфизма g (см., например, [30; A.10]). Тогда линейная система $|-K_W|$ порождается следующими многочленами (см. [30; 2.4]):

$$g_1 x_2^3, \quad x_1 x_3^2, \quad g_2 x_1 x_2 x_3, \quad g_4 x_1 x_2^2, \quad g_5 x_1^2 x_3, \quad g_7 x_1^2 x_2, \quad g_{10} x_1^3, \quad (5.1)$$

где x_1, x_2, x_3 – проективные координаты на слое $L \simeq \mathbb{P}^2$, g_i – однородный многочлен степени i от проективных координат t_0, t_1 на базе $V \simeq \mathbb{P}^1$. В частности, базисное множество линейной системы $\mathcal{L}_W := |-K_W|$ на W является кривой $C_0 \simeq \mathbb{P}^1$, заданной уравнениями $x_1 = x_2 = 0$.

Для разрешения множества неопределенности отображения $\varphi_{\mathcal{L}_W}: W \dashrightarrow X := \varphi_{\mathcal{L}_W}(W)$ можно считать, что в (5.1) выполнено следующее: $t_2 = x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $t_1 = z$.

Пусть $\sigma_1: W_1 \rightarrow W_0 = W$ – раздутие кривой C_0 с исключительным дивизором E_1 . Многообразие W_1 покрывается двумя аффинными картами $U_i^{(1)}$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}^3$. Обозначим снова через x, y, z координаты на каждой из карт $U_i^{(1)}$.

Отображение $U_1^{(1)} \rightarrow W_0$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (x, xy, z).$$

Тогда линейная система $\mathcal{L}_{W_1} := \sigma_{1*}^{-1} \mathcal{L}_W$, ограниченная на $U_1^{(1)}$, порождается следующими многочленами:

$$g_1 y^3 x^2, \quad 1, \quad g_2 xy, \quad g_4 x^2 y^2, \quad g_5 x, \quad g_7 x^2 y, \quad g_{10} x^2,$$

откуда следует, что $\mathcal{L}_{W_1}$ свободна на $U_1^{(1)}$.

Отображение $U_2^{(1)} \rightarrow W_0$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (xy, y, z).$$

Тогда линейная система $\mathcal{L}_{W_1}$, ограниченная на $U_2^{(1)}$, порождается следующими многочленами:

$$g_1 y^2, \quad x, \quad g_2 xy, \quad g_4 xy^2, \quad g_5 x^2 y, \quad g_7 x^2 y^2, \quad g_{10} x^3 y^2, \quad (5.2)$$

откуда следует, что базисное множество линейной системы $\mathcal{L}_{W_1}$ на W_1 является неприводимой рациональной кривой $C_1 \subset E_1$, заданной уравнениями $x = y = 0$.

Для разрешения множества неопределенности отображения $\varphi_{\mathcal{L}_{W_1}}: W_1 \dashrightarrow X$ можно считать, что $W_1 = U_2^{(1)}$ с координатами x, y, z . Тогда (5.2) есть базис линейной системы $\mathcal{L}_{W_1}$.

Пусть $\sigma_2: W_2 \rightarrow W_1$ – раздутие кривой C_1 с исключительным дивизором E_2 . Многообразие W_2 покрывается двумя аффинными картами $U_i^{(2)}$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}^3$. Обозначим снова через x, y, z координаты на каждой из карт $U_i^{(2)}$.

Отображение $U_1^{(2)} \rightarrow W_1$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (x, xy, z)$$

и снова линейная система $\mathcal{L}_{W_2} := \sigma_{2*}^{-1}(\mathcal{L}_{W_1})$ свободна на $U_1^{(2)}$.

Отображение $U_2^{(2)} \rightarrow W_1$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (xy, y, z).$$

Тогда линейная система $\mathcal{L}_{W_2}$, ограниченная на $U_2^{(2)}$, порождается следующими многочленами:

$$g_1 y, \quad x, \quad g_2 xy, \quad g_4 xy^2, \quad g_5 x^2 y^2, \quad g_7 x^2 y^3, \quad g_{10} x^3 y^4, \quad (5.3)$$

откуда следует, что базисное множество линейной системы $\mathcal{L}_{W_2}$ на W_2 является неприводимой рациональной кривой $C_2 \subset E_2$, заданной уравнениями $x = y = 0$.

Наконец, для разрешения множества неопределенности отображения $\varphi_{\mathcal{L}_{W_2}}: W_2 \dashrightarrow X$ можно считать, что $W_2 = U_2^{(2)}$ с координатами x, y, z . Тогда (5.3) есть базис линейной системы $\mathcal{L}_{W_2}$.

Пусть $\sigma_3: W_3 \rightarrow W_2$ – раздутие кривой C_2 с исключительным дивизором E_3 . Многообразие W_3 покрывается двумя аффинными картами $U_i^{(3)}$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}^3$. Обозначим снова через x, y, z координаты на каждой из карт $U_i^{(3)}$.

Отображение $U_1^{(3)} \rightarrow W_2$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (x, xy, z)$$

и снова линейная система $\mathcal{L}_{W_3} := \sigma_{3*}^{-1}(\mathcal{L}_{W_2})$ свободна на $U_1^{(3)}$.

Отображение $U_2^{(3)} \rightarrow W_2$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (xy, y, z).$$

Тогда линейная система $\mathcal{L}_{W_3}$, ограниченная на $U_2^{(2)}$, порождается следующими многочленами:

$$g_1, \quad x, \quad g_2xy, \quad g_4xy^2, \quad g_5x^2y^3, \quad g_7x^2y^4, \quad g_{10}x^3y^6,$$

откуда следует, что $\mathcal{L}_{W_3}$ свободна на $U_2^{(3)}$, а значит – и на W_3 .

ЛЕММА 5.3. *Многообразие W_3 есть неособое слабое многообразие Фано такое, что $\varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}$ – крепантный морфизм, а образ $X := \varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}(W_3)$ – многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, имеющее степень шестьдесят шесть.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $1 \leq i \leq 3$ имеем

$$K_{W_i} = \sigma_i^* K_{W_{i-1}} + E_i$$

и общий элемент в $\mathcal{L}_{W_{i-1}}$ неособ вдоль базисной кривой C_{i-1} (см. (5.1)–(5.3)). Так как $\mathcal{L}_{W_0} = |-K_W|$, то отсюда следует, что $\mathcal{L}_{W_i} \subset |-K_{W_i}|$ для всех $1 \leq i \leq 3$. В частности, дивизор $-K_{W_3}$ численно эффективен, так как линейная система $\mathcal{L}_{W_3}$ свободна. Далее, по построению многообразие W_3 неособо, а образ $\varphi_{|-K_W|}(W) = \varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}(W_3)$ трехмерен, так как дивизор $-K_W$ объемен.

Таким образом, W_3 есть неособое слабое многообразие Фано и $\varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}$ – крепантный морфизм. Отсюда $X := \varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}(W_3)$ – многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями (см. [19]); кроме того, имеем $-K_X \sim \mathcal{O}_X(1)$. Так как $\dim |-K_W| = 35$, то отсюда следует, что $-K_X^3 = 66$.

