Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Гулецкий, О непрерывной части алгебраических циклов коразмерности 2 на трехмерных многообразиях, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 17–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:13:08

УДК 512.734

В. И. Гулецкий

О непрерывной части алгебраических циклов коразмерности 2 на трехмерных многообразиях

Пусть X – гладкое трехмерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, и пусть $A^2(X)$ – группа циклов коразмерности 2, алгебраически эквивалентных нулю на X по модулю рациональной эквивалентности с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Предположим, что X бирационально эквивалентно трехмерному многообразию X' , расслаивающемуся над целой кривой C с общим слоем X'_η , удовлетворяющим следующим трем условиям: мотив $M(X'_\eta)$ конечномерен; $H_{\text{et}}^1(X_\eta, \mathbb{Q}_l) = 0$; $H_{\text{et}}^2(X_\eta, \mathbb{Q}_l(1))$ покрывается дивизорами на X_η . Мы показываем, что при этих условиях группа $A^2(X)$ представима в слабом смысле: существуют кривая Y и соответствие z на $Y \times X$ такие, что z индуцирует эпиморфизм $A^1(Y) \rightarrow A^2(X)$, где $A^1(Y)$ изоморфна абелевому многообразию $\text{Pic}^0(Y)$, умноженному на $\mathbb{Q}$. В частности, результат справедлив для трехмерных многообразий, бирациональных трехмерным расслоениям дель Педро над кривой.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: алгебраические циклы, трехмерные многообразия, мотивы, раздвижения.

§ 1. Введение

Пусть X – неособое проективное многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k . Для любого целого $0 \leq i \leq d$ пусть $CH^i(X)$ – группа Чжоу коразмерности i алгебраических циклов с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ по модулю рациональной эквивалентности на X . В настоящей статье изучается подгруппа $A^i(X)$ в $CH^i(X)$, порожденная циклами, алгебраически эквивалентными нулю на X . Напомним, что цикл называется алгебраически эквивалентным нулю, если он может быть продеформирован в 0 в тривиальном семействе над неособой проективной кривой. В этом смысле $A^i(X)$ может рассматриваться как непрерывная часть группы $CH^i(X)$ (см. [1]). Группа $A^1(X)$ может быть отождествлена с группой Пикара $\text{Pic}^0(X)$, тензорно умноженной на $\mathbb{Q}$. В максимальной коразмерности $A^d(X)$ – группа нульмерных циклов степени 0 по модулю рациональной эквивалентности на X .

Группа $A^i(X)$ называется (слабо) представимой, если существуют кривая Y и класс циклов z в $CH^i(Y \times X)$ такие, что индуцированный гомоморфизм $z_*: A^1(Y) \rightarrow A^i(X)$ сюръективен. При этом при работе с целочисленными коэффициентами требуется, чтобы ядро гомоморфизма z_* было замкнутой подгруппой в якобиане кривой Y . В настоящей статье мы будем систематически использовать рациональные коэффициенты в группах Чжоу, вопрос о замкнутости ядра опускается, а представимость $A^i(X)$ будет всегда означать только наличие сюръективного гомоморфизма z_* .

Работа поддержана грантом NSF DMS-0111298 и фондом JSPS.

Группа $A^1(X)$ представима, если X – кривая. Если для поверхности X над $\mathbb{C}$ ядро гомоморфизма Альбанезе тривиально, то $A^2(X)$ также представима. Представимость 0-циклов на поверхности без всюду голоморфных 2-форм была высказана в качестве гипотезы С. Блохом, и это было частью интуиции, ведущей к общему взгляду на алгебраические циклы через гипотетическую категорию смешанных мотивов (см. обзор [2]). С другой стороны, если X – это поверхность с $p_g > 0$, то группа $A^2(X)$ далека от того, чтобы быть представимой (см. [3]). Недавно было обнаружено, что для поверхности X с $p_g = 0$ гипотеза Блоха верна тогда и только тогда, когда мотив $M(X)$ конечномерен в смысле Кимуры (см. [4], [5]).

Цель настоящей статьи – показать, что мотивная конечномерность может быть также полезной и при изучении $A^2(X)$ в трехмерном случае. Мы покажем, что для некоторых трехмерных многообразий X представимость $A^2(X)$ вытекает из конечномерности мотива общего слоя подходящего расслоения X над кривой. В полной общности такое утверждение, конечно же, неверно.

Для того чтобы сформулировать результат более точно, нам нужны некоторые дополнительные обозначения. Пусть $f: X \rightarrow C$ – это расслоение трехмерного многообразия над целой кривой, $\eta = \text{Spec}(k(C))$ – общая точка C , $\bar{\eta} = \text{Spec}(\bar{k}(C))$ – спектр замыкания $k(C)$ и $X_{\bar{\eta}}$ – общий слой морфизма f над $\bar{\eta}$. Пусть также $H_{\text{et}}^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)$ и $H_{\text{et}}^2(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l(1))$ – группы этальных l -адических когомологий, где l – простое число, отличное от характеристики основного поля k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – неособое проективное трехмерное многообразие над алгебраически замкнутым полем k . Предположим, что X с точностью до бирациональной эквивалентности (посредством раздутий и стягиваний с гладкими центрами) расслаивается над кривой и общий слой $X_{\bar{\eta}}$ этого расслоения удовлетворяет следующим условиям:

- (i) мотив $M(X_{\bar{\eta}})$ конечномерен;
- (ii) $H_{\text{et}}^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l) = 0$;
- (iii) $H_{\text{et}}^2(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l(1))$ порождается классами дивизоров на $X_{\bar{\eta}}$.

Тогда группа $A^2(X)$ представима в указанном выше смысле.

