Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дудко, Н. И. Нессонов, Характеры проективных представлений бесконечной обобщенной симметрической группы, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:06:10

УДК 512.547.4

А. В. Дудко, Н. И. Нессонов

Характеры проективных представлений бесконечной обобщенной симметрической группы

Бесконечной обобщенной симметрической группой называется группа $B_m = \mathfrak{S}_\infty \ltimes \mathbb{Z}_m^\infty$, где $\mathbb{Z}_m^\infty$ – группа всех последовательностей $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ из $\mathbb{Z}_m$, у которых только конечное число элементов z_k не равно нулю, $\mathfrak{S}_\infty$ – группа всех финитных подстановок натурального ряда. Получено полное описание проективных фактор-представлений конечного типа группы B_m .

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

1.1. Основные определения. Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ группу перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Группа $\mathfrak{S}_n$ естественным образом вкладывается в $\mathfrak{S}_{n+1}$:

$$\mathfrak{S}_n \ni s \rightarrow \tilde{s} \in \mathfrak{S}_{n+1}, \quad \tilde{s}(i) = \begin{cases} s(i), & \text{если } i \leq n, \\ n+1, & \text{если } i = n+1. \end{cases}$$

Бесконечной симметрической группой называется группа $\mathfrak{S}_\infty = \bigcup \mathfrak{S}_n$. Можно рассматривать $\mathfrak{S}_\infty$ как группу всех биекций $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, переставляющих только конечное число элементов. Пусть $\mathbb{Z}_m$ означает циклическую абелеву группу порядка m . Группа $\mathbb{Z}_m^n = \underbrace{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \times \dots \times \mathbb{Z}_m}_n$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{Z}_m^{n+1}$:

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (z_1, z_2, \dots, z_n, 0).$$

Положим $\mathbb{Z}_m^\infty = \bigcup \mathbb{Z}_m^n$. Можно рассматривать $\mathbb{Z}_m^\infty$ как группу всех последовательностей $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ из $\mathbb{Z}_m$, у которых только конечное число элементов z_k не равно нулю. Группа $\mathfrak{S}_\infty$ действует на $\mathbb{Z}_m^\infty$ перестановками

$$s: (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots) \rightarrow (z_{s^{-1}(1)}, z_{s^{-1}(2)}, \dots, z_{s^{-1}(k)}, \dots).$$

Обозначим через B_m полупрямое произведение $\mathfrak{S}_\infty \ltimes \mathbb{Z}_m^\infty$. Следуя [1], будем называть B_m *обобщенной симметрической группой*.

Теория проективных комплексных представлений конечной симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ хорошо развита благодаря классической работе И. Шура [2] и более поздним результатам М. Л. Назарова [3]. Используя явные реализации проективных представлений из [3], М. Л. Назаров получил полное описание неразложимых конечных характеров (фактор-представлений конечного типа) на бесконечной спинсимметрической группе [4], [5].

Систематическое изучение проективных представлений конечных обобщенных симметрических групп $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_m^n$ начато в работе Е. Рида [6]. Полный запас проективных представлений для гипероктаэдральной группы $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n$, $n < \infty$, или группы Вейля типа B был построен Д. Стембриджем [7]. К настоящему времени построена полная классификация неприводимых проективных представлений всех конечных групп $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_m^n$ [1]. В этой работе дано полное описание проективных фактор-представлений конечного типа для группы $\mathfrak{S}_\infty \ltimes \mathbb{Z}_m^\infty$.

Пусть H – гильбертово пространство, $U(H)$ – группа унитарных операторов в H . Для дискретной группы G отображение $\pi: G \rightarrow U(H)$ называется *проективным унитарным представлением*, если для любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется следующее равенство:

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = c(g_1, g_2)\pi(g_1g_2), \quad (1)$$

где $c(g_1, g_2)$ – число, зависящее от g_1 и g_2 .

Представление π группы G называется *представлением конечного типа*, если w^* -алгебра $M(\pi)$, порожденная операторами $\{\pi(g)\}_{g \in G}$, имеет конечный тип. Другими словами, на $M(\pi)$ существует конечный, точный, нормальный след $\text{tr}(\cdot)$. Отметим, что все представления, рассматриваемые в статье, имеют конечный тип.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Проективные унитарные представления π_1 и π_2 называются *проективно квазиэквивалентными*, если существуют изоморфизм

$$\theta: M(\pi_1) \rightarrow M(\pi_2)$$

и функция ω на G со значениями в $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ такие, что $\pi_2(g) = \omega(g)\theta(\pi_1(g))$ для всех $g \in G$. В том случае, когда θ – пространственный изоморфизм, π_1 и π_2 называются *проективно унитарно эквивалентными*.

Далее без ограничения общности будем всегда предполагать, что выполняется условие нормировки: $\text{tr}(\mathbf{I}) = 1$, где $\mathbf{I}$ – единичный оператор из $M(\pi)$. Функция $\chi_\pi = \text{tr}(\pi(\cdot))$ на G называется *характером представления* π и определяет представление с точностью до квазиэквивалентности.

Если $M(\pi)$ – фактор, то π называется *фактор-представлением*, а χ_π – *неразложимым характером*.

Основным результатом настоящей работы является полное описание неразложимых проективных характеров (т.е. характеров проективных фактор-представлений конечного типа) на группе B_m .

1.2. Предварительные замечания. Формулы для характеров фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_\infty$ были получены в классической работе Е. Тома (см. [8]). Позднее А. М. Вершик и С. В. Керов развили асимптотическую теорию характеров на группах $\mathfrak{S}_n$ и показали в [9], что каждый неразложимый характер на группе $\mathfrak{S}_\infty$ является поточечным пределом характеров неприводимых представлений групп $\mathfrak{S}_n$ при $n \rightarrow \infty$ (см. также [10]).

Введем подгруппу

$$\mathfrak{S}_n(\infty) = \{s \in \mathfrak{S}_\infty : s(i) = i \text{ для всех } i \leq n\}.$$

Для унитарного представления π бесконечной симметрической группы в гильбертовом пространстве H обозначим

$$H_n = \{\xi \in H : \pi(s)\xi = \xi \text{ для всех } s \in \mathfrak{S}_n(\infty)\}.$$

Представление π называется *ручным*, если $H = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n}$. Классификация ручных представлений группы $\mathfrak{S}_\infty$ дана А. Либерманом в [11]. В частности, каждое ручное представление является прямой суммой неприводимых ручных представлений, а неприводимые ручные представления параметризуются диаграммами Юнга.

Отправляясь от естественного взаимно однозначного соответствия между конечными характерами на $\mathfrak{S}_\infty$ и сферическими функциями пары $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_\infty)$, Г. И. Ольшанский в [12] получил ряд важных результатов по классификации представлений более общего класса пар вида $(\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty, \text{diag } \mathfrak{S}_n(\infty))$. Эта классификация была завершена А. Ю. Окуньковым [13]. Эти представления имеют тип I, а при сужении неприводимых представлений на каждую из компонент $\mathfrak{S}_\infty \times e$ или $e \times \mathfrak{S}_\infty$, где e – единичный элемент $\mathfrak{S}_\infty$, наряду с представлениями Тома, получаются фактор-представления типа Π_∞ . Развивая подход А. Ю. Окунькова [13], авторы в [14] доказали теорему типа теоремы Тома для групп вида $\mathfrak{S}_\infty \ltimes \Gamma^\infty$, где Γ – произвольная сепарабельная группа.

М. Назаров в работе [5] доказал аналог теоремы Тома для проективных характеров бесконечной симметрической группы. В. Иванов, развивая асимптотический подход Вершика–Керова, дал в [15] новые доказательства основных результатов Назарова.

В настоящей работе мы используем результаты своей работы [14], в которой описаны все неразложимые характеры на группе $\mathfrak{S}_\infty \ltimes \Gamma^\infty$. А именно, при доказательстве классификационной теоремы для проективных характеров на B_m мы показываем, что любой неразложимый проективный характер явно определяется характером некоторого проективного базисного фактор-представления и обычным характером группы B_m (см. теорему 10).

Отметим, что описание обычных неразложимых характеров на группе B_m также получено независимо Р. Бойером [16].

1.3. Неразложимые характеры на группе B_m . В этом пункте мы приведем без доказательств описание обычных неразложимых характеров на группе B_m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непрерывная функция φ на группе G называется *характером*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1)$ для любых $g_1, g_2 \in G$;
- (2) для любых $g_1, g_2, \dots, g_n$ матрица $[\varphi(g_j g_k^{-1})]_{j,k=1}^n$ неотрицательно определена;
- (3) $\varphi(e_G) = 1$, где e_G – единица в G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Характер φ называется *неразложимым*, если представление группы G , построенное по φ согласно конструкции Гельфанда–Найма–Сигала (далее ГНС-конструкции), является фактор-представлением.

Группы $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathbb{Z}_m^\infty$ естественно вкладываются в B_m . Будем отождествлять группы $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathbb{Z}_m^\infty$ с соответствующими подгруппами B_m . Каждый элемент группы B_m представляется в виде произведения $s \cdot \gamma$, $s \in \mathfrak{S}_\infty$, $\gamma \in \mathbb{Z}_m^\infty$. При этом выполняются следующие соотношения:

$$s \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots) = (\gamma_{s^{-1}(1)}, \gamma_{s^{-1}(2)}, \dots, \gamma_{s^{-1}(k)}, \dots) \cdot s.$$

Опишем классы сопряженных элементов в B_m . Для элемента $g = s \cdot \gamma$ назовем *носителем* g и обозначим через $\text{supp}(g)$ множество $\{i \in \mathbb{N} : s(i) \neq i \text{ или } \gamma_i \neq 0\}$. Заметим, что любые два элемента группы B_m , носители которых не пересекаются, коммутируют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент $c = s \cdot \gamma \in B_m$ такой, что s – циклическая перестановка и $\text{supp}(c) = \text{supp}(s)$ или $\#\text{supp}(c) = 1$, будем называть *обобщенным циклом*.

Каждый элемент $g \in B_m$ однозначно (с точностью до перестановки множителей) представляется в виде произведения $g = \prod_i c_i(g)$ обобщенных циклов $c_i(g)$ с попарно непересекающимися носителями. Пусть $c_i(g) = g_i \cdot \gamma^{(i)}$, где $g_i \in \mathfrak{S}_\infty$. Определим упорядоченный набор диаграмм Юнга

$$\lambda(g) = (\lambda^{(0)}(g), \lambda^{(1)}(g), \dots, \lambda^{(m-1)}(g)) \quad (2)$$

по следующему правилу: $\lambda^{(j)}(g)$ – диаграмма, длины строк которой – это длины тех обобщенных циклов $c_i(g)$, для которых

$$\sum_{k \in \text{supp } c_i(g)} \gamma_k^{(i)} = j \pmod{m}.$$

В частности, будем предполагать, что $\lambda^{(j)}(g) = \emptyset$, если не существует $c_i(g)$, для которых

$$\sum_{k \in \text{supp } c_i(g)} \gamma_k^{(i)} = j \pmod{m}.$$

Если c – произвольный обобщенный цикл, то существует $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ такое, что c и $s_1 s_2 \dots s_n \cdot w_1^j$, где $n+1 = \#\{\text{supp } c\}$, лежат в одном классе сопряженности.

Нетрудно понять, что элементы g и h сопряжены тогда и только тогда, когда $\lambda(g) = \lambda(h)$.

Таким образом, классы сопряженных элементов в B_m параметризуются упорядоченными наборами диаграмм Юнга $\lambda = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m-1)})$.

Сформулируем критерий неразложимости характера на группе B_m (см. предложение 6 в [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для характера φ на группе B_m следующие утверждения эквивалентны:

- (a) φ неразложим;
- (b) для любых g_1, g_2 таких, что $\text{supp}(g_1) \cap \text{supp}(g_2) = \emptyset$, выполняется $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$.

Сформулируем теперь классификационную теорему для неразложимых характеров на группе B_m (см. теорему 7 в [14]). Обозначим $\zeta = \exp(2\pi i/m)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть φ – неразложимый характер на группе B_m . Тогда существуют $2m$ не более чем счетных наборов положительных чисел $\{\alpha_j^{(0)}\}, \{\alpha_j^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_j^{(m-1)}\}, \{\beta_j^{(0)}\}, \{\beta_j^{(1)}\}, \dots, \{\beta_j^{(m-1)}\}$, для которых

$$\delta = 1 - \left(\sum_{k,j} \alpha_j^{(k)} + \sum_{k,j} \beta_j^{(k)} \right) \geq 0,$$

и нормированная положительно определенная функция ϱ на $\mathbb{Z}_m$ ($\varrho(0) = 1$) такие, что для любого обобщенного цикла $g = s\gamma$ (см. определение 4) и $v = \sum_{j \in \text{supp}(g)} \gamma_j$ выполняются следующие соотношения:

- (1) $\varphi(g) = \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^l + (-1)^{l-1} \sum_j (\beta_j^{(k)})^l \right)$ при $l = |\text{supp}(g)| > 1$;
- (2) $\varphi(g) = \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j \alpha_j^{(k)} + \sum_j \beta_j^{(k)} \right) + \delta \cdot \varrho(v)$ при $\text{supp}(g) = \{n\} \subset \mathbb{N}$;
- (3) если $\text{supp}(g_1) \cap \text{supp}(g_2) = \emptyset$, то $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$.

Набор

$$\{\alpha_j^{(0)}\}, \{\alpha_j^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_j^{(m-1)}\}, \{\beta_j^{(0)}\}, \{\beta_j^{(1)}\}, \dots, \{\beta_j^{(m-1)}\}, \varrho \quad (3)$$

будем называть параметрами Тома характера χ .

1.4. Основной результат. В этом пункте мы сформулируем основной результат настоящей работы. Однако предварительно приведем некоторые определения, а также сформулируем и докажем ряд утверждений.

Пусть π – проективное унитарное представление произвольной дискретной группы G . Как следует из ассоциативности операторного умножения, функция c на $G \times G$ из (1) для любых $g_1, g_2, g_3 \in G$ удовлетворяет соотношению

$$c(g_1, g_2) c(g_1 g_2, g_3) = c(g_1, g_2 g_3) c(g_2, g_3). \quad (4)$$

Функции, удовлетворяющие (4), называются 2-мерными коциклами на группе G (далее – просто коциклы). Если проективные представления π_1 и π_2 проективно квазиэквивалентны и ω – функция из определения 1, то соответствующие коциклы c_1 и c_2 для любых $g_1, g_2 \in G$ связаны соотношением

$$c_2(g_1, g_2) = \omega(g_1) \omega(g_2) (\omega(g_1 g_2))^{-1} c_1(g_1, g_2)$$

и называются эквивалентными. Множество классов эквивалентности коциклов на G образует группу $Z^2(G, \mathbb{T})$. Описание коциклов на группе $\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}_m^n$, которую принято называть обобщенной симметрической группой, приведено в [17]. В частности, известно, что при $n \geq 4$ есть всего восемь классов эквивалентности коциклов при четном m и два класса эквивалентности коциклов при нечетном m . Все неприводимые проективные представления конечных обобщенных симметрических групп описаны в [1]. В случае группы B_m имеется также восемь классов эквивалентности коциклов при четном m и два класса эквивалентности коциклов при нечетном m (см. теорему 7).