Предложение 5.2 полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. По построению многообразие Фано X из предложения 5.2 – торическое. Обозначим его через X_{66} . Из явного описания веера многообразия X_{66} в [31] следует, что X_{66} не является $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием и $\rho(X) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Если $X = X_{66}$, то особенности X хуже чем cDV.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями из доказательства предложения 5.2. Из леммы 5.3 следует, что $\varphi_{\mathcal{L}_{W_3}} : W_3 \rightarrow X$ является терминальной $\mathbb{Q}$ -факториальной модификацией многообразия X . В частности, $\mathcal{L}_{W_3} = |-K_{W_3}|$.

Пусть $L_t \subset E_2$ – слой $\sigma_2^{-1}(t)$, $t \in C_1 \simeq \mathbb{P}^1$, и L'_t – его собственный прообраз на W_3 .

ЛЕММА 5.6. *На W_3 имеем $K_{W_3} \cdot L'_t = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $E_1^* := (\sigma_2 \circ \sigma_3)^*(E_1)$ и $E_2^* := \sigma_3^*(E_2)$. Тогда

$$K_{W_3} = (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3)^*(K_W) + E_1^* + E_2^* + E_3.$$

Далее, на W_3 выполнены следующие соотношения:

$$E_3 \cdot L'_t = 1, \quad E_2^* \cdot L'_t = E_2 \cdot L_t = -1, \quad E_1^* \cdot L'_t = \sigma_2^*(E_1) \cdot L_t = 0.$$

Таким образом, получаем, что $K_{W_3} \cdot L'_t = 0$ на W_3 .

Пусть E'_2 – собственный прообраз поверхности E_2 на W_3 .

ЛЕММА 5.7. *На W_3 имеем $K_{W_3} \cdot E'_2 \cdot E_3 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения из доказательства предложения 5.2. Пусть $\sigma_3 : W_3 \rightarrow W_2$ – раздутие кривой C_2 с исключительным дивизором E_3 . Без ограничения общности можно считать, что $W_2 = U_2^{(2)}$ с координатами x, y, z . Тогда многообразие W_3 покрывается двумя аффинными картами $U_i^{(3)}$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}^3$. Обозначим снова через x, y, z координаты на каждой из $U_i^{(3)}$.

Отображение $U_1^{(3)} \rightarrow W_2$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (x, xy, z).$$

Тогда общая поверхность $S \in \mathcal{L}_{W_3} = |-K_{W_3}| = \sigma_{3*}^{-1}(\mathcal{L}_{W_2})$, ограниченная на $U_1^{(3)}$, задается уравнением

$$g_1 y + g_0 + g_2 x y + g_4 x^2 y^2 + g_5 x^3 y^2 + g_7 x^4 y^3 + g_{10} x^6 y^4 = 0,$$

где $g_0 \in \mathbb{C}$ (см. (5.3)). С другой стороны, поверхность E_3 на $U_1^{(3)}$ задается уравнением $x = 0$, а E_2 на W_2 – уравнением $y = 0$. Отсюда следует, что на $U_1^{(3)}$

$$S \cap E'_2 \cap E_3 = \emptyset.$$

Далее, отображение $U_2^{(3)} \rightarrow W_2$ задается формулой

$$(x, y, z) \mapsto (xy, y, z).$$

Тогда $E'_2 \cap U_2^{(3)} \cap E_3 = \emptyset$, так как поверхность E_3 на $U_2^{(3)}$ задается уравнением $y = 0$, а E_2 на W_2 – уравнением $y = 0$. Отсюда следует, что для общей поверхности $S \in \mathcal{L}_{W_3} = |-K_{W_3}|$ на $U_2^{(3)}$ выполнено

$$S \cap E'_2 \cap E_3 = \emptyset.$$

Таким образом, $K_{W_3} \cdot E'_2 \cdot E_3 = 0$ на W_3 .

Из лемм 5.6 и 5.7 следует, что дивизор E'_2 является $\varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}$ -исключительным и $o := \varphi_{\mathcal{L}_{W_3}}(E'_2)$ – точка на X . Более того, так как дискрепантность $a(E'_2, X) = 0$, то по теореме 2.20 особенность $o \in X$ хуже чем cDV. Предложение 5.5 полностью доказано.

Обратимся теперь ко второму случаю в лемме 5.1 и докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Пусть выполнены условия леммы 5.1. Если*

$$W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}),$$

то $X = X_{70}$ – многообразие Фано, построенное в предложении 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $W = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ имеем $\varphi_{|-K_W|}(W) = \mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ (см. [32; гл. 4, замечание 4.2]). Тогда из замечания 4.5 и условия $\dim \mathcal{L}_W \in \{35, 36, 37\}$ следует, что исходное многообразие Фано X является образом многообразия $\mathbb{P} := \mathbb{P}(6, 4, 1, 1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из точки, прямой или плоскости. Пусть $\pi: \mathbb{P} \dashrightarrow X$ – данная проекция.

ЛЕММА 5.9. *Если π – проекция из точки, то $X = X_{70}$ – многообразие Фано, построенное в предложении 3.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O – центр проекции π . Тогда O принадлежит $\mathbb{P}$, так как иначе π – изоморфизм, что невозможно, поскольку многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно. Более того, если O – неособая точка на $\mathbb{P}$, то $-K_X^3 = 71$, что также невозможно.

Используем обозначения примера 2.13. Если $O \neq P$ и $O \neq Q$, то $O \in \mathbb{P}$ – особенность типа $\text{с}A_1$. Тогда согласно лемме 3.7 имеем $X = X_{70}$.

Если $O = P$ или $O = Q$, то общее гиперплоское сечение S многообразия $\mathbb{P}$, проходящее через точку O , является поверхностью типа КЗ, особенности которой хуже, чем дювалевские. В самом деле, иначе либо $P \in \mathbb{P}$, либо $Q \in \mathbb{P}$ – особенность типа cDV, что невозможно (см. предложение 2.22, пример 2.13 и теорему 2.20). В частности, $\kappa(S) < 0$ для кодаировой размерности поверхности S .

С другой стороны, проекция π задает бирациональное отображение $S \dashrightarrow S'$ на общую поверхность $S' \in |-K_X|$. Отсюда следует, что $\kappa(S) = \kappa(S')$. Но по теореме 2.1 S' – поверхность типа КЗ с дювалевскими особенностями. Таким образом, $0 = \kappa(S') = \kappa(S) < 0$. Получаем противоречие.

Согласно лемме 5.9 остается разобрать случаи, когда π – проекция из прямой γ или из плоскости Ω .

Рассмотрим сначала случай проекции из прямой γ . Так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ является пересечением квадрик (см. предложение 2.4), то оно либо содержит γ , либо пересекается с γ по не более чем двум точкам. Заметим, что $\gamma \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно.

ЛЕММА 5.10. *Прямая γ не содержится в $\mathbb{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \subset \mathbb{P}$. Тогда согласно лемме 3.11 прямая γ совпадает с множеством особых точек многообразия $\mathbb{P}$. Отсюда, как и в доказательстве леммы 5.9, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$,

содержащего γ , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Таким образом, γ пересекает $\mathbb{P}$ по не более чем двум точкам.

ЛЕММА 5.11. *Прямая γ содержит только неособые точки многообразия $\mathbb{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения примера 2.13. Если γ содержит особую точку многообразия $\mathbb{P}$, отличную от P и Q , то из леммы 3.7 следует, что X является образом многообразия X_{70} при бирациональной проекции из некоторой точки O на X_{70} . При этом по построению X_{70} точка O – неособая точка, откуда $-K_X^3 = 69$.