Посмотрим, насколько применим этот результат. Если $k = \mathbb{C}$, то согласно программе минимальных моделей над $\mathbb{C}$ все неособые проективные многообразия могут быть разделены на две части: те, которые бирационально эквивалентны $\mathbb{Q}$ -факториальному X' самое большее с терминальными особенностями и численно эффективным $K_{X'}$, и те, которые бирациональны $\mathbb{Q}$ -факториальному X' , допускающему терминальные особенности, экстремальное стягивание $X' \rightarrow C$ которого является расслоением Мори. Второй случай разделяется на три подслучая: если $\dim(C) = 0$, то X' – это многообразие Фано, если $\dim(C) = 2$, то X' – расслоение на коники, и если $\dim(C) = 1$, то общий слой X'_{η} – это неособая проективная поверхность дель Пеццо над η . В последнем случае исходное многообразие X удовлетворяет условиям теоремы 1, откуда получаем представимость группы $A^2(X)$. Типичный пример – общая неособая кубика X в $\mathbb{P}^4$. Если же мы возьмем общую квартику $X \subset \mathbb{P}^4$, то $A^2(X)$ также представима (см. обзор в [6]), но ее общее гиперплоское сечение является КЗ-поверхностью, конечномерность мотива которой пока неизвестна.

Работа состоит из трех параграфов. В §2 мы напомним некоторые общеизвестные факты и доказываем подготовительные результаты, относящиеся

к представимости $A^2(X)$ для трехмерных многообразий X . В §3 содержатся главные вычисления и доказательство теоремы 1.

§ 2. Предварительные результаты

Пусть S – неособое связное квазипроективное многообразие над k , и пусть X и Y – две неособые проективные схемы над S . Пусть $X = \bigcup_j X_j$ – связные компоненты X . Для любого неотрицательного m пусть

$$\mathrm{Corr}_S^m(X, Y) = \bigoplus_j CH^{e_j+m}(X_j \times_S Y)$$

– группа относительных соответствий степени m из X в Y над S , где e_j – это относительная размерность X_j над S . Например, для заданного морфизма $f: X \rightarrow Y$ над S транспозиция Γ_f^t его графа Γ_f лежит в $\mathrm{Corr}_S^0(X, Y)$. Для двух любых соответствий $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ над S их композиция $g \circ f$ определена по формуле

$$g \circ f = p_{13*}(p_{12}^*(f) \cdot p_{23}^*(g)),$$

где точка обозначает пересечение классов циклов в смысле [7] и все проекции – это проекции расслоенных произведений над базой S . Категория $\mathcal{M}(S)$ мотивов Чжоу над S с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ может быть определена как псевдоабелева оболочка категории соответствий с некоторым “скручиванием Тэйта”, заиндексированным целыми числами. Объекты в $\mathcal{M}(S)$ суть тройки

$$(X/S, p, n),$$

где X/S – неособая проективная схема над S , $p \in \mathrm{Corr}_S^0(X, X)$, $p^2 = p$ и n – целое число. Для любого X/S мотив $M(X/S)$ определен относительной диагональю $\Delta_{X/S}$, $M(X/S) = (X/S, \Delta_{X/S}, 0)$ и для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ над S морфизм $M(f): M(Y/S) \rightarrow M(X/S)$ определяется соответствием Γ_f^t . Категория $\mathcal{M}(S)$ является жесткой с тензорным произведением, удовлетворяющим формуле

$$M(X/S) \otimes M(Y/S) = M(X \times_S Y),$$

так что функтор M из категории неособых проективных схем над S в $\mathcal{M}(S)$ является тензорным. Схема S/S с индексом 0 дает единичный объект 1_S в $\mathcal{M}(S)$, и если она заиндексирована числом -1 , то она дает так называемый мотив Лефшеца 1_S . Если E – мультисечение степени $w > 0$ схемы X/S , мы определяем два проектора

$$\pi_0 = \frac{1}{w} [E \times_S X], \quad \pi_{2e} = \frac{1}{w} [X \times_S E],$$

где e – это относительная размерность X/S . Тогда имеются стандартные изоморфизмы $1_S \cong (X, \pi_0, 0)$, $1_S^{\otimes e} \cong (X, \pi_{2e}, 0)$. Наконец, если $f: T \rightarrow S$ – морфизм базисных схем над k , то f дает тензорный функтор замены базы $f^*: \mathcal{M}(S) \rightarrow \mathcal{M}(T)$. Все детали о мотивах Чжоу над неособой базой можно найти, например, в [8].

Ниже мы будем использовать некоторые основные факты из теории конечномерных мотивов, или, более общо, конечномерных объектов в тензорных категориях (см. [5] или [9]). Коротко говоря, для любой тензорной $\mathbb{Q}$ -линейной

псевдоабелевой категории $\mathcal{C}$ можно определить внешние и симметрические степени любого объекта в $\mathcal{C}$. Тогда говорят, что $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ является конечномерным (см. [5]), если он может быть разложен в прямую сумму $X = Y \oplus Z$, так что $\bigwedge^m Y = 0$ и $\text{Sym}^n Z = 0$ для некоторых неотрицательных целых m и n . Свойство конечномерности замкнуто относительно прямых сумм, тензорных произведений и т.д.

Пусть теперь X и Y – объекты в $\mathcal{C}$. Так как категория $\mathcal{C}$ жесткая, то группы внутренних морфизмов связаны с дуализацией посредством формулы

$$\underline{\text{Hom}}(X, Y) \cong \check{X} \otimes Y.$$

В частности, мы имеем изоморфизм $\underline{\text{Hom}}(X, X) \cong \check{X} \otimes X$, композиция которого с морфизмом вычисления $\check{X} \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ дает морфизм

$$\underline{\text{Hom}}(X, X) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Если теперь к обеим частям применить функтор $\text{Hom}(\mathbf{1}, -)$, то получим так называемый морфизм следа

$$\text{tr}_X : \text{End}(X) \longrightarrow \text{End}(\mathbf{1}).$$

Во всех используемых нами жестких тензорных категориях $\text{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{Q}$, так для каждого эндоморфизма $f : X \rightarrow X$ его след $\text{tr}_X(f)$ – это число в $\mathbb{Q}$. Тогда морфизм $f : X \rightarrow Y$ в $\mathcal{C}$ называется численно тривиальным, если для любого морфизма $g : Y \rightarrow X$ след $\text{tr}_X(g \circ f)$ равен нулю (см. [9; пп. 7.1.1, 7.1.2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{C}$ – тензорная $\mathbb{Q}$ -линейная псевдоабелева категория, X – конечномерный объект в $\mathcal{C}$, и пусть f – численно тривиальный эндоморфизм X . Тогда f является нильпотентом в кольце $\text{End}(X)$.

