Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Скляренко, Гомологическая степень и абсолютная степень Хопфа, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 11, 113–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:55:51

УДК 515.163

Е. Г. Скляренко

Гомологическая степень и абсолютная степень Хопфа

В работе построена с упором на неориентируемый случай когомологическая теория степени непрерывных отображений топологических многообразий, в том числе для многообразий с краями. Даны некоторые приложения, наиболее существенным среди которых является предельно простое определение (совпадающей с геометрической) абсолютной степени Хопфа.

Библиография: 29 названий.

Введение

Восходящее к Брауэру понятие степени отображения оказалось одним из типичных объектов для приложений средств алгебраической топологии (в особенности ее гомологической части) к его изучению. Спустя какое-то время с использованием старших (ко)гомологий многообразий была построена и успешно применялась достаточно полная (ко)гомологическая теория степени сначала для непрерывных отображений только компактных, затем для собственных непрерывных отображений произвольных ориентируемых топологических многообразий и позднее – в том числе для многообразий, имеющих края. Однако существенный с геометрических позиций вопрос об отношении степени к возможному минимуму в классе гомотопных отображений прообразов отдельных точек и их малых окрестностей (как это имеет место в случае отображений сфер) долгое время оставался открытым и был впервые решен в полной общности только в [1]. Это явилось следствием тщательного пересмотра конструкций Хопфа, предназначенных для изучения понятия геометрической степени и отображенных в его работах 1927–1930 гг.

Стремление получить возможно более полную картину устройства непрерывных отображений произвольных, не только ориентируемых многообразий в классе отображений, гомотопных заданному, и бедность информации, предоставляемой инвариантом $\deg_{\mathbb{Z}_2}$ – когомологической степенью по модулю 2, – привели Хопфа [2] к созданию в рамках алгебраической топологии некоторой специальной теории степени собственных отображений многообразий, названной им *абсолютной степенью* (Absolutgrad). Фундаментальный результат этой теории состоял в совпадении абсолютной степени с так называемой геометрической: абсолютная степень согласованного с границами собственного отображения $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ многообразий размерности n совпадает с наименьшим числом $d \geq 0$, для которого в классе согласованных с границами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00463).

собственных отображений, гомотопных f посредством собственных согласованных с границами гомотопий, существует отображение g , а для g – некоторый n -мерный диск $D \subset \text{Int } N$ такие, что $g^{-1}(D)$ состоит из d дизъюнктивных дисков, гомеоморфно отображающихся на D посредством g .

Однако само определение абсолютной степени $\mathcal{A}(f)$ отображения f , основанное на применении преимущественно гомотопических средств и использующее конструкции теории Нильсена классов корней отображения и поведение локальной ориентации многообразий вдоль путей и их образов, оказалось слишком сложным в плане его практического применения. В связи с этим предпринимались попытки пересмотра основных конструкций теории Хопфа с целью возможного их упрощения и переориентации в сторону применения средств теории гомологий.

Наиболее существенными в этом направлении оказались результаты Олума [3], хотя и полученные только в классе замкнутых триангулируемых многообразий. Применялись симплициальные когомологии с определенными фундаментальными группами локальными коэффициентами, слоем которых служило групповое кольцо фундаментальной группы многообразия-образа. С учетом индуцированных гомоморфизмов старших когомологий и фундаментальных групп автором введено понятие степени $\text{grd } f$ “через групповое кольцо” (см. [3; определение 16.3]), содержащее в своей внутренней части (хотя и в довольно специфической форме) основную идею определения классической степени. Отображения многообразий подразделялись на три класса (присутствовавшие в сущности и в [2]; см. также [3; определение 15.4]). Для каждого из классов в отдельности устанавливалось совпадение абсолютной величины $|\text{grd } f|$ с абсолютной степенью $\mathcal{A}(f)$ (см. [3; п. 16]). Следствием оказалось совпадение (без учета знака) $\mathcal{A}(f)$ со “скрученной посредством фундаментальной группы” когомологической степенью $\deg f$, определяемой (в том числе для неориентируемых многообразий) в [3; п. 2 и 3] с помощью когомологий с целочисленными локальными коэффициентами.

В работе [1] Эшштейн применил идеи работы [3] к согласованным с границами собственным отображениям произвольных топологических многообразий. Переводя основные определения Олума на язык когомологических степеней подходящих ориентируемых многообразий, выделяемых среди специальным образом конструируемых накрытий первоначальных многообразий, автор в сущности представил их как новое определение абсолютной степени. Отображения подразделяются на типы (и подтипы; см. § 5), инвариант $\mathcal{A}(f)$ определяется для каждого типа отдельно. Такой подход делает абсолютную степень более вычислимой (хотя, по мнению авторов работы [4], и несколько затемняет ее первоначальный геометрический смысл). Тем не менее показано, что для отображений f -ориентируемых многообразий $\mathcal{A}(f)$ совпадает с $|\deg f|$ и с $\deg_{\mathbb{Z}_2} f$ в общем случае (см. [1; теорема 3.1]). Для многообразий размерности $n \geq 3$ вновь доказан и основной результат Хопфа о совпадении $\mathcal{A}(f)$ с геометрической степенью (см. [1; теорема 4.1]; там же даются указания и ссылки относительно случая $n = 2$).

