Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, Об условии сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 3, 109–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:02:48

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

**Об условии сильной предкомпактности
ограниченных множеств мерозначных решений
квазилинейного уравнения первого порядка**

Доказывается сильная предкомпактность ограниченных последовательностей мерозначных решений невырожденного квазилинейного уравнения первого порядка в общем случае, когда функции потока содержат независимые переменные и лишь непрерывны.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка

$$\operatorname{div}_x \varphi(x, u) + \psi(x, u) = 0, \quad (1)$$

$u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\varphi(x, u) = (\varphi_1(x, u), \dots, \varphi_n(x, u))$, функции потока $\varphi_i(x, u)$, $i = 1, \dots, n$, предполагаются лишь непрерывными: $\varphi_i(x, u) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$; $\psi(x, u)$ – локально ограниченная в $\Omega \times \mathbb{R}$ борелевская функция. Будем также предполагать, что для всех $k \in \mathbb{R}$ распределение

$$\operatorname{div}_x \varphi(x, k) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega).$$

В настоящей работе мы устанавливаем свойство сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений уравнения (1). Это свойство будем для краткости называть SC-свойством. Отметим, что в частном случае “обычных” функций из L^∞ “ограниченность” означает ограниченность в L^∞ , а “сильная предкомпактность” – предкомпактность в L_{loc}^1 .

Предполагается, что уравнение (1) невырождено в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (1) называется *невырожденным*, если выполнено требование:

(C1) для п.в. $x \in \Omega$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, функции $\lambda \mapsto (\xi, \varphi(x, \lambda))$ не постоянны ни на каком невырожденном интервале,

здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00671).

В случае $n = 2$ применительно к последовательностям обобщенных энтропийных решений SC-свойство может быть доказано с использованием метода компенсированной компактности, в духе работы [1]. Однако в многомерном случае метод компенсированной компактности “не работает”. В статьях [2], [3] развита техника H -мер Тартара с “непрерывными” индексами, которая была с успехом применена для исследования SC-свойства.

В [2] SC-свойство было доказано в гладком случае $\varphi(x, u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ при выполнении следующего условия невырожденности:

(C2) для п.в. $x \in \Omega$ и при всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$,

$$\text{mes} \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \left(\xi, \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right) = 0 \right\} = 0,$$

mes – мера Лебега.

В работе [3] в случае $\varphi(x, u) = \varphi(u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ установлено, что для выполнения SC-свойства необходимым и достаточным является следующее условие:

(C3) $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, функции $\lambda \mapsto (\xi, \varphi(\lambda))$ не постоянны ни на каком невырожденном интервале (т.е. кривая $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ покидает любую гиперплоскость для произвольного невырожденного интервала значений параметра λ).

Очевидно, условие (C1) настоящей работы включает условия (C2) и (C3) как частные случаи.

Отметим (см. [2]), что в классе обобщенных решений (в смысле распределений) без дополнительных энтропийных ограничений SC-свойство перестает выполняться.

Более общо, в настоящей работе свойство сильной предкомпактности доказано для последовательностей мерозначных функций, удовлетворяющих требованию (22) ниже, которое выполнено, например, для последовательностей v_x^k мерозначных решений уравнений вида $\text{div}_x \varphi_k(x, u) + \psi_k(x, u) = 0$ или $\text{div}_x \varphi_k(x, u) + \psi_k(x, u) = \varepsilon_k \Delta u$, где $\varphi_k(x, u) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \varphi(x, u)$ поточечно, $\varepsilon_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$, последовательность $\psi_k(x, u)$ ограничена в $L_{\text{loc}}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. Свойство сильной предкомпактности позволяет получать соответствующие теоремы существования для исходного уравнения (1), опираясь лишь на ограниченность аппроксимирующих последовательностей.

Рассмотрим один важный частный случай, когда $\Omega = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m\}$, а уравнение (1) имеет форму

$$u_t + \text{div}_x \varphi(u) = 0, \quad \varphi(u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad (2)$$

(мы предполагаем для простоты, что поток φ не зависит от переменных (t, x) и $\psi \equiv 0$). Ясно, что в этом случае условия (C1) и (C3) совпадают и сводятся к требованию: $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$, функции $\lambda \mapsto (\xi, \varphi(\lambda))$ не линейны ни на каком невырожденном интервале. При $m = 1$ это условие совпадает с известным условием Тартара, заключающемся в требовании нелинейности скалярной функции потока на невырожденных интервалах.

Приведем одно приложение SC-свойства к решениям задачи Коши для невырожденного уравнения (2). Пусть последовательность $u_{0k}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ сходится

при $k \rightarrow \infty$ к функции $u_0(x)$ *-слабо в $L^\infty(\mathbb{R}^m)$, $u_k = u_k(t, x)$ – соответствующая последовательность обобщенных энтропийных решений задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $u_{0k}(x)$. Тогда по принципу максимума последовательность u_k ограничена и в силу SC-свойства после возможного выделения подпоследовательности сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ к некоторой функции $u = u(t, x) \in L^\infty(\Omega)$. Нетрудно доказать, что предельная функция $u(t, x)$ будет обобщенным энтропийным решением задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $u_0(x)$. Конечно, указанный эффект сильной сходимости имеет чисто нелинейную природу. Для линейного уравнения (2) с $\varphi(u) = cu$, $c \in \mathbb{R}^m$, имеем $u_k(t, x) = u_{0k}(x - ct)$ и последовательность u_k может сильно сходиться лишь одновременно с последовательностью начальных данных.

Заметим, что с использованием иных методов (связанных с кинетической формулировкой законов сохранения) результат о сильной предкомпактности ограниченных множеств обобщенных энтропийных решений задачи Коши для уравнения (2) установлен также в [4] при следующих более жестких ограничениях: $\varphi(u) \in C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$, и $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$\text{mes}\{\lambda \in \mathbb{R} : \tau + (\xi, \varphi'(\lambda)) = 0\} = 0$$

(последнее условие подобно (C2)).

§ 2. Основные понятия

Прежде всего напомним известное понятие обобщенного энтропийного решения уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (С.Н. Кружков [5], [6]). Ограниченная измеримая функция $u(x)$ на Ω называется *обобщенным энтропийным решением* (коротко – о.э.р.) уравнения (1), если $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{div}_x [(\varphi(x, u(x)) - \varphi(x, k)) \text{sign}(u(x) - k)] \\ + \text{sign}(u(x) - k) [\text{div}_x \varphi(x, k) + \psi(x, u(x))] \leq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

в смысле распределений на Ω (в $\mathcal{D}'(\Omega)$), т.е. $\forall f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $f(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [((\varphi(x, u(x)) - \varphi(x, k)) \text{sign}(u(x) - k), \nabla f(x)) \\ - \text{sign}(u(x) - k) (\text{div}_x \varphi(x, k) + \psi(x, u(x))) f(x)] dx \geq 0 \end{aligned}$$

(($\cdot, \cdot$) – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$).