Согласно теории Шура все проективные унитарные представления группы G (с точностью до эквивалентности) получаются из обычных унитарных представлений некоторого центрального расширения $\tilde{G}$ группы G . Мы построим соответствующее расширение группы B_m , сформулируем результаты теории Шура для частного случая проективных конечных фактор-представлений группы B_m в виде отдельной теоремы и докажем ее.

Группа B_m может рассматриваться как группа, заданная образующими s_i, w_i ($i \in \mathbb{N}$) и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} s_i^2 = e, \quad (s_i s_{i+1})^3 = e \text{ для любого } i, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ при } |i - j| \geq 2, \\ s_i w_j = w_j s_i \text{ при } j \neq i, i + 1, \quad s_i w_{i+1} = w_i s_i, \\ w_i^m = e \text{ для любого } i, \quad w_i w_j = w_j w_i \text{ при } j \neq i. \end{aligned} \quad (5)$$

Зададим группу $\tilde{B}_m$ образующими $\tilde{s}_i, \tilde{w}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) ϑ, μ, ν и соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i^2 = e, \quad (\tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1})^3 = e \text{ для любого } i, \quad \tilde{s}_i \tilde{s}_j = \vartheta \tilde{s}_j \tilde{s}_i \text{ при } |i - j| \geq 2, \\ \tilde{s}_i \tilde{w}_j = \mu \tilde{w}_j \tilde{s}_i \text{ при } j \neq i, i + 1, \quad \tilde{s}_i \tilde{w}_{i+1} = \tilde{w}_i \tilde{s}_i, \\ \tilde{w}_i^m = e \text{ для любого } i, \quad \tilde{w}_i \tilde{w}_j = \nu \tilde{w}_j \tilde{w}_i \text{ при } j \neq i, \end{aligned} \quad (6)$$

где ϑ, μ, ν – центральные элементы, причем $\vartheta^2 = \mu^{(2,m)} = \nu^{(2,m)} = e$. Напомним, что

$$(2, k) = \begin{cases} 1, & k - \text{нечетно}, \\ 2, & k - \text{четно}. \end{cases}$$

Зададим гомоморфизм $\text{pr}: \tilde{B}_m \rightarrow B_m$ по формуле

$$\text{pr}(\tilde{s}_i) = s_i, \quad \text{pr}(\tilde{w}_i) = w_i, \quad \text{pr}(\vartheta) = \text{pr}(\mu) = \text{pr}(\nu) = e. \quad (7)$$

Заметим, что ядро гомоморфизма pr совпадает с центром $Z(\tilde{B}_m)$ группы $\tilde{B}_m$, который порожден элементами ϑ, μ, ν .

ТЕОРЕМА 7. Пусть π – произвольное проективное унитарное представление группы B_m . Тогда существует унитарное представление $\tilde{\pi}$ группы $\tilde{B}_m$ такое, что для любого $g \in \tilde{B}_m$

$$\pi(\text{pr}(g)) = c(g) \tilde{\pi}(g), \quad (8)$$

где c – некоторая скалярная функция на $\tilde{B}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства обозначим $S_i = \pi(s_i)$, $W_i = \pi(w_i)$. Ввиду (5) и (1) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} S_i^2 = a_i I, \quad (S_i S_{i+1})^3 = b_i I \text{ для любого } i, \quad S_i S_j = c_{i,j} S_j S_i \text{ при } |i - j| \geq 2, \\ S_i W_j = d_{i,j} W_j S_i \text{ при } j \neq i, i + 1, \quad S_i W_{i+1} = e_i W_i S_i, \\ W_i^m = f_i I \text{ для любого } i, \quad W_i W_j = g_{i,j} W_j W_i \text{ при } j \neq i, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_i, b_i, c_{i,j}, d_{i,j}, e_i, f_i, g_{i,j}$ – некоторые константы из множества $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Заменив при необходимости представление π на проективно эквивалентное (домножив некоторые из операторов S_i, W_j на какие-то числа), можно считать, что $a_i = e_i = 1$ для любого i . Далее, учитывая (9), имеем:

$$b_i S_{i+1} = S_{i+1} \cdot (S_i S_{i+1} S_i S_{i+1} S_i S_{i+1}) = (S_i S_{i+1} S_i S_{i+1} S_i S_{i+1})^{-1} \cdot S_{i+1} = b_i^{-1} S_{i+1}.$$

Следовательно, $b_i = \pm 1$ для любого i . Домножая при необходимости какие-то из операторов S_i на -1 (переходя к эквивалентному проективному представлению), будем считать без ограничения общности, что $b_i = 1$ для любого i . Так как $f_{i+1}S_i = S_iW_{i+1}^m = W_i^mS_i = f_iS_i$, то все f_i равны некоторой константе f . Домножив все W_i на число t такое, что $t^m = f$, получим представление, для которого $f_i = 1$ при всех i .

Так как при произвольных i, j , удовлетворяющих условию $|i - j| \geq 2$, выполняются соотношения $c_{i,j}S_j = S_iS_jS_i = c_{i,j}^{-1}S_j$, то

$$c_{i,j} \in \{1, -1\}, \quad c_{i,j} = c_{j,i}, \quad |i - j| \geq 2. \quad (10)$$

При $j \geq i + 3$ или $j \leq i - 2$ имеем

$$\begin{aligned} c_{i,j}S_jS_iS_{i+1}S_i &\stackrel{(b_i=1)}{=} c_{i,j}S_jS_{i+1}S_iS_{i+1} \stackrel{(c_{i,j}^2=c_{i+1,j}^2=1)}{=} S_{i+1}S_iS_{i+1}S_j \\ &\stackrel{(b_i=1)}{=} S_iS_{i+1}S_iS_j \stackrel{(c_{i,j}^2=1)}{=} c_{i+1,j}S_jS_iS_{i+1}S_i. \end{aligned}$$

Следовательно, $c_{i,j} = c_{i+1,j}$. Отсюда и из равенства (10) получаем, что $c_{i,j} \in \{-1, 1\}$ и не зависит от i, j . Положим $t_\vartheta = c_{i,j}$.

При $j \neq i, i + 1$ получаем

$$W_j = S_i^2W_j = d_{i,j}^2W_jS_i^2 = d_{i,j}^2W_j \implies d_{i,j} = \pm 1. \quad (11)$$

Если $j \notin \{i, i + 1, i + 2\}$, то

$$\begin{aligned} d_{i,j}W_jS_iS_{i+1}S_i &\stackrel{(b_i=1)}{=} d_{i,j}W_jS_{i+1}S_iS_{i+1} \stackrel{(11)}{=} S_{i+1}S_iS_{i+1}W_j \\ &\stackrel{(b_i=1)}{=} S_iS_{i+1}S_iW_j \stackrel{(11)}{=} d_{i+1,j}W_jS_iS_{i+1}S_i \implies d_{i,j} = d_{i+1,j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, преобразуя соотношение $S_iW_j = d_{i,j}W_jS_i$ при условии $|i - j| > 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} S_jS_iW_jS_j &= d_{i,j}S_jW_jS_iS_j \implies c_{i,j}S_iS_jW_jS_j = d_{i,j}c_{i,j}S_jW_jS_jS_i \\ &\stackrel{(9)}{\implies} S_iW_{j+1} = d_{i,j}W_{j+1}S_i \implies d_{i,j+1}W_{j+1}S_i = d_{i,j}W_{j+1}S_i \\ &\implies d_{i,j+1} = d_{i,j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, используя соотношения (1) и тот факт, что $b_i = 1$ при любом i , а $d_{i,j} = 14 \pm 1$ для $j \neq i, i + 1$, получаем

$$\begin{aligned} W_1S_1S_2S_1 &= d_{1,3}S_1S_2S_1W_3 = d_{1,3}S_2S_1S_2W_3 \\ &= d_{1,3}d_{2,1}W_1S_2S_1S_2 = d_{1,3}d_{2,1}W_1S_1S_2S_1 \implies d_{1,3} = d_{2,1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (11)–(13) следует, что $d_{i,j}$ не зависят от i, j и равны некоторой константе $t_\mu \in \{-1, 1\}$.

Если m нечетно, то при $j \neq i, i + 1$ имеем $S_i = S_iW_j^m = t_\mu^mW_j^mS_i = t_\mu^mS_i$. Следовательно, $t_\mu = 1$.

Для любых i, j , таких, что $j \neq i, i + 1$, имеем

$$S_iW_iW_j = t_\mu W_{i+1}W_jS_i = t_\mu g_{i+1,j}W_jW_{i+1}S_i = g_{i+1,j}S_iW_jW_i.$$

Таким образом, $g_{i+1,j} = g_{i,j}$. Так как для любого i

$$g_{i+1,i} W_i W_{i+1} S_i = W_{i+1} W_i S_i = S_i W_i W_{i+1} = g_{i+1,i}^{-1} S_i W_{i+1} W_i = g_{i+1,i}^{-1} W_i W_{i+1} S_i,$$

то $g_{i+1,i} \in \{-1, 1\}$. Отсюда, используя соотношения $g_{i,j} = g_{j,i}^{-1}$ и $g_{i+1,j} = g_{i,j}$, заключаем, что все $g_{i,j}$ равны константе $t_\nu \in \{-1, 1\}$. Если m нечетно, то при $i \neq j$ получаем $W_i = W_i W_j^m = t_\nu^m W_j^m W_i = t_\nu^m W_i$. Поэтому $t_\nu = 1$.

Наконец, зададим представление $\tilde{\pi}$ значениями на образующих группы $\tilde{B}_m$ так:

$$\tilde{\pi}(\tilde{s}_i) = S_i, \quad \tilde{\pi}(\tilde{w}_i) = W_i, \quad \tilde{\pi}(\vartheta) = t_\vartheta I, \quad \tilde{\pi}(\mu) = t_\mu I, \quad \tilde{\pi}(\nu) = t_\nu I.$$

По построению представление $\tilde{\pi}$ удовлетворяет условию теоремы 7.

Таким образом, все проективные унитарные представления группы B_m получаются из обычных унитарных представлений группы $\tilde{B}_m$. Она называется *накрывающей для B_m* . Пусть $\tilde{\pi}$ – унитарное представление группы $\tilde{B}_m$ такое, что $\tilde{\pi}(a)$ скалярны для элементов $a \in Z(\tilde{B}_m)$. Тогда ему можно поставить в соответствие проективное унитарное представление π группы B_m так, чтобы выполнялось (8). Для этого следует задать отображение $B_m \ni g \xrightarrow{s} \mathfrak{s}(g) \in \mathfrak{pr}^{-1}(g) \subset \tilde{B}_m$ и положить $\pi(g) = \tilde{\pi}(\mathfrak{s}(g))$.

Понятно, что разные проективные представления π группы B_m , определяемые согласно (8) фиксированным представлением $\tilde{\pi}$ группы $\tilde{B}_m$, проективно унитарно эквивалентны (см. определение 1). Обратное, вообще говоря, неверно. Одному проективному представлению π группы B_m могут соответствовать даже неквазиэквивалентные представления $\tilde{\pi}$.

Пусть $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ – унитарные представления группы $\tilde{B}_m$ такие, что для любого $g \in \tilde{B}_m$

$$\pi(\mathfrak{pr}(g)) = c_i(g) \tilde{\pi}_i(g), \quad i = 1, 2.$$

Тогда $\tilde{\pi}_1(g) = c(g) \tilde{\pi}_2(g)$, где $c = c_2 \cdot c_1^{-1}$. Отсюда вытекает, что c – гомоморфизм $\tilde{B}_m$ в $\mathbb{T}$, тривиальный на центре $Z(\tilde{B}_m)$. Поэтому он имеет вид $c = c' \circ \mathfrak{pr}$, где c' – гомоморфизм B_m в $\mathbb{T}$. Таким образом, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть π – проективное унитарное представление группы B_m . Тогда множество унитарных представлений $\tilde{\pi}$ группы $\tilde{B}_m$, удовлетворяющих (8), индексируется гомоморфизмами ψ из B_m в $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Представление $\tilde{\pi}_\psi$ для любого $g \in \tilde{B}_m$ задается по формуле

$$\tilde{\pi}_\psi(g) = \psi(\mathfrak{pr}(g)) \tilde{\pi}_0(g),$$

где $\tilde{\pi}_0$ – некоторое унитарное представление группы $\tilde{B}_m$, удовлетворяющее (8).

Используя реализацию группы B_m с помощью образующих и соотношений (см. (5)), легко получить, что гомоморфизмы $\psi: B_m \rightarrow \mathbb{T}$ параметризуются парами чисел x, y , где $x \in \{-1, 1\}$, $y \in \{\exp(2\pi i k/m)\}_{k=0}^{m-1}$. Гомоморфизм $\psi_{x,y}$ задается на образующих условиями

$$\psi_{x,y}(s_j) = x, \quad \psi_{x,y}(w_j) = y.$$

Пусть $t_\vartheta, t_\mu, t_\nu \in \{-1, 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что фактор-представление $\tilde{\pi}$ (соответственно, характер χ) группы $\tilde{B}_m$ соответствует коциклу $[t_\vartheta, t_\mu, t_\nu]$, если $\pi(\vartheta) = t_\vartheta$, $\pi(\mu) = t_\mu$, $\pi(\nu) = t_\nu$ ($\chi(\vartheta) = t_\vartheta$, $\chi(\mu) = t_\mu$, $\chi(\nu) = t_\nu$ для характера χ).

При нечетном m подразумевается, что $t_\mu = t_\nu = 1$.

Из предложения 8 вытекает, что коцикл, которому соответствует представление $\tilde{\pi}$, однозначно определяется проективным представлением π (см. (8)).

Таким образом, с помощью теоремы 7 и предложения 8 описание проективных фактор-представлений конечного типа группы B_m сводится к описанию обычных фактор-представлений конечного типа группы $\tilde{B}_m$.

Далее мы будем работать с фактор-представлениями группы $\tilde{B}_m$, не возвращаясь к проективным представлениям.