Наиболее близкий к примененному в работе [2] подход к проблеме с некоторыми упрощениями представлен в [4]. Методы из работы [1] используются

только частично. Используется подразделение отображений на те же классы, что и в [3], но $\mathcal{A}(f)$ определяется внутри классов непосредственно (см. [4; определения 2.1 и 5.1]). Равенство $\mathcal{A}(f)$ геометрической степени передоказывается в полном объеме с применением наряду с прочими средствами алгебраической топологии понятия локальной гомологической степени в сочетании с ее аддитивными свойствами по Дольду (см. [5]). Передоказывается также и результат [1] о совпадении для ориентируемых многообразий $\mathcal{A}(f)$ с $|\deg f|$ (см. [4; теорема 5.5]). При этом намеченный в [3] подход к определению гомологической степени $\deg f$ для отображений неориентируемых многообразий из-за его специфики остался (как и в [1]) без внимания.

Итоговый результат настоящей работы – наиболее простой способ определения абсолютной (следовательно, и геометрической) степени собственных непрерывных отображений топологических многообразий, в том числе имеющих края. Всюду в работе $\mathcal{H}_n(M) = \mathcal{H}_n(M; Z)$ – ориентирующий пучок многообразия M , а для отображения $f: M \rightarrow N$ (в общем случае согласованного с краями) $f^*\mathcal{H}_n(N)$ – обратный образ $\mathcal{H}_n(N)$ на M . Запись $\pi: \bar{N} \rightarrow N$ обозначает накрывающее отображение, отвечающее образу фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ в $\pi_1(N, f(x_0))$, а j – его кратность (индекс $f_*(\pi_1(M, x_0))$ в $\pi_1(N)$). Пусть $\bar{f}: M \rightarrow \bar{N}$ – поднятие f , $f = \pi \bar{f}$. Имеем

$$\begin{aligned} f^*\mathcal{H}_n(N) &= \bar{f}^*\mathcal{H}_n(\bar{N}), \\ \mathcal{H}_n(\bar{N}) &= \pi^*\mathcal{H}_n(N). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \bar{1} &\in Z = H_c^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)), \\ \varkappa &= \bar{f}^*(\bar{1}) \in H_c^n(M, \partial M; f^*\mathcal{H}_n(N)). \end{aligned}$$

В случае, если $f^*\mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(M)$ (удовлетворяющие этому условию отображения называются *ориентируемыми*), имеем $H_c^n(M, \partial M; f^*\mathcal{H}_n(N)) = Z$, поэтому $\varkappa$ – некоторое целое число. Во втором случае $H_c^n(M, \partial M; f^*\mathcal{H}_n(N)) = Z_2$ и $\varkappa$ принимает одно из двух значений, 0 или 1 (такого типа отображения называются в работе *неориентируемыми*). Условно считаем, что и в этом случае $\varkappa \in Z$. Итоговый результат:

$$\mathcal{A}(f) = |\varkappa| \cdot j.$$

Отметим, что для ориентируемого f оказывается, что $f^*(1) = \varkappa \cdot j$ (здесь $1 \in H^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N) = Z)$ – когомологическая степень $\deg f$). Отметим также, что при $j = \infty$ образ $\bar{f}(M)$ для собственного f не покрывает $\bar{N}$, поэтому $\varkappa = 0$. В этом случае полагаем $\mathcal{A}(f) = 0 \cdot \infty = 0$ (и $\deg f = 0$ для ориентируемых f). Отметим, наконец, что (в отличие от $\deg f$) абсолютной степени неориентируемого f никаким разумным образом не может быть приписан алгебраический знак. Подтверждающим примером может служить отображение $f: P^2 \rightarrow S^2$ проективной плоскости в сферу, сжимающее в точку одну из проективных прямых (для него $\mathcal{A}(f) = 1$).

Таким образом, для неориентируемых f значение $\mathcal{A}(f)$ в случае его отличия от нуля есть j – (конечная) кратность накрытия π . Для ориентируемых

же отображений абсолютная степень $\mathcal{A}(f) = |\deg f|$ определяется только средствами теории гомологий. В этом случае $\mathcal{A}(f)$ присущи все типичные свойства гомологической степени $\deg f$. Наоборот, за пределами класса ориентируемых отображений практически все эти свойства (включая мультипликативность) теряются.

Основное содержание работы, с помощью которого удастся получить упрощенное определение абсолютной степени и его следствия, – развитие в естественно допустимых границах гомологической теории степени для отображений неориентируемых многообразий.

Наличие алгебраического знака у $\deg f$ (по сравнению с $\mathcal{A}(f)$) отнюдь не лишнее, оно предоставляет возможности для получения наиболее полных результатов (примерами могут служить теоремы 4.8–4.10 и 4.13). Как и в классическом случае, знак $\deg f$ определяется выбором фундаментальных классов (ко)гомологий отображаемых многообразий. Выбор же одного из них равносильен выбору ориентации соответствующего многообразия (в том числе и неориентируемого в классическом смысле). Вопреки устоявшемуся консервативному взгляду, будто понятие ориентации для неориентируемого многообразия лишено смысла, ориентации (притом ровно две) присутствуют в любом топологическом многообразии и допускают довольно наглядное определение (локальное или через атласы).