Полученное противоречие означает, что множество $\gamma \cap \text{Sing}(\mathbb{P})$ может содержать только P и Q . Тогда, как и в доказательстве леммы 5.9, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$, содержащего γ , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Таким образом, γ пересекает $\mathbb{P}$ по не более чем двум неособым точкам.

ЛЕММА 5.12. *Имеем $-K_X^3 = 72$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – общее гиперплоское сечение многообразия $\mathbb{P}$, содержащее γ . Тогда S является неособой поверхностью типа К3, так как $\gamma \cap \mathbb{P}$ состоит из не более чем двух неособых точек. Далее, проекция π определяет бирациональное отображение $\chi: S \dashrightarrow S'$ на общую поверхность $S' \in |-K_X|$ с дювалевскими особенностями (см. теорему 2.1). Отсюда следует, что S – минимальное разрешение для S' и χ – морфизм.

Отображение проекции π задается линейной системой $\mathcal{L} \subset |-K_{\mathbb{P}}|$ всех гиперплоских сечений, содержащих γ . Положим $\mathcal{L}_S := \mathcal{L}|_S$ и $\mathcal{L}_{S'} := |-K_X||_{S'}$. Тогда $\mathcal{L}_S = \chi^* \mathcal{L}_{S'}$, откуда, в частности, следует равенство $(L)^2 = (L')^2$ для $L \in \mathcal{L}_S$ и $L' \in \mathcal{L}_{S'}$.

С другой стороны, имеем $(L')^2 = -K_X^3$ и $(L)^2 = -K_{\mathbb{P}}^3$. Таким образом,

$$-K_X^3 = (L')^2 = (L)^2 = 72.$$

Из леммы 5.12 получаем противоречие условию $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$. Обратимся теперь к последнему случаю, когда π – проекция из плоскости Ω .

Так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ является пересечением квадрик (см. предположение 2.4), то из леммы 3.11 следует, что $\mathbb{P}$ пересекается с Ω либо по не более чем четырем точкам, либо по конике. Снова заметим, что $\Omega \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно.

ЛЕММА 5.13. *Если $\Omega \cap \mathbb{P}$ – конечное множество, то оно состоит только из неособых точек многообразия $\mathbb{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения примера 2.13. Если Ω содержит особую точку многообразия $\mathbb{P}$, отличную от P и Q , то из леммы 3.7 следует, что X является образом многообразия X_{70} при бирациональной проекции из некоторой прямой γ' , которая пересекает X_{70} и не содержится в нем. В частности, $-K_X^3 < -K_{X_{70}}^3$. При этом по построению многообразия X_{70} прямая γ'

не проходит через особую точку на X_{70} . Отсюда, как и в доказательстве леммы 5.12, следует, что $-K_X^3 = -K_{X_{70}}^3$.

Полученное противоречие означает, что множество $\Omega \cap \text{Sing}(\mathbb{P})$ может содержать только P и Q . Тогда, как и в доказательстве леммы 5.9, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$, содержащего Ω , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Если Ω пересекает $\mathbb{P}$ по не более чем четырем точкам, то из леммы 5.13 и рассуждений в доказательстве леммы 5.12 следует, что $-K_X^3 = 72$. Это противоречит условию $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$. Таким образом, Ω пересекает $\mathbb{P}$ по конике C .

ЛЕММА 5.14. *Множество $C \cap \text{Sing}(\mathbb{P})$ непусто и состоит из точек типа $3A_1$ на $\mathbb{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $-K_{\mathbb{P}} \cdot C = 2$ и $-K_{\mathbb{P}} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(12)$ (см. [25]), то на $\mathbb{P}$ выполнено равенство

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \cdot C = \frac{1}{6},$$

откуда следует, что кривая C проходит через особые точки на многообразии $\mathbb{P}$.

Используем обозначения из примера 2.13. Если C содержит точку P или Q , то, как и в доказательстве леммы 5.9, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$, содержащего Ω , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Из лемм 5.14 и 3.7 следует, что X является образом многообразия X_{70} при бирациональной проекции из некоторой прямой на X_{70} . Тогда, как и в доказательстве леммы 3.16, получаем противоречие. Предложение 5.8 полностью доказано.

Для $W_{\eta} \simeq \mathbb{P}^2$ и $H|_{W_{\eta}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ согласно предложению 8.7 из [7] существует $(K_W + \mathcal{L}_W)$ -крепантное бирациональное отображение $W \dashrightarrow W_0$ на $\mathbb{P}^2$ -расслоение W_0 над V . Тогда пара $(W_0, \mathcal{L}_0)$ канонична и линейная система $\mathcal{L}_0 \subset |-K_{W_0}|$ задает бирациональное отображение $\varphi_{\mathcal{L}_0}: W_0 \dashrightarrow X$ (см. замечания 4.4 и 4.5). Снова согласно лемме 5.1

$$W_0 = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \quad \text{или} \quad W_0 = \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}),$$

откуда, как и в доказательстве предложений 5.2 и 5.8, найдем, что исходное многообразие Фано X изоморфно X_{70} или X_{66} (см. замечания 3.13 и 5.4).

Наконец, если $W_{\eta} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то к исходному многообразию Фано X с $-K_X^3 \in \{66, 68, 70\}$ применимо предложение 9.4 из [7]. Поэтому существует $(K_W + \mathcal{L}_W)$ -крепантное бирациональное отображение $W \dashrightarrow W_0$ на $\mathbb{P}^2$ -расслоение W_0 над V и применимы предыдущие рассуждения.

Теорема 1.5 полностью доказана в случае, когда V – кривая.

§ 6. Доказательство теоремы 1.5 в случае, когда V – поверхность

Мы используем обозначения и соглашения из § 4. В настоящем параграфе $g: W \rightarrow V$ есть $(K_W + \mathcal{H}_W)$ -отрицательное экстремальное стягивание на поверхность V . Следуя рассуждениям, использованным в доказательстве предложения 10.3 из [7], покажем, что этот случай невозможен.

ЛЕММА 6.1 (см. [7; лемма 10.1]). *Поверхность V неособа и $g: W \rightarrow V$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение.*

Для слоя F стягивания g имеем $-K_W \cdot F = 2$. Отсюда и из соотношения

$$K_W + \mathcal{H}_W + D_W \sim 0$$

следует, что $H \in \mathcal{H}_W$ и D_W – сечения морфизма g .

Положим $\mathcal{E} := g_* \mathcal{O}_W(H)$. Тогда $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга два над V и $W \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Кроме того, согласно лемме 4.4 из [7] получаем, что

$$\dim |H| + 1 = h^0(V, \mathcal{E}) = \chi(V, \mathcal{E}). \quad (6.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Имеем $\dim |H| \in \{32, 33, 34, 35\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 4.6 справедлива оценка $\dim |H| \geq 32$.

Пусть $\dim |H| \geq 36$. Тогда из доказательства предложения 10.3 из [7] следует, что $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6))$. В частности, антиканоническим образом многообразия W является многообразие $\mathbb{P}(3, 1, 1, 1)$ (см. пример 2.11).

Из замечания 4.5 и условия $\dim \mathcal{L}_W \in \{35, 36, 37\}$ следует, что исходное многообразие Фано X является образом многообразия $\mathbb{P} := \varphi|_{-K_W}(W) = \mathbb{P}(3, 1, 1, 1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из точки, прямой или плоскости. Пусть $\pi: \mathbb{P} \dashrightarrow X$ – данная проекция.