Для удобства введем следующие обозначения для коциклов:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= [1, 1, 1], & \theta_1 &= [-1, 1, 1], & \theta_2 &= [1, -1, 1], & \theta_3 &= [-1, -1, 1], \\ \theta_4 &= [1, 1, -1], & \theta_5 &= [-1, 1, -1], & \theta_6 &= [1, -1, -1], & \theta_7 &= [-1, -1, -1]. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что неразложимые характеры на группе $\tilde{B}_m$ для коцикла θ_0 – это в точности функции вида $\chi' \circ \mathbf{pr}$, где χ' – неразложимый характер на группе B_m .

В п. 2.2 для каждого коцикла θ из приведенного списка (кроме θ_0) будет построено так называемое *базисное фактор-представление* π_θ^b конечного типа. Символом $\chi_{\theta_i}^b$ будем обозначать характер представления $\pi_{\theta_i}^b$ (*базисный характер*).

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 10. Пусть χ – произвольный неразложимый характер на группе $\tilde{B}_m$, отвечающий коциклу θ_i . Тогда существует неразложимый характер χ' на группе B_m такой, что для любого $g \in \tilde{B}_m$ выполняется соотношение

$$\chi(g) = \chi_{\theta_i}^b(g) \chi'(\mathbf{pr}(g)). \quad (15)$$

Обратно, любая функция χ вида (15) является неразложимым характером на группе $\tilde{B}_m$, отвечающим коциклу θ_i .

§ 2. Фактор-представления группы $\tilde{B}_m$

2.1. Асимптотическая алгебра представления. В этом пункте для представления π мы определим асимптотические операторы $A_\pi(g)$, $g \in \tilde{B}_m$, и опишем некоторые их свойства. Введем необходимые определения и обозначения.

Для элемента $g \in \tilde{B}_m$ положим $\text{supp}(g) = \text{supp}(\mathbf{pr}(g))$ (см. (7)). Заметим, что если $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$ и $\text{supp}(g_1) \cap \text{supp}(g_2) = \emptyset$, то $\mathbf{pr}(g_1)\mathbf{pr}(g_2) = \mathbf{pr}(g_2)\mathbf{pr}(g_1)$. Следовательно, $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in Z(\tilde{B}_m)$.

Определим элементы $\omega_k \in \mathfrak{S}_\infty$ по формуле

$$\omega_k(i) = \begin{cases} i + 2k, & \text{если } i \leq 2k, \\ i - 2k, & \text{если } 2k < i \leq 4k, \\ i, & \text{если } 4k < i. \end{cases} \quad (16)$$

Далее будем отождествлять элементы группы $\mathfrak{S}_\infty$ с их образами при естественном вложении $\mathfrak{S}_\infty \hookrightarrow B_m$.

Если $l \leq n$ и (l, n) – транспозиция из $\mathfrak{S}_\infty$, то

$$t_{(l,n)} = \tilde{s}_{n-1} \tilde{s}_{n-2} \cdots \tilde{s}_{l+1} \tilde{s}_l \tilde{s}_{l+1} \cdots \tilde{s}_{n-2} \tilde{s}_{n-1}$$

удовлетворяет условию $\mathbf{pr}(t_{(l,n)}) = (l, n)$. Теперь определим $\tilde{\omega}_k$ согласно соотношению

$$\tilde{\omega}_k = t_{(1,2k+1)} t_{(2,2k+2)} \cdots t_{(2k,4k)}. \quad (17)$$

Заметим, что $\mathbf{pr}(\tilde{\omega}_k) = \omega_k$. Каждый элемент $g \in \tilde{B}_m$ представляется в виде

$$g = \tilde{s}_{i_1} \tilde{s}_{i_2} \cdots \tilde{s}_{i_l} \tilde{w}_{j_1} \tilde{w}_{j_2} \cdots \tilde{w}_{j_n}.$$

Используя гомоморфизм $\mathbf{pr}$ (см. (7)) и соотношения в группе B_m (см. (5)) можно показать, что при $2k \geq \max\{i_1 + 1, \dots, i_l + 1, j_1, \dots, j_n\}$

$$\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k = a \tilde{s}_{i_1+2k} \tilde{s}_{i_2+2k} \cdots \tilde{s}_{i_l+2k} \tilde{w}_{j_1+2k} \tilde{w}_{j_2+2k} \cdots \tilde{w}_{j_n+2k}, \quad (18)$$

где a – некоторый элемент из центра $Z(\tilde{B}_m)$ группы $\tilde{B}_m$.

Зададим гомоморфизм $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): \tilde{B}_m \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ на образующих $\tilde{s}_i, \tilde{w}_i \in \tilde{B}_m$ по формуле

$$\sigma(\tilde{s}_i) = (1, 0), \quad \sigma(\tilde{w}_i) = (0, 1), \quad \sigma(\vartheta) = \sigma(\mu) = \sigma(\nu) = (0, 0). \quad (19)$$

Символом $w^*\text{-lim}$ условимся обозначать предел в слабой операторной топологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть π – представление конечного типа группы $\tilde{B}_m$. Тогда для любого $g \in \tilde{B}_m$ существует $w^*\text{-lim}_{k \rightarrow \infty} \pi(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k) = A_\pi(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть χ – характер на группе $\tilde{B}_m$, (π, H, ξ) – соответствующее ГНС-представление, действующее в гильбертовом пространстве H , где $\xi \in H$ такой, что $\chi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Пусть $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{g} \in \tilde{B}_m$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{supp}(\tilde{h}_1), \text{supp}(\tilde{h}_2), \text{supp}(\tilde{g}) \subset \{1, 2, \dots, 2k\}. \quad (20)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Существуют четные подстановки $g_{(n,k)}, h_{(n,k)}$ такие, что

$$\text{supp}(g_{(n,k)}), \text{supp}(h_{(n,k)}) \subset \{2k+1, 2k+2, \dots\} \quad (21)$$

и $\omega_{n+k} = g_{(n,k)} \omega_k h_{(n,k)}$ (см. (16)). Например, $g_{(n,k)}, h_{(n,k)}$ можно задать по формулам

$$g_{(n,k)}(i) = \begin{cases} i, & \text{если } i \leq 2k \text{ или } 4k + 4n < i, \\ i + 2n, & \text{если } 2k < i \leq 4k + 2n, \\ i - 2k - 2n, & \text{если } 4k + 2n < i \leq 4k + 4n. \end{cases}$$

$$h_{(n,k)}(i) = \begin{cases} i, & \text{если } i \leq 2k \text{ или } 4k + 2n < i, \\ i + 2k, & \text{если } 2k < i \leq 2k + 2n, \\ i - 2n, & \text{если } 2k + 2n < i \leq 4k + 2n. \end{cases}$$

Выберем $\tilde{g}_{(n,k)} \in \mathfrak{pr}^{-1}(g_{(n,k)})$, $\tilde{h}_{(n,k)} \in \mathfrak{pr}^{-1}(h_{(n,k)})$. Заметим, что $\sigma(\tilde{g}_{(n,k)}) = \sigma(\tilde{h}_{(n,k)}) = (0, 0)$. Отсюда и из (20), (21) можно вывести, что $\tilde{g}_{(n,k)}$ и $\tilde{h}_{(n,k)}$ попарно коммутируют с $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ и $\tilde{g}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2^{-1} \tilde{\omega}_{n+k} \tilde{g} \tilde{\omega}_{n+k} \tilde{h}_1 &= \tilde{h}_2^{-1} \cdot (\tilde{g}_{(n,k)} \tilde{\omega}_k \tilde{h}_{(n,k)})^{-1} \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{g}_{(n,k)} \tilde{\omega}_k \tilde{h}_{(n,k)} \cdot \tilde{h}_1 \\ &= \tilde{h}_{(n,k)}^{-1} \tilde{h}_2^{-1} \tilde{\omega}_k \tilde{g} \tilde{\omega}_k \tilde{h}_1 \tilde{h}_{(n,k)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя свойство центральности χ и (22), имеем

$$\begin{aligned} (\pi(\tilde{\omega}_{n+k} \tilde{g} \tilde{\omega}_{n+k}) \pi(\tilde{h}_1) \xi, \pi(\tilde{h}_2) \xi) &= \chi(\tilde{h}_2^{-1} \tilde{\omega}_{n+k} \tilde{g} \tilde{\omega}_{n+k} \tilde{h}_1) \\ &= \chi(\tilde{h}_2^{-1} \tilde{\omega}_k \tilde{g} \tilde{\omega}_k \tilde{h}_1) = (\pi(\tilde{\omega}_k \tilde{g} \tilde{\omega}_k) \pi(\tilde{h}_1) \xi, \pi(\tilde{h}_2) \xi). \end{aligned} \quad (23)$$

Ввиду цикличности ξ равенство (23) означает, что для любых $\zeta, \eta \in H$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\pi(\tilde{\omega}_k \tilde{g} \tilde{\omega}_k) \zeta, \eta),$$

который и определяет $A_\pi(\tilde{g})$.

Алгебру $\mathfrak{A}_\pi$, порожденную операторами $A_\pi(g)$, назовем *асимптотической алгеброй представления π* . В том случае, когда понятно, о каком представлении идет речь, будем писать $A(g)$ вместо $A_\pi(g)$.

Напомним, что под каждым из символов t_ϑ , t_μ , t_ν подразумевается число 1 или -1 и $\sigma_i(g) \in \{0, 1\}$ при $i = 1, 2$, $g \in \tilde{B}_m$ (см. (19)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть π – фактор-представление конечного типа группы $\tilde{B}_m$, отвечающее коциклу $[t_\vartheta, t_\mu, t_\nu]$. Тогда

- (1) $A(g_1) \pi(g_2) = t_\vartheta^{\sigma_1(g_1) \sigma_1(g_2)} \cdot t_\mu^{\sigma_1(g_1) \sigma_2(g_2) + \sigma_2(g_1) \sigma_1(g_2)} \cdot t_\nu^{\sigma_2(g_1) \sigma_2(g_2)} \pi(g_2) A(g_1)$, для любых $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$; в частности, если $\sigma(g) = (0, 0)$, то $A(g)$ – скалярный оператор;
- (2) $A(g_1) A(g_2) = t_\vartheta^{\sigma_1(g_1) \sigma_1(g_2)} \cdot t_\mu^{\sigma_1(g_1) \sigma_2(g_2) + \sigma_2(g_1) \sigma_1(g_2)} \cdot t_\nu^{\sigma_2(g_1) \sigma_2(g_2)} A(g_2) A(g_1)$, для любых $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$;
- (3) $A(g_1) A(g_2)$ скалярен для любых $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$ таких, что $\sigma(g_1) = \sigma(g_2)$;
- (4) $A(g_1) A(g_2) A(g_3)$ скалярен для любых $g_1, g_2, g_3 \in \tilde{B}_m$ таких, что $\sigma(g_1) = (1, 0)$, $\sigma(g_2) = (0, 1)$, $\sigma(g_3) = (1, 1)$;
- (5) $A(g_1 g_2) = A(g_2 g_1)$, если $\sigma(g_2) = (0, 0)$ (или $\sigma(g_1) = (0, 0)$).

Перед тем, как доказать предложение, разберем подробно один случай. Пусть $g_1 = \tilde{w}_1$, $g_2 = \tilde{s}_1$. Предположим, что $k > n$. Так как $\mathfrak{pr}(\tilde{\omega}_n) = \omega_n$, то $\mathfrak{pr}(\tilde{\omega}_n \tilde{w}_1 \tilde{\omega}_n) = \omega_n w_1 \omega_n = w_{2n+1}$ (см. (16) и (5)). Следовательно, для некоторого элемента a_n из центра группы $\tilde{B}_m$ выполняется соотношение $\tilde{\omega}_n \tilde{w}_1 \tilde{\omega}_n = a_n \tilde{w}_{2n+1}$. Аналогично, найдется b_k из центра группы $\tilde{B}_m$, для которого выполняется соотношение $\tilde{\omega}_k \tilde{s}_1 \tilde{\omega}_k = b_k \tilde{s}_{2k+1}$. Отсюда и из определения $\tilde{B}_m$ (см. (6)) получаем

$$\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k = a_n b_k \tilde{w}_{2n+1} \tilde{s}_{2k+1} = \mu a_n b_k \tilde{s}_{2k+1} \tilde{w}_{2n+1} = \mu \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n.$$

Следовательно, $\pi(\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n) \pi(\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k) = t_\mu \pi(\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k) \pi(\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n)$. Переходя к слабому пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем $\pi(\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n) A(g_2) = t_\mu A(g_2) \pi(\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n)$. Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, выводим соотношение

$$A(g_1) A(g_2) = t_\mu A(g_2) A(g_1).$$

Таким образом, используя условия $\sigma(g_1) = (0, 1)$ и $\sigma(g_2) = (1, 0)$, получаем для выбранных g_1 и g_2 равенства (1) и (2) из предложения 12.

В общем случае для доказательства свойств (1) и (2) из предложения 12 используются аналогичные соображения. Мы лишь наметим это доказательство, опуская технические детали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$. Ввиду соотношений между образующими в группе $\tilde{B}_m$, свойства (18) и определения гомоморфизма σ (см. (19)) при любом n и достаточно большом k

$$\tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k = \vartheta^{\sigma_1(g_1)\sigma_1(g_2)} \cdot \mu^{\sigma_1(g_1)\sigma_2(g_2) + \sigma_2(g_1)\sigma_1(g_2)} \cdot \nu^{\sigma_2(g_1)\sigma_2(g_2)} \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_n g_1 \tilde{\omega}_n.$$

Отсюда, опираясь на определение операторов $A(g)$ и констант t_ϑ , t_μ , t_ν , получаем свойства (1) и (2). Согласно (1) для любых $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$ таких, что $\sigma(g_1) = \sigma(g_2)$, оператор $A(g_1)A(g_2)$ лежит в центре алгебры $M(\pi)$. Так как $M(\pi)$ – фактор, то $A(g_1)A(g_2)$ – скаляр. В частности, операторы $A^2(g)$ скалярны. Аналогично доказывается (4).