Доказательство этого утверждения было получено в [5; п. 7.5] для мотивов Чжоу и в [9; п. 9.1.14] в случае абстрактной тензорной категории.

ЛЕММА 3. Пусть $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ – тензорный функтор между двумя жесткими тензорными $\mathbb{Q}$ -линейными и псевдоабелевыми категориями. Предположим, что F индуцирует вложение $\text{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}_1}) \hookrightarrow \text{End}(\mathbf{1}_{\mathcal{C}_2})$. Тогда если X – конечномерный объект в $\mathcal{C}_1$ и $F(X) = 0$, то X также равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g – эндоморфизм X . Тогда выполняется равенство $F(\text{tr}(g \circ 1_X)) = \text{tr}(F(g \circ 1_X))$ (см. [10; с. 116]). Так как $F(X) = 0$, то мы имеем $F(g \circ 1_X) = 0$. Тогда $\text{tr}(g \circ 1_X) = 0$, потому что F является инъекцией на кольцах эндоморфизмов единичных объектов. Следовательно, тождественный морфизм 1_X численно тривиален. Так как X конечномерен, то он тривиален по утверждению 2.

Следующая лемма была сообщена автору Дж. Аюбом.

ЛЕММА 4. Пусть S – гладкое многообразие над k , η – общая точка S и W – множество открытых по Зарискому подмножеств в S . Тогда

$$\mathcal{M}(\eta) = \text{colim}_{U \in W} \mathcal{M}(U),$$

где копредел взят в 2-категории псевдоабелевых тензорных категорий с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что заданы тензорная $\mathbb{Q}$ -линейная псевдоабелева категория $\mathcal{T}$ и система тензорных функторов $G_U: \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{T}$, совместимых с функторами ограничения $i^*: \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$ для каждого включения открытых по Зарискому подмножеств $i: V \subset U$. Нам нужно показать, что существует единственный функтор $F: \mathcal{M}(\eta) \rightarrow \mathcal{T}$ такой, что композиция функтора обратного образа $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(\eta)$ с F совпадает с G_U для каждого U из W . Доказательство состоит на самом деле из систематического использования раздвижений¹ алгебраических циклов и последовательности локализации для групп Чжоу. Действительно, пусть $M = (X, p, n)$ – мотив над η , и пусть X' и p' – раздвижения X и p соответственно над некоторым открытым по Зарискому множеством U в S . Сужая U , если это необходимо, и применяя локализацию для групп Чжоу, мы можем предполагать, что $p'^2 = p'$, т.е. p' является относительным проектором над U . Тройка $M' = (X', p', n)$ – это объект в $\mathcal{M}(U)$, так что мы определяем $F(M)$ как $G_U(M')$. Систематически сужая открытые по Зарискому подмножества, можно показать, что определенный таким образом объект $F(M)$ не зависит от выбора раздвижений. На морфизмах F может быть определен аналогично, потому что морфизмы мотивов Чжоу – это тоже алгебраические циклы. Однозначность построенного функтора очевидна, если принять во внимание локализацию для групп Чжоу еще раз.

Нам также понадобится эквивалентная переформулировка представимости $A^2(X)$. Пусть X – неособое проективное трехмерное многообразие над k . Как мы уже отмечали во введении, группа $A^2(X)$ представима, если существуют неособая проективная кривая Y и соответствие $a \in CH^2(Y \times X)$ такие, что гомоморфизм $a_*: A^1(Y) \rightarrow A^2(X)$, индуцированный a , сюръективен, где $A^1(Y)$ – это абелево многообразие $\text{Pic}^0(Y) \cong \text{Alb}(Y)$, тензорно умноженное на $\mathbb{Q}$. По техническим соображениям удобно ввести другое определение: $A^2(X)$ представима, если существуют конечный набор неособых проективных кривых $Y_1, \dots, Y_m$ и соответствия $a_i \in CH^2(Y_i \times X)$ такие, что гомоморфизм

$$\sum_{i=1}^m (a_i)_*: \bigoplus_{i=1}^m A^1(Y_i) \longrightarrow A^2(X)$$

сюръективен. Очевидно, первое определение влечет за собой второе. Следующий аргумент для обратной импликации взят из [1]. По теореме Бертини берем гладкое одномерное линейное сечение Y произведения $Y_1 \times \dots \times Y_m$. Включение Y в $Y_1 \times \dots \times Y_m$ дает сюръекцию на многообразиях Альбанезе $\text{Alb}(Y) \rightarrow \text{Alb}(Y_1 \times \dots \times Y_m)$. Зафиксируем замкнутую точку y_i на каждой кривой Y_i . Для любого $1 \leq i \leq m$ имеем вложение $Y_i \hookrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_m$, сопоставляющее точке $y \in Y_i$ точку $(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_m)$, где y стоит на i -м месте. Рассматривая композицию такого вложения с соответствующей проекцией, мы получаем тождественное отображение на Y_i . Применяя функтор Alb , получаем гомоморфизмы $\text{Alb}(Y_i) \rightarrow \text{Alb}(Y_1 \times \dots \times Y_m)$, индуцированные этими вложениями, и гомоморфизмы $\text{Alb}(Y_1 \times \dots \times Y_m) \rightarrow \text{Alb}(Y_i)$, индуцированные проекциями. Так как конечное произведение абелевых групп является также и копроизведением, мы получаем два гомоморфизма: из $\text{Alb}(Y_1) \times \dots \times \text{Alb}(Y_m)$ в $\text{Alb}(Y_1 \times \dots \times Y_m)$ и обратно, композиция которых является тождественным отображением на $\text{Alb}(Y_1) \times \dots \times \text{Alb}(Y_1)$. Из этого следует, что второй гомоморфизм сюръективен. Его композиция с указанным

¹Перевод английского слова *spread*.