ЛЕММА 6.3. *Если π – проекция из точки, то $-K_X^3 \notin \{66, 68, 70\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O – центр проекции π . Тогда O принадлежит $\mathbb{P}$, так как иначе π является изоморфизмом, что невозможно, поскольку многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно. Более того, если O – неособая точка на $\mathbb{P}$, то $-K_X^3 = 71$.

Пусть O – единственная особая точка на $\mathbb{P}$. Тогда особенность $O \in \mathbb{P}$ хуже чем cDV (см. пример 2.11 и теорему 2.20). Отсюда получаем, что общее гиперплоское сечение S многообразия $\mathbb{P}$, проходящее через точку O , является поверхностью типа КЗ, особенности которой хуже, чем дювалевские (см. предложение 2.22). В частности, $\kappa(S) < 0$ для кодаировой размерности поверхности S .

С другой стороны, проекция π задает бирациональное отображение $S \dashrightarrow S'$ на общую поверхность $S' \in |-K_X|$. Отсюда следует, что $\kappa(S) = \kappa(S')$. Но по теореме 2.1 S' – поверхность типа КЗ с дювалевскими особенностями. Таким образом, $0 = \kappa(S') = \kappa(S) < 0$. Получаем противоречие.

ЛЕММА 6.4. *Если π – проекция из прямой, то $-K_X^3 \notin \{66, 68, 70\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – центр проекции π . Тогда γ пересекает $\mathbb{P}$, так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно. Более того, прямая γ не содержится в $\mathbb{P}$, так как дивизор $-K_{\mathbb{P}}$ делим в группе $\text{Pic}(\mathbb{P})$ и пересекает $\mathbb{P}$ по не более, чем двум точкам, так как многообразию $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ является пересечением квадрик (см. предложение 2.4).

Если γ содержит единственную особую точку на $\mathbb{P}$, то, как и в доказательстве леммы 6.3, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$, содержащего γ , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Наконец, если γ содержит только неособые точки на $\mathbb{P}$, то общее гиперплоское сечение S многообразия $\mathbb{P}$, содержащее γ , является неособой поверхностью типа КЗ, так как $\gamma \cap \mathbb{P}$ состоит из не более чем двух точек. Далее, проекция π задает бирациональное отображение $\chi: S \dashrightarrow S'$ на общую поверхность $S' \in |-K_X|$ с дювалевскими особенностями (см. теорему 2.1). Отсюда следует, что S – минимальное разрешение для S' и χ – морфизм.

Отображение проекции π задается линейной системой $\mathcal{L} \subset |-K_{\mathbb{P}}|$ всех гиперплоских сечений, содержащих γ . Положим $\mathcal{L}_S := \mathcal{L}|_S$, $\mathcal{L}_{S'} := |-K_X||_{S'}$. Тогда $\mathcal{L}_S = \chi^* \mathcal{L}_{S'}$, откуда, в частности, следует равенство $(L)^2 = (L')^2$ для $L \in \mathcal{L}_S$ и $L' \in \mathcal{L}_{S'}$.

С другой стороны, имеем $(L')^2 = -K_X^3$, $(L)^2 = -K_{\mathbb{P}}^3$. Таким образом, получаем, что

$$-K_X^3 = (L')^2 = (L)^2 = 72.$$

ЛЕММА 6.5. Если π – проекция из плоскости, то $-K_X^3 \notin \{66, 68, 70\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – центр проекции π . Тогда Ω пересекает $\mathbb{P}$, так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ невырожденно. Более того, плоскость Ω не содержится в $\mathbb{P}$, так как дивизор $-K_{\mathbb{P}}$ делим в группе $\text{Pic}(\mathbb{P})$ и пересекает $\mathbb{P}$ либо по не более чем четырем точкам, либо по конике, так как многообразие $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}^{38}$ является пересечением квадрик (см. предложение 2.4).

Если Ω пересекает $\mathbb{P}$ по не более чем четырем точкам, то, как и в доказательстве леммы 6.4, получим, что $-K_X^3 = 72$.

Пусть теперь $C := \Omega \cap \mathbb{P}$ – коника. Образ многообразия $\mathbb{P}$ при изоморфизме $\varphi|_{-\frac{1}{2}K_{\mathbb{P}}|}$ является конусом над поверхностью дель Пеццо степени девять. Отсюда получаем, что $\varphi|_{-\frac{1}{2}K_{\mathbb{P}}|}(C)$ – образующая этого конуса. В частности, C содержит единственную особую точку на $\mathbb{P}$. Тогда, как и в доказательстве леммы 6.3, для общего гиперплоского сечения S многообразия $\mathbb{P}$, содержащего Ω , имеем $\kappa(S) < 0$, а для его бирационального образа S' на X имеем $\kappa(S') = 0$. Получаем противоречие.

Из лемм 6.3–6.5 получаем противоречие условию $\dim |H| \geq 36$ и условию $\dim \mathcal{L}_W \in \{35, 36, 37\}$. Предложение 6.2 полностью доказано.

ЛЕММА 6.6 (см. [7]). Поверхность V рациональная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из спектральной последовательности Лере и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем $H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^1(W, \mathcal{O}_W) = 0$.

Кроме того, поверхность V накрывается неприводимой компонентой дивизора D_W , имеющей отрицательную кодайрову размерность (см. замечание 4.1). Так как согласно лемме 6.1 поверхность V неособа, то V – рациональная поверхность.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Согласно лемме 10.4 из [7] и лемме 6.6 можно считать, что $V \simeq \mathbb{P}^2$ или $V \simeq \mathbb{F}_n$ для некоторого $n \neq 1$. Более того, согласно лемме 10.12 из [7] в последнем случае $n \leq 4$.

Обозначим через $c_i := c_i(\mathcal{E})$ i -й класс Чжэня векторного расслоения $\mathcal{E}$, $i = 1, 2$. Тогда из относительной точной последовательности Эйлера получим, что

$$-K_W \sim 2H + g^*(-K_V - c_1),$$

а по формуле Хирша

$$H^2 \equiv H \cdot g^*c_1 - c_2, \quad H^3 = c_1^2 - c_2.$$

В частности, имеет место следующая формула:

$$-K_W^3 = 6K_V^2 + 2c_1^2 - 8c_2. \quad (6.2)$$

Напомним также формулу Римана–Роха для векторных расслоений ранга два на рациональной поверхности:

$$\chi(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2 - K_V \cdot c_1) + 2. \quad (6.3)$$

Нам также понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 6.8 (см. [7]). Для любого численно эффективного дивизора B на поверхности V неравенство

$$c_1 \cdot B \leq -3K_V \cdot B$$

имеет место.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$D_W \sim H + g^*(-K_V - c_1),$$

то для численно эффективного дивизора B на поверхности V имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq -K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 2H^2 \cdot g^*B + 3(-K_V - c_1) \cdot B \\ &= 2c_1 \cdot B + 3(-K_V - c_1) \cdot B = -3K_V \cdot B - c_1 \cdot B. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6.9 (см. [7]). Пусть $B > 0$ – численно эффективный дивизор на поверхности V такой, что $-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$. Тогда дивизор $-K_W$ численно эффективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – горизонтальная кривая на многообразии W такая, что $-K_W \cdot R < 0$. Тогда

$$D_W \cdot R = (-K_W - H) \cdot R < 0.$$

Отсюда $R \subseteq L \cap D_W$ для общей поверхности $L \in |-K_W|$. Но из условия леммы следует, что пересечение $L \cap D_W$ состоит из слоев морфизма g . Получаем противоречие.