В настоящей работе мы изучаем более общие мерозначные решения, введенные ДиПерна в работе [7]. Приведем основные используемые понятия (см. [1], [7], [8]). Мерозначной функцией на Ω называется слабо измеримое отображение $x \mapsto \nu_x$ множества Ω в пространство вероятностных борелевских мер с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$. Слабая измеримость ν_x означает, что для любой непрерывной функции $f(\lambda)$ функция $x \mapsto \int f(\lambda) d\nu_x(\lambda)$ измерима по Лебегу на Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как показано в [2], из слабой измеримости мерозначной функции ν_x вытекает измеримость на Ω функций $\int f(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$ для всех локально ограниченных борелевских функций $f(x, \lambda)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$.

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что $\text{supp } \nu_x \subset [-M, M]$ для п.в. $x \in \Omega$. Минимальное из таких M будем обозначать через $M(\nu_x)$.

Наконец, мерозначные функции вида: $\nu_x(\lambda) = \delta(\lambda - u(x))$, где $\delta(\lambda - u)$ — мера Дирака с носителем в точке u , называются *регулярными* и будут отождествляться с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, множество $MV(\Omega)$ ограниченных мерозначных функций на Ω включает в себя пространство $L^\infty(\Omega)$. Заметим, что $M(u) = \|u\|_\infty$ при $u \in L^\infty(\Omega)$. Обобщая понятие ограниченности в $L^\infty(\Omega)$ на класс мерозначных функций, будем называть множество $A \subset MV(\Omega)$ *ограниченным*, если $\sup_{\nu_x \in A} M(\nu_x) < \infty$.

Введем далее слабую и сильную топологии на $MV(\Omega)$. Слабая (сильная) топология на $MV(\Omega)$ — это минимальная из топологий таких, что $\forall f(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ непрерывны отображения $F_f: MV(\Omega) \mapsto L^\infty(\Omega)$, $F_f(\nu_x) = u(x) = \int f(\lambda) d\nu_x(\lambda)$, где $L^\infty(\Omega)$ наделено $*$ -слабой топологией (соответственно — индуцированной топологией пространства $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$).

Ниже определяются понятия слабой и сильной сходимости последовательностей мерозначных функций, которые, как легко видеть, согласованы с введенными топологиями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\nu_x^k \in MV(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$; $\nu_x \in MV(\Omega)$. Тогда

1) последовательность ν_x^k сходится к ν_x *слабо*, если $\forall f(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int f(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \quad * \text{-слабо в } L^\infty(\Omega);$$

2) последовательность ν_x^k сходится к ν_x *сильно*, если $\forall f(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int f(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Очевидно, сильная топология индуцирует на $L^\infty(\Omega)$ топологию пространства $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Как показано в работе [1] (см. также обзор [8]), $L^\infty(\Omega)$ слабо плотно и сильно замкнуто в $MV(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если множество $A \subset MV(\Omega)$ ограничено, то индуцированные на A слабая и сильная топологии имеют счетные базы, состоящие из открытых множеств вида $F_f^{-1}(O)$, где f пробегает счетное всюду плотное множество в единичном шаре пространства $C[-M, M]$, $M = \sup_{\nu_x \in A} M(\nu_x)$, O — элемент счетной базы соответственно $*$ -слабой и сильной (индуцированной из $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$) топологии единичного шара в $L^\infty(\Omega)$. В частности, в $MV(\Omega)$ совпадают понятия компактности и секвенциальной компактности; здесь нужно также учесть ограниченность слабо компактных множеств в $MV(\Omega)$ (которая легко следует из того, что для слабо компактного множества $A \subset MV(\Omega)$ все образы $F_f(A)$, $f \in C(\mathbb{R})$, $*$ -слабо компактны в $L^\infty(\Omega)$ и поэтому ограничены).

Следующая теорема доказана в [1] для регулярных ν_x^k . Доказательство легко распространяется на общий случай и содержится в работе [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть ν_x^k , $k \in \mathbb{N}$, — ограниченная последовательность мерозначных функций. Тогда существуют подпоследовательность $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$, и мерозначная функция $\nu_x \in \text{MV}(\Omega)$ такие, что $\nu_x^r \rightarrow \nu_x$ слабо при $r \rightarrow \infty$.

Теорема 1 с учетом замечания 2 показывает, что ограниченные множества мерозначных решений слабо предкомпактны.

Мы готовы определить понятие мерозначного решения уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Ограниченная мерозначная функция $\nu_x \in \text{MV}(\Omega)$ называется мерозначным решением (коротко — м.р.) уравнения (1), если $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \int (\varphi(x, \lambda) - \varphi(x, k)) \operatorname{sign}(\lambda - k) d\nu_x(\lambda) \\ + \int \operatorname{sign}(\lambda - k) [\operatorname{div}_x \varphi(x, k) + \psi(x, \lambda)] d\nu_x(\lambda) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что из ограниченности мерозначной функции ν_x , замечания 1 и условий на функцию $\psi(x, \lambda)$ следует, что функция

$$x \mapsto \int \operatorname{sign}(\lambda - k) \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$$

принадлежит пространству $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.

Ясно, что определение 4 согласуется с определением 2 в том смысле, что функция $u(x)$ является о.э.р. уравнения (1) тогда и только тогда, когда она как регулярная мерозначная функция является м.р. уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если ν_x — м.р. уравнения (1), то

$$\operatorname{div}_x \left(\int \varphi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) \right) + \int \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega);$$

в частности, если $u(x)$ — о.э.р. уравнения (1), то $u(x)$ удовлетворяет (1) в смысле распределений.

Действительно, требуемое равенство вытекает из (4) при $k = \pm M$, где $M \geq M(\nu_x)$.

Для исследования SC-свойства мы будем использовать технику H -мер Тартара.

Обозначим: $F(u)(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, — преобразование Фурье функции $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$; $|\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}$ — евклидова норма вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$; $S = S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$; $u \mapsto \bar{u}$, $u \in \mathbb{C}$, — операция комплексного сопряжения.

Понятие H -меры, соответствующей ограниченной в $L^2(\Omega)$ последовательности вектор-функций, введено Тартаром в работе [9] и основывается на следующем результате. Пусть $l \in \mathbb{N}$, последовательность $U_k(x) = (U_k^1(x), \dots, U_k^l(x)) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^l)$ слабо сходится к нулевому вектору.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [9; теорема 1.1]). *Существует семейство комплекснозначных борелевских мер $\mu = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1}^l$ на $\Omega \times S$ и подпоследовательность $U_r(x) = U_k(x)$, $k = k_r$, такие, что для всех $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$*

$$\langle \mu^{ij}, \Phi_1(x) \overline{\Phi_2(x)} \psi(\xi) \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(U_r^i \Phi_1)(\xi) \overline{F(U_r^j \Phi_2)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Семейство мер $\mu = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1}^l$ называется H -мерой, соответствующей подпоследовательности $U_r(x)$.

Понятие H -меры было распространено в [2] на случай последовательности мерозначных функций. В следующем параграфе мы исследуем свойства таких H -мер.

§3. H -меры, соответствующие ограниченным последовательностям мерозначных функций

Пусть $\nu_x^k \in \text{MV}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, — ограниченная последовательность мерозначных функций, слабо сходящаяся к мерозначной функции $\nu_x^0 \in \text{MV}(\Omega)$. Обозначим при $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}$

$$u_k(x, p) = \nu_x^k((p, +\infty)), \quad u_0(x, p) = \nu_x^0((p, +\infty)).$$

Тогда по замечанию 1 при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \in \mathbb{R}$ функции $u_k(x, p)$ измеримы по $x \in \Omega$; таким образом, $u_k(x, p) \in L^\infty(\Omega)$ и $0 \leq u_k(x, p) \leq 1$. Пусть

$$E = E(\nu_x^0) = \left\{ p_0 \in \mathbb{R} : u_0(x, p) \xrightarrow[p \rightarrow p_0]{} u_0(x, p_0) \text{ в } L^1_{\text{loc}}(\Omega) \right\}.$$

Справедлива лемма, доказательство которой содержится в [2].