Далее, не ограничивая общности будем считать, что (π, H, ξ) – ГНС-представление, построенное по некоторому характеру χ на группе $\tilde{B}_m$. Пусть g_1, g_2 удовлетворяют условиям пункта (5) из предложения 12, а $h_1, h_2 \in \tilde{B}_m$. Выберем натуральное k так, чтобы

$$\text{supp}(h_1), \text{supp}(h_2), \text{supp}(g_1), \text{supp}(g_2) \subset \{1, 2, \dots, 2k\}.$$

Тогда, опираясь на (18), получаем

$$\text{supp}(\tilde{\omega}_k g_1 \tilde{\omega}_k), \text{supp}(\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k) \subset \{2k + 1, 2k + 2, \dots\}.$$

Пусть $\sigma(g_2) = (0, 0)$. Тогда $\sigma(\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k) = (0, 0)$. Из определения группы $\tilde{B}_m$ (см. (6)) следует, что элемент $\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k$ коммутирует с элементами h_1 и h_2^{-1} . Ввиду центральности характера χ имеем

$$\begin{aligned} (\pi(\tilde{\omega}_k g_1 g_2 \tilde{\omega}_k) \pi(h_1) \xi, \pi(h_2) \xi) &= \chi(h_2^{-1} \tilde{\omega}_k g_1 \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k h_1) \\ &= \chi(h_2^{-1} \tilde{\omega}_k g_1 \tilde{\omega}_k h_1 \tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k) = \chi(\tilde{\omega}_k g_2 \tilde{\omega}_k h_2^{-1} \tilde{\omega}_k g_1 \tilde{\omega}_k h_1) \\ &= \chi(h_2^{-1} \tilde{\omega}_k g_2 g_1 \tilde{\omega}_k h_1) = (\pi(\tilde{\omega}_k g_2 g_1 \tilde{\omega}_k) \pi(h_1) \xi, \pi(h_2) \xi). \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, используя определение асимптотических операторов (см. предложение 11) и цикличность ξ , получаем, что $A(g_1 g_2) = A(g_2 g_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Как видно из доказательства предложения 12, на самом деле свойства (1), (2) и (5) выполняются для произвольного представления конечного типа π группы $\tilde{B}_m$. Верны также аналоги свойств (3) и (4). А именно, соответствующие операторы принадлежат центру алгебры $M(\pi)$.

Для фактор-представления конечного типа π группы $\tilde{B}_m$ из предложения 12 и определения операторов $A_\pi(g)$ вытекают их следующие свойства.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Операторы $A_\pi(g)$ нормальны.

Действительно, из определения асимптотических операторов следует, что $A_\pi(g)^* = A_\pi(g^{-1})$. Так как $\sigma(g) = \sigma(g^{-1})$, то по предложению 12 (п. (2)), операторы $A_\pi(g)$ и $A_\pi(g^{-1})$ коммутируют.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Оператор $A_\pi(g)$ с точностью до скалярного множителя определяется значением $\sigma(g)$ (см. (19)).

Действительно, пусть $g, h \in \tilde{B}_m$, $\sigma(g) = \sigma(h)$. Если $A_\pi(g) \neq 0$, то ввиду замечания 14 имеем $A_\pi(g)^2 \neq 0$. По предложению 12 (п. (3)) операторы $A_\pi(g)^2$ и $A_\pi(g)A_\pi(h)$ скалярны. Следовательно, $A_\pi(g)$ имеет обратный и $A_\pi(h) = tA_\pi(g)$ для некоторого скаляра t .

ЛЕММА 16. Пусть $g \in \tilde{B}_m$ удовлетворяет одному из условий $\sigma(g) = (1, 0)$ или $\sigma(g) = (0, 1)$. Если $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\text{supp}(g) \subset \{1, 2, \dots, 2k\}$ и $h = \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \cdots \tilde{w}_{2k}$, то $hg = \nu gh$, где ν определено в (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \leq 2k - 1, j \leq 2k$. Тогда согласно (6)

$$\begin{aligned} h\tilde{s}_i &= \tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_i \tilde{w}_{i+1} \cdots \tilde{w}_{2k} \tilde{s}_i = \tilde{s}_i \tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_{i+1} \tilde{w}_i \cdots \tilde{w}_{2k} = \nu \tilde{s}_i h; \\ h\tilde{w}_j &= \tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_j \cdots \tilde{w}_{2k} \tilde{w}_j = \nu \tilde{w}_j \tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_j \cdots \tilde{w}_{2k} = \nu \tilde{w}_j h. \end{aligned} \quad (24)$$

Представляя g в виде произведения образующих $\tilde{s}_i, \tilde{w}_j$, количество которых по условию леммы должно быть нечетным, и применяя нужное число раз формулы (24), получаем $hg = \nu gh$.

Используя замечания 14, 15 и предложение 12, дадим характеризацию асимптотической алгебры фактор-представления в случае каждого из коциклов.

СЛЕДСТВИЕ 17. Пусть π – фактор-представление конечного типа группы $\tilde{B}_m$, отвечающее коциклу θ . Тогда $\mathfrak{A}_\pi$ изоморфна одной из следующих алгебр:

- 1) $\mathbb{C}$, если $\theta \in \{\theta_0, \theta_1, \theta_4, \theta_6, \theta_7\}$;
- 2) $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, если $\theta \in \{\theta_3, \theta_5\}$;
- 3) $\mathbb{C}, \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ или $M_2(\mathbb{C})$, если $\theta = \theta_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sigma(g) = (0, 0)$ (см. (19)), то согласно предложению 12 (п. 1) оператор $A(g)$ скалярен. Далее, рассмотрим каждый из случаев 1)–3) отдельно.

1) Пусть $\theta = \theta_0 = [1, 1, 1]$. Тогда $t_\vartheta = t_\mu = t_\nu = 1$. По предложению 12 (п. 1), операторы $A(g)$ лежат в центре алгебры $M(\pi)$. Следовательно, $\mathfrak{A}_\pi$ совпадает с алгеброй скалярных операторов.

Пусть $\theta = \theta_1 = [-1, 1, 1]$. Тогда $t_\vartheta = -1, t_\mu = t_\nu = 1$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in \tilde{B}_m$. Возможны два случая.

а) $\sigma_1(g) = 0$. По предложению 12 (п. 1) оператор $A(g)$ лежит в центре алгебры $M(\pi)$. Следовательно, $A(g)$ скалярен.

б) $\sigma_1(g) = 1$. По предложению 12 (п. 2) имеем $A(g)A(g) = -A(g)A(g)$. Ввиду нормальности $A(g)$ (замечание 14) отсюда вытекает, что $A(g) = 0$.

Подобные рассуждения проходят в случае $\theta \in \{\theta_4, \theta_7\}$.

Рассмотрим теперь случай $\theta = \theta_6 = [1, -1, -1]$. Если $\sigma_2(g) = 1$, то $A^2(g) = -A^2(g)$ и $A(g) = 0$.

Пусть $\sigma(g) = (1, 0)$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\text{supp}(g) \subset \{1, 2, \dots, 2k\}$. Положим $h = \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \cdots \tilde{w}_{2k}$. Тогда по лемме 16 имеем $g = hh^{-1}g = \nu h^{-1}gh$. Из этого равенства, используя предложение 12 (п. 5) и определение оператора $A(g)$,

получаем $A(g) = A(hh^{-1}g) = A(h^{-1}gh) = A(\nu g) = -A(g)$. Следовательно, $A(g) = 0$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ совпадает с $\mathbb{C}$.

2) Пусть $\theta = \theta_3 = [-1, -1, 1]$. Если $g \in \tilde{B}_m$ и $\sigma_1(g) = 1$, то, используя предложение 12 (п. 2) и замечание 14, получаем, что $A(g) = 0$.

Предположим, что существует $g \in \sigma^{-1}((0, 1))$ такое, что $A(g) \neq 0$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ порождена оператором $A(g)$ (см. замечание 15). Из предложения 12 (п. (1)) вытекает, что $A(g)$ не может быть скалярным. Но согласно п. 3 того же предложения $A(g)^2$ – скалярен. Отсюда, опираясь на замечание 14, получаем, что $A^2(g)$ – ненулевой скалярный оператор. Следовательно, $A(g) = c(P_1 - P_2)$, где c – ненулевая константа, P_1, P_2 – ортогональные проекторы и $P_1 + P_2 = I$. Понятно, что в этом случае алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ изоморфна $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Если $A(g) = 0$ для любого $g \in \sigma^{-1}((0, 1))$, то $\mathfrak{A}_\pi$ – алгебра скалярных операторов.

Аналогично рассматривается случай $\theta = \theta_5 = [-1, 1, -1]$.

3) Последний случай: $\theta = \theta_2 = [1, -1, 1]$.

а) Предположим сначала, что существуют элементы $g_1, g_2 \in \tilde{B}_m$ такие, что $\sigma(g_1), \sigma(g_2) \neq (0, 0)$, $\sigma(g_1) \neq \sigma(g_2)$ и операторы $A(g_1), A(g_2)$ – ненулевые. Ввиду предложения 12 (п. 3) и замечания 14 имеем $A(g_1)^2 = \zeta_1 I \neq 0$, $A(g_2)^2 = \zeta_2 I \neq 0$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Отсюда, опять используя предложение 12 (п. 4) и замечания 14, 15, получаем что алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ порождена невырожденными нормальными операторами $A(g_1), A(g_2)$. Кроме этого, согласно предложению 12 (п. 2) $A(g_1)A(g_2) = -A(g_2)A(g_1)$. Отсюда легко вывести, что алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ изоморфна $M_2(\mathbb{C})$.

б) Пусть таких g_1, g_2 не существует, но существует $g \in \tilde{B}_m$ такой, что $\sigma(g) \neq (0, 0)$ и $A(g) \neq 0$. Используя идеи, примененные в п. 2), можно показать, что $\mathfrak{A}_\pi$ имеет вид $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Если такого g не существует, то $\mathfrak{A}_\pi$ совпадает с алгеброй скалярных операторов.

Из определения асимптотических операторов $A_\pi(g)$ (см. предложение 11) вытекает следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Пусть χ – характер представления π конечного типа. Если оператор $A_\pi(g)$ скалярен, то $A_\pi(g) = \chi(g)I$, где I – единичный оператор.

В частности, последнее замечание выполняется для всех $g \in \tilde{B}_m$, если π отвечает коциклу θ_0 (что соответствует обычным конечным фактор-представлениям группы B_m).

ТЕОРЕМА 19. Пусть π – представление конечного типа группы $\tilde{B}_m$. Тогда центр алгебры $M(\pi)$ принадлежит центру алгебры $\mathfrak{A}_\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности будем считать, что (π, H, ξ) – ГНС-представление, построенное по некоторому характеру χ на группе $\tilde{B}_m$, где $\xi \in H$ и $\chi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$ для всех $g \in \tilde{B}_m$.

Пусть $\mathcal{Z}$ – оператор из центра алгебры $M(\pi)$. По теореме фон Неймана о бикоммутанте для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и элементы $g_1, \dots, g_k \in \tilde{B}_m$ такие, что

$$\left\| \sum \alpha_i \pi(g_i) \xi - \mathcal{Z} \xi \right\| < \varepsilon. \quad (25)$$

Здесь $\| \cdot \|$ соответствует внутреннему произведению в H , определяемому характером χ^1 .

Так как $\pi(\tilde{\omega}_n)\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\pi(\tilde{\omega}_n)$ и $\chi(gh) = \chi(hg)$ при всех $g, h \in \tilde{B}_m$, то для всех n

$$\left\| \sum \alpha_i \pi(\tilde{\omega}_n g_i \tilde{\omega}_n) \xi - \mathcal{Z} \xi \right\| = \left\| \sum \alpha_i \pi(g_i) \xi - \mathcal{Z} \xi \right\|.$$

Отсюда, используя (25), для любого единичного вектора η получаем

$$\left| \left(\sum \alpha_i \pi(\tilde{\omega}_n g_i \tilde{\omega}_n) \xi - \mathcal{Z} \xi, \eta \right) \right| < \varepsilon.$$

После предельного перехода ($n \rightarrow \infty$) в этом неравенстве имеем

$$\left| \left(\sum \alpha_i A_\pi(g_i) \xi - \mathcal{Z} \xi, \eta \right) \right| < \varepsilon$$

для всех единичных $\eta \in H$. Следовательно, ввиду произвольности ε

$$\mathcal{Z} \xi \in [\mathfrak{A}_\pi \xi] \quad (26)$$

где $[\mathcal{S}]$ означает замыкание подмножества $\mathcal{S} \subset H$.

Пусть $M(\pi)'$ – коммутант алгебры $M(\pi)$. Так как χ – характер, то оператор $\pi'(g)$, определяемый отображением

$$\sum c_j \pi(g_j) \xi \xrightarrow{\pi'(g)} \sum c_j \pi(g_j g^{-1}) \xi,$$

является унитарным и принадлежит $M(\pi)'$. Отсюда

$$H = [M(\pi)\xi] = [M(\pi)'\xi]. \quad (27)$$

Пусть $\mathcal{P}$ – ортогональный проектор H на $[\mathfrak{A}_\pi \xi]$. Тогда ввиду того, что $\mathfrak{A}_\pi$ содержит единичный оператор, отображение

$$\mathfrak{A}_\pi \ni a \xrightarrow{i} \mathcal{P} a \mathcal{P} = a \mathcal{P} \in \mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P} \subset \mathcal{P} M(\pi) \mathcal{P} \quad (28)$$

является изоморфизмом алгебр $\mathfrak{A}_\pi$ и $\mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}$.

Теперь заметим, что для каждого $m \in M(\pi)$ отображение

$$\mathfrak{A}_\pi \xi \ni a \xi \xrightarrow{\pi^{\mathfrak{A}}(m)} \mathcal{P}(ma \xi) \quad (29)$$

определяет в подпространстве $[\mathfrak{A}_\pi \xi]$ ограниченный оператор $\pi^{\mathfrak{A}}(m)$, для которого $\|\pi^{\mathfrak{A}}(m)\| \leq \|m\|$.

Покажем, что $\pi^{\mathfrak{A}}(m) \in \mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}$.

Действительно, пусть A' – произвольный самосопряженный оператор из $\{\mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}\}'$, где элементы алгебр $\mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}$ и $\{\mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}\}'$ действуют в пространстве $[\mathfrak{A}_\pi \xi]$. Тогда $A' \xi \in [\mathfrak{A}_\pi \xi]$ и существуют операторы $A_k \in \mathcal{P} \mathfrak{A}_\pi \mathcal{P}$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \xi = A' \xi. \quad (30)$$

¹ $\|\sum c_j \pi(g_j) \xi\|^2 = \sum_{k,j} \overline{c_k} c_j \chi(g_k^{-1} g_j)$

Так как внутреннее произведение в H определено по характеру χ , а $\chi(gh) = \chi(hg)$ при всех $g, h \in \tilde{B}_m$, то $\|A_k \xi - A' \xi\| = \|A_k^* \xi - A' \xi\|$.