Определение степени $\deg f$ обычно дается с использованием (ко)гомологий над целыми числами. Идентичным способом может быть определена степень $\deg_{\Lambda} f$ над любым кольцом Λ . При этом (поскольку $\deg_{\Lambda} f = \deg f \cdot 1$, $1 \in \Lambda$) большинство результатов для $\deg_{\Lambda} f$ могут быть получены как следствия соответствующих результатов для $\deg f$. Но инвариант $\deg_{\Lambda} f$ имеет и независимое самостоятельное значение. Прежде всего, для $\Lambda = \mathbb{Z}_2$ он определен и может применяться как для ориентируемых, так и для неориентируемых отображений. Для полей Λ характеристики, отличной от 2, этот инвариант определен, как и $\deg f$, только для ориентируемых отображений. Его независимое значение подтверждается, например, теоремой 4.6. В связи со сказанным многие результаты формулируются для $\deg_{\Lambda} f$.

Естественно, что построение гомологической теории степени для отображений неориентируемых многообразий невозможно без употребления групп гомологий и когомологий с непостоянными коэффициентами. Распространенные сведения о гомологиях и когомологиях многообразий в старшей размерности касаются в основном ориентируемых многообразий, нередко в предположениях компактности и практически только для постоянных коэффициентов (см. [5]–[10] и др.). Для неориентируемых многообразий известно, что $H_c^n(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ (см. [9; теорема 3.21]) и что группа $H_n(M; G)$ совпадает с 2-кручением в G (см. [5; гл. VIII, следствие 3.4]). Отдельные другие сведения, появляющиеся в литературе, отражены в § 1.

В § 1 представлена практически полная информация о старших группах гомологий и когомологий с локально постоянными коэффициентами, для наиболее типичных семейств носителей, необходимая для целей работы. Как будет понятно из содержания всей работы, ориентирующие пучки $\mathcal{H}_n(M)$ в качестве коэффициентов для гомологий и когомологий многообразий M играют

в общем случае ту же роль, что и постоянные коэффициенты в Z для ориентируемых многообразий. С их помощью определяются фундаментальные классы гомологий и когомологий. Структура старших гомологий и когомологий многообразий является лишним подтверждением тому, что содержательная (ко)гомологическая теория степени может быть построена только для собственных отображений.

Полезно иметь в виду, что конкретно топологическое устройство многообразия нередко оказывается не имеющим решающего значения – важна лишь его гомологическая локальная структура. Поэтому многие результаты формулируются также для гомологических (над Z) многообразий (при необходимости – с некоторыми пояснениями).

В сравнительно коротком § 2 рассматриваются некоторые отличительные особенности ориентируемых отображений в множестве всех других, а также связи между отображениями обоих типов. Ориентирующими являются все накрывающие отображения. Отличительной чертой неориентируемых гладких отображений является наличие у них полноразмерных “складок” (следствие 2.6).

В § 3 представлены гомологический и когомологический варианты определения степени $\deg f$ для ориентируемых собственных непрерывных отображений f топологических многообразий (в том числе имеющих края). Показывается, что оба варианта дают одинаковый результат. Для отображений ориентируемых многообразий оба определения эквивалентны классическим (см. [1], [5]). Для неориентируемых отображений когомологический вариант определения степени дает дополняющий ее аналог – квазистепень $\operatorname{dg} f$. Самостоятельное значение этого инварианта (принимającego те же значения, что и $\deg_{Z_2} f$, т.е. 0 и 1) состоит в том, что он используется при оперировании с когомологиями над целыми числами Z . Этот инвариант не может быть определен в терминах целочисленных гомологий (что является одним из многих подтверждений большей эффективности применения когомологий по сравнению с гомологиями).

Результатам, представляющим основное содержание теории степени, посвящен § 4. Прежде всего, это стандартные свойства такие, как мультипликативность по отношению к композициям ориентируемых отображений (теорема 4.1), признаки и следствия обращения в нуль или отличия от нуля (теорема 4.2 и предложение 4.3), совпадение с кратностью для конечнолистных накрытий (теорема 4.4), связь со степенью отображений компонент границ (теорема 4.8), локальная определяемость (теоремы 4.10 и 4.13). Устанавливается делимость $\deg f$ (и в соответствующей форме – делимость $\operatorname{dg} f$) на кратность j накрытия π (теорема 4.5). Устанавливается равенство нулю суммы степеней отображений компонент границы $(n+1)$ -мерного многообразия при его ориентируемом отображении в n -мерное многообразие и следствия этого факта (теорема 4.10). При условии, что $\deg_{\Lambda} f \neq 0$ для некоторого поля Λ , устанавливается мономорфность отображения когомологий H^* и H_c^* всех размерностей с любыми локально постоянными коэффициентами с полем Λ в качестве слоя (теорема 4.6).

В силу известной теоремы Хопфа об отображениях в сферу S^n степень любого отображения $S^n \rightarrow S^n$ совпадает с геометрической. Аналогичный факт для отображений произвольных (в том числе и в гладкой категории) многообразий

стремились установить путем сопоставления $\deg f$ с $\mathcal{A}(f)$ (см. § 5). Основным результатом заключительной части работы – равенство $|\deg f| = \mathcal{A}(f)$ для любых ориентируемых f . Там же установлено, что за пределами класса ориентируемых отображений инвариант $\mathcal{A}(f)$, если он не равен нулю, совпадает с кратностью j указанного выше накрытия π . При этом используется определение $\mathcal{A}(f)$, данное в [1].