ЛЕММА 1. *Дополнение $\overline{E} = \mathbb{R} \setminus E$ не более чем счетно и $u_k(x, p) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_0(x, p)$ *-слабо в $L^\infty(\Omega)$ при $p \in E$.*

Пусть $U_k^p(x) = u_k(x, p) - u_0(x, p)$. По лемме 1 $U_k^p(x) \rightarrow 0$ *-слабо в $L^\infty(\Omega)$ для $p \in E$ при $k \rightarrow \infty$.

Следующее предложение, аналогичное предложению 1, также доказано в [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) *Существует семейство локально конечных комплекснозначных борелевских мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$ на $\Omega \times S$ и подпоследовательность $U_r(x) = \{U_r^p(x)\}_{p \in E}$, $U_r^p(x) = U_k^p(x)$, $k = k_r$, такие, что $\forall \Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$*

$$\langle \mu^{pq}, \Phi_1(x) \overline{\Phi_2(x)} \psi(\xi) \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_r^p)(\xi) \overline{F(\Phi_2 U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \quad (5)$$

2) *Отображение $(p, q) \mapsto \mu^{pq}$ непрерывно как отображение $E \times E$ в пространство $Z_{\text{loc}}(\Omega \times S)$ локально конечных борелевских мер μ на $\Omega \times S$ с топологией, порожденной полунормами $\|\mu\|_K = \text{Var}(\mu)(K)$, K — компакт в $\Omega \times S$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Семейство мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$ будем называть H -мерой, соответствующей подпоследовательности $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$.

Отметим следующие важные свойства H -меры:

ЛЕММА 2. 1) $\mu^{pp} \geq 0 \quad \forall p \in E$; 2) $\mu^{pq} = \overline{\mu^{qp}} \quad \forall p, q \in E$;
 3) при $p_1, \dots, p_l \in E, g_1, \dots, g_l \in C_0(\Omega \times S)$ матрица $A = a_{ij} = \langle \mu^{p_i p_j}, g_i \overline{g_j} \rangle$, $i, j = 1, \dots, l$, положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 3). Пусть сначала функции $g_i = g_i(x, \xi)$ являются конечными суммами функций вида $\Phi(x)\psi(\xi)$, $\Phi(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$. Тогда, как следует из соотношения (5),

$$a_{ij} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} H_r^i(\xi) \overline{H_r^j(\xi)} d\xi, \quad (6)$$

где $H_r^i(\xi) = F(g(\cdot, \xi/|\xi|)U_r^{p_i})(\xi)$, так что при $g(x, \xi) = \sum_{k=1}^m \Phi_k(x)\psi_k(\xi)$

$$H_r^i(\xi) = \sum_{k=1}^m F(\Phi_k U_r^{p_i})(\xi) \psi_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Из (6) непосредственно следуют равенства $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, $i, j = 1, \dots, l$, показывающие эрмитовость матрицы A . Далее, при $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^l a_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |H_r(\xi)|^2 d\xi \geq 0, \quad H_r(\xi) = \sum_{i=1}^l H_r^i(\xi) \alpha_i,$$

откуда следует положительная определенность матрицы A .

Доказательство утверждения 3) в общем случае $g_i \in C_0(\Omega \times S)$ проводится с помощью аппроксимации функций g_i , $i = 1, \dots, l$, в равномерной норме конечными суммами функций вида $\Phi(x)\psi(\xi)$.

Утверждения 1) и 2) легко следуют из 3). Действительно, полагая $l = 1, p_1 = p, g_1 = g$, получаем соотношение $\langle \mu^{pp}, |g|^2 \rangle \geq 0$, справедливое для всех $g \in C_0(\Omega \times S)$, откуда вытекает вещественность и неотрицательность μ^{pp} . Для доказательства 2) представим произвольную финитную функцию $g = g(x, \xi)$ в виде $g = g_1 \overline{g_2}$. Пусть $l = 2, p_1 = p, p_2 = q$. Тогда ввиду 3)

$$\langle \mu^{pq}, g \rangle = \langle \mu^{pq}, g_1 \overline{g_2} \rangle = \overline{\langle \mu^{qp}, g_2 \overline{g_1} \rangle} = \overline{\langle \mu^{qp}, \overline{g} \rangle} = \langle \mu^{qp}, g \rangle$$

и $\mu^{pq} = \overline{\mu^{qp}}$. Лемма доказана.

Выберем счетное и всюду плотное множество индексов $D \subset E$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существует семейство конечных комплекснозначных борелевских мер μ_x^{pq} на сфере S , $p, q \in D$, $x \in \Omega'$, где $\Omega' \subset \Omega$ — множество полной меры, таких, что $\mu^{pq} = \mu_x^{pq} dx$, т.е. $\forall \Phi(x, \xi) \in C_0(\Omega \times S)$ функция

$$x \mapsto \langle \mu_x^{pq}(\xi), \Phi(x, \xi) \rangle = \int_S \Phi(x, \xi) d\mu_x^{pq}(\xi)$$

измерима по Лебегу на Ω' , ограничена и

$$\langle \mu^{pq}, \Phi(x, \xi) \rangle = \int_{\Omega} \langle \mu_x^{pq}(\xi), \Phi(x, \xi) \rangle dx.$$

При этом для $p, p', q \in D, p' > p$,

$$\text{Var } \mu_x^{pq} \leq 1, \quad \text{Var}(\mu_x^{p'q} - \mu_x^{pq}) \leq 2(\nu_x^0((p, p']))^{1/2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что мера $\text{pr}_\Omega \text{Var } \mu^{pq} \leq \text{mes}$, $p, q \in E$. Пусть сначала $p = q$. По лемме 2 мера μ^{pp} неотрицательна. Далее, ввиду (5) с $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \Phi(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \equiv 1$

$$\begin{aligned} \langle \mu^{pp}, |\Phi(x)|^2 \rangle &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi U_r^p)(\xi) \overline{F(\Phi U_r^p)(\xi)} d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |U_r^p(x)|^2 |\Phi(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\Phi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

(мы использовали равенство Планшереля и оценку $|U_r^p(x)| \leq 1$). Таким образом, $\text{pr}_\Omega \mu^{pp} \leq \text{mes}$.