Проверим, что $\pi^{\mathfrak{A}}(m)A' = A'\pi^{\mathfrak{A}}(m)$. При всех $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_\pi$ ввиду (29), (30), центральности χ и самосопряженности $A' \in \{\mathcal{P}\mathfrak{A}_\pi\mathcal{P}\}'$ имеем

$$\begin{aligned} (\pi^{\mathfrak{A}}(m)A'\mathfrak{a}\xi, \mathfrak{b}\xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\pi^{\mathfrak{A}}(m)\mathfrak{a}A_k\xi, \mathfrak{b}\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (m\mathfrak{a}\xi, \mathfrak{b}A_k^*\xi) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\pi^{\mathfrak{A}}(m)\mathfrak{a}\xi, \mathfrak{b}A_k^*\xi) = (A'\pi^{\mathfrak{A}}(m)\mathfrak{a}\xi, \mathfrak{b}\xi). \end{aligned}$$

По теореме фон Неймана о бикоммутанте $\pi^{\mathfrak{A}}(m) \in \{\mathcal{P}\mathfrak{A}_\pi\mathcal{P}\}'' = \mathcal{P}\mathfrak{A}_\pi\mathcal{P}$. В частности, при $m = \mathcal{Z}$, учитывая (26), (28) и (29), получаем

$$\mathcal{Z}\xi = \pi^{\mathfrak{A}}(\mathcal{Z})\xi = \mathfrak{i}^{-1}(\pi^{\mathfrak{A}}(\mathcal{Z}))\xi \in \mathfrak{A}_\pi\xi.$$

Отсюда, опираясь на (27), имеем $\mathcal{Z} \in \mathfrak{A}_\pi$. Теорема 19 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Отображение $\mathfrak{i}^{-1} \circ \pi^{\mathfrak{A}}$ является условным ожиданием $M(\pi)$ на подалгебру $\mathfrak{A}_\pi$ (см. [18]).

2.2. Базисные представления. В [1] для построения примеров неприводимых унитарных представлений накрывающей $\tilde{B}_m^n$ для группы $\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_m^n$, $n < \infty$, применялись так называемые *базисные представления*. Здесь мы распространим соответствующие конструкции на случай $\tilde{B}_m$.

Пусть $M_2(\mathbb{C})$ – алгебра комплексных (2×2) -матриц, tr – нормированный след на $M_2(\mathbb{C})$,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $L^2(M_2(\mathbb{C}), \text{tr})$ гильбертово пространство, которое получается, если $M_2(\mathbb{C})$ наделять скалярным произведением $(A, B) = \text{tr}(AB^*)$. Элементы из $M_2(\mathbb{C})$ действуют в $L^2(M_2(\mathbb{C}), \text{tr})$ при помощи левого матричного умножения.

Определим базисное представление π_2^b группы $\tilde{B}_m$ для коцикла $\theta_2 = [1, -1, 1]$ (см. (14)) в пространстве $L^2(M_2(\mathbb{C}), \text{tr})$ по формулам

$$\pi_2^b(\tilde{s}_j) = E, \quad \pi_2^b(\tilde{w}_j) = (-1)^j J. \quad (31)$$

Положим также $\xi_2^b = I$ и

$$\mathbf{B} = (M_2(\mathbb{C}))^{\otimes \infty} = \text{Lin}\{A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k \otimes I \otimes I \otimes \cdots : A_1, \dots, A_k \in M_2(\mathbb{C})\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Зададим на $\mathbf{B}$ эрмитову форму по формуле

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k \otimes I \otimes \cdots, B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k \otimes I \otimes \cdots) = \prod_{i=1}^k \text{tr}(A_i B_i^*).$$

Она определяет на $\mathbf{B}$ структуру предгильбертова пространства. Обозначим через $\mathbf{H}$ пополнение $\mathbf{B}$ по соответствующей метрике. Определим элементы $M_k \in \mathbf{B}$, $k \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$M_{2j-1} = K^{\otimes(j-1)} \otimes E \otimes I^{\otimes \infty}, \quad M_{2j} = K^{\otimes(j-1)} \otimes J \otimes I^{\otimes \infty}.$$

Мы отождествим элементы алгебры $\mathbf{B}$ с соответствующими им операторами в $\mathbf{H}$, определяемыми левым умножением. Зададим отображения π_1^b и π_7^b системы образующих группы $\tilde{B}_m$ в унитарную группу алгебры $\mathbf{B}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\pi_1^b(\tilde{s}_j) &= \pi_7^b(\tilde{s}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M_j - M_{j+1}), \\ \pi_1^b(\tilde{w}_j) &= I^{\otimes \infty} = \mathbf{I}_{\mathbf{H}}, \quad \pi_7^b(\tilde{w}_j) = (-1)^{j-1} M_j,\end{aligned}\tag{32}$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{H}}$ – единичный оператор в пространстве $\mathbf{H}$. Прямая проверка определяющих соотношений (6) показывает, что π_1^b и π_7^b порождают унитарные представления группы $\tilde{B}_m$ (называемые далее *базисными*), соответствующие, согласно определению 9, коциклам $\theta_1 = [-1, 1, 1]$ и $\theta_7 = [-1, -1, -1]$. Положим

$$\xi_1^b = \xi_7^b = I^{\otimes \infty} \in \mathbf{H}.\tag{33}$$

На множестве коциклов существует естественное покомбинаторное умножение. Любой коцикл $[t_\nu, t_\mu, t_\nu]$ представляется в виде произведения

$$[t_\nu, t_\mu, t_\nu] = [-1, 1, 1]^i [1, -1, 1]^j [-1, -1, -1]^k, \quad i, j, k \in \{0, 1\}$$

каких-то из коциклов θ_1 , θ_2 и θ_7 (см. (14)). При тензорном умножении представлений соответствующие коциклы перемножаются. Таким образом, для коцикла

$$\theta = [t_\nu, t_\mu, t_\nu] = [-1, 1, 1]^i [1, -1, 1]^j [-1, -1, -1]^k$$

базисное представление π_θ^b можно задать как тензорное произведение

$$(\pi_1^b)^{\otimes i} \otimes (\pi_3^b)^{\otimes j} \otimes (\pi_7^b)^{\otimes k},$$

которое действует в замыкании линейной оболочки $H_\theta^b = \overline{\text{Lin}\{\pi_\theta^b(\tilde{B}_m)\xi_\theta^b\}}$ вектора $\xi_\theta^b = (\xi_1^b)^{\otimes i} \otimes (\xi_3^b)^{\otimes j} \otimes (\xi_7^b)^{\otimes k}$. Положительно определенная функция χ_θ^b , заданная на $g \in \tilde{B}_m$ формулой $\chi_\theta^b(g) = (\pi_\theta^b(g)\xi_\theta^b, \xi_\theta^b)$, является, по определению, характером представления π_θ^b . Очевидно, что представление $(\pi_\theta^b, H_\theta^b, \xi_\theta^b)$ унитарно-эквивалентно ГНС-представлению, построенному по характеру χ_θ^b .

2.3. Формулы для характеров базисных представлений. Произвольный элемент $g \in \tilde{B}_m$ можно записать в виде произведения $g = \prod_i c_i(g)$, где $\text{pr}(c_i(g))$ – обобщенные циклы с дизъюнктивными носителями (см. определение 4).

В следующем утверждении мы приводим формулы для характеров базисных представлений π_θ^b , $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_7\}$, которые выводятся с помощью прямых вычислений из (31), (32) и (33).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Если $g = \prod_i c_i(g)$, где $\text{pr}(c_i(g))$ – обобщенные циклы с дизъюнктивными носителями, то

- (1) $\chi_{\theta_1}^b(g) = \prod_i \chi_{\theta_1}^b(c_i(g))$ и $\chi_{\theta_7}^b(g) = \prod_i \chi_{\theta_7}^b(c_i(g))$;
- (2) $\chi_{\theta_1}^b(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^k) = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{нечетно,} \\ (-1)^{n/2} \cdot 2^{-n/2}, & \text{если } n - \text{четно;} \end{cases}$

$$\chi_{\theta_7}^b(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^k) = \begin{cases} 0, & \text{если } n+k - \text{нечетно,} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cdot 2^{-n/2}, & \text{если } n - \text{нечетно} \\ & \text{и } k - \text{нечетно,} \\ (-1)^{n/2} \cdot 2^{-n/2}, & \text{если } n - \text{четно} \\ & \text{и } k - \text{четно;} \end{cases}$$

$$(3) \chi_{\theta_2}^b(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma(g) \neq (0,0), \\ \pm 1, & \text{если } \sigma(g) = (0,0) \end{cases} \quad (\text{см. (19)}).$$

Заметим, что формулы (1)–(3) из предложения 21 задают значения базисных характеров $\{\chi_{\theta_1}^b, \chi_{\theta_7}^b, \chi_{\theta_2}^b\}$ на всех элементах группы. Действительно, для каждого $c_i(g)$ можно указать $n_i \in \mathbb{N} \cup 0$, $j_i \in \mathbb{Z}_m$ и $\mathbf{a}_i(g)$ из центра группы $\tilde{B}_m$ такие, что $c_i(g)$ и $\tilde{s}_{n_i} \tilde{s}_{n_i-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^{j_i} \cdot \mathbf{a}_i(g)$ лежат в одном классе сопряженности. Далее следует воспользоваться свойством (1).

Характеры других базисных представлений записываются в виде произведения характеров из $\{\chi_{\theta_1}^b, \chi_{\theta_7}^b, \chi_{\theta_2}^b\}$.

ТЕОРЕМА 22. *Базисные представления являются фактор-представлениями конечного типа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\theta \in \{\theta_1, \theta_7, \theta_6 = \theta_1 \cdot \theta_7\}$ (см. (14)), то из конструкции (32) вытекает, что $A_{\pi_\theta^b}(g) = \chi_\theta^b(g) \mathbf{I}$ для любого $g \in \tilde{B}_m$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор в соответствующем пространстве. Следовательно, опираясь на теорему 19, получаем, что π_θ^b – фактор-представление. Легко понять, что оно имеет тип Π_1 .

Если $\theta = \theta_5 = \theta_2 \cdot \theta_7$, то $A_{\pi_\theta^b}(g) = \chi_{\theta_7}^b(g) \cdot (\pi_{\theta_2}^b(g) \otimes \mathbf{I})$. Опираясь на предложение 21 и определение базисных представлений, получаем, что асимптотическая алгебра $\mathfrak{A}_{\pi_\theta^b}$ порождена оператором $K \otimes \mathbf{I}$. Следовательно, с оператором $\pi_\theta^b(\tilde{s}_1) = \mathbf{I} \otimes \pi_{\theta_7}^b(\tilde{s}_1)$ в алгебре $\mathfrak{A}_{\pi_\theta^b}$ коммутируют только скалярные операторы. По теореме 19 $\pi_{\theta_5}^b$ – фактор-представление.

Если $\theta = \theta_4 = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \theta_7$, то $A_{\pi_\theta^b}(g) = \chi_{\theta_1}^b(g) \chi_{\theta_7}^b(g) \mathbf{I} \otimes \pi_{\theta_2}^b(g) \otimes \mathbf{I}$. Отсюда и из предложения 21 вытекает, что асимптотическая алгебра для представления π_θ^b совпадает с алгеброй скалярных операторов.

В случае $\theta = \theta_2$ алгебра $M(\pi_\theta^b)$ изоморфна $M_2(\mathbb{C})$.

Теперь предположим, что $\theta = \theta_3 = \theta_1 \cdot \theta_2$. Так как асимптотическая алгебра для представления $\pi_{\theta_1}^b$ совпадает с алгеброй скалярных операторов, то, используя предложение 21, из определения представления $\pi_{\theta_2}^b$ получаем, что $\mathfrak{A}_{\pi_\theta^b}$ порождена оператором $\mathbf{I} \otimes J$. Поэтому, с оператором $\pi_\theta^b(\tilde{s}_1) = \pi_{\theta_1}^b(\tilde{s}_1) \otimes E$ в алгебре $\mathfrak{A}_{\pi_\theta^b}$ коммутируют только скалярные операторы. По теореме 19 $\pi_{\theta_3}^b$ – фактор-представление типа Π_1 .

Назовем *носителем функции* $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ множество $\text{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

При доказательстве классификационной теоремы мы будем существенно опираться на описание носителей базисных характеров, которое излагается ниже.

Пусть E (или O) обозначает множество диаграмм Юнга, у которых все строки четной (или нечетной) длины. Положим $\lambda(g) = \lambda(\text{pr}(g))$ для $g \in \tilde{B}_m$ (см. (2)).

Введем следующие подмножества в $\tilde{B}_m$:

$$\begin{aligned} K &= \sigma^{-1}((0, 0)), & (O; O) &= \{g \in \tilde{B}_m : \lambda^{(k)}(g) \in O \text{ для любого } k\}, \\ (O; E) &= \{g \in \tilde{B}_m : \lambda^{(k)}(g) \in O \text{ при четных } k \text{ и } \lambda^{(k)}(g) \in E \text{ при нечетных } k\}, \\ (O; \emptyset) &= \{g \in \tilde{B}_m : \lambda^{(k)}(g) \in O \text{ при четных } k \text{ и } \lambda^{(k)}(g) = \emptyset \text{ при нечетных } k\}. \end{aligned}$$

Из предложения 21, используя включение $(O; \emptyset) \subset K$, можно легко вывести следующую таблицу:

θ	$[-1, 1, 1]$	$[1, -1, 1]$	$[-1, -1, 1]$
$\text{supp}(\chi_\theta^b)$	$(O; O)$	K	$(O; O) \cap K$

(34)

θ	$[1, 1, -1]$	$[-1, 1, -1]$	$[1, -1, -1]$	$[-1, -1, -1]$
$\text{supp}(\chi_\theta^b)$	$(O; \emptyset)$	$(O; E) \cap K$	$(O; \emptyset)$	$(O; E)$

2.4. Теорема о произведении.

ТЕОРЕМА 23. Пусть χ_1 – произвольный неразложимый характер на группе $\tilde{B}_m$ и χ_2 – произвольный неразложимый характер на группе $\tilde{B}_m$ для одного из следующих коциклов:

$$[1, 1, 1], \quad [-1, 1, 1], \quad [1, 1, -1], \quad [1, -1, -1], \quad [-1, -1, -1].$$

Введем функцию $\chi: \tilde{B}_m \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g).$$

Тогда χ – неразложимый характер на группе $\tilde{B}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (π_1, H_1, ξ_1) и (π_2, H_2, ξ_2) – ГНС-представления группы $\tilde{B}_m$, соответствующие характерам χ_1 и χ_2 . Положим $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$. Докажем неразложимость характера χ группы $\tilde{B}_m$, определяемого формулой $\chi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$.

ГНС-представление π_χ , соответствующее χ , мы отождествим с сужением представления π на инвариантное подпространство $\text{Lin}\{\pi(\tilde{B}_m)\xi\}$.