ЛЕММА 6.10. *Класс $-K_V + c_1$ численно эффективен на поверхности V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что линейная система $|-K_W|$ подвижна и дивизор H численно эффективен (см. замечания 4.4 и 4.5). Тогда для любой неприводимой кривой C на поверхности V имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq -K_W \cdot H \cdot g^*C = 2H^2 \cdot g^*C + (-K_V - c_1) \cdot C \\ &= 2c_1 \cdot C + (-K_V - c_1) \cdot C = (-K_V + c_1) \cdot C. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6.11 (см. [7; лемма 10.6]). *Пусть $Z \subset V$ – неприводимая рациональная кривая такая, что $\dim |Z| > 0$, и пусть $\mathcal{E}|_Z \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2)$. Тогда $|d_1 - d_2| \leq 2 + Z^2$. Более того, если $V \simeq \mathbb{F}_n$, $n \geq 0$, и Z – тавтологический дивизор на поверхности V , то $|d_1 - d_2| = c_1(\mathcal{E}) \cdot Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m := |d_1 - d_2|$ и $G := g^{-1}(Z)$. Тогда $G \simeq \mathbb{F}_m$ и для минимального сечения Σ на поверхности G имеем

$$-2 + m = -2 - \Sigma^2 = K_G \cdot \Sigma = K_W \cdot \Sigma + G \cdot \Sigma = K_W \cdot \Sigma + Z^2. \quad (6.4)$$

Так как линейная система $|-K_W|$ подвижна, получаем, что $K_W \cdot \Sigma \leq 0$, откуда $m \leq 2 + Z^2$. Более того, если Z – тавтологический дивизор на поверхности $V \simeq \mathbb{F}_n$, $n \geq 0$, то $Z^2 = n$ и

$$K_W \cdot \Sigma = g^*(K_V + c_1(\mathcal{E})) \cdot \Sigma = (K_V + c_1(\mathcal{E})) \cdot Z = -n - 2 + c_1(\mathcal{E}) \cdot Z.$$

Из (6.4) получаем, что $m = c_1(\mathcal{E}) \cdot Z$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. *Имеем $V \neq \mathbb{P}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = \mathbb{P}^2$. Тогда имеем $H^{2i}(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$. Таким образом, можно считать, что c_1 и c_2 – целые числа. Тогда согласно лемме 6.8 получаем, что $0 \leq c_1 \leq 9$.

ЛЕММА 6.13. *Расслоение $\mathcal{E}$ неразложимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}$ разложимо. Тогда $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a+b)$ для некоторого целого $b \geq 0$, а так как дивизор H численно эффективен, то и целое $a \geq 0$.

Далее, $c_1 = 2a + b$, $c_2 = a^2 + ab$. Таким образом, из (6.3) получаем

$$\chi(V, \mathcal{E}) = \frac{1}{2}(2a^2 + 2ab + b^2 + 6a + 3b) + 2.$$

Согласно (6.1) и лемме 6.2 имеем $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$. Тогда из неравенств $a, b \geq 0$, $0 \leq c_1 \leq 9$ легко следует, что $\chi(V, \mathcal{E}) = 36$ и $(a, b) = (4, 1)$ – единственная возможность. В частности, $c_1 = -3K_V$. Тогда из доказательства леммы 6.8 следует, что

$$-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$$

для любой кривой B на поверхности V . Отсюда по лемме 6.9 дивизор $-K_W$ численно эффективен, а значит, W – слабое многообразие Фано.

С другой стороны, для $(a, b) = (4, 1)$ имеем $c_2 = 20$. Тогда согласно (6.2) $-K_W^3 = 56$ и из формулы Римана–Роха и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль получаем

$$\dim |-K_W| = -\frac{1}{2}K_W^3 + 2 = 30.$$

Но согласно замечанию 4.6 имеем $\dim |-K_W| \geq 35$. Получаем противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.14. Рассуждения из доказательства предложения 10.3 из [7] показывают, что если $c_1 = 9$, то расслоение $\mathcal{E}$ разложимо. Поэтому в силу леммы 6.13 имеем $0 \leq c_1 \leq 8$.

ЛЕММА 6.15. Число c_1 чётно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c_1 нечётно. Тогда согласно замечанию 6.14 имеем $c_1 = 2m - 3$ для некоторого целого $2 \leq m \leq 5$. Так как согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$, то из (6.3) получаем, что $2m^2 - 3m - c_2 \geq 31$. Тогда

$$c_1(\mathcal{E}(-m)) = -3, \quad c_2(\mathcal{E}(-m)) = c_2 - m^2 + 3m \leq m^2 - 31 < 0.$$

Далее, из формулы Римана–Роха и теоремы двойственности Серра находим, что

$$h^0(\mathcal{E}(-m)) + h^0(\mathcal{E}(-m) \otimes \det \mathcal{E}(-m)^* \otimes \mathcal{O}(-3)) \geq \chi(V, \mathcal{E}(-m)) \geq 1.$$

Таким образом, $H^0(\mathcal{E}(-m)) \neq 0$. Пусть $s \in H^0(\mathcal{E}(-m))$ – ненулевое сечение. Если s нигде не обращается в нуль, то имеет место вложение $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{E}(-m)$ и $\mathcal{E}(-m)$ разложимо. Это противоречит лемме 6.13.

Пусть $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{P}^2$ – множество нулей сечения s . Так как $c_2(\mathcal{E}(-m)) < 0$, то $\dim Y = 1$. Выберем общую прямую $Z \subset \mathbb{P}^2$, и пусть пересечение $Z \cap Y$ состоит из k точек. Так как $c_1(\mathcal{E}(-m)) = -3$, то

$$\mathcal{E}(-m)|_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k-3).$$

Тогда из леммы 6.11 имеем $2k + 3 \leq 3$. Значит, $k = 0$ и $Y = \emptyset$. Получаем противоречие.

Из леммы 6.15 и замечания 6.14 следует, что $c_1 = 2m - 2$ для некоторого целого $1 \leq m \leq 5$. Так как согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$, из (6.3) получаем, что $2m^2 - m - c_2 \geq 32$. Тогда

$$c_1(\mathcal{E}(-m)) = -2, \quad c_2(\mathcal{E}(-m)) = c_2 - m^2 + 2m \leq m^2 + m - 32 < 0.$$

Отсюда, как и в доказательстве леммы 6.15, находим, что существует сечение $s \in H^0(\mathcal{E}(-m))$ с одномерным множеством нулей $Y \subset \mathbb{P}^2$. Выберем общую прямую $Z \subset \mathbb{P}^2$, и пусть пересечение $Z \cap Y$ состоит из k точек. Так как $c_1(\mathcal{E}(-m)) = -2$, то

$$\mathcal{E}(-m)|_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k-2).$$

Тогда из леммы 6.11 следует, что $2k+2 \leq 3$. Значит, $k=0$ и $Y = \emptyset$. Получаем противоречие.

Предложение 6.12 полностью доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.16. *Имеем $V \neq \mathbb{F}_n$, $n \in \{0, 2, 3, 4\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = \mathbb{F}_n$, $n \in \{0, 2, 3, 4\}$. Тогда $H^4(\mathbb{F}_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ и $H^2(\mathbb{F}_n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \cdot h \oplus \mathbb{Z} \cdot l$, где h – минимальное сечение, а l – слой на поверхности $\mathbb{F}_n$. Положим $c_1 := ah + bl$, $c_2 := c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Тогда согласно лемме 6.8 имеем

$$a = c_1 l \leq -3K_V l = 6, \quad b = c_1(h + nl) \leq -3K_V(h + nl) = 3(2 + n). \quad (6.5)$$

Более того, $a \geq 0$ и $b \geq na$, так как дивизор H численно эффе́ктивен.