Пусть теперь $p, q \in E$, $A \subset \Omega$ – ограниченное открытое множество, $g = g(x, \xi) \in C_0(A \times S)$, $|g| \leq 1$. Пусть $g_1 = g/\sqrt{|g|}$ (полагаем $g_1 = 0$ при $g = 0$), $g_2 = \sqrt{|g|}$. Тогда $g_1, g_2 \in C_0(A \times S)$, $g = g_1 g_2 = g_1 \overline{g_2}$, $|g_1|^2 = |g_2|^2 = |g|$ и по лемме 2 матрица

$$\begin{pmatrix} \langle \mu^{pp}, |g| \rangle & \langle \mu^{pq}, g \rangle \\ \overline{\langle \mu^{pq}, g \rangle} & \langle \mu^{qq}, |g| \rangle \end{pmatrix}$$

положительно определена; в частности,

$$|\langle \mu^{pq}, g \rangle| \leq (\langle \mu^{pp}, |g| \rangle \langle \mu^{qq}, |g| \rangle)^{1/2} \leq (\mu^{pp}(A \times S) \mu^{qq}(A \times S))^{1/2} \leq \text{mes}(A),$$

в последней оценке учтено, что $\text{pr}_\Omega \mu^{pp} \leq \text{mes}$, $\text{pr}_\Omega \mu^{qq} \leq \text{mes}$. С учетом произвольности $g \in C_0(A \times S)$, $|g| \leq 1$, получаем оценку $\text{Var } \mu^{pq}(A \times S) \leq \text{mes}(A)$. Ввиду регулярности меры μ^{pq} эта оценка справедлива для всех борелевских множеств $A \subset \Omega$ и

$$\text{pr}_\Omega \text{Var } \mu^{pq} \leq \text{mes}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что $\forall \psi(\xi) \in C(S)$

$$\text{Var pr}_\Omega (\psi(\xi) \mu^{pq}(x, \xi)) \leq \|\psi\|_\infty \cdot \text{pr}_\Omega \text{Var } \mu^{pq} \leq \|\psi\|_\infty \cdot \text{mes}. \quad (9)$$

Ввиду (9) меры $\text{pr}_\Omega (\psi(\xi) \mu^{pq}(x, \xi))$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, и по теореме Радона–Никодима

$$\text{pr}_\Omega (\psi(\xi) \mu^{pq}(x, \xi)) = h_\psi^{pq}(x) \cdot \text{mes},$$

где плотности $h_\psi^{pq}(x)$ измеримы на Ω и, как следует из (9),

$$\|h_\psi^{pq}(x)\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty. \quad (10)$$

Выберем неотрицательную функцию $K(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в единичном шаре такую, что $\int K(x) dx = 1$, и положим $K_m(x) = m^n K(mx)$ при $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что последовательность K_m сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ -функции Дирака (т.е. эта последовательность образует аппроксимативную единицу).

“Исправив” плотности $h_\psi^{pq}(x)$ на множествах нулевой меры, например заменив их на функции

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_\psi^{pq}(y) K_m(x - y) dy,$$

будем предполагать, что $\forall x \in \Omega$

$$h_{\psi}^{pq}(x) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_{\psi}^{pq}(y) K_m(x-y) dy. \quad (11)$$

Обозначим через Ω' множество общих точек Лебега функций $h_{\psi}^{pq}(x)$ и $u_0(x, p) = \nu_x^0((p, +\infty))$, где $p, q \in D$, $\psi \in F$, F — счетное всюду плотное подмножество в $C(S)$. Ввиду счетности семейства таких функций множество Ω' имеет полную меру.

Из очевидной линейности и непрерывности (ввиду (10)) зависимости h_{ψ}^{pq} от ψ как отображения из $C(S)$ в $L^{\infty}(\Omega)$ и из плотности F в $C(S)$ следует, что $x \in \Omega'$ — точка Лебега функций $h_{\psi}^{pq}(x)$ для всех $\psi(\xi) \in C(S)$ и $p, q \in D$ (здесь также нужно учесть (11)).

Для $p, q \in D$, $x \in \Omega'$ определен линейный непрерывный функционал на $C(S)$, задаваемый равенством $l(\psi) = h_{\psi}^{pq}(x)$, причем $\|l\| \leq 1$ ввиду (10). По теореме Рисса–Маркова этот функционал задается интегрированием по некоторой комплекснозначной борелевской мере $\mu_x^{pq}(\xi)$ на S и $\text{Var } \mu_x^{pq} = \|l\| \leq 1$. Таким образом, $\forall \psi(\xi) \in C(S)$

$$h_{\psi}^{pq}(x) = \langle \mu_x^{pq}(\xi), \psi \rangle = \int_S \psi(\xi) d\mu_x^{pq}(\xi). \quad (12)$$

Из (12) следует измеримость и ограниченность функций $x \rightarrow \int_S \psi(\xi) d\mu_x^{pq}(\xi)$ для всех $\psi(\xi) \in C(S)$. Далее, при $\Phi(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_S \Phi(x) \psi(\xi) d\mu_x^{pq}(\xi) \right) dx &= \int_{\Omega} \Phi(x) h_{\psi}^{pq}(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \Phi(x) d\text{pr}_{\Omega}(\psi(\xi) \mu^{pq}) \\ &= \int_{\Omega \times S} \Phi(x) \psi(\xi) d\mu^{pq}(x, \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Аппроксимируя в равномерной норме функцию $\Phi(x, \xi) \in C_0(\Omega \times S)$ линейными комбинациями функций вида $\Phi(x)\psi(\xi)$, получим, что интеграл $\int_S \Phi(x, \xi) d\mu_x^{pq}(\xi)$ измерим по $x \in \Omega'$, ограничен и, как следует из (13),

$$\int_{\Omega} \left(\int_S \Phi(x, \xi) d\mu_x^{pq}(\xi) \right) dx = \int_{\Omega \times S} \Phi(x, \xi) d\mu^{pq}(x, \xi),$$

т.е. $\mu^{pq} = \mu_x^{pq} dx$. Напомним, что $\text{Var } \mu_x^{pq} \leq 1$.

Осталось доказать последнюю оценку из (7). Пусть $p, p', q \in D$, $p' > p$, $x \in \Omega'$. Положим $\Phi_m = \sqrt{K_m} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, где последовательность ядер K_m определена выше. Начиная с некоторого номера m функция (аргумента y)

$\Phi_m(x-y) \in C_0(\Omega)$, и с учетом предложения 2 $\forall \psi(\xi) \in C(S)$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} K_m(x-y) (h_{\psi}^{p'q}(y) - h_{\psi}^{pq}(y)) dy \right| \\
&= |\langle (\mu^{p'q} - \mu^{pq})(y, \xi), K_m(x-y) \psi(\xi) \rangle| \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_m(U_r^{p'} - U_r^p))(\xi) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right| \\
&\leq \|\psi\|_{\infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(\Phi_m(U_r^{p'} - U_r^p))(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(\Phi_m U_r^q)(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \right] \\
&= \|\psi\|_{\infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\int_{\Omega} K_m(x-y) (U_r^{p'}(y) - U_r^p(y))^2 dy \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\int_{\Omega} K_m(x-y) (U_r^q(y))^2 dy \right)^{1/2} \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Заметим, что $|U_r^q| \leq 1$, $\int_{\Omega} K_m(x-y) dy = 1$ и

$$\int_{\Omega} K_m(x-y) (U_r^q(y))^2 dy \leq 1. \quad (15)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} K_m(x-y) (U_r^{p'}(y) - U_r^p(y))^2 dy \\
&\leq 2 \int_{\Omega} K_m(x-y) |U_r^{p'}(y) - U_r^p(y)| dy \\
&\leq 2 \int_{\Omega} K_m(x-y) (u_r(y, p) - u_r(y, p')) dy \\
&\quad + 2 \int_{\Omega} K_m(x-y) (u_0(y, p) - u_0(y, p')) dy \quad (16)
\end{aligned}$$