В силу предложения 11 асимптотические операторы представления π_χ имеют вид

$$A_{\pi_\chi}(g) = A_{\pi_1}(g) \otimes A_{\pi_2}(g).$$

Согласно следствию 17 асимптотическая алгебра ГНС-представления, построенного по χ_2 , совпадает с алгеброй скалярных операторов. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_{\pi_\chi}$ порождена операторами вида $A_{\pi_1}(g) \otimes I$. По теореме 19 центр алгебры $M(\pi_\chi)$ лежит в $\mathfrak{A}_{\pi_\chi} \subset \mathfrak{A}_{\pi_1} \otimes I$. Так как π_1 – фактор-представление, то центр алгебры $M(\pi_\chi)$ тривиален.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. В случае, когда χ_2 – характер базисного представления, соответствующего коциклу θ_2 , θ_3 или θ_5 , теорема 23 неверна.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Как видно из доказательства, теорема 23 справедлива и в том случае, когда χ_2 – неразложимый характер на $\tilde{B}_m$ для произвольного коцикла, но с дополнительным условием, что асимптотическая алгебра $\mathfrak{A}_{\pi_2}$ представления π_2 тривиальна.

§ 3. Доказательство классификационной теоремы 10

Последнее утверждение теоремы 10 следует из теорем 22 и 23. Действительно, пусть $\chi_1 = \chi_{\theta_i}^b, i \neq 0$, – базисный характер на $\tilde{B}_m$, χ' – произвольный неразложимый характер на группе B_m . Тогда $\chi_2 = \chi' \circ \mathbf{pr}$ – неразложимый характер на $\tilde{B}_m$ для коцикла $[1, 1, 1]$. По теореме 22, $\chi_{\theta_i}^b$ неразложим. По теореме 23 характер χ со значениями $\chi(g) = \chi_{\theta_i}^b(g)\chi'(\mathbf{pr}(g)) = \chi_1(g)\chi_2(g), g \in \tilde{B}_m$ неразложим.

Наметим план доказательства первого утверждения.

Чтобы доказать первую часть теоремы 10, воспользуемся следующей идеей. Пусть χ – неразложимый характер, отвечающий θ_i , где $i \in \{1, 4, 6, 7\}$ (см. (14)). По теореме 23 $\tau = \chi \cdot \chi_{\theta_i}^b$ является неразложимым характером на $\tilde{B}_m$ для коцикла $[1, 1, 1]$. Следовательно, $\tau = \tau' \circ \mathbf{pr}$, где τ' является неразложимым характером на B_m . Опираясь на теорему 6, предложение 21 и (34), получим явное выражение для τ' , из которого будет видно, что для всех $g \in \tilde{B}_m$

$$\tau(g) = \chi'(\mathbf{pr}(g)) \cdot (\chi_{\theta_i}^b(g))^2, \quad (35)$$

где χ' – некоторый неразложимый характер группы B_m . Таким образом, для всех $g \in \tilde{B}_m$

$$\chi(g)\chi_{\theta_i}^b(g) = \chi'(\mathbf{pr}(g)) \cdot (\chi_{\theta_i}^b(g))^2. \quad (36)$$

Далее в предложении 27 мы покажем, что для характера χ , отвечающего θ_i , $\text{supp}(\chi) \subset \text{supp}(\chi_{\theta_i}^b)$. Отсюда, используя (36), имеем $\chi(g) = \chi'(\mathbf{pr}(g)) \cdot \chi_{\theta_i}^b(g)$.

Для построения характера χ' в случае коциклов θ_2, θ_3 и θ_5 мы будем опираться на иные соображения.

Следующее замечание будет использовано для доказательства того, что $\text{supp}(\chi) \subset \text{supp}(\chi_{\theta_i}^b)$ для любого характера на группе $\tilde{B}_m$, отвечающего коциклу θ_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Пусть χ – неразложимый характер на $\tilde{B}_m, g \in \tilde{B}_m$, и существует $h \in \tilde{B}_m$ такой, что $gh = ahg$. Если a – центральный элемент и $\chi(a) = -1$, то $\chi(g) = 0$.

Действительно,

$$\chi(g) = \chi(hgh^{-1}) = \chi(ag) = -\chi(g).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. Если неразложимый характер χ соответствует коциклу $\theta_i, i \neq 0$ (см. (14)), то $\text{supp}(\chi) \subset \text{supp}(\chi_{\theta_i}^b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее g будет обозначать произвольный элемент $\tilde{B}_m$, а $n = n(g)$ – такое число, что $\text{supp}(g) \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Для каждого из коциклов $\theta_i, i \neq 0$, и любого $g \notin \text{supp}(\chi_{\theta_i}^b)$ мы найдем элемент h , удовлетворяющий замечанию 26, что и докажет предложение.

1. Коцикл $[-1, 1, 1]$. Пусть $g \notin \text{supp}(\chi_{\theta_1}^b) = (O; O)$ (см. (34)). Тогда в разложении

$$g = \prod_j c_j(g), \quad (37)$$

где $\mathbf{pr}(c_j(g))$ – обобщенный цикл (см. определение 4), существует $c_k(g)$, для которого $\mathbf{pr}(c_k(g))$ – обобщенный цикл четной длины. Если $\sigma_1(g) = 1$ (см. (19)),

то условиям замечания 26 удовлетворяет $h = \tilde{s}_{n+1}$. В противном случае можно положить $h = c_k(g)$.

2. **Коцикл** $[1, -1, 1]$. Пусть $g \notin \text{supp}(\chi_{\theta_2}^b) = K = \sigma^{-1}((0, 0))$ (см. (34)). Тогда в случае $\sigma(g) = (1, 0)$ можно взять $h = \tilde{w}_{n+1}$. Иначе $h = \tilde{s}_{n+1}$.

3. **Коцикл** $[-1, -1, 1]$. Пусть $g \notin K$. Тогда при $\sigma(g) = (0, 1)$ положим $h = \tilde{s}_{n+1}$. В противном случае $h = \tilde{w}_{n+1}$.

Если $g \in K \setminus (O; O)$, то h выбирается точно так, как в п. 1 (случай $\sigma_1(g) = 0$).

4. **Коцикл** $[1, 1, -1]$. Предположим, что существует нечетное k , для которого $\lambda^{(k)}(g) \neq \emptyset$. Тогда в разложении (37) для g есть $c_k(g)$ такой, что $\sigma_2(c_k(g)) = 1$. В этом случае при $\sigma_2(g) = 1$ положим $h = \tilde{w}_{n+1}$. Если $\sigma_2(g) = 0$, то $h = c_k(g)$.

Теперь ввиду (34) осталось рассмотреть случай, когда в разложении (37) $\sigma_2(c_i(g)) = 0$ для всех i и найдется l , для которого $\text{pr}(c_l(g))$ – обобщенный цикл четной длины. В таком случае условиям замечания 26 удовлетворяет $h = \prod_{i \in \text{supp } c_l(g)} \tilde{w}_i$ (см. лемму 16).

5. **Коцикл** $[-1, 1, -1]$. Пусть $g \notin K$. Если $\sigma(g) = (1, 0)$, положим $h = \tilde{s}_{n+1}$. Если $\sigma(g) \neq (1, 0)$, положим $h = \tilde{w}_{n+1}$.

Пусть $g \in K \setminus (O; E)$. Тогда в разложении (37) есть $c_k(g)$ такой, что $\sigma_1(c_k(g)) + \sigma_2(c_k(g)) = 1$. Положим $h = c_k(g)$.

6. **Коцикл** $[1, -1, -1]$. С учетом (34) рассмотрим два случая:

- а) в разложении (37) есть $c_k(g)$ такой, что $\sigma_2(c_k(g)) = 1$;
- б) $\sigma_2(c_j(g)) = 0$ для всех j , но существует $c_k(g)$, для которого $\text{pr}(c_k(g))$ – обобщенный цикл четной длины.

При условии а) можно взять

$$h = \begin{cases} \tilde{s}_{n+1}, & \text{если } \sigma_2(g) = 1, \\ \tilde{w}_{n+1}, & \text{если } \sigma(g) = (1, 0), \\ c_k(g), & \text{если } \sigma(g) = (0, 0). \end{cases}$$

В случае б) положим

$$h = \prod_{i \in \text{supp } c_k(g)} \tilde{w}_i$$

(см. лемму 16).

7. **Коцикл** $[-1, -1, -1]$. Пусть в разложении g есть обобщенный цикл $c_k(g)$ такой, что $\sigma_1(c_k(g)) + \sigma_2(c_k(g)) = 1$. Если $\sigma(g) = (1, 0)$ или $\sigma(g) = (0, 1)$, положим $h = \tilde{s}_{n+1}$. Иначе положим $h = c_k(g)$.

Перейдем теперь непосредственно к вычислению неразложимых характеров и завершению доказательства теоремы 10. Рассмотрим в первую очередь случай коцикла θ_i для $i \in \{1, 4, 6, 7\}$. Далее мы следуем плану, намеченному в начале этого параграфа, и придерживаемся принятых там обозначений.

3.1. Коцикл $[-1, 1, 1]$. Пусть χ – неразложимый характер на $\tilde{B}_m$ для коцикла $\theta_1 = [-1, 1, 1]$. Пусть $\tau = \chi \chi_{\theta_1}^b$. Тогда $\tau = \tau' \circ \text{pr}$, где τ' – неразложимый характер на группе B_m . Применяя теорему 6, получаем соответствующий ему набор $\{\alpha_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{N}}, \{\beta_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{N}}, k = 0, 1, \dots, m-1, \varrho$ параметров Тома. В силу таблицы (34) $\tau'(g) = 0$ для произвольного обобщенного цикла g четной длины.

Используя теорему 6, получаем

$$\sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^l - \sum_j (\beta_j^{(k)})^l \right) = 0 \quad (38)$$

для любого четного $l \in \mathbb{N}$ и любого $v \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, где $\zeta = \exp(2\pi i/m)$. Пусть $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Домножая левую часть (38) на ζ^{-rv} и суммируя по v , получаем

$$\sum_j (\alpha_j^{(r)})^l - \sum_j (\beta_j^{(r)})^l = 0$$

при любом четном l . Отсюда вытекает, что при каждом $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ наборы $\{\alpha_j^{(r)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{\beta_j^{(r)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ (учитывая кратность вхождения чисел) совпадают.

Пусть χ' – неразложимый характер на группе B_m с параметрами Тома $\{2\alpha_j^{(0)}\}, \{2\alpha_j^{(1)}\}, \dots, \{2\alpha_j^{(m-1)}\}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}, \varrho$ (см. (3)). По теореме 23 функция $g \rightarrow \chi'(\text{pr}(g))(\chi_{\theta_1}^b(g))^2$ является неразложимым характером на $\tilde{B}_m$, отвечающим коциклу $[1, 1, 1]$. Следовательно, она имеет вид $\tilde{\chi} \circ \text{pr}$, где $\tilde{\chi}$ – неразложимый характер на группе B_m . Для любого $v \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ по определению $\tilde{\chi}$, χ' и τ' , теореме 6 и предложению 21 имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(w_1^v) &= \chi'(w_1^v)(\chi_{\theta_1}^b(\tilde{w}_1^v))^2 = \sum_k \zeta^{kv} \left(2 \sum_j \alpha_j^{(k)} \right) + \delta \varrho(v) \\ &= \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j \alpha_j^{(k)} + \sum_j \beta_j^{(k)} \right) + \delta \varrho(v) = \tau'(w_1^v). \end{aligned}$$

Для любого $v \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ и четного $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(s_n s_{n-1} \cdots s_1 w_1^v) &= \chi'(s_n s_{n-1} \cdots s_1 w_1^v)(\chi_{\theta_1}^b(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v))^2 \\ &= \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (2\alpha_j^{(k)})^{n+1} \right) \cdot 2^{-n} = \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^{n+1} + \sum_j (\beta_j^{(k)})^{n+1} \right) \\ &= \tau'(s_n s_{n-1} \cdots s_1 w_1^v). \end{aligned}$$

При нечетном n и любом v в силу предложения 21 $\chi_{\theta_1}^b(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = 0$. Следовательно, $\tilde{\chi}(s_n s_{n-1} \cdots s_1 w_1^v) = 0 = \tau'(s_n s_{n-1} \cdots s_1 w_1^v)$. Так как значения характеров $\tilde{\chi}$ и τ' равны на любом обобщенном цикле, то из теоремы 6 получаем, что характеры $\tilde{\chi}$ и τ' совпадают. Следовательно, $\chi'(\text{pr}(g))(\chi_{\theta_1}^b(g))^2 = \tau(g)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Отсюда, опираясь на предложение 27, имеем $\chi(g) = \chi'(\text{pr}(g))\chi_{\theta_1}^b(g)$ при всех $g \in \tilde{B}_m$.

Из проделанных выше вычислений вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. Для любого неразложимого характера χ на группе $\tilde{B}_m$, отвечающего коциклу $[-1, 1, 1]$, существуют m не более чем счетных наборов неотрицательных чисел $\{\alpha_i^{(0)}\}, \{\alpha_i^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_i^{(m-1)}\}$, для которых

$$\delta = 1 - \sum_{k,i} \alpha_i^{(k)} \geq 0,$$

и положительно определенная функция ϱ на $\mathbb{Z}_m$ такие, что

- (1) $\chi(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = \begin{cases} 0, & n - \text{нечетно}; \\ (-1)^{n/2} \cdot 2^{-n/2} \sum_k \zeta^{kv} \sum_j (\alpha_j^{(k)})^{n+1}, & n - \text{четно}, \end{cases}$
- (2) $\chi(\tilde{w}_1^v) = \sum_k \zeta^{kv} \sum_j \alpha_j^{(k)} + \delta \varrho(v);$
- (3) *если $g = \prod_i c_i(g)$, где $\text{pr}(c_i(g))$ – обобщенные циклы с попарно непересекающимися носителями, то $\chi(g) = \prod_i \chi(c_i(g))$.*

Теперь перейдем к рассмотрению представлений π , соответствующих нетривиальным коциклам $\theta = (t_\theta, t_\mu, t_\nu) \neq (-1, 1, 1)$. В этом случае по крайней мере одна из координат t_μ или t_ν равна -1 . Но используя соотношения

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{s}_i) &= \pi(\tilde{s}_i) \pi(\tilde{w}_j^m) = t_\mu^m \pi(\tilde{w}_j^m) \pi(\tilde{s}_i) = t_\mu^m \pi(\tilde{s}_i), & j \neq i, i+1, \\ \pi(\tilde{w}_i) &= \pi(\tilde{w}_i) \pi(\tilde{w}_j^m) = t_\nu^m \pi(\tilde{w}_j^m) \pi(\tilde{w}_i) = t_\nu^m \pi(\tilde{w}_i), & j \neq i, \end{aligned}$$

легко проверяемые с помощью (6), мы получаем, что $m = 2m'$, $m' \in \mathbb{N}$.

Схема доказательства классификационных предложений из следующих ниже пп. 3.2 и 3.3 точно такая же, как и в предыдущем пункте. Поэтому мы, опуская ссылки на ключевые утверждения и определения, приводим лишь соответствующие свойства параметров характеров.