§ 1. Старшие гомологии и когомологии многообразий

Гомологии и когомологии в работе рассматриваются только с локально постоянными коэффициентами. Под таковыми понимаются пучки $\mathcal{G}$ абелевых групп, ограничения которых $\mathcal{G}|_U$ на малые окрестности U точек базового пространства являются прямыми произведениями $U \times G$ (см. [11; гл. 1, определение 1.7]); группа G всегда рассматривается в дискретной топологии.

Сведения о старших гомологиях и когомологиях связных многообразий получаются ниже как следствие двойственности Пуанкаре и описания их нульмерных гомологий и когомологий. Для многообразия M без края имеет место двойственность в виде $H_p^\varphi(M; \mathcal{G}) = H_\varphi^{n-p}(M, D(\mathcal{G}))$. Здесь $\mathcal{G}$ – локально постоянные коэффициенты, $D(\mathcal{G}) = \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{G}$ – дуальные коэффициенты, $\mathcal{H}_n$ – ориентирующий пучок многообразия и φ – произвольное семейство носителей. Эти соотношения в одинаковой мере верны не только для топологических многообразий, но и для гомологических многообразий над кольцами главных идеалов (и даже в несколько более общих условиях; см. [11; гл. 5, § 9] для паракомпактифицирующих семейств φ и [12; § 3] или [13; гл. 8, п. 5.4] – для произвольных φ). Заметим, что слой G пучка $\mathcal{G}$ одновременно является и слоем $D(\mathcal{G})$.

Так как $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n = Z$ – постоянный пучок целых чисел, то соотношения $\mathcal{F} = D(\mathcal{G})$ и $\mathcal{G} = D(\mathcal{F})$ эквивалентны: пучки $\mathcal{G}$ и $D(\mathcal{G})$ взаимно дуальны, поэтому символы $\mathcal{G}$ и $D(\mathcal{G})$ в соотношениях двойственности можно менять местами. Взаимно дуальными являются, очевидно, $\mathcal{H}_n$ и Z . Дуальный с $\mathcal{G}$ пучок $D(\mathcal{G})$ тогда и только тогда постоянен (в этом случае он равен G), когда $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n \otimes G$.

Следствием двойственности является равенство нулю групп $H_{n+p}^\varphi(M; \mathcal{G})$ и $H_\varphi^{n+p}(M; \mathcal{G})$ при $p > 0$.

Начнем с описания групп $H_n(M; \mathcal{G})$ для (связного) многообразия M без края (описание справедливо и для гомологических многообразий над кольцом Z).

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого семейства носителей φ , отличного от семейства всех замкнутых в M множеств, и любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{G}$ имеем $H_n^\varphi(M; \mathcal{G}) = 0$. Единственная представляющая интерес группа $H_n(M; \mathcal{G})$ совпадает со слоем G' максимально постоянного подпучка $M \times G' \subset D(\mathcal{G})$ в дуальном пучке (эквивалентно – со слоем G' максимально подпучка вида $\mathcal{H}_n \otimes G'$ в $\mathcal{G}$). В частности, $H_n(M; \mathcal{H}_n) = Z$ (и $H_n(M; \mathcal{H}_n \otimes G) = G$). Наконец, для любых локально постоянных целочисленных коэффициентов $\mathcal{Z}$, отличных от $\mathcal{H}_n$, имеем $H_n(M; \mathcal{Z}) = 0$ (и $H_n(M; \mathcal{Z} \otimes G) = G_2$ – подгруппа 2-кручения в G).*

Заметим, что в виде $\mathcal{Z} \otimes G$ представляется любая локально постоянная система коэффициентов $\mathcal{G}$ со структурной группой Z_2 .

Доказательство теоремы есть следствие соотношения $H_n^\varphi(M; \mathcal{G}) = H_\varphi^0(M; D(\mathcal{G}))$ и того, что нульмерные когомологии – это сечения (с носителями в φ) пучка коэффициентов, локально постоянного в рассматриваемой ситуации.

В соответствии с [13; гл. 8, п. 5.4] для любых замкнутых или открытых множеств $A \subset M$ имеются также следующие соотношения двойственности типа Пуанкаре:

$$H_p^\varphi(A; \mathcal{G}) = H_\varphi^{n-p}(M, M \setminus A; D(\mathcal{G})), \quad H_p^\varphi(M, A; \mathcal{G}) = H_\varphi^{n-p}(M \setminus A; D(\mathcal{G})).$$

В качестве A , в частности, можно взять любую точку $x \in M$ и содержащее ее связное открытое множество U .

ТЕОРЕМА 1.2. *Включениям $M \subset (M, M \setminus U) \subset (M, M \setminus x)$ отвечают канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_n(M; \mathcal{H}_n) &= H_n(U; \mathcal{H}_n) = H_n(M, M \setminus U; \mathcal{H}_n) \\ &= H_n(M, M \setminus x; \mathcal{H}_n) = H_n(U, U \setminus x; \mathcal{H}_n) = Z. \end{aligned}$$

Действительно, по двойственности эти группы совпадают соответственно с

$$H^0(M; Z) = H^0(U; Z) = H^0(x; Z) = Z.$$

В частности, включениям точек x, y в M отвечают канонические изоморфизмы локальных групп гомологий $H_n(M, M \setminus x; Z) = H_n(M, M \setminus y; Z)$.