(заметим, что $u_r(y, p) - u_r(y, p') \geq 0$ при $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Так как $p, p' \in D \subset E$, то по лемме 1 $u_r(y, p) - u_r(y, p') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u_0(y, p) - u_0(y, p')$ *-слабо в $L^{\infty}(\Omega)$, откуда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} K_m(x-y) (u_r(y, p) - u_r(y, p')) dy = \int_{\Omega} K_m(x-y) (u_0(y, p) - u_0(y, p')) dy,$$

и из (16)

$$\begin{aligned}
& \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} K_m(x-y) (U_r^{p'}(y) - U_r^p(y))^2 dy \right)^{1/2} \\
&\leq 2 \left(\int_{\Omega} K_m(x-y) (u_0(y, p) - u_0(y, p')) dy \right)^{1/2}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Из (14) с учетом (15), (17) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} K_m(x-y) (h_{\psi}^{p'q}(y) - h_{\psi}^{pq}(y)) dy \right| \\ & \leq 2\|\psi\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} K_m(x-y) (u_0(y, p) - u_0(y, p')) dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

переходя в которой к пределу при $m \rightarrow \infty$ с учетом того, что $x \in \Omega'$ является точкой Лебега функций $h_{\psi}^{p'q}$, h_{ψ}^{pq} и $u_0(\cdot, p')$, $u_0(\cdot, p)$, получаем неравенство

$$|h_{\psi}^{p'q}(x) - h_{\psi}^{pq}(x)| \leq 2\|\psi\|_{\infty} (u_0(x, p) - u_0(x, p'))^{1/2},$$

т.е. $\forall \psi(\xi) \in C(S)$

$$|\langle \mu_x^{p'q} - \mu_x^{pq}, \psi \rangle| \leq 2\|\psi\|_{\infty} (u_0(x, p) - u_0(x, p'))^{1/2},$$

откуда

$$\text{Var}(\mu_x^{p'q} - \mu_x^{pq}) \leq 2(u_0(x, p) - u_0(x, p'))^{1/2} = 2(\nu_x^0((p, p')))^{1/2},$$

что и нужно было установить. Предложение полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Отображения $p \mapsto \mu_x^{pq}$, $q \mapsto \mu_x^{pq}$ непрерывны справа как отображения множества D в пространство $Z(S)$ комплекснозначных конечных борелевских мер на S (с нормой Var).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность справа отображения $p \mapsto \mu_x^{pq}$ непосредственно следует из оценки (7). Для отображения $q \mapsto \mu_x^{pq}$ нужно учесть равенство $\mu_x^{pq} = \mu_x^{qp}$, легко вытекающее из утверждения 2) леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как видно из доказательства предложения 3, при $x \in \Omega'$ выполнено соотношение: $\forall \psi(\xi) \in C(S)$, $\Phi(y) \in C(\Omega)$

$$\Phi(x) \langle \mu_x^{pq}, \psi(\xi) \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi \Phi_m U_r^p)(\xi) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi, \quad (18)$$

здесь $(\Phi \Phi_m U_r^p)(y) = \Phi(y) \Phi_m(x-y) U_r^p(y)$, $(\Phi_m U_r^q)(y) = \Phi_m(x-y) U_r^q(y)$.

Действительно, из (5) следует равенство

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi \Phi_m U_r^p)(\xi) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi &= \langle \mu^{pq}(y, \xi), \Phi(y) K_m(x-y) \psi(\xi) \rangle \\ &= \int_{\Omega} h_{\psi}^{pq}(y) \Phi(y) K_m(x-y) dy, \end{aligned}$$

переходя в котором к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учитывая, что $x \in \Omega'$ — точка Лебега функции $h_{\psi}^{pq}(y)$, так что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_{\psi}^{pq}(y) \Phi(y) K_m(x-y) dy = \Phi(x) h_{\psi}^{pq}(x) = \Phi(x) \langle \mu_x^{pq}, \psi(\xi) \rangle,$$

получаем тождество (18).

Зафиксируем $x \in \Omega'$, $q \in D$ и обозначим через $L(p) \subset \mathbb{R}^n$ минимальное линейное подпространство, содержащее $\text{supp } \mu_x^{pq}$, $p \in D$. Выберем среди подпространств $L(p)$ подпространство $L = L(p_0)$ максимальной размерности, пусть $l = \dim L(p_0)$.

ЛЕММА 3. *Существует $\delta > 0$ такое, что $L(p) = L \quad \forall p \in [p_0, p_0 + \delta] \cap D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим при $r > 0$: $V_r = [p_0, p_0 + r] \cap D$, $L_r = \bigcap_{p \in V_r} L(p)$. Очевидно, $L_r \subset L$ — убывающее по включению семейство линейных подпространств конечномерного пространства L , и поэтому начиная с некоторого значения $r = \delta > 0$ для всех $r \in (0, \delta]$ $L_r = \tilde{L} \subset L$. Для доказательства леммы достаточно установить, что $\tilde{L} = L$. Действительно, тогда $L(p) \supset L$ при всех $p \in V_\delta$, и так как $L = L(p_0)$ имеет максимальную размерность среди подпространств $\{L(p)\}_{p \in D}$, то $L(p) = L$, что и требуется доказать. Доказательство равенства $\tilde{L} = L$ проведем методом от противного. Итак, предположим, что $\tilde{L} \neq L$. Тогда $m = \dim \tilde{L} < l = \dim L$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По следствию 1 существует $r \in (0, \delta]$ такое, что при $p \in V_r$

$$\text{Var}(\mu_x^{p_0 q} - \mu_x^{p q})(S) < \varepsilon. \quad (19)$$

Из определения пространства L_r следует, что можно выбрать строго убывающую конечную последовательность подпространств L'_i , $i = 0, \dots, k$, такую, что $L'_0 = L$, $L'_k = L_\delta = \tilde{L}$ и $L'_i = L'_{i-1} \cap L(p_i)$, где $p_i \in V_r$, $i = 1, \dots, k$. Очевидно, $k \leq \dim L - \dim \tilde{L} = l - m$. По определению пространств $L(p)$ $\text{supp } \mu_x^{p_i q} \subset L(p_i)$. Поэтому $\text{Var}(\mu_x^{p_i q})(CL(p_i)) = 0$, где CA обозначает разность $S \setminus A$ при $A \subset \mathbb{R}^n$. Из (19) тогда следует, что

$$\text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(CL(p_i)) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k.$$

Так как $\tilde{L} = L \cap \bigcap_{i=1}^k L(p_i)$, то $C\tilde{L} = CL \cup \bigcup_{i=1}^k CL(p_i)$ и

$$\text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(C\tilde{L}) \leq \text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(CL) + \sum_{i=1}^k \text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(CL(p_i)) \leq k\varepsilon.$$

Здесь мы учли, что $\text{supp } \mu_x^{p_0 q} \subset L$ и, следовательно, $\text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(CL) = 0$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ тогда вытекает, что $\text{Var}(\mu_x^{p_0 q})(C\tilde{L}) = 0$ и $\text{supp } \mu_x^{p_0 q} \subset \tilde{L}$. Поскольку L — минимальное подпространство со свойством $\text{supp } \mu_x^{p_0 q} \subset L$, то $L = \tilde{L}$, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