выше сюръективным гомоморфизмом $\text{Alb}(Y) \rightarrow \text{Alb}(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$ дает сюръективный гомоморфизм $\text{Alb}(Y) \rightarrow \times_{i=1}^m \text{Alb}(Y_i) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Alb}(Y_i)$. Так как Y и все $Y_1, \dots, Y_m$ являются неособыми проективными кривыми, мы можем заменить Alb на A^1 , получая сюръективный гомоморфизм $A^1(Y) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m A^1(Y_i)$. Наконец, его композиция с полученным выше сюръективным гомоморфизмом $\sum_{i=1}^m (a_i)_* : \bigoplus_{i=1}^m A^1(Y_i) \rightarrow A^2(X)$ дает нам сюръективный гомоморфизм $A^1(Y) \rightarrow A^2(X)$, что и требовалось. Таким образом, оба определения представимости $A^2(X)$ эквивалентны.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть X – это неособое проективное трехмерное многообразие над алгебраически замкнутым полем k , удовлетворяющее условиям теоремы 1. Приведенное ниже доказательство может быть разделено на две части: цепочка редукций и вычисления с относительными соответствиями. Редукции состоят, коротко говоря, в конечных расширениях базовой кривой C , вырезании конечного числа точек из C и соответственно в удалении слоев над ними из многообразия X . Тогда, конечно, мы будем работать с другим семейством, имея дело с A^2 в некомпактном случае. Важный момент заключается в том, что представимость $A^2(X)$ можно определить также и для некомпактного X , и тогда, если X – трехмерное многообразие, расслоенное над кривой, представимость $A^2(X)$ локальна по базе.

Для того чтобы сформулировать все это более точно, начнем со следующих двух лемм, доказанных в [1]. Поскольку мы опускаем из понятия представимости требование замкнутости ядра (см. введение), то обе леммы, очевидно, следуют из общих свойств групп Чжоу, приведенных в [7].

ЛЕММА 5. Пусть $Y \rightarrow X$ – морфизм неособых проективных многообразий конечной степени над k . Если $A^2(Y)$ представима, то $A^2(X)$ также представима.

ЛЕММА 6. Пусть X и X' – два неособых проективных многообразия над полем. Предположим, что X бирационально эквивалентно X' посредством цепочки раздутий и стягиваний с гладкими центрами. Тогда представимость $A^2(X)$ эквивалентна представимости $A^2(X')$.

Редукция 1. По лемме 6 мы можем считать, что X расслоено над кривой,

$$f: X \longrightarrow C,$$

и общий слой этого расслоения удовлетворяет трем условиям теоремы 1.

Редукция 2. Пусть $\eta = \text{Spec}(k(C))$ – общая точка кривой C , и пусть $\bar{\eta}$ – спектр алгебраического замыкания $\bar{k}(C)$ поля функций $k(C)$ на кривой C . Мы предполагаем, что $H_{\text{et}}^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l) = 0$ и что группа $H_{\text{et}}^2(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l(1))$ алгебраична. Пусть b_2 – второе число Бетти общего слоя $X_{\bar{\eta}}$, и пусть

$$D_1, \dots, D_{b_2}$$

– дивизоры над $\bar{\eta}$, порождающие $H_{\text{et}}^2(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_l)$. Мы можем расширить C конечным расширением $C' \rightarrow C$ таким образом, что если $X' = X \times_C C'$ – это расширение базы, то дивизоры D_i определены над общей точкой η' кривой C' . Поскольку $X' \rightarrow X$ – морфизм конечной степени, мы можем считать, что дивизоры $D_1, \dots, D_{b_2}$ определены над η по лемме 5. И, конечно же, чтобы остаться

в категории неособых многообразий, мы должны разрешить особенности на X' и еще раз применить лемму 6.

Теперь нам нужна следующая простая лемма.

ЛЕММА 7. Пусть X – гладкое проективное многообразие над k , и пусть $A^2(X) = V \oplus W$ – расщепление $\mathbb{Q}$ -векторного пространства $A^2(X)$ на два подпространства. Предположим, далее, что V конечномерно. Тогда $A^2(X)$ представимо, если и только если существуют конечный набор гладких проективных кривых $Y_1, \dots, Y_m$ и соответствий $a_i \in CH^2(Y_i \times X)$ таких, что гомоморфизм $\sum_{i=1}^m (a_i)_*: \bigoplus_{i=1}^m A^1(Y_i) \rightarrow A^2(X)$ сюръективно покрывает W . Другими словами, представимость $A^2(X)$ имеет место с точностью до конечномерного подпространства в $A^2(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{v_1, \dots, v_n\}$ – это базис для V . Для каждого индекса j пусть B_j – это некоторый алгебраически тривиальный цикл, представляющий класс циклов v_j . По определению алгебраической эквивалентности существуют гладкая проективная кривая T_j , две замкнутые точки p_j и q_j на T_j и алгебраический цикл Z_j на $T_j \times X$ такие, что Z_j пересекает дивизоры $p_j \times X$ и $q_j \times X$ собственнo и эти пересечения суть B_j и 0 соответственно. В этом случае, если z_j – класс цикла A_j , то значение гомоморфизма $(z_j)_*$ на классе алгебраически тривиального 0-цикла $p_j - q_j$ – это в точности класс циклов v_j . Таким образом, пространство V накрывается образом гомоморфизма $\sum (z_j)_*: \bigoplus A^1(T_j) \rightarrow A^2(X)$. Для того чтобы завершить доказательство, нам необходимо только добавить кривые Y_i из условия леммы и использовать второе эквивалентное определение представимости $A^2(X)$.