Отвечающий 1 или -1 группы Z элемент группы $H_n(M; \mathcal{H}_n)$ будем называть *фундаментальным классом гомологий* (гомологического) многообразия M . Таким образом, у многообразия имеется два фундаментальных класса. Как элемент $1 \in Z = H^0(M; Z)$ изоморфной $H_n(M; \mathcal{H}_n)$ группы нульмерных когомологий фундаментальный класс гомологий гомологического многообразия определен в [11; гл. 5, § 10]. В терминах сингулярных гомологий определение фундаментального класса гомологий замкнутого топологического многообразия – см. в [14; лемма 3.1].

Выбор фундаментального класса равносильен выбору ориентации многообразия в следующем смысле (ср. [7]). Рассматриваем карты $U \subset M$, для которых $\mathcal{H}_n|_U \simeq U \times Z$. Под ориентацией слоя Z понимаем выбор в нем одной из образующих группы Z . Под оснащенной картой понимаем U вместе с $\mathcal{H}_n(U)$, под ее ориентацией – произведение обычной ориентации U (определяемой координатами или, в случае гомологического многообразия, выбором образующей в $H_n(U; Z)$) на ориентацию слоя Z . Очевидно, ориентированные таким образом оснащенные карты делятся на два класса. Указание одного из них будем называть ориентацией M . Для ориентируемого в обычном смысле многообразия раз и навсегда можно ограничиться выбором одной образующей слоя ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n = M \times Z$, и новое понятие ориентации M превратится в классическое. Как и в классическом случае, ориентация всего M определяется, очевидно, выбором одной из двух ориентаций любой отдельной оснащенной карты. Ориентация оснащенной карты U определяет очевидным образом тривиализацию $f_U: \mathcal{H}_n|_U \rightarrow \mathbb{R}^n \times Z$ над U пучка $\mathcal{H}_n$, которая в свою очередь посредством индуцированного отображением f_U гомоморфизма гомологий $H_n(U; \mathcal{H}_n) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n; Z) = Z$ задает (как прообраз $1 \in Z = H_n(\mathbb{R}^n; Z)$)

образующий элемент в $H_n(U; \mathcal{H}_n) = Z$, а следовательно (в силу теоремы 1.2), и фундаментальный класс гомологий в $H_n(M; \mathcal{H}_n)$. Последний не зависит от выбора оснащенной карты U , снабженной выбранной ориентацией M (поскольку любые две одинаково ориентированные оснащенные карты M соединимы цепочкой оснащенных карт той же ориентации). Учет ориентации отдельных карт многообразия играет существенную роль в материалах § 4.

Полнота результатов о старших гомологиях многообразий (в том числе гомологических) и простота их получения объясняются наличием наглядной интерпретации нульмерных когомологий как групп сечений пучков коэффициентов с соответствующими носителями. Подобной интерпретации нульмерных гомологий (двойственных интересующим нас когомологиям) пока нет (а они порой оказываются весьма сложными: для соленоида Σ , к примеру, $H_0(\Sigma; Z) = Z \oplus \text{Ext}(H^1(\Sigma; Z), Z)$). Этим объясняется менее полная форма и существенно более сложные доказательства аналогов предыдущих гомологических результатов для гомологий, особенно для гомологических многообразий, не являющихся топологическими. В связи с этим при выяснении общей картины ограничимся случаем многообразий топологических с кратким указанием аргументов (и необходимых источников), применяемых для получения результатов в более широкой категории гомологических многообразий.

Заметим, что полного аналога предыдущих результатов быть не может. Ключевое положение, занимавшееся в случае гомологий группами H_n , должно принадлежать теперь группам H_c^n . Однако группы H_φ^n могут оказаться ненулевыми и для некоторых семейств φ , отличных от c . Так, $H_\varphi^n(M) \neq 0$ для семейства всех компактных множеств, содержащихся в некоторой области $U \subset M$, поскольку в этом случае $H_\varphi^n(M) = H^n(M, M \setminus U) = H_c^n(U)$. По аналогичной причине $H_\varphi^n(M) \neq 0$ для семейства замкнутых в M множеств, содержащихся в объединении бесконечной локальной конечной в M системы $\{U_i\}$ попарно не пересекающихся областей. Посредством двойственности Пуанкаре задача сводится теперь к изучению нульмерных гомологий H_0^φ с локально постоянными коэффициентами.

Анализ соотношений в духе формул универсальных коэффициентов между гомологиями Стиррода–Ситникова (или Бореля–Мура) и пучковыми когомологиями с компактными носителями локально компактного пространства X позволяет установить, что $H_0^c(X; \Lambda) = \Lambda$, если X связно и гомологически локально связно (см. [11; гл. V, теорема 5.11]), и $H_0(X; \Lambda) = 0$ для связного локально связного некомпактного сепарабельно метризуемого X (см. [11; гл. V, упражнение 26]). Таким образом, для многообразий (в том числе гомологических) $H_c^n(M; \mathcal{H}_n^\Lambda) = \Lambda$ и $H^n(M; \mathcal{H}_n^\Lambda) = 0$ ($\mathcal{H}_n^\Lambda(M)$ – ориентирующий пучок M , определяемый локальными гомологиями с коэффициентами в кольце Λ). Одних этих сведений, однако, слишком мало.