Рассмотрим комплексное линейное подпространство

$$R(p) = \left\{ \int \psi(\xi) \xi d\mu_x^{p q}(\xi) : \psi(\xi) \in C(S) \right\} \subset \mathbb{C}^n.$$

ЛЕММА 4. *Верно равенство $R(p) = \overline{L}(p)$, где $\overline{L}(p) = L(p) + iL(p) \subset \mathbb{C}^n$ — комплексное линейное подпространство, порожденное $L(p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения

$$\left(\int \psi(\xi) \xi d\mu_x^{p q}(\xi), v \right) = \int \psi(\xi) (\xi, v) d\mu_x^{p q}(\xi), \quad v \in \mathbb{C}^n, \quad \psi(\xi) \in C(S)$$

(здесь и ниже рассматриваются скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ векторов из пространства $\mathbb{C}^n$), следует равенство ортогональных дополнений $(R(p))^\perp = (L(p))^\perp$ (в $\mathbb{C}^n$), откуда и вытекает, что $R(p) = \overline{L}(p)$. Лемма доказана.

Пусть мера $\gamma_x^r = \nu_x^r - \nu_x^0$. Положим $I_r(h)(y) = \int h(y, \lambda) d\gamma_y^r(\lambda)$ для локально ограниченной борелевской вектор-функции $h(y, \lambda)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$.

Обозначим через $\theta(\lambda)$ функцию Хевисайда:

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Пусть $V = V_\delta = [p_0, p_0 + \delta] \cap D$, $\delta > 0$ — константа из леммы 3, $f(y, \lambda)$ — непрерывная вектор-функция на $\Omega \times \mathbb{R}$ со значениями в $L^\perp$, $p \in V$; $\chi(\lambda) = \theta(\lambda - p_0) - \theta(\lambda - p)$ — характеристическая функция интервала $(p_0, p]$. Пусть, как и выше (см. доказательство предложения 3), $\Phi_m = \sqrt{K_m}$, $m \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При сделанных предположениях для всех $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, F(\Phi_m I_r(f \cdot \chi))(\xi) \right) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = 0.$$

Здесь $\Phi_m = \Phi_m(x - y)$, $I_r(f \cdot \chi)$, U_r^q — функции аргумента $y \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что начиная с какого-то номера m носители функций $\Phi_m(x - y)$ содержатся в некотором компакте $B \subset \Omega$. Не ограничивая общность, можно считать, что $\text{supp } \Phi_m \subset B$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из непрерывности $f(y, \lambda)$ следует, что существует вектор-функция $g(y, \lambda)$ вида $g(y, \lambda) = \sum_{i=1}^k v_i(y) \theta(\lambda - p_i)$, $v_i(y) \in C(\Omega, L^\perp)$, $p_i \in V$, такая, что $\|f \cdot \chi - g\|_\infty \leq \varepsilon$ на $B \times \mathbb{R}$.

Используя равенство Планшереля и то, что при $y \in B$

$$\left| \int (f \cdot \chi - g)(y, \lambda) d\gamma_y^r(\lambda) \right| \leq \int |(f \cdot \chi - g)(y, \lambda)| d\text{Var}(\gamma_y^r)(\lambda) \leq 2\varepsilon,$$

получаем, что для $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, F(\Phi_m I_r(f \cdot \chi - g))(\xi) \right) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right| \\ & \leq \|\Phi_m I_r(f \cdot \chi - g)\|_2 \cdot \|\Phi_m U_r^q\|_2 \cdot \|\psi\|_\infty \leq c\varepsilon, \end{aligned} \quad (20)$$

где c — константа, не зависящая от m . Здесь мы учитываем, что

$$\|\Phi_m\|_2 = \left(\int_{\Omega} K_m(x - y) dy \right)^{1/2} = 1.$$

Так как

$$I_r(g)(y) = \int \left(\sum_{i=1}^k v_i(y) \theta(\lambda - p_i) \right) d\gamma_y^r(\lambda) = \sum_{i=1}^k v_i(y) U_r^{p_i}(y),$$

из (18) следует предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, F(\Phi_m I_r(g))(\xi) \right) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\ & = \sum_{i=1}^k \langle \mu_x^{p_i q}, (v_i(x), \xi) \psi(\xi) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее равенство следует из того, что по лемме 3 $\text{supp } \mu_x^{p_i q} \subset L$ для всех $i = 1, \dots, k$ (ибо $p_i \in V$), а $v_i(x) \perp L$. Из (20), (21) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, F(\Phi_m I_r(f \cdot \chi))(\xi) \right) \overline{F(\Phi_m U_r^q)(\xi)} \psi \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) d\xi \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon,$$

и для завершения доказательства остается заметить, что $\varepsilon > 0$ произвольно.

§4. О сильной предкомпактности ограниченных последовательностей м.р.

Пусть теперь ν_x^k — ограниченная последовательность м.р. уравнения (1), сходящаяся слабо к ограниченной мерозначной функции ν_x^0 . Выберем подпоследовательность $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$, для которой определена H -мера $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$. Пусть, как и выше, $\gamma_x^r = \nu_x^r - \nu_x^0$.

Обозначим через $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ локально выпуклое пространство, состоящее из распределений $u(x)$ таких, что $uf(x)$ принадлежит пространству Соболева H_2^{-1} для всех $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Топология в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ порождена семейством полунорм $u \mapsto \|uf\|_{H_2^{-1}}$, $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

В работе [2] показано, что для всех $p \in \mathbb{R}$ последовательность распределений

$$\mathcal{L}_p^r(y) = \text{div}_y \left(\int (\varphi(y, \lambda) - \varphi(y, p)) \theta(\lambda - p) d\gamma_y^r(\lambda) \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \text{в } H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega) \quad (22)$$

($\theta(u)$ — функция Хевисайда).

Используя (22), докажем следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение (1) невырождено. Тогда $\mu^{pq} = 0$ для всех $p, q \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду ниже будут использоваться обозначения §3. Фиксируем $x \in \Omega'$, $q \in D$, и пусть “отрезок” $V = V_\delta = [p_0, p_0 + \delta] \cap D$ выбран в соответствии с леммой 3.