Пусть p, q – целые числа такие, что $a = 2p + a'$, $b = 2q + b'$ для некоторых $a', b' \in \mathbb{Z}$, $-2 \leq a', b' \leq -1$. Рассмотрим подкрученное расслоение $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(-ph - ql)$ и положим $c'_i := c_i(\mathcal{E}')$ – i -й класс Чжэня расслоения $\mathcal{E}'$, $i = 1, 2$. Имеем

$$c'_1 = a'h + b'l, \quad c'_2 = c + nap - aq - bp - np^2 + 2pq. \quad (6.6)$$

Далее, из (6.3) находим, что

$$\chi(V, \mathcal{E}) = -\frac{1}{2}na(a+1) + ab + a + b - c + 2, \quad (6.7)$$

$$\chi(V, \mathcal{E}') = \left(b' - \frac{1}{2}na'\right)(a' + 1) + a' - c'_2 + 2. \quad (6.8)$$

ЛЕММА 6.17. *Если $n = 0$, то $c'_2 < 0$ и $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.5) имеем $0 \leq a, b \leq 6$. Далее, из (6.6) и (6.7) получаем

$$c'_2 = c - aq - bp + 2pq = \frac{1}{2}ab + a + b - \chi(V, \mathcal{E}) + 2 + \frac{1}{2}a'b'.$$

Согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$. Тогда легко видеть, что $c'_2 < 0$, если a или b меньше шести. Более того, $c'_2 < 0$ для всех $0 \leq a, b \leq 6$ и $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{35, 36\}$.

Пусть $a = b = 6$ и $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34\}$. Тогда $c_1 = 6h + 6l = -3K_V$ и из доказательства леммы 6.8 следует, что

$$-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$$

для любой кривой B на поверхности V . Отсюда по лемме 6.9 дивизор $-K_W$ численно эффе́ктивен, а значит, W – слабое многообразие Фано.

С другой стороны, из (6.7) получаем, что

$$\chi(V, \mathcal{E}) = ab + a + b - c + 2.$$

Тогда для $a = b = 6$ и $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34\}$ имеем $c \in \{16, 17\}$. Из (6.2) тогда следует, что $-K_W^3 \in \{64, 56\}$, и по формуле Римана–Роха и теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль получаем, что

$$\dim |-K_W| = -\frac{1}{2}K_W^3 + 2 \leq 34.$$

Однако согласно замечанию 4.6 имеем $\dim |-K_W| \geq 35$. Получаем противоречие. Таким образом, $c'_2 < 0$.

Теперь из (6.8) находим, что

$$\chi(V, \mathcal{E}') = b'(a' + 1) + a' - c'_2 + 2.$$

Так как $-2 \leq a', b' \leq -1$ и $c'_2 < 0$, то $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ЛЕММА 6.18. Если $n = 2$, то $c'_2 < 0$ и $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.5) имеем $2a \leq b \leq 12$ и $0 \leq a \leq 6$. Далее, из (6.6) и (6.7) получаем, что

$$c'_2 = c + 2ap - aq - bp - 2p^2 + 2pq = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ab + b - \chi(V, \mathcal{E}) + 2 - \frac{1}{2}a'^2 + \frac{1}{2}a'b'.$$

Согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$. Тогда

$$\begin{aligned} c'_2 &\leq -\frac{1}{2}a^2 + 6a + 14 - \chi(V, \mathcal{E}) - \frac{1}{2}a'^2 - a' \\ &\leq 32 - \chi(V, \mathcal{E}) - \frac{1}{2}a'^2 - a' \leq -1 - \frac{1}{2}a'^2 - a' < 0. \end{aligned}$$

Наконец, из (6.8) находим, что

$$\chi(V, \mathcal{E}') = (b' - a')(a' + 1) + a' - c'_2 + 2.$$

Тогда $\chi(V, \mathcal{E}') \leq 0$ только при $a' = -2$, $b' = -1$ и $c'_2 = -1$, так как $-2 \leq a', b' \leq -1$ и $c'_2 < 0$. Но в этом случае $b \leq 11$, откуда следует, что

$$-1 = c'_2 \leq -\frac{1}{2}a^2 + \frac{11}{2}a + 12 - \chi(V, \mathcal{E}) < -1.$$

Получаем противоречие. Значит, $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ЛЕММА 6.19. Если $n = 3$, то $c'_2 < 0$ и $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.5) имеем $3a \leq b \leq 15$, откуда следует, что $0 \leq a \leq 5$. Далее, из (6.6) и (6.7) получаем, что

$$c'_2 = c + 3ap - aq - bp - 3p^2 + 2pq = -\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a + b - \chi(V, \mathcal{E}) + 2 - \frac{3}{4}a'^2 + \frac{1}{2}a'b'.$$

Согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$. Тогда если $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{34, 35, 36\}$, то для $3a \leq b \leq 15$ и $0 \leq a \leq 5$ справедливы неравенства

$$c'_2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + 7a + 17 - \chi(V, \mathcal{E}) - \frac{3}{4}a'^2 + \frac{1}{2}a'b' < 33 - \chi(V, \mathcal{E}) - \frac{1}{2}b' \leq 0.$$

Если $\chi(V, \mathcal{E}) = 33$, то для $3a \leq b \leq 14$ и $0 \leq a \leq 5$ получаем, что

$$c'_2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + \frac{13}{2}a - 17 - \frac{3}{4}a'^2 + \frac{1}{2}a'b' \leq -\frac{3}{4}a^2 + \frac{13}{2}a - 15 - \frac{3}{4}a'^2 < 0,$$

а для $\chi(V, \mathcal{E}) = 33$, $b = 15$ и $0 \leq a \leq 4$ имеем

$$c'_2 = -\frac{3}{4}a^2 + 7a - 16 - \frac{3}{4}a'^2 - \frac{1}{2}a' < 0.$$

Пусть теперь $\chi(V, \mathcal{E}) = 33$, $a = 5$ и $b = 15$ (заметим, что в этом случае $c'_2 = 0$). Тогда из (6.5) и доказательства леммы 6.8 следует, что

$$-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$$

для $B \sim h + 3l$ на V . Отсюда согласно лемме 6.9 дивизор $-K_W$ численно эффективен, а значит, W – слабое многообразие Фано.

С другой стороны, из (6.7) получаем, что

$$\chi(V, \mathcal{E}) = -\frac{3}{2}a(a+1) + ab + a + b - c + 2.$$

Тогда для $\chi(V, \mathcal{E}) = 33$, $a = 5$ и $b = 15$ имеем $c = 19$. Из (6.2) тогда следует, что $-K_W^3 = 46$, и по формуле Римана–Роха и теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль получаем

$$\dim |-K_W| = -\frac{1}{2}K_W^3 + 2 = 25.$$

Однако согласно замечанию 4.6 имеем $\dim |-K_W| \geq 35$. Получаем противоречие. Таким образом, $c'_2 < 0$.

Теперь из (6.8) находим, что

$$\chi(V, \mathcal{E}') = \left(b' - \frac{3}{2}a'\right)(a' + 1) + a' - c'_2 + 2.$$

Тогда $\chi(V, \mathcal{E}') \leq 0$ только при $a' = -2$, так как $-2 \leq a'$, $b' \leq -1$ и $c'_2 < 0$.