3.2. Коцикл $[-1, -1, -1]$. Рассуждая также, как и в предыдущем случае (п. 3.1), получим набор параметров Тома $\{\alpha_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{N}}, \{\beta_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{N}}, k = 0, 1, \dots, m-1$, ϱ для характера τ' . Аналогично приходим к соотношению

$$\sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^l + (-1)^{l-1} \sum_j (\beta_j^{(k)})^l \right) = 0, \quad (39)$$

где $\zeta = \exp(2\pi i/m)$, $v \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $l \in \mathbb{N}$ и $l+v$ четно.

Пусть сначала l четно. Формула (39) при четном $v = 2v'$ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \zeta^{2kv'} \left(\sum_j ((\alpha_j^{(k)})^l + (\alpha_j^{(k+m')})^l) - \sum_j ((\beta_j^{(k)})^l + (\beta_j^{(k+m')})^l) \right) = 0.$$

Пусть $r \in \{0, 1, \dots, m'-1\}$. Умножая обе части этого равенства на $\zeta^{-2rv'}$ и суммируя по v' , получаем, что при любом четном l

$$\sum_j ((\alpha_j^{(r)})^l + (\alpha_j^{(r+m')})^l) - \sum_j ((\beta_j^{(r)})^l + (\beta_j^{(r+m')})^l) = 0.$$

Отсюда вытекает, что наборы $\{\alpha_j^{(r)}\} \cup \{\alpha_j^{(r+m')}\}$ и $\{\beta_j^{(r)}\} \cup \{\beta_j^{(r+m')}\}$ (учитывая кратность вхождения чисел) совпадают. Аналогично, рассматривая нечетное l , получаем, что наборы $\{\alpha_j^{(r)}\} \cup \{\beta_j^{(r)}\}$ и $\{\alpha_j^{(r+m')}\} \cup \{\beta_j^{(r+m')}\}$ совпадают. Следовательно, для любого $r \in \mathbb{Z}_m$ наборы $\{\alpha_j^{(r)}\}$ и $\{\beta_j^{(r+m' \pmod{m})}\}$ также совпадают. Опираясь на это свойство и используя рассуждения, изложенные в п. 3.1, для характера χ' группы B_m , определяемого параметрами Тома

$$\{2\alpha_j^{(0)}\}, \dots, \{2\alpha_j^{(m'-1)}\}, \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}, \{2\beta_j^{(0)}\}, \dots, \{2\beta_j^{(m'-1)}\}, \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}, \varrho$$

можно получить равенство $\chi(g) = \chi'(\text{pr}(g)) \chi_{\theta_r}^b(g)$, $g \in \tilde{B}_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. Для любого неразложимого характера χ на группе $\tilde{B}_m$, отвечающего коциклу $[-1, -1, -1]$, существуют $m = 2m'$ наборов неотрицательных чисел

$$\{\alpha_j^{(0)}\}, \{\alpha_j^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_j^{(m'-1)}\}, \{\beta_j^{(0)}\}, \{\beta_j^{(1)}\}, \dots, \{\beta_j^{(m'-1)}\},$$

для которых

$$\delta = 1 - \left(\sum_{k,j} \alpha_j^{(k)} + \sum_{k,j} \beta_j^{(k)} \right) \geq 0,$$

и неотрицательно определенная функция ϱ на $\mathbb{Z}_m$ со следующими свойствами:

- (1) если $n + v$ нечетно, то $\chi(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = 0$;
- (2) если $n + v$ четно, то

$$\chi(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = (-1)^{[n/2]} \cdot 2^{-n/2} \sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^{n+1} + (-1)^n \sum_j (\beta_j^{(k)})^{n+1} \right);$$

$$(3) \quad \chi(\tilde{w}_1^v) = \begin{cases} 0, & v \text{ нечетно,} \\ \sum_k \zeta^{kv} (\sum_j \alpha_j^{(k)} + \sum_j \beta_j^{(k)}) + \delta \varrho(v), & v \text{ четно;} \end{cases}$$

- (4) если $g = \prod_i c_i(g)$, где $\text{pr}(c_i(g))$ – обобщенные циклы с попарно непересекающимися носителями, то $\chi(g) = \prod_i \chi(c_i(g))$.

3.3. Коциклы $[1, -1, -1]$ и $[1, 1, -1]$. Пусть $i = 4$ или $i = 6$ (как будет видно, эти случаи аналогичны). В силу предложения 27 и (34) $\text{supp}(\chi) \subset \text{supp}(\chi_{\theta_i}^b) = (O, \emptyset)$, а для параметров Тома характера τ' при условии, что хотя бы одно из чисел $l - 1$ и v нечетно, выполняется равенство

$$\sum_k \zeta^{kv} \left(\sum_j (\alpha_j^{(k)})^l + (-1)^{l-1} \sum_j (\beta_j^{(k)})^l \right) = 0.$$

Следовательно, при любом $r \in \mathbb{Z}_m$ наборы $\{\alpha_j^{(r)}\}$, $\{\alpha_j^{(r+m')}\}$, $\{\beta_j^{(r)}\}$ и $\{\beta_j^{(r+m')}\}$ совпадают. Пусть χ' – характер на $\tilde{B}_m$, отвечающий тривиальному коциклу с параметрами Тома $\{4\alpha_j^{(0)}\}, \dots, \{4\alpha_j^{(m'-1)}\}, \{\emptyset\}, \dots, \{\emptyset\}$ (m' непустых и $3m'$ пустых наборов), ϱ . Тогда, используя рассуждения, которые применялись в п. 3.1, получим $\tau = (\chi' \circ \text{pr})(\chi_{\theta_i}^b)^2$. Следовательно, $\chi(g) = \chi'(\text{pr}(g))\chi_{\theta_i}^b(g)$, $g \in \tilde{B}_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30. Для любого неразложимого характера χ на группе $\tilde{B}_m$, $m = 2m'$, отвечающего коциклу θ_i , где $i = 4$ или $i = 6$, существуют m' не более чем счетных наборов неотрицательных чисел

$$\{\alpha_j^{(0)}\}, \{\alpha_j^{(1)}\}, \dots, \{\alpha_j^{(m'-1)}\},$$

со свойством

$$\delta = 1 - \sum_{k,j} \alpha_j^{(k)} \geq 0,$$

и неотрицательно определенная функция ϱ на $\mathbb{Z}_m$ такие, что

- (1) если n или v нечетно, то $\chi(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = 0$;

(2) если n и v четны, то $\chi(\tilde{s}_n \tilde{s}_{n-1} \cdots \tilde{s}_1 \tilde{w}_1^v) = 2^{-n} \sum_k \zeta^{kv} \sum_j (\alpha_j^{(k)})^{n+1}$;

(3) $\chi(\tilde{w}_1^v) = \begin{cases} 0, & v \text{ нечетно,} \\ \sum_k \zeta^{kv} \sum_j \alpha_j^{(k)} + \delta \varrho(v), & v \text{ четно;} \end{cases}$

(4) если $g = \prod_i c_i(g)$, где $\text{pr}(c_i(g))$ – обобщенные циклы с попарно непересекающимися носителями, то $\chi(g) = \prod_i \chi(c_i(g))$.

Заметим, что хотя параметризации неразложимых характеров в случае коциклов $\theta_4 = [1, 1 - 1]$ и $\theta_6 = [1, -1, -1]$ совпадают, сами характеры отличаются значениями на центре группы $\tilde{B}_m$. А именно, $\chi(\mu) = 1$ для θ_4 , но $\chi(\mu) = -1$ в случае θ_6 .

3.4. Коцикл $[1, -1, 1]$. Пусть (π, H, ξ) – ГНС-представление, построенное по неразложимому характеру χ , соответствующему коциклу $\theta_2 = [1, -1, 1]$. По следствию 17 асимптотическая алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ изоморфна одной из следующих алгебр:

$$\text{a) } \mathbb{C}, \quad \text{b) } \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \text{c) } M_2(\mathbb{C}). \quad (40)$$

Пусть реализуется случай а). Тогда $A_\pi(g) = 0$ для любого $g \notin \sigma^{-1}((0, 0))$ (см. доказательство следствия 17, п. 3)). По замечанию 18 $\chi(g) = 0$ для любого $g \notin \sigma^{-1}((0, 0))$. Определим функцию τ на группе $\tilde{B}_m$ по формуле $\tau(g) = \chi(g)\chi_{\theta_2}^b(g)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Тогда, опираясь на замечание 25 и теорему 23, получаем, что τ – неразложимый характер на группе $\tilde{B}_m$, соответствующий тривиальному коциклу. Из предложения 21 (п. (3)) следует, что для любого $g \in \tilde{B}_m$ выполняется равенство $\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g)$. Таким образом, в этом случае теорема 10 доказана.

В случаях б) и с) (см. (40)) мы построим вспомогательное фактор-представление $\hat{\pi}$ конечного типа группы $\tilde{B}_m$, переводящее ее центр в единичный оператор, и докажем формулу $\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$, в которой τ обозначает характер представления $\hat{\pi}$.

Пусть реализуется случай б). Это означает, что ровно для одного элемента $\mathfrak{g} \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0, 0)\}$ существует $h \in \sigma^{-1}(\mathfrak{g})$, для которого $A_\pi(h) \neq 0$ (см. доказательство следствия 17, п. 3)). Зафиксируем такие $\mathfrak{g}$ и h . По предложению 12 (п. (3)) имеем $A_\pi^2(h) = x \cdot I$ для некоторого скаляра x . Так как $A_\pi(h)$ – ненулевой нормальный оператор, то $x \neq 0$. Пусть y – такое, что $y^2 = x$. Положим $a = A_\pi(h)/y$. Тогда $a^2 = I$.

Начнем со случая $\mathfrak{g} = (1, 0)$. Используя предложение 12, для любого i получаем

$$a\pi(\tilde{s}_i) = \pi(\tilde{s}_i)a, \quad a\pi(\tilde{w}_i) = -\pi(\tilde{w}_i)a. \quad (41)$$

Введем унитарные операторы $\hat{\pi}(\tilde{s}_j)$ и $\hat{\pi}(\tilde{w}_j)$ в H с помощью соотношений

$$\hat{\pi}(\tilde{s}_j) = \pi(\tilde{s}_j)a, \quad \hat{\pi}(\tilde{w}_j) = (-1)^j \pi(\tilde{w}_j). \quad (42)$$

Обычная проверка с учетом предложения 12 показывает, что операторы $S_j = \hat{\pi}(\tilde{s}_j)$ и $W_j = \hat{\pi}(\tilde{w}_j)$ удовлетворяют соотношениям (9) для констант $a_i, b_i, c_{i,j}, d_{i,j}, e_i, f_i, g_{i,j}$, равных единице. Следовательно, они задают представление $\hat{\pi}$ группы $\tilde{B}_m$ в пространстве $\hat{H} = \text{Lin}\{\hat{\pi}(g)\xi : g \in \tilde{B}_m\}$, соответствующее тривиальному коциклу θ_0 (см. (14)).

Положим $\tau(g) = (\hat{\pi}(g)\xi, \xi)$ для $g \in \tilde{B}_m$. По построению функция τ является характером группы $\tilde{B}_m$. Понятно, что $\hat{\pi}$ унитарно эквивалентно ГНС-представлению, соответствующему τ .

Покажем, что $\hat{\pi}$ – фактор-представление.

Ввиду (41) имеем

$$\hat{\pi}(g) = \mathbf{m}(g)a^{\sigma_1(g)}\pi(g) \quad (43)$$

для любого $g \in \tilde{B}_m$, где $\mathbf{m}(g) \in \{-1, 1\}$. Так как $\sigma(\tilde{\omega}_k) = (0, 0)$ (см. (19), (16), (17)), то из соотношений (41)–(43) получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k) &= \mathbf{m}(g)\hat{\pi}(\tilde{\omega}_k)a^{\sigma_1(g)}\pi(g)\hat{\pi}(\tilde{\omega}_k) \\ &= \mathbf{m}(g)\pi(\tilde{\omega}_k)a^{\sigma_1(g)}\pi(g)\pi(\tilde{\omega}_k) = \mathbf{m}(g)a^{\sigma_1(g)}\pi(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k). \end{aligned}$$

Согласно предложению 11 существуют асимптотические операторы

$$A_{\hat{\pi}}(g) = w^* - \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\pi}(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k) = \mathbf{m}(g)a^{\sigma_1(g)}A_{\pi}(g).$$

По принятым выше предположениям $A_{\hat{\pi}}(g) = 0$, когда $\sigma_2(g) = 1$. Если $\sigma_2(g) = 0$, т.е. $\sigma(g) \in \{(0, 0), (1, 0)\}$, то скалярность $A_{\hat{\pi}}(g)$ вытекает из замечания 15 и определения оператора a . Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_{\hat{\pi}}$ совпадает с алгеброй скалярных операторов в $\hat{H}$. По теореме 19 $\hat{\pi}$ – фактор-представление. Покажем, что для любого $g \in \tilde{B}_m$ выполняется равенство

$$\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g). \quad (44)$$

Действительно, если $\sigma(g) \neq (0, 0)$, то из предложения 27, используя (34), получаем $\chi(g) = \chi_{\theta_2}^b(g) = 0$. Если $\sigma(g) = (0, 0)$, то $g = \mathbf{c}\tilde{s}_{j_1} \cdots \tilde{s}_{j_{2k}}\tilde{w}_{l_1} \cdots \tilde{w}_{l_{2n}}$, где $\mathbf{c}$ – элемент из центра группы $\tilde{B}_m$. Таким образом, из соотношений (41)–(42), учитывая формулу для базисного характера в случае коцикла $\theta_2 = [1, -1, 1]$ (см. п. 2.2), имеем

$$\begin{aligned} \tau(g) &= (\hat{\pi}(\tilde{s}_{j_1}) \cdots \hat{\pi}(\tilde{s}_{j_{2k}})\hat{\pi}(\tilde{w}_{l_1}) \cdots \hat{\pi}(\tilde{w}_{l_{2n}})\xi, \xi) \\ &= (-1)^{l_1 + \cdots + l_{2n}} (\pi(\tilde{s}_{j_1}) \cdots \pi(\tilde{s}_{j_{2k}})\pi(\tilde{w}_{l_1}) \cdots \pi(\tilde{w}_{l_{2n}})\xi, \xi) = \chi_{\theta_2}^b(g)\chi(g). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (44) выполняется при всех $g \in \tilde{B}_m$. Так как $\tau = \chi' \circ \text{pr}$ для некоторого неразложимого характера χ' на группе B_m , то в этом случае теорема 10 доказана.