Редукция 3. Пусть $\{p_1, \dots, p_m\}$ – конечное множество замкнутых точек кривой C , включающее в себя все точки, над которыми лежат особые слои отображения $f: X \rightarrow C$, пусть

$$U = C - \{p_1, \dots, p_m\},$$

и пусть

$$Y = X - f^{-1}(\{p_1, \dots, p_m\}).$$

Ограничение отображения f на Y будем обозначать той же буквой f . Рассмотрим точную последовательность локализации

$$\bigoplus_{j=1}^m CH^1(X_{p_j}) \longrightarrow CH^2(X) \longrightarrow CH^2(Y) \rightarrow 0.$$

$\mathbb{Q}$ -векторное пространство $CH^2(X)$ расщепляется на два подпространства:

$$CH^2(X) = CH^2(Y) \oplus I,$$

где

$$I = \text{im} \left(\bigoplus_j CH^1(X_{p_j}) \longrightarrow CH^2(X) \right),$$

или, что то же самое, гомоморфизм локализации $CH^2(X) \rightarrow CH^2(Y)$ имеет сечение $CH^2(Y) \rightarrow CH^2(X)$. Нетрудно видеть, что для любого класса циклов $\alpha \in A^2(Y)$ в его прообразе относительно сюръективного гомоморфизма $CH^2(X) \rightarrow CH^2(Y)$ всегда можно найти класс циклов β такой, что β также

является алгебраически эквивалентным нулю. Тогда мы имеем сюръективный гомоморфизм локализации

$$A^2(X) \longrightarrow A^2(Y)$$

и соответственно расщепление

$$A^2(X) = A^2(Y) \oplus J,$$

где $J = I \cap A^2(X)$ внутри $CH^2(X)$, если мы фиксируем сечение $A^2(Y) \rightarrow A^2(X)$ и отождествляем $\mathbb{Q}$ -векторное пространство $A^2(Y)$ с его образом в $A^2(X)$.

Для каждого индекса j пусть $\tilde{X}_{p_j}$ – это разрешение особенностей поверхности X_{p_j} ($\tilde{X}_{p_j} = X_{p_j}$, если поверхность X_{p_j} неособая). Заметим, что для поверхностей мы имеем разрешение особенностей в любой характеристике, так что у нас нет необходимости делать какие бы то ни было ограничения на основное поле k в этом месте. По теореме Бертини для любой неприводимой компоненты Z разрешения $\tilde{X}_{p_j}$ существует неособое линейное сечение T многообразия Пикара $P = \text{Pic}^0(Z)$ компоненты Z . Применяя функтор Альбанезе к вложению $T \hookrightarrow P$, мы получаем сюръективный гомоморфизм $J = \text{Alb}(C) \rightarrow \text{Alb}(P) \cong P$, где J – это якобиан кривой C . Всякий такой гомоморфизм может быть индуцирован дивизором D на произведении $C \times Z$ после умножения на $\mathbb{Q}$ (см. [11]). Другими словами, $D_*: A^1(T) \rightarrow A^1(Z)$ сюръективен. Так как раздутия сюръективны на группах Чжоу (см. [7; утверждение 6.7(b)]), можно легко сконструировать конечный набор неособых кривых $T_1, \dots, T_m$ и дивизоров D_{ij} на $T_i \times X_{p_j}$ таких, что соответствующий гомоморфизм $\sum_{i,j} (D_{ij})_*$ из $\sum_i A^1(T_i)$ в $\sum_j A^1(X_{p_j})$ является сюръективным. Так как группа Нерона–Севери $NS_{\mathbb{Q}}(Z) = CH^1(Z)/A^1(Z)$ конечномерна для каждой компоненты Z в $\tilde{X}_{p_j}$, то дополнение $\sum_j A^1(X_{p_j})$ в $\sum_j CH^1(X_{p_j})$ является конечномерным $\mathbb{Q}$ -векторным пространством. Это влечет за собой, что ядро J гомоморфизма локализации $A^2(X) \rightarrow A^2(Y)$ расщепляется в два $\mathbb{Q}$ -векторных подпространства V и W , где W покрыто группами A^1 указанных выше кривых T_i посредством дивизоров D_{ij} , а второе подпространство V является конечномерным. Тогда по лемме 7, а также принимая во внимание второе определение представимости $A^2(X)$, мы видим: чтобы доказать, что $A^2(X)$ представима, нам нужно только показать, что существует другой конечный набор неособых проективных кривых соответствий из них в X таких, что соответствующий гомоморфизм покрывает дополнение $A^2(Y)$ пространства $J = V \oplus W$ в $A^2(X)$. Другими словами, при доказательстве представимости $A^2(X)$ мы можем вырезать любое конечное число слоев отображения $X \rightarrow C$, работая только с группой $A^2(Y)$.

Редукция 4. Расширяя C еще больше, если это необходимо, мы можем предполагать, что X_η имеет рациональную точку над η . Эта рациональная точка индуцирует сечение отображения $f: Y \rightarrow U$. Если E – образ этого сечения, то его самопересечение $E \cdot E$ равно нулю на Y , потому что коразмерность E в X равна 2 (или, например, из-за того, что мы можем вырезать дополнительные слои отображения f). Тогда относительные проекторы

$$\pi_0 = E \times_U Y, \quad \pi_4 = Y \times_U E$$

попарно ортогональны и, следовательно,

$$\pi_2 = \Delta_{Y/U} - \pi_0 - \pi_4$$

– относительный второй проектор Мюррэ для всего семейства $f: Y \rightarrow U$.