Если $a' = -2$ и $b' = -2$, то $\chi(V, \mathcal{E}') = -1 - c'_2$ и

$$c'_2 = -\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a + b - \chi(V, \mathcal{E}) + 1.$$

Имеем $a \leq 4$ и $3a \leq b \leq 14$. Тогда

$$c'_2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + \frac{13}{2}a - 18 < -1.$$

Значит, в этом случае $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

Далее, если $a' = -2$ и $b' = -1$, то $\chi(V, \mathcal{E}') = -2 - c'_2$ и

$$c'_2 = -\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a + b - \chi(V, \mathcal{E}).$$

Так как $a' = -2$, то $0 \leq a \leq 4$. Тогда для $3a \leq b \leq 13$ получаем

$$c'_2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + 6a + 13 - \chi(V, \mathcal{E}) \leq -\frac{3}{4}a^2 + 6a - 20 < -2,$$

откуда $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$ в этом случае.

Для $b > 13$ в силу условия $b' = -1$ имеем $b = 15$. Тогда для $0 \leq a \leq 3$ получаем

$$c'_2 \leq -\frac{3}{4}a^2 + 7a + 15 - \chi(V, \mathcal{E}) \leq -\frac{3}{4}a^2 + 7a - 18 < -2.$$

Значит, и в этом случае $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

Пусть теперь $a = 4$ и $b = 15$ (заметим, что в этом случае $c'_2 = -2$, откуда следует, что $\chi(V, \mathcal{E}') = 0$). Тогда из (6.5) и доказательства леммы 6.8 находим, что

$$-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$$

для $B \sim h + 3l$ на V . Отсюда получаем, что согласно лемме 6.9 дивизор $-K_W$ численно эффективен, а значит, W – слабое многообразие Фано. С другой стороны, для $a = 4$ и $b = 15$ имеем $c = 51 - \chi(V, \mathcal{E})$ (см. (6.7)), откуда $c \in \{15, 16, 17, 18\}$. Из (6.2) тогда следует, что $-K_W^3 \in \{48, 56, 64, 72\}$.

Если $-K_W^3 = 72$, то из теоремы 1.3, замечаний 2.8, 2.12 и 2.14 получаем, что W изоморфно многообразию из примера 2.11 или 2.13. В частности, должно быть $\rho(W) = 2$ или $\rho(W) = 5$, что невозможно, так как $\rho(W) = 3$.

Далее, для $-K_W^3 \in \{48, 56, 64\}$ из формулы Римана–Роха и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль следует, что

$$\dim |-K_W| = -\frac{1}{2}K_W^3 + 2 \leq 34.$$

Однако согласно замечанию 4.6 имеем $\dim |-K_W| \geq 35$. Получаем противоречие.

Таким образом, $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ЛЕММА 6.20. Если $n = 4$, то $c'_2 < 0$ и $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.5) имеем $4a \leq b \leq 18$, откуда $0 \leq a \leq 4$. Далее, из (6.6) и (6.7) следует, что

$$c'_2 = c + 4ap - aq - bp - 4p^2 + 2pq = -a^2 + \frac{1}{2}ab - a + b - \chi(V, \mathcal{E}) + 2 - a'^2 + \frac{1}{2}a'b'.$$

Согласно (6.1) и лемме 6.2 $\chi(V, \mathcal{E}) \in \{33, 34, 35, 36\}$. Тогда при условии, что $b \leq 17$, для $0 \leq a \leq 4$ получаем, что

$$c'_2 \leq -a^2 + \frac{15}{2}a - 14 - a'^2 + \frac{1}{2}a'b' \leq -a^2 + \frac{15}{2}a - 14 - a'^2 - a' < 0.$$

Пусть $b = 18$. Тогда $c'_2 \geq 0$ только для $a \in \{3, 4\}$. Далее, из (6.5) и доказательства леммы 6.8 следует, что

$$-K_W \cdot D_W \cdot g^*B = 0$$

для $B \sim h + 4l$ на V . Отсюда в силу леммы 6.9 получаем, что дивизор $-K_W$ численно эффективен, а значит, W – слабое многообразие Фано.

С другой стороны, для $a \in \{3, 4\}$ и $b = 18$ из (6.7) справедливо равенство

$$c = a(17 - 2a) + 20 - \chi(V, \mathcal{E}),$$

откуда $17 \leq c \leq 23$. Так как для $a \in \{3, 4\}$ и $b = 18$ имеем $c_1^2 \in \{72, 80\}$, то из (6.2) следует, что

$$-K_W^3 \in \{192 - 8c, 208 - 8c\}.$$

Если $c = 17$ и $c_1^2 = 80$, то $-K_W^3 = 72$, и из теоремы 1.3, замечаний 2.8, 2.12 и 2.14 получаем, что W изоморфно многообразию из примера 2.11 или 2.13. В частности, должно быть $\rho(W) = 2$ или $\rho(W) = 5$, что невозможно, так как $\rho(W) = 3$.

Далее, для $18 \leq c \leq 23$ имеем

$$-K_W^3 \leq 208 - 8c \leq 64,$$

и из формулы Римана–Роха и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль следует, что

$$\dim |-K_W| = -\frac{1}{2}K_W^3 + 2 \leq 34.$$

Однако согласно замечанию 4.6 верна оценка $\dim |-K_W| \geq 35$. Получаем противоречие. Таким образом, $c'_2 < 0$.

Теперь из (6.8) находим, что

$$\chi(V, \mathcal{E}') = (b' - 2a')(a' + 1) + a' - c'_2 + 2.$$

Тогда $\chi(V, \mathcal{E}') \leq 0$ только при $a' = -2$, так как $-2 \leq a'$, $b' \leq -1$ и $c'_2 < 0$.

Если $a' = -2$ и $b' = -1$, то $\chi(V, \mathcal{E}') = -3 - c'_2$ и

$$c'_2 = -a^2 + \frac{1}{2}ab - a + b - \chi(V, \mathcal{E}) - 1.$$

Так как $b' = -1$, то $4a \leq b \leq 17$. Тогда если $0 \leq a \leq 3$, то

$$c'_2 \leq -a^2 + \frac{15}{2}a - 17 < -3,$$

а если $a = 4$ и $4a \leq b \leq 16$, то

$$c'_2 = -54 + 3b < -3.$$

Таким образом, в обоих случаях $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$. Пусть теперь $a = 4$ и $b = 17$ (заметим, что в этом случае $c'_2 = -3$, откуда следует, что $\chi(V, \mathcal{E}') = 0$). Тогда

дивизор $-K_V + c_1 = 6h + 23l$ не является численно эффективным на $V = \mathbb{F}_4$, что противоречит лемме 6.10.

Далее, если $a' = -2$ и $b' = -2$, то $\chi(V, \mathcal{E}') = -2 - c'_2$ и

$$c'_2 = -a^2 + \frac{1}{2}ab - a + b - \chi(V, \mathcal{E}).$$

Если $4a \leq b \leq 16$, то при $0 \leq a \leq 4$ имеем

$$c'_2 \leq -a^2 + 7a - 17 < -2.$$

Значит, в этом случае $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

Для $b > 16$ имеем $b = 18$, так как $b' = -2$. Тогда при $0 \leq a \leq 3$ получаем, что $0 \leq a \leq 2$, так как $a' = -2$, и

$$c'_2 \leq -a^2 + 8a - 15 < -2,$$

откуда следует, что $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$ и в этом случае.