Для получения более полной информации воспользуемся сингулярной теорией гомологий, эквивалентной общей в приложениях к топологическим многообразиям. Двойственность Пуанкаре между когомологиями с коэффициентами в ориентирующем пучке многообразия и целочисленными сингулярными гомологиями с носителями в паракомпактифицирующих семействах была получена А. Картаном [15] в качестве следствия спектральной последовательности,

отвечающей дифференциальному пучку сингулярных цепей. Описание конструкции Картана для цепей с коэффициентами в кольце Λ дано в [11; гл. IV, п. 2.9]. Конструкция легко применима и к цепям с любыми локально постоянными коэффициентами (ср. также [11; гл. V, п. 9.7]). Нужная двойственность является также следствием наличия мягких дифференциальных пучков цепей для сингулярных гомологий с локально постоянными коэффициентами (см. [16]).

Для целей настоящей работы вид сингулярных групп $H_0^{\mathcal{F}}(M; \mathcal{F})$ достаточно установить для двух наиболее типичных семейств φ : семейства всех замкнутых множеств (сингулярные гомологии “второго рода”) и его подсемейства $\varphi = c$, состоящего из всех компактных множеств (обычные сингулярные гомологии). Сингулярные гомологии второго рода с постоянными коэффициентами определены в [17]; определение для локально постоянных коэффициентов такое же, как в [17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{F}$ на некомпактном связном локально линейно связном паракомпактном локально компактном хаусдорфовом пространстве X (в частности, на многообразии M) $H_0(X; \mathcal{F}) = 0$.*

Для доказательства потребуются две леммы.

ЛЕММА 1.4. *Пусть X – связное локально связное локально компактное пространство (в частности, многообразие). Любое компактное множество $K \subset X$ содержится в компактном множестве L , для которого $X \setminus L$ есть дизъюнктное объединение конечного числа связных некомпактных множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{K_\lambda\}$ – все связные компоненты дополнения $X \setminus K$. Для содержащего K открытого множества U с компактным замыканием $\bar{U}$ непустота $K_\lambda \cap (X \setminus U)$ влечет в силу связности K_λ непустоту $K_\lambda \cap (\bar{U} \setminus U)$. Следовательно, все K_λ , кроме конечного числа, содержатся в U (иначе в некоторой точке компактного множества $\bar{U} \setminus U$ нарушится локальная связность X). Компактное множество L получается присоединением к K содержащихся в U множеств K_λ . Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. *Связное локально связное паракомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X (в частности, многообразие) может быть представлено как счетное объединение $X = \bigcup_i X_i$ компактных подпространств, для которых $X_i \subset \text{Int } X_{i+1}$ и дополнение к каждому из которых распадается на конечное число связных некомпактных множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [18; гл. 1, § 9, п. 10, теорема 5] пространство X счетно на бесконечности, так что утверждение леммы – следствие предыдущей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.3. Пусть $\{b_j x_j\}$ – локально конечный нульмерный сингулярный цикл (b_j – элемент слоя $\mathcal{F}$ над точкой $x_j \in X$). Применяя лемму 1.5, фиксируем представление $X = \bigcup_i X_i$. При каждом i множество $X_i \setminus X_{i-1}$ содержит конечное число точек x_j (считаем X_0 пустым). Для каждой точки x_j выберем собственное отображение полуоси $[0, \infty)$ в содержащую x_j компоненту множества $X \setminus X_{i-1}$, при котором x_j окажется началом

образа луча. Существование такого отображения обеспечивается локальной линейной связностью пространства X : образ сегмента $[0, 1]$ соединит x_j с некоторой точкой в X_{i+1} , образ $[1, 2]$ соединит в $X \setminus X_i$ эту точку с некоторой точкой в X_{i+2} и т.д. Накрытием этого отображения в $\mathcal{F}$ будет определена одномерная локально конечная сингулярная цепь с коэффициентами в $\mathcal{F}$, ограничивающая $b_j x_j$. Определена, очевидно, и сумма таких цепей по всем j , оказывающаяся одномерной локально конечной сингулярной цепью с коэффициентами в $\mathcal{F}$, границей которой оказывается выбранный нульмерный цикл. Предложение доказано.

Далее выясним строение группы $H_0^c(X; \mathcal{F})$. Для линейно связного пространства X , как известно, $H_0^c(X; G) = G$. Пусть G – слой $\mathcal{F}$. Пусть $\Gamma(\mathcal{F})$ – подгруппа в G , порожденная всеми элементами вида $g - \gamma(g)$, где $\gamma(g)$ – результат действия на элемент g слоя $\mathcal{F}$ над точкой $x_0 \in X$ элемента $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Для линейно связного пространства X (в частности, для многообразия) $H_0^c(X; \mathcal{F}) = G/\Gamma(\mathcal{F})$. В частности, $H_0^c(X; \mathcal{Z}) = \mathbb{Z}_2$ для непостоянной системы $\mathcal{Z}$ целочисленных коэффициентов. Аналогично, $H_0^c(X; \mathcal{Z} \otimes G) = G/2G$.*

В самом деле, в силу линейной связности X любая конечная нульмерная цепь, будучи циклом, гомологична циклу вида $g x_0$, $x_0 \in X$. Среди таких циклов гомологичны нулю циклы вида $(g - \gamma(g)) x_0$, где γ – элемент фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$.