При $p \in V$ рассмотрим последовательность распределений

$$\mathcal{L}_p^r - \mathcal{L}_{p_0}^r = \text{div}_y(Q_r^p(y)), \quad r \in \mathbb{N},$$

где вектор-функции

$$\begin{aligned} Q_r^p(y) &= \int (\varphi(y, \lambda) - \varphi(y, p)) \theta(\lambda - p) d\gamma_y^r(\lambda) \\ &\quad - \int (\varphi(y, \lambda) - \varphi(y, p_0)) \theta(\lambda - p_0) d\gamma_y^r(\lambda) \\ &= \int (\varphi(y, p) - \varphi(y, \lambda)) \chi(\lambda) d\gamma_y^r(\lambda) \\ &\quad - \int (\varphi(y, p) - \varphi(y, p_0)) \theta(\lambda - p_0) d\gamma_y^r(\lambda) \\ &= \int (\varphi(y, p) - \varphi(y, \lambda)) \chi(\lambda) d\gamma_y^r(\lambda) - (\varphi(y, p) - \varphi(y, p_0)) U_r^{p_0}(y), \quad (23) \end{aligned}$$

здесь $\chi(\lambda) = \theta(\lambda - p_0) - \theta(\lambda - p)$ — характеристическая функция интервала $(p_0, p]$. Как отмечено выше, $\operatorname{div}_y(Q_r^p(y)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ в $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$, и если $\Phi(y) \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\operatorname{div}_y(Q_r^p \Phi(y)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ в } H_2^{-1}. \quad (24)$$

Применяя преобразование Фурье, получаем из (24), что при $r \rightarrow \infty$

$$|\xi|^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi)) \rightarrow 0 \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n). \quad (25)$$

Действительно, по определению пространства H_2^{-1} (см., например, [10]) условие (24) эквивалентно условию:

$$(1 + |\xi|)^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n),$$

откуда следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$|\xi|^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi)) \rightarrow 0 \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n \setminus B) \quad (26)$$

(B — шар $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$). Так как $\|Q_r^p \Phi\|_1 \leq \|Q_r^p\|_\infty \cdot \|\Phi\|_1 \leq \text{const}$, то функции $|\xi|^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi))$ ограничены равномерно по $r \in \mathbb{N}$. По условию $\nu_y^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \nu_y^0$ слабо в $MV(\Omega)$, откуда легко следует, что $Q_r^p(y) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ *-слабо в $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и при $r \rightarrow \infty$ последовательность $F(Q_r^p \Phi)(\xi)$ поточечно сходится к нулевому вектору. Таким образом, по теореме Лебега об ограниченной сходимости при $r \rightarrow \infty$

$$|\xi|^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi)) \rightarrow 0 \text{ в } L^2(B).$$

Отсюда и из (26) очевидным образом следует утверждение (25). Пусть $\psi(\xi) \in C(S)$. Из (25), используя ограниченность последовательности $U_r^q \Phi(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, получаем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1}(\xi, F(Q_r^p \Phi)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \rightarrow 0$$

или, учитывая (23),

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1}(\xi, F(U_r^{p_0} f \Phi)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right. \\ \left. - \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1}(\xi, F(V_r^p \Phi)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \right\} = 0, \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$f(y) = \varphi(y, p) - \varphi(y, p_0), \quad V_p^r(y) = \int (\varphi(y, p) - \varphi(y, \lambda)) \chi(\lambda) d\gamma_y^r(\lambda).$$

Положим в (27) $\Phi(y) = \Phi_m(x - y)$, где последовательность функций Φ_m определена в §3 при доказательстве предложения 3, и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Учитывая, что по замечанию 4 (см. равенство (18))

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} (\xi, F(U_r^{p_0} f \Phi_m)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi_m)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \\ = (\varphi(x, p) - \varphi(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle), \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\begin{aligned} (\varphi(x, p) - \varphi(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} (\xi, F(V_r^p \Phi_m)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi_m)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим через π_1 , π_2 ортогональные проекции пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространства L и $L^\perp$ соответственно; $\tilde{\varphi}(x, p) = \pi_1(\varphi(x, p))$, $\overline{\varphi}(x, p) = \pi_2(\varphi(x, p))$. Напомним, что L – минимальное подпространство, содержащее $\text{supp } \mu_x^{p_0 q}$. Поэтому

$$(\varphi(x, p) - \varphi(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle) = (\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle). \quad (29)$$

Далее, $V_r^p(y) = \pi_1(V_r^p(y)) + \pi_2(V_r^p(y))$ и

$$\begin{aligned} \pi_1(V_p^r(y)) &= \int (\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)) \chi(\lambda) d\gamma_y^r(\lambda), \\ \pi_2(V_p^r(y)) &= \int (\overline{\varphi}(y, p) - \overline{\varphi}(y, \lambda)) \chi(\lambda) d\gamma_y^r(\lambda). \end{aligned}$$

В обозначениях предложения 4

$$\pi_2(V_p^r(y)) = I_r(h \cdot \chi),$$

где $h(y, \lambda) = \overline{\varphi}(y, p) - \overline{\varphi}(y, \lambda) \in C(\Omega \times \mathbb{R}, L^\perp)$. Тогда по предложению 4

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} (\xi, F(\pi_2(V_r^p) \Phi_m)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi_m)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi = 0. \quad (30)$$

Пусть $\tilde{V}_p^r(y) = \pi_1(V_p^r(y))$. Из (28) с учетом равенств (29) и (30) следует соотношение

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-1} (\xi, F(\tilde{V}_r^p \Phi_m)(\xi)) \overline{F(U_r^q \Phi_m)(\xi)} \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi, \end{aligned}$$

из которого в силу неравенства Гёльдера и равенства Планшереля в свою очередь вытекает оценка

$$|(\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle)| \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \|\tilde{V}_r^p \Phi_m\|_2 \cdot \|U_r^q \Phi_m\|_2 \cdot \|\psi\|_\infty. \quad (31)$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_p^r(y)| &\leq \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)| \cdot \left| \int \chi(\lambda) d(\nu_y^r(\lambda) + \nu_y^0(\lambda)) \right| \\ &= \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)| \cdot [u_r(y, p_0) - u_r(y, p) + u_0(y, p_0) - u_0(y, p)] \end{aligned}$$

и с учетом элементарного неравенства $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ и оценок $|u_r(y, p_0) - u_r(y, p)| \leq 1$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_r^p \Phi_m\|_2^2 &\leq 2 \int_{\Omega} \left(\max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)| \cdot [u_r(y, p_0) - u_r(y, p)] \right)^2 K_m(x - y) dy \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \left(\max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)| \cdot [u_0(y, p_0) - u_0(y, p)] \right)^2 K_m(x - y) dy \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)|^2 [u_r(y, p_0) - u_r(y, p)] K_m(x - y) dy \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)|^2 [u_0(y, p_0) - u_0(y, p)] K_m(x - y) dy. \end{aligned} \quad (32)$$

Так как $p_0, p \in D \subset E$, то по лемме 1 при $r \rightarrow \infty$

$$u_r(y, p_0) - u_r(y, p) \rightarrow u_0(y, p_0) - u_0(y, p)$$

*-слабо в $L^\infty(\Omega)$ и из (32) следует оценка

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \|\tilde{V}_r^p \Phi_m\|_2^2 \leq 4 \int_{\Omega} \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(y, p) - \tilde{\varphi}(y, \lambda)|^2 [u_0(y, p_0) - u_0(y, p)] K_m(x - y) dy,$$

из которой в пределе при $m \rightarrow \infty$ следует, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \|\tilde{V}_r^p \Phi_m\|_2^2 \leq 4 \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)|^2 [u_0(x, p_0) - u_0(x, p)] \quad (33)$$

(здесь нужно учесть, что x — точка Лебега функций $u_0(x, p_0)$ и $u_0(x, p)$). Далее, поскольку $|U_r^q| \leq 1$, то $\|U_r^q \Phi_m\|_2 \leq \|\Phi_m\|_2 = 1$ и ввиду (31) и (33)

$$\begin{aligned} |(\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0), \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle)| &\leq 2 \|\psi\|_\infty \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)| \omega(p), \\ \omega(p) &= (u_0(x, p_0) - u_0(x, p))^{1/2} \xrightarrow{p \rightarrow p_0+} 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, множество векторов вида $\langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi(\xi) \rangle$, $\psi(\xi) \in C(S)$, порождает по лемме 4 пространство $\overline{L} = L + iL$. Поэтому можно выбрать множество функций $\psi_i(\xi) \in C(S)$, $i = 1, \dots, l$, так, что векторы $v_i = \langle \mu_x^{p_0 q}, \xi \psi_i(\xi) \rangle$ образуют алгебраический базис L .