Редукция 5. Пусть $M^2(Y/U)$ – относительный мотив, определенный проектором π_2 . Тогда мы имеем следующее стандартное разложение:

$$M(Y/U) = \mathbf{1}_U \oplus M^2(Y/U) \oplus \mathbb{L}_U^{\otimes 2}.$$

По предположениям теоремы 1 мотив $M(X_{\bar{\eta}})$ конечномерен. Если мы посмотрим на определение мотивной конечномерности с геометрической точки зрения, то это означает существование некоторых алгебраических циклов на $X_{\bar{\eta}}^{\times 2N} \times \mathbb{P}^1$, обеспечивающих рациональную тривиальность внешней и симметрической степеней четной и нечетной компонент диагонали для $X_{\bar{\eta}}$. Эти алгебраические циклы имеют общее минимальное поле определения, которое является конечным расширением поля $k(C)$. Расширяя C посредством конечного расширения еще раз, мы можем предполагать без потери общности, что мотив $M(Y_{\eta})$ конечномерен над η .

С другой стороны, $\mathcal{M}(\eta)$ – это копредел категорий мотивов Чжоу над открытыми по Зарискому множествами в C по лемме 4. Это означает, что существует открытое U такое, что относительный мотив $M(Y/U)$ конечномерен в своей категории $\mathcal{M}(U)$.

Главные вычисления. Конечномерность мотива $M(Y/U)$, конечно же, влечет за собой то, что $M^2(Y/U)$ конечномерен. Но на самом деле он четно конечномерен размерности b_2 . Это можно показать, либо используя лемму 4, либо применяя следующий аргумент. Априори мы имеем

$$M^2(Y/U) = A \oplus B,$$

где $\bigwedge^m A = 0$ и $\mathrm{Sym}^n B = 0$. Функтор замены базы

$$\Xi: \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(\eta)$$

является тензорным и, следовательно, сохраняет конечномерность. К тому же Ξ индуцирует изоморфизм между $\mathrm{End}(\mathbf{1}_U) = \mathbb{Q}$ и $\mathrm{End}(\mathbf{1}_{\eta}) = \mathbb{Q}$. Так как

$$\Xi(M^2(Y/U)) = M^2(Y_{\eta}),$$

то из этого следует, что

$$\Xi(B) = 0,$$

потому что $M^2(Y_{\eta})$ четно конечномерен. Тогда

$$B = 0$$

по лемме 3. Таким образом, $M^2(Y/U)$ четно конечномерен. Используя аналогичные аргументы, можно показать, что он зануляется в степени $\bigwedge^{b_2+1}$.

Дивизоры $D_1, \dots, D_{b_2}$ определены над η по редукции 2, и они порождают группу когомологий $H^2(Y_{\bar{\eta}})$ посредством отображения классов циклов

$$CH^1(X_{\eta}) \longrightarrow H^2(Y_{\bar{\eta}}).$$

Поскольку мотив $M(Y_{\eta})$ конечномерен, $H^1(Y_{\bar{\eta}}) = 0$ и $H_{\mathrm{tr}}^2(Y_{\bar{\eta}}) = 0$, то вторая компонента $M^2(Y_{\eta})$ в разложении Мюррэ мотива $M(Y_{\eta})$ может быть вычислена по формуле

$$M^2(Y_{\eta}) = \mathbb{L}_{\eta}^{\oplus b_2}$$

(см. [12; теорема 2.14]). На самом деле эти b_2 копий $\mathbb{L}_{\eta}$ возникают из набора классов дивизоров

$$[D_1], \dots, [D_{b_2}]$$

и их двойственных по Пуанкаре

$$[D'_1], \dots, [D'_{b_2}]$$

на Y_η . Другими словами, если

$$(\pi_2)_\eta = \Xi(\pi_2)$$

– это проектор, определяющий середину мотива $M^2(Y_\eta)$, то разность

$$\varrho_\eta = (\pi_2)_\eta - \sum_{i=1}^{b_2} [D_i \times_\eta D'_i]$$

гомологически тривиальна над общей точкой η . Тогда

$$\varrho_\eta^n = 0$$

в ассоциативном кольце

$$\text{End}(M^2(Y_\eta))$$

для некоторого n по теореме нильпотентности Кимуры (см. [5; утверждение 7.2]).

Пусть теперь W_i и W'_i – раздвижения указанных выше дивизоров D_i и D'_i над U (уменьшаем U еще, если это необходимо). По определению W_i и W'_i – алгебраические циклы коразмерности 1 на Y такие, что их обратные образы на общий слой суть дивизоры D_i и D'_i соответственно. В других терминах:

$$\Xi[W_i] = D_i, \quad \Xi[W'_i] = D'_i.$$

Конечно же, эти W_i и W'_i определены неоднозначно, но для нас важно только то, что они дают D_i и D'_i при переходе в общую точку. Классы циклов $W_i \times_U W'_i$ принадлежат $\text{Cot}_U^0(Y \times_U Y)$, и мы полагаем

$$\varrho = \pi_2 - \sum_{i=1}^{b_2} [W_i \times_U W'_i].$$

Тогда имеем

$$\Xi(\varrho) = \varrho_\eta.$$

Пусть ω – это произвольный эндоморфизм мотива $M^2(Y/U)$, и пусть $\omega_\eta = \Xi(\omega)$. Тогда

$$\Xi(\text{tr}(\omega \circ \varrho)) = \text{tr}(\Xi(\omega \circ \varrho)) = \text{tr}(\omega_\eta \circ \varrho_\eta) = 0,$$

потому что соответствие ϱ_η гомологически тривиально. Здесь мы используем совместимость тензорных функторов со следами еще раз (см. [10; с. 116]). Так как функтор Ξ индуцирует изоморфизм $\text{End}(\mathbf{1}_U) \cong \text{End}(\mathbf{1}_\eta)$, то

$$\text{tr}(\omega \circ \varrho) = 0$$

для любого ω , т.е. ϱ численно тривиален. Поэтому

$$\varrho^n = 0$$

в $\text{End}(M^2(Y/U))$ по утверждению 2.