Пусть, наконец, $b = 18$ и $a = 4$. Тогда, как и при доказательстве оценки $c'_2 < 0$ выше, получаем, что W – слабое многообразие Фано такое, что $-K_W^3 = 72$ или $-K_W^3 \leq 64$. Как было показано, ни один из этих случаев не имеет места.

Таким образом, $\chi(V, \mathcal{E}') > 0$.

ЛЕММА 6.21 (см. [7; утверждение 10.18]). Имеем $H^0(V, \mathcal{E}') \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H^0(V, \mathcal{E}') = 0$. Тогда из лемм 6.17–6.20 следует, что $H^2(V, \mathcal{E}') \neq 0$. Далее, по теореме двойственности Серра

$$H^2(V, \mathcal{E}')^* \simeq H^0(V, \mathcal{E}'^* \otimes K_V) \simeq H^0(V, \mathcal{E}' \otimes \det \mathcal{E}'^* \otimes K_V).$$

Но $(\det \mathcal{E}'^* \otimes K_V)^* = \mathcal{O}_V((a'+2)h + (b'+n+2)l)$, откуда $H^0(V, (\det \mathcal{E}'^* \otimes K_V)^*) \neq 0$. Получаем противоречие.

Пусть $s \in H^0(V, \mathcal{E}')$ – ненулевое сечение. Если s нигде не обращается в нуль, то $\mathcal{E}'$ является расширением некоторого $\mathcal{E}_1$ с помощью $\mathcal{O}$. Но тогда $c'_2 = 0$, что противоречит леммам 6.17–6.20.

Пусть $\emptyset \neq Y \subset V$ – множество нулей сечения s . Так как $c'_2 < 0$, то $\dim Y = 1$. Пусть $Y \sim q_1h + q_2l$. Тогда ограничение $\mathcal{E}'$ на общую кривую $Z \in |h + nl|$ имеет вид

$$\mathcal{E}'|_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b' - q_2).$$

С другой стороны, из леммы 6.11, примененной к $\mathcal{E}'$, следует, что

$$0 \leq 2q_2 - b' = c'_1 Z = b' \leq -1.$$

Получаем противоречие. Предложение 6.16 полностью доказано.

Из замечания 6.7, предложений 6.12 и 6.16 получаем противоречие в случае, когда V – поверхность. Это завершает доказательство теоремы 1.5.

Автор благодарен Ю. Г. Прохорову, И. А. Чельцову и К. А. Шрамову за многочисленные полезные замечания и внимание к работе, что позволило исправить ошибку в предыдущей версии статьи. Автор также признателен В. А. Исковских за стимулирующие беседы.

Список литературы

- [1] A. Borisov, “Boundedness of Fano threefolds with log-terminal singularities of given index”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **8**:2 (2001), 329–342.
- [2] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. I”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:3 (1977), 485–527.
- [3] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 506–549; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. II”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 469–506.
- [4] Sh. Mori, Sh. Mukai, “Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ”, *Manuscripta Math.*, **36**:2 (1981), 147–162.
- [5] С. М. Львовский, “Ограниченность степени трехмерных многообразий Фано”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:6 (1981), 1288–1331; англ. пер.: S. M. L’vovskii, “Boundedness of the degree of Fano threefolds”, *Math. USSR-Izv.*, **19**:3 (1982), 521–558.
- [6] Yo. Namikawa, “Smoothing Fano 3-folds”, *J. Algebraic Geom.*, **6**:2 (1997), 307–324.
- [7] Ю. Г. Прохоров, “Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими гorenштейновыми особенностями”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 81–122; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 77–114.
- [8] B. Nill, “Volume and lattice points of reflexive simplices”, *Discrete Comput. Geom.*, **37**:2 (2007), 301–320.
- [9] G. Fano, “Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperplane sono superficie di genere zero e bigenere uno”, *Mem. Mat. Sci. Fis. Natur. Soc. Ital. Sci. Ser. 3*, **24** (1938), 41–66.
- [10] A. Conte, “Two examples of algebraic threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces”, *Algebraic geometry – open problems* (Ravello, 1982), Lecture Notes in Math., **997**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 124–130.
- [11] A. Conte, J. P. Murre, “Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **12**:1 (1985), 43–80.
- [12] И. А. Чельцов, “Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодацировой размерности нуль”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 618–626; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Singularities of 3-dimensional varieties admitting an ample effective divisor of Kodaira dimension zero”, *Math. Notes*, **59**:4 (1996), 445–450.
- [13] Ю. Г. Прохоров, “О трехмерных многообразиях с гиперплоскими сечениями – поверхностями Энриквеса”, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 113–124; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On algebraic threefolds whose hyperplane sections are Enriques surfaces”, *Sb. Math.*, **186**:9 (1995), 1341–1352.
- [14] И. А. Чельцов, “Рациональность трехмерного многообразия Фано–Энриквеса рода пять”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:3 (2004), 181–194; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Rationality of an Enriques-Fano threefold of genus five”, *Izv. Math.*, **68**:3 (2004), 607–618.
- [15] L. Bayle, “Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d’Enriques”, *J. Reine Angew. Math.*, **449** (1995), 9–63.
- [16] T. Sano, “On classification of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1”, *J. Math. Soc. Japan*, **47**:2 (1995), 369–380.
- [17] Ю. Г. Прохоров, “О многообразиях Фано–Энриквеса”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 117–134; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On Fano–Enriques threefolds”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 559–574.

- [18] A. L. Knutsen, A. F. Lopez, R. Muñoz, *On the extendability of projective surfaces and a genus bound for Enriques–Fano threefolds*, [arXiv:math/0605750](#).
- [19] Yu. Kawamata, “Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces”, *Ann. of Math.* (2), **127**:1 (1988), 93–163.
- [20] J. Kollár, Sh. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [21] M. Reid, *Projective morphisms according to Kawamata*, Preprint, Univ. of Warwick, 1983.
- [22] P. Jahnke, I. Radloff, “Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system”, *Compos. Math.*, **142**:2 (2006), 422–432; [arXiv:math/0404156](#).
- [23] В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204; англ. пер.: V. V. Przhijkowski, I. A. Chel'tsov, K. A. Shramov, “Hyperelliptic and trigonal Fano threefolds”, *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 365–421.
- [24] J. F. Kollár, *Flops*, Preprint, Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, 1987.
- [25] A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
- [26] Sh. Mori, “Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1**:1 (1988), 117–253.
- [27] S. Cutkosky, “Elementary contractions of Gorenstein threefolds”, *Math. Ann.*, **280**:3 (1988), 521–525.
- [28] M. Reid, “Canonical 3-folds”, *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers* (Algebraic Geometry, Angers, 1979), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, 1979, 273–310.
- [29] I. Dolgachev, “Weighted projective varieties”, *Group actions and vector fields* (Vancouver, BC, 1981), Lecture Notes in Math., **956**, Springer, Berlin, 1982, 34–71.
- [30] M. Reid, “Chapters on algebraic surfaces”, *Complex algebraic geometry* (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 3–159.
- [31] M. Kreuzer, H. Skarke, “PALP: a package for analysing lattice polytopes with applications to toric geometry”, *Comput. Phys. Comm.*, **157**:1 (2004), 87–106.
- [32] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 745–814.

И. В. Каржеманов (I. V. Karzhemanov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ilkarjem@rambler.ru

Поступила в редакцию

13.09.2007 и 15.01.2009