Из (34) при $\psi(\xi) = \psi_i(\xi)$, $i = 1, \dots, l$, следует, что

$$|(\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0), v_i)| \leq c_i \omega(p) \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)|, \quad c_i = \text{const},$$

и так как $v_i, i = 1, \dots, l$, — базис L , то из этих оценок следует, что для всех $p \in V$

$$|\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0)| \leq c\omega(p) \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)|, \quad c = \text{const}. \quad (35)$$

Уменьшив при необходимости δ , будем считать, что $2c\omega(p) \leq \varepsilon < 1$ при $p_0 < p < p_0 + \delta$. Тогда ввиду (35)

$$|\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, p_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{\lambda \in [p_0, p]} |\tilde{\varphi}(x, p) - \tilde{\varphi}(x, \lambda)|, \quad (36)$$

причем из непрерывности $\varphi(x, p)$ и плотности множества D следует, что (36) выполнено для всех $p \in [p_0, p_0 + \delta]$.

Покажем, что тогда $\tilde{\varphi}(x, p) \equiv \tilde{\varphi}(x, p_0)$ при $p \in [p_0, p_0 + \delta]$. Действительно, пусть при $p' \in [p_0, p_0 + \delta]$

$$|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)| = \max_{\lambda \in [p_0, p_0 + \delta]} |\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, p_0)|.$$

Тогда при $\lambda \in [p_0, p']$

$$|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, \lambda)| \leq |\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, p_0)| + |\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)| \leq 2|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)|$$

и

$$\max_{\lambda \in [p_0, p']} |\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, \lambda)| \leq 2|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)|.$$

Из (36) при $p = p'$ тогда следует, что

$$|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)| \leq \varepsilon |\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)|,$$

и так как $\varepsilon < 1$, то

$$|\tilde{\varphi}(x, p') - \tilde{\varphi}(x, p_0)| = \max_{\lambda \in [p_0, p_0 + \delta]} |\tilde{\varphi}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}(x, p_0)| = 0.$$

Дополнительно предположим, что функция $p \mapsto (\xi, \varphi(x, p))$ не постоянна на невырожденных интервалах для всех ненулевых $\xi \in \mathbb{R}^n$. Как следует из условия невырожденности, это верно для множества полной меры $x \in \Omega'$.

Предполагая, что $l = \dim L > 0$, выбираем ненулевой вектор $\xi \in L$. Так как $\tilde{\varphi}(x, p) = \tilde{\varphi}(x, p_0)$ при $p \in [p_0, p_0 + \delta]$, то верно равенство $(\xi, \varphi(x, p)) = (\xi, \varphi(x, p_0)) = \text{const}$, справедливое на невырожденном отрезке $p \in [p_0, p_0 + \delta]$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $l = 0$, и так как $l = \max_{p \in D} \dim L(p)$, то $L(p) = \{0\}$ при $p \in D$ и $\text{supp } \mu_x^{pq} = \emptyset$. Принимая во внимание произвольность $q \in D$, получаем, что $\mu_x^{pq} \equiv 0$ для всех $p, q \in D$. Поскольку это равенство справедливо на множестве полной меры значений x , то $\mu^{pq} = \mu_x^{pq} dx \equiv 0$ для $p, q \in D$. Наконец, из плотности множества D и непрерывности μ^{pq} по индексам p, q (см. предложение 2) следует равенство $\mu^{pq} \equiv 0$ для всех $p, q \in E$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *При условии невырожденности уравнения (1) последовательность ν_x^k сходится при $k \rightarrow \infty$ к ν_x^0 сильно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$, — подпоследовательность, для которой определена H -мера $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$. По теореме 2 $\mu^{pp} = 0$ при $p \in E$. Отсюда вытекает, что при $r \rightarrow \infty$

$$u_r(x, p) \rightarrow u_0(x, p) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\Omega).$$

Действительно, по определению H -меры и из равенства Планшереля $\forall \Phi(x) \in C_0(\Omega)$, $p \in E$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|U_r^p \Phi\|_2^2 = \langle \mu^{pp}, |\Phi(x)|^2 \rangle = 0.$$

Итак, при $p \in E$

$$\int \theta(\lambda - p) d\nu_x^r(\lambda) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int \theta(\lambda - p) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\Omega). \quad (37)$$

Так как любая непрерывная функция может быть равномерно на любом компакте аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций вида $\lambda \mapsto \theta(\lambda - p)$, $p \in E$, то из (37) для всех $f(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int f(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \int f(\lambda) d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^2(\Omega),$$

а значит, и в $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, т.е. подпоследовательность ν_x^r сходится к ν_x^0 сильно. Наконец, поскольку при любом возможном выборе подпоследовательности ν_x^r предельная мерозначная функция определяется однозначно, то и исходная последовательность ν_x^k также сильно сходится к ν_x^0 . Теорема доказана.

Теорема 3 с учетом теоремы 1 может быть сформулирована иначе: любое ограниченное множество м.р. уравнения (1) предкомпактно в топологии сильной сходимости (т.е. выполнено SC-свойство).

В регулярном случае из теоремы 3 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любая ограниченная в $L^\infty(\Omega)$ последовательность о.э.р. $u_k(x)$ невырожденного уравнения (1) содержит сходящуюся в $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ подпоследовательность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если последовательность $u_k(x)$ сходится к мерозначной функции ν_x^0 сильно в $MV(\Omega)$, то по определению сильной сходимости

$$u_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_0(x) = \int \lambda d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L_{\text{loc}}^1(\Omega)$$

(отсюда легко следует также регулярность ν_x^0 : $\nu_x^0(\lambda) = \delta(\lambda - u_0(x))$ п.в. на Ω).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Доказательства основных теорем 2, 3 для невырожденного уравнения (1) опираются только на предельное соотношение (22). Поэтому эти теоремы справедливы в общем случае последовательностей мерозначных функций, удовлетворяющих (22). Такие последовательности часто возникают при аппроксимации уравнения (1) (например, с помощью метода “исчезающей вязкости”).

Список литературы

1. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations. Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symp., Vol. 4, Edinburgh 1979 // Res. Notes Math. 1979. V. 39. P. 136–212.
2. *Панов Е. Ю.* О последовательностях мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. №2. С. 87–106.
3. *Панов Е. Ю.* О сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Матем. сб. 1995. Т. 186. №5. С. 103–114.
4. *Lions P. L., Perthame B., Tadmor E.* A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations // J. Amer. Math. Soc. 1994. V. 7. №1. P. 169–191.
5. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. №1. С. 29–32.
6. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81. №2. С. 228–255.
7. *DiPerna R. J.* Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rational Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.
8. *Дакоронья Б.* Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. №4. С. 35–98.
9. *Tartar L.* H -measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1990. V. 115. №3–4. P. 193–230.
10. *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.

Новгородский государственный университет

Поступила в редакцию
24.12.1997