Пусть теперь $\bar{W}'_i$ – дивизор на X , ограничение которого на Y совпадает с дивизором W'_i . Тогда

$$\theta_i = \Gamma_f^t \cdot [C \times \bar{W}'_i]$$

– класс циклов коразмерности 2 в $C \times X$. Здесь расслоенное произведение $\times$ взято над k , и класс циклов Γ_f^t – это транспонированный график отображения f , т.е. прямой образ класса $[X]$ относительно собственного морфизма $\tau: X \rightarrow C \times X$, определенного отображением $f: X \rightarrow C$ и тождественным отображением $\text{id}: X \rightarrow X$. Пусть

$$(\theta_i)_*: CH^1(C) \longrightarrow CH^2(X)$$

– гомоморфизм, индуцированный соответствием θ_i . Этот гомоморфизм может также быть вычислен еще и по другой формуле. В самом деле, для любого класса циклов a из $CH^1(C)$ имеем

$$f^*(a) = \tau^* p_C^*(a) = \tau^* p_C^*(a) \cdot [X].$$

По формуле проекции

$$\tau_* f^*(a) = p_C^*(a) \cdot \tau_* [X] = p_C^*(a) \cdot \Gamma_f^t.$$

Тогда можно провести такое вычисление:

$$\begin{aligned} (\theta_i)_*(a) &= (p_X)_*(p_C^*(a) \cdot \theta_i) = (p_X)_*(p_C^*(a) \cdot \Gamma_f^t \cdot [C \times \overline{W}'_i]) \\ &= (p_X)_*(\tau_* f^*(a) \cdot [C \times \overline{W}'_i]) = (p_X)_*(\tau_* f^*(a) \cdot p_X^*[\overline{W}'_i]) \\ &= (p_X)_* \tau_* f^*(a) \cdot [\overline{W}'_i] = f^*(a) \cdot [\overline{W}'_i]. \end{aligned}$$

Это дает нам возможность определить гомоморфизм

$$(\theta_i)_*: CH^1(U) \longrightarrow CH^2(Y)$$

в некомпактном случае по аналогичной формуле

$$(\theta_i)_*(a) = f^*(a) \cdot [W'_i]$$

для любого класса циклов a в $CH^1(U)$, где f – это отображение Y на U . Тогда для каждого индекса i мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} CH^1(C) & \xrightarrow{(\theta_i)_*} & CH^2(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH^1(U) & \xrightarrow{(\theta_i)_*} & CH^2(Y) \end{array}$$

Другими словами, гомоморфизмы $(\theta_i)_*$ совместимы в компактном и некомпактном случаях.

Очевидно, что эти гомоморфизмы θ_i сохраняют алгебраическую эквивалентность, так что мы также имеем соответствующий коммутативный квадрат для групп $A^*(-)$:

$$\begin{array}{ccc} A^1(C) & \xrightarrow{(\theta_i)_*} & A^2(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^1(U) & \xrightarrow{(\theta_i)_*} & A^2(Y) \end{array}$$

Результирующая коммутативная диаграмма, которая нам нужна, имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{b_2} A^1(C) & \xrightarrow{\theta_*} & A^2(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^{b_2} A^1(U) & \xrightarrow{\theta_*} & A^2(Y) \end{array}$$

Оба гомоморфизма θ_* в этой диаграмме определены суммированием гомоморфизмов $(\theta_i)_*$.

Элементарный диаграммный поиск показывает теперь, что если нижний гомоморфизм θ_* сюръективен, то образ верхнего гомоморфизма θ_* совпадает с $A^2(X)$ по модулю конечномерного подпространства J в $A^2(X)$, появляющегося в редукции 3. Теперь напомним, что как только мы фиксируем сечение $A^2(Y) \rightarrow A^2(X)$, мы получаем разложение $A^2(X) = A^2(Y) \oplus W \oplus V$, где $\mathbb{Q}$ -векторное пространство W покрывается группами A^1 кривых и V конечномерно. Тогда согласно тому, что было показано в редукции 3, для того, чтобы доказать представимость $A^2(X)$, нам нужно только показать, что нижний гомоморфизм θ_* сюръективен.

Пусть $y \in CH^i(Y)$. Для любого соответствия $c \in \text{Cogr}_U^j(Y, Y)$ пусть, как обычно,

$$c_*(y) = p_{2*}(p_1^*(y) \cdot c) \in CH^{i+j}(Y)$$

– действие соответствия c на y в относительном смысле, т.е. p_1 и p_2 – две проекции из $Y \times_U Y$ на Y . В частности, имеется разложение

$$y = \Delta_{Y/U*}(y) = (\pi_0)_*(y) + (\pi_2)_*(y) + (\pi_4)_*(y)$$

в $CH^2(Y)$. Теперь мы имеем

$$(\pi_0)_*(y) = p_{2*}(p_1^*(y) \cdot \pi_0) = p_{2*}(p_1^*(y) \cdot p_1^*[E]) = p_{2*}p_1^*(y \cdot [E]) = f^*f_*(y \cdot [E]).$$

С этого момента мы будем предполагать, что y – класс циклов коразмерности 2. Тогда, поскольку y и $[E]$ оба коразмерности 2 в трехмерном многообразии, мы имеем, что $y \cdot [E] = 0$, откуда

$$(\pi_0)_*(y) = 0.$$

Предположим, далее, что y алгебраически тривиален, т.е. $y \in A^2(Y)$. В этом случае $f_*(y) = 0$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} (\pi_4)_*(y) &= p_{2*}(p_1^*(y) \cdot \pi_4) = p_{2*}((y \times_U [Y]) \cdot ([Y] \times_U [E])) \\ &= p_{2*}(y \times_U [E]) = f_*(y) \times_U [E] = 0 \end{aligned}$$

(здесь и далее мы используем свойства пересечений относительных циклов над гладкой базой размерности 1; см. [7; п. 2.2]). Как результат имеем

$$y = (\pi_2)_*(y).$$

С другой стороны,

$$\pi_2 = \sum_{i=1}^{b_2} [W_i \times_U W'_i] + \varrho,$$

откуда получаем

$$y = (\pi_2)_*(y) = \sum_{i=1}^{b_2} [W_i \times_U W'_i]_*(y) + \varrho_*(y).$$

Еще раз подчеркнем, что соответствия действуют здесь как относительные соответствия.