Как следствие описания нульмерных гомологий, данного в предложениях 1.3 и 1.6, и двойственности Пуанкаре получается

ТЕОРЕМА 1.7. *Для любой локально постоянной системы $\mathcal{G}$ групп G на связном топологическом многообразии M имеем:*

- а) $H^n(M; \mathcal{G}) = 0$, если M не компактно;
- б) $H_c^n(M; \mathcal{G}) = G/\Gamma(\mathcal{G})$, где $\mathcal{G} = D(\mathcal{G}) = \mathcal{H}_n \otimes G$.

В частности:

- в) $H_c^n(M; \mathcal{H}_n) = \mathbb{Z}$ (и $H_c^n(M; \mathcal{H}_n \otimes G) = G$);
- г) $H_c^n(M; \mathcal{Z}) = \mathbb{Z}_2$ для любой отличной от $\mathcal{H}_n$ локально постоянной системы $\mathcal{Z}$ групп $\mathbb{Z}$ (и $H_c^n(M; \mathcal{Z}_n \otimes G) = G/2G$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как интуитивно понятное для триангулируемых многообразий утверждение а) высказано в [3; § 2]. Там же для замкнутых триангулируемых многообразий при несколько ином подходе получено утверждение б), а в случае $G = \mathbb{Z}$ – также в) и г) (см. [3; п. 3]). Как отмечено выше, утверждение а) для $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n^\Lambda$ установлено в [11] даже для гомологических многообразий. В теореме 16.16 второго издания [11; гл. V] утверждения в) и г) в случае $G = \mathbb{Z}$ получены для гомологических многообразий над $\mathbb{Z}$.

В действительности эти утверждения для гомологических многообразий (над $\mathbb{Z}$) верны и для любой группы G . В самом деле, в соответствии с [19; теорема 8] такое M гомологически локально связно во всех размерностях, поэтому его локальные группы $H_p^x(G) = H_p(M, M \setminus x; G)$ посредством формул универсальных коэффициентов выражаются через соответствующие целочисленные локальные группы (в силу [20; теорема 4]). Следовательно, группы $H_n^x(G)$ образуют локально постоянную систему $\mathcal{H}_n \otimes G$, и для получения утверждений

в) и г) в полном объеме остается воспользоваться формулами универсальных коэффициентов из [11; гл. II, теорема 18.3].

Отвечающий 1 или -1 группы $Z = H_0^c(M; Z) = H_c^n(M; \mathcal{H}_n)$ элемент когомологий M будем называть *фундаментальным классом когомологий* (гомологического) многообразия M . Так же, как в случае с гомологиями, выбор этого класса равносильен выбору ориентации M в указанном выше смысле.

В § 4 будет использоваться также понятие фундаментального класса когомологий многообразия по отношению к кольцу Λ . Для отвечающего Λ ориентирующего пучка многообразия M имеет место соотношение $\mathcal{H}_n^\Lambda = \mathcal{H}_n \otimes \Lambda$ (верное, как только что отмечено, и для гомологических над Z многообразий). Поэтому в силу п. в) теоремы 1.7 $H_c^n(M; \mathcal{H}_n^\Lambda) = \Lambda$ есть кольцо, и под фундаментальным классом по отношению к Λ понимается 1 или -1 этого кольца. В случае, если $-1 \neq 1$, выбор фундаментального класса когомологий по отношению к Λ также равносильен выбору ориентации M .

Дуальным по отношению к теореме 1.2 является следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.8. *Для любой области $U \subset M$ и любой точки $x \in U$ включениям $M \subset (M, M \setminus U) \subset (M, M \setminus x)$ отвечают канонические изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H^n(U, U \setminus x; \mathcal{H}_n^\Lambda) &= H^n(M, M \setminus x; \mathcal{H}_n^\Lambda) = H_c^n(M, M \setminus U; \mathcal{H}_n^\Lambda) \\ &= H_c^n(U; \mathcal{H}_n^\Lambda) = H_c^n(M; \mathcal{H}_n^\Lambda) = \Lambda. \end{aligned}$$

Действительно, в силу двойственности все изоморфизмы совпадают с изоморфизмами

$$H_0(x; \Lambda) = H_0^c(U; \Lambda) = H_0^c(M; \Lambda) = \Lambda.$$

В частности, включениям точек x, y в связное (гомологическое) многообразие M отвечают канонические изоморфизмы локальных когомологий

$$H^n(M; M \setminus x; \mathcal{H}_n^\Lambda) = H^n(M; M \setminus y; \mathcal{H}_n^\Lambda).$$