Изложенные выше рассуждения позволяют найти неразложимый характер τ на группе $\tilde{B}_m$ для тривиального коцикла, удовлетворяющий (44), и для $\mathbf{g} \in \{(0, 1), (1, 1)\}$. Для них мы приведем здесь только аналоги формул (42), опустив технические детали. Положим

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\tilde{s}_j) &= \pi(\tilde{s}_j), \quad \hat{\pi}(\tilde{w}_j) = (-1)^j \pi(\tilde{w}_j)a \quad \text{при } \mathbf{g} = (0, 1), \\ \hat{\pi}(\tilde{s}_j) &= \pi(\tilde{s}_j), \quad \hat{\pi}(\tilde{w}_j) = (-1)^j i \pi(\tilde{w}_j)a \quad \text{при } \mathbf{g} = (1, 1). \end{aligned}$$

В случае с) (см. (40)) существуют элементы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(0, 0)\}$ и элементы $h_1 \in \sigma^{-1}(\mathbf{g}_1), h_2 \in \sigma^{-1}(\mathbf{g}_2)$ такие, что $A_{\pi}(h_1) \neq 0, A_{\pi}(h_2) \neq 0$ (см. п. 3) в доказательстве следствия 17).

Определим теперь вспомогательное отображение $a: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow U(H)$.

По предложению 12 (п. (3)) $A_\pi(h_1)^2 = x_1 \cdot I$ для некоторого скаляра x_1 . Так как согласно замечанию 14 $A_\pi(h_1)$ – ненулевой нормальный оператор, то $x_1 \neq 0$.

Положим $a(\mathfrak{g}_1) = A_\pi(h_1)/y_1$, где $y_1^2 = x_1$. Аналогично определим $a(\mathfrak{g}_2)$. Пусть $a((0, 0)) = I$ и $a(\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_2) = ia(\mathfrak{g}_1)a(\mathfrak{g}_2)$. Так как $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \neq (0, 0)$, то отображение a задано корректно. Из предложения 12 и замечания 15 вытекают следующие утверждения

- 1) $A_\pi(h) = \mathfrak{k}(h)a(\sigma(h))$ при любом $h \in \tilde{B}_m$, где $\mathfrak{k}$ – скалярная функция;
- 2) $a(d_1)a(d_2) = -a(d_2)a(d_1)$, $a(d_1)\pi(g) = -\pi(g)a(d_1)$ для любых $d_1, d_2 \neq (0, 0)$, $d_1 \neq d_2$ и $g \in \sigma^{-1}(d_2)$;
- 3) $a(d)^2 = I$ для любого $d \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Опираясь на утверждения 2) и 3), с помощью несложной проверки можно убедиться, что отображение ρ , заданное на образующих группы $\tilde{B}_m$ формулами

$$\rho(\tilde{s}_j) = a((1, 0)), \quad \rho(\tilde{w}_j) = (-1)^j a((0, 1)) \quad \text{для любого } j,$$

$$\rho(\vartheta) = \rho(\nu) = I, \quad \rho(\mu) = -I,$$

является унитарным представлением, кратным $\pi_{\theta_2}^b$ (см. (31)). Отсюда следует также, что для любого $g \in \tilde{B}_m$

$$\rho(g) = z(g)a(\sigma(g)), \quad \text{где } z(g) \in \mathbb{C}. \quad (45)$$

Пусть $\tilde{\pi}(g) = \pi(g)\rho^*(g)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Тогда из свойства 2) имеем

$$\tilde{\pi}(g_1)\tilde{\pi}(g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)\rho^*(g_2)\rho^*(g_1) = \tilde{\pi}(g_1g_2).$$

Рассмотрим $\tilde{\pi}$ как представление в пространстве $\overline{\text{Lin}\{\tilde{\pi}(g)\xi : g \in \tilde{B}_m\}}$. Пусть $\tau(g) = (\tilde{\pi}(g)\xi, \xi)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Тогда $\tilde{\pi}$ унитарно эквивалентно ГНС-представлению для характера τ .

Для любых $g \in \tilde{B}_m, k \in \mathbb{N}$, по определению представлений $\tilde{\pi}, \rho$, свойству 1) и предложению 12, выполняются соотношения

$$\tilde{\pi}(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k) = \pi(\tilde{\omega}_k)\pi(g)\rho^*(g)\pi(\tilde{\omega}_k) = \pi(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k)\rho^*(g).$$

По предложению 11 существуют операторы

$$A_{\tilde{\pi}}(g) = w^* \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\pi}(\tilde{\omega}_k g \tilde{\omega}_k) = A_\pi(g)\rho^*(g). \quad (46)$$

Из свойства 1), используя (45), получаем, что $A_{\tilde{\pi}}(g)$ скалярен для любого $g \in \tilde{B}_m$. Следовательно, по теореме 19 $\tilde{\pi}$ – фактор-представление. Из предложения 27, используя (34), при $\sigma(g) \neq (0, 0)$ имеем

$$\chi(g) = \chi_{\theta_2}^b(g) = 0. \quad (47)$$

Если $\sigma(g) = (0, 0)$, то по замечанию 18 и определению представления ρ

$$\tau(g) = (A_{\tilde{\pi}}(g)\xi, \xi) = (A_\pi(g)\rho^*(g)\xi, \xi) = \chi(g)\chi_{\theta_2}^b(g).$$

Отсюда, учитывая (47), получаем $\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$. Таким образом, теорема 10 в случае коцикла $[1, -1, 1]$ доказана.

3.5. Коцикл $[-1, -1, 1]$. Пусть π – ГНС-представление, построенное по неразложимому характеру χ , действующее в H , $\xi \in H$ и $\chi(g) = (\pi(g)\xi, \xi)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$.

В силу предложения 12 (п. 2) $A_\pi(h)A_\pi(h) = -A_\pi(h)A_\pi(h)$ для любого $h \in \sigma_1^{-1}(1)$ (см. (19)). Отсюда, принимая во внимание замечание 14, имеем

$$A_\pi(h) = 0 \quad \text{при } h \in \sigma_1^{-1}(1). \quad (48)$$

При доказательстве теоремы 10 рассмотрим два случая:

- i) $A_\pi(h) = 0$ для любого $h \in \sigma^{-1}((0, 1))$;
- ii) $A_\pi(h) \neq 0$ для некоторого $h \in \sigma^{-1}((0, 1))$.

В случае i), учитывая (48), получаем, что асимптотическая алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ является алгеброй скалярных операторов. Из теоремы 23 и замечания 25 вытекает, что $\tau = \chi_{\theta_2}^b \cdot \chi$ является неразложимым характером на $\tilde{B}_m$ для коцикла $[-1, 1, 1]$. Используя (34), а также предложения 21 и 27, можно установить равенство $\chi(g) = \tau(g) \cdot \chi_{\theta_2}^b(g)$, $g \in \tilde{B}_m$, из которого следует теорема 10.

Пусть h удовлетворяет условию ii). Тогда для некоторого $x \in \mathbb{C}$ имеем $A_\pi^2(h) = x \cdot I$. Положим $a = A_\pi(h)/y$, где $x = y^2$. Тогда из определения оператора a и предложения 12 вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a^2 &= I, \quad \pi(h)a = a\pi(h) \quad \text{при } h \in \sigma_1^{-1}(0), \\ \pi(h)a &= -a\pi(h) \quad \text{при } h \in \sigma_1^{-1}(1). \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{\pi}(\tilde{s}_j) = \pi(\tilde{s}_j), \quad \tilde{\pi}(\tilde{w}_j) = (-1)^j \pi(\tilde{w}_j)a.$$

Тогда непосредственная проверка показывает, что операторы $S_j = \tilde{\pi}(\tilde{s}_j)$, $W_j = \tilde{\pi}(\tilde{w}_j)$ удовлетворяют соотношениям (9) для констант $a_i = b_i = d_{i,j} = e_i = f_i = g_{i,j} = 1$, $c_{i,j} = -1$. Следовательно, $\tilde{\pi}$ – представление группы $\tilde{B}_m$, отвечающее коциклу $[-1, 1, 1]$. Более того, соответствующие асимптотические операторы $A_{\tilde{\pi}}(g)$ (см. предложение 11) – скалярны. Теперь из теоремы 19 получаем, что $\tilde{\pi}$ – фактор-представление в пространстве $\tilde{H} = \overline{\text{Lin}\{\tilde{\pi}(g)\xi : g \in \tilde{B}_m\}}$. Так же как в п. 3.4 показываем, что характер $\tau(g) = (\tilde{\pi}(g)\xi, \xi)$ для любого $g \in \tilde{B}_m$ удовлетворяет условию

$$\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g). \quad (49)$$

Для завершения доказательства в рассматриваемом случае следует воспользоваться описанием неразложимых характеров, соответствующих коциклу $[-1, 1, 1]$, из п. 3.1.

3.6. Коцикл $[-1, 1, -1]$. Пусть (π, H, ξ) – ГНС-представление, построенное по неразложимому характеру χ , соответствующему коциклу $\theta_5 = [-1, 1, -1]$.

Так же, как и в п. 3.5, получаем равенство

$$A_\pi(h) = 0 \quad \text{при } h \in \sigma^{-1}((1, 0)) \cup \sigma^{-1}((0, 1)). \quad (50)$$

При доказательстве теоремы 10 рассмотрим два случая:

- i) $A_\pi(h) = 0$ для любого $h \in \sigma^{-1}((1, 1))$;
- ii) $A_\pi(h) \neq 0$ для некоторого $h \in \sigma^{-1}((1, 1))$.

В первом случае по той же причине, что и в предыдущем пункте, асимптотическая алгебра $\mathfrak{A}_\pi$ является алгеброй скалярных операторов, а $\tau = \chi_{\theta_2}^b \cdot \chi$ — неразложимый характер на $\tilde{B}_m$ для коцикла $[-1, -1, -1]$. Аналогично доказывается равенство $\chi = \tau \cdot \chi_{\theta_2}^b$. Теперь для завершения доказательства в случае i) следует воспользоваться описанием характеров из п. 3.2.

Пусть выполняется условие ii), т.е. $A_\pi(h) \neq 0$ для некоторого $h \in \sigma^{-1}((1, 1))$. По тем же соображениям, что и в предыдущем пункте, для оператора $a = A_\pi(h)/y$, где $A_\pi^2(h) = y^2 \cdot I$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} a^2 &= I, \quad \pi(h)a = a\pi(h) && \text{при } h \in \sigma^{-1}((0, 0)) \cup \sigma^{-1}((1, 1)), \\ \pi(h)a &= -a\pi(h) && \text{при } h \in \sigma^{-1}((1, 0)) \cup \sigma^{-1}((0, 1)). \end{aligned}$$

Отсюда можно вывести, что операторы

$$\tilde{\pi}(\tilde{s}_j) = \pi(\tilde{s}_j), \quad \tilde{\pi}(\tilde{w}_j) = (-1)^j i \pi(\tilde{w}_j) a,$$

задают унитарное представление группы $\tilde{B}_m$, отвечающее коциклу $[-1, -1, -1]$. Его сужение на подпространство $\text{Lin}\{\tilde{\pi}(g)\xi : g \in \tilde{B}_m\}$ является фактор-представлением. Повторяя рассуждения, изложенные в п. 3.4, показываем, что характер $\tau(g) = (\tilde{\pi}(g)\xi, \xi)$ удовлетворяет равенству

$$\chi(g) = \tau(g)\chi_{\theta_2}^b(g). \quad (51)$$

В заключение следует воспользоваться результатами п. 3.2.

Список литературы

- [1] A. O. Morris, H. I. Jones, “Projective representations of generalized symmetric groups”, *Sem. Lothar. Combin.*, **50** (2003).
- [2] I. Schur, “Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen”, *J. Reine Angew. Math.*, **139** (1911), 155–250.
- [3] М. Л. Назаров, “Ортогональный базис в неприводимых проективных представлениях симметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **22:1** (1988), 77–78; англ. пер.: M. L. Nazarov, “An orthogonal basis in irreducible projective representations of the symmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **22:1** (1988), 66–68.
- [4] М. Л. Назаров, “Фактор-представления бесконечной спинсимметрической группы”, *УМН*, **43:4** (1988), 221–222; англ. пер.: M. L. Nazarov, “Quotient representations of the infinite spin-symmetric group”, *Russian Math. Surveys*, **43:4** (1988), 229–230.
- [5] M. L. Nazarov, “Projective representations of the infinite symmetric group”, *Representation theory and dynamical systems*, Adv. Soviet Math., **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 115–130.
- [6] E. W. Read, “The projective representations: of the generalized symmetric group”, *J. Algebra*, **46:1** (1977), 102–133.
- [7] J. R. Stembridge, “The projective representations of the hyperoctahedral group”, *J. Algebra*, **145:2** (1992), 396–453.
- [8] E. Thoma, “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe”, *Math. Z.*, **85:1** (1964), 40–61.

- [9] С. В. Керов, А. М. Вершик, “Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы”, *Докл. АН СССР*, **257**:5 (1981), 1037–1040; англ. пер.: S. V. Kerov, A. M. Vershik, “Characters and factor representations of the infinite symmetric group”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 389–392.
- [10] С. В. Керов, *Асимптотическая теория представлений симметрической группы и ее применения в анализе*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ПОМИ, С.-Петербург, 1994.
- [11] A. Lieberman, “The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 189–198.
- [12] Г. И. Ольшанский, “Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Ol’shanskii, “Unitary representations of (G, K) -pairs that are connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
- [13] А. Ю. Окуньков, “О представлениях бесконечной симметрической группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. II, Записки науч. сем. ПОМИ, **240**, ПОМИ, СПб., 1997, 166–228; англ. пер.: A. Okounkov, “On representations of the infinite symmetric group”, *J. Math. Sci. (New York)*, **96**:5 (1999), 3550–3589; [arXiv:math/9803037](#).
- [14] A. A. Dudko, N. I. Nessonov, “A description of characters on the infinite wreath product”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **13**:4 (2007), 301–317; [arXiv:math/0510597](#).
- [15] В. Н. Иванов, “Размерность косых сдвинутых диаграмм Юнга и проективные характеры бесконечной симметрической группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. II, Зап. науч. сем. ПОМИ, **240**, ПОМИ, СПб., 1997, 115–135; англ. пер.: V. N. Ivanov, “Dimensions of skew-shifted young diagrams and projective characters of the infinite symmetric group”, *J. Math. Sci. (New York)*, **96**:5 (1999), 3517–3530; [arXiv:math/0303169](#).
- [16] R. Boyer, “Character theory of infinite wreath products”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2005, № 9, 1365–1379.
- [17] J. W. Davies, A. O. Morris, “The Schur multiplier of the generalized symmetric group”, *J. London Math. Soc. (2)*, **8** (1974), 615–620.
- [18] M. Takesaki, *Theory of operator algebras*. II, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

А. В. Дудко (A. V. Dudko)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: artemdudko@rambler.ru

Поступила в редакцию

05.10.2007 и 17.03.2008

Н. И. Нессонов (N. I. Nessonov)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: nessonov@ilt.kharkov.ua