Пусть теперь

$$v_1 = - \sum_{i=1}^{b_2} [W_i \times_U W'_i]_*(y),$$

так что

$$\varrho_*(y) = y + v_1.$$

Запишем y как класс линейной комбинации

$$\sum_j n_j Z_j,$$

где Z_j – целые кривые на многообразии Y . Для любых индексов i и j имеем

$$\begin{aligned} [W_i \times_U W'_i]_* [Z_j] &= p_{2*}([Z_j \times_U Y] \cdot [W_i \times_U W'_i]) \\ &= p_{2*}([Z_j] \cdot [W_i]) \times_U ([Y] \cdot [W'_i]) = p_{2*}([Z_j] \cdot [W_i]) \times_U [W'_i]. \end{aligned}$$

По линейности

$$[W_i \times_U W'_i]_*(y) = p_{2*}((y \cdot [W_i]) \times_U [W'_i]).$$

Так как y имеет коразмерность 2, а W_i – коразмерность 1 в гладком трехмерном многообразии Y , то пересечение $y \cdot [W_i]$ – это класс нульмерных циклов на Y . Пусть

$$a_i = f_*(y \cdot [W_i])$$

– это его прямой образ на U относительно собственного отображения $f: Y \rightarrow U$. Используя собственную замену базы и формулу проекции, мы имеем

$$\begin{aligned} [W_i \times_U W'_i]_*(y) &= p_{2*}((y \cdot [W_i]) \times_U [W'_i]) = p_{2*}(p_1^*(y \cdot [W_i]) \cdot p_2^*([W'_i])) \\ &= p_{2*}p_1^*(y \cdot [W_i]) \cdot [W'_i] = f^*f_*(y \cdot [W_i]) \cdot [W'_i] = f^*(a_i) \cdot [W'_i] = (\theta_i)_*(a_i). \end{aligned}$$

Более того, так как y является элементом группы $A^2(Y)$, каждый класс циклов a_i лежит в $A^1(U)$. Тогда мы получаем

$$v_1 = - \sum_{i=1}^{b_2} [W_i \times_U W'_i]_*(y) = - \sum_{i=1}^{b_2} (\theta_i)_*(a_i) = \theta_*(c_1),$$

где

$$c_1 = (-a_1, \dots, -a_{b_2})$$

из $\bigoplus_{i=1}^{b_2} A^1(U)$.

Применяя ϱ_* к обеим частям равенства

$$\varrho_*(y) = \theta_*(c_1) + y,$$

получаем

$$\varrho_*^2(y) = \theta_*(c_2) + y$$

для некоторых c_2 в $\bigoplus_{i=1}^{b_2} A^1(U)$, и так далее. После n -го шага мы получим

$$\varrho_*^n(y) = \theta_*(c_n) + y,$$

где e_n лежит в $\bigoplus_{i=1}^{b_2} A^1(U)$. Но мы знаем, что ϱ – это нильпотентное соответствие в $\text{End}(M(Y/U))$, так что

$$\varrho_*^n(y) = 0$$

для достаточно большого n . Это влечет за собой, что

$$y = -\theta_*(c_n),$$

т.е. y лежит в образе гомоморфизма θ_* , что и требовалось доказать.

Автор выражает благодарность Джозефу Аюбу, Спенсеру Блоху, Елен Ено, Александру Пухликову и Андрею Суслину за полезные обсуждения по теме настоящей статьи. Автор также благодарен Институту высших исследований в Принстоне за незабываемую атмосферу и замечательные условия для работы в 2005–2006 гг., Университету Токио и Университету Хиросимы за гостеприимство в июне и июле 2005 г.

Список литературы

- [1] S. Bloch, “An example in the theory of algebraic cycles”, *Algebraic K-theory* (Northwestern Univ., Evanston, IL, 1976), *Lecture Notes in Math.*, **551**, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 1–29.
- [2] U. Jannsen, “Motivic sheaves and filtrations on Chow groups”, *Motives* (University of Washington, Seattle, WA, USA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 245–302.
- [3] D. Mumford, “Rational equivalence of 0-cycles on surfaces”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 195–204.
- [4] V. Guletskii, C. Pedrini, “Finite-dimensional motives and the conjectures of Beilinson and Murre”, *K-Theory*, **30**:3 (2003), 243–263.
- [5] Sh.-I. Kimura, “Chow groups are finite dimensional, in some sense”, *Math. Ann.*, **331**:1 (2005), 173–201.
- [6] J. P. Murre, “Fano varieties and algebraic cycles”, *The Fano conference* (Torino, Italy, 2002), Univ. Torino, Torino, 2004, 51–68.
- [7] W. Fulton, *Intersection theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984; рус. пер.: У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [8] B. B. Gordon, J. P. Murre, “Chow motives of elliptic modular threefolds”, *J. Reine Angew. Math.*, **514** (1999), 145–164.
- [9] Y. André, B. Kahn, P. O’Sullivan, “Nilpotence, radicaux et structures monoïdales”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **108** (2002), 107–291.
- [10] P. Deligne, J. S. Milne, “Tannakian categories”, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, *Lecture Notes in Math.*, **900**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 101–228.
- [11] A. J. Scholl, “Classical motives”, *Motives* (University of Washington, Seattle, WA, USA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 163–187.
- [12] V. Guletskii, C. Pedrini, “The Chow motive of the Godeaux surface”, *Algebraic geometry*, de Gruyter, Berlin–New York, 2002, 179–195.

В. И. Гулецкий (V. I. Guletskii)
 Department of Mathematical Sciences,
 University of Liverpool, UK
E-mail: vladimir.guletskii@liverpool.ac.uk

Поступила в редакцию
 05.10.2007 и 04.07.2008