§ 2. Ориентирующие пучки и отображения многообразий

Под ориентирующим пучком $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n(M)$ многообразия M с краем ∂M понимается продолжение на M обычного ориентирующего пучка внутренней части $\text{Int } M = M \setminus \partial M$ многообразия M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для отображения связного многообразия $f: M^m \rightarrow N^n$ совпадение обратного образа $f^* \mathcal{H}_n(N)$ с $\mathcal{H}_m(M)$ равносильно тому, что замкнутые пути в M тогда и только тогда сохраняют локальную ориентацию в точках M , когда их образы обладают аналогичным свойством в N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в зависимости от сохранения или изменения локальной ориентации в точке $x \in M$ при движении по определенному в этой точке замкнутому пути результатом обнесения слоя Z_x расслоения $\mathcal{H}_m(M)$ в этой точке будет его умножение на 1 или -1 . В то же время (как это следует из определения обратного образа пучка; см., например, [11; гл. 1, § 3]) результат переноса Z_x как слоя расслоения $f^* \mathcal{H}_n(N)$ есть подобная же операция, но зависящая от того, сохраняется или нет локальная ориентация многообразия N в точке $f(x)$ при обнесении по замкнутому пути, служащему образом пути в точке x . Тем самым, утверждение – следствие определения $f^* \mathcal{H}_n(N)$.

Отображения, согласованные указанным образом с поведением локальных ориентаций в многообразии и образе, чаще всего называются в литературе правильными по отношению к ориентациям (orientation true). Следуя работе [21], однако, будем называть их во всей работе *ориентируемыми*. Это все отображения, накрываемые отображениями соответствующих ориентирующих пучков многообразий. Заметим, что в [4] и [22] термин “ориентируемые” употребляется по отношению к некоторому более широкому классу отображений.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Любое накрывающее отображение $M^n \rightarrow N^n$ ориентируемо (см. [21]). Ориентируемы вложения $i: U \subset M$ открытых подмножеств многообразий (операция i^* в этом случае – ограничение $\mathcal{H}_m(M)$ на U).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для отображения $f: M^m \rightarrow N^n$, не являющегося ориентируемым, существует двукратное накрытие $\pi: L^m \rightarrow M^m$ с ориентируемой композицией $f\pi: L^m \rightarrow N^n$. При этом $\pi^*\mathcal{H}_m(M) = \pi^*(f^*\mathcal{H}_n(N))$.

В самом деле, в соответствии с предыдущим следствием

$$\pi^*\mathcal{H}_m(M) = \mathcal{H}_m(L) = (f\pi^*)\mathcal{H}_n(N) = \pi^*(f^*\mathcal{H}_n(N)).$$

Основная часть предложения – следствие следующего более общего наблюдения.

ЛЕММА 2.4. Для двух различных локально постоянных систем коэффициентов $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на линейно связном пространстве X существует двукратное накрытие $\pi: X' \rightarrow X$, для которого

$$\pi^*\mathcal{E}_1 = \pi^*\mathcal{E}_2.$$

В самом деле, петли с началом в некоторой точке x_0 , одинаково действующие на слои $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, определяют в фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$ подгруппу индекса 2. Искомое накрытие определяется, очевидно, этой подгруппой.

В случае, если $f^*\mathcal{H}_n(N) \neq \mathcal{H}_m(M)$, между этими пучками, как кажется, нет никакой связи. В частности, не существует какого-либо накрывающего f естественного отображения $\mathcal{H}_m(M)$ в $\mathcal{H}_n(N)$, ибо в силу свойства универсальности обратного образа пучка такое отображение представлялось бы в виде композиции преобразования $\mathcal{H}_m(M) \rightarrow f^*\mathcal{H}_n(N)$ над M и канонического отображения $f^*\mathcal{H}_n(N) \rightarrow \mathcal{H}_n(N)$ над f (см. [23; гл. II, п. 1.2]).

Некоторая связь все же может быть установлена для гладких отображений f многообразий одинаковой размерности $t = n$. Пусть U – открытое подмногообразие в M , состоящее из всех точек регулярности отображения f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для гладкого отображения $f: M^n \rightarrow N^n$ ограничения на U пучков $\mathcal{H}_n(M)$ и $f^*\mathcal{H}_n(N)$ совпадают.

В самом деле, ограничение на U ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n(M)$ есть ориентирующий пучок многообразия U . С другой стороны, поскольку ограничение на U отображения f – локальный гомеоморфизм, применимо предложение 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. В случае, если $f^*\mathcal{H}_n(N) \neq \mathcal{H}_n(M)$ (например, при отображении неориентируемого в обычном смысле многообразия на ориентируемое), при отображении возникает “складка”:

$$\dim(M \setminus U) \geq n - 1.$$

В самом деле, отвечающие элементам ± 1 слоев Z_x локальные сечения вблизи $M \setminus U$ обоих пучков совпадают на U , поэтому при $\dim(M \setminus U) < n-1$ однозначно распространяются до локальных сечений всего многообразия M . Это означает однозначность распространения на M ориентирующего пучка многообразия U , т.е. совпадение $f^* \mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(M)$.

§ 3. Степень собственного отображения

По отношению к отображениям, в которых по крайней мере одно из участвующих многообразий неориентируемо, с самого начала установилось устойчивое мнение, что для них надлежит применять только степень по модулю 2 (см. [1], [4], [5], [22], [24]–[26] и др.). Считается даже, что для таких отображений только такая степень и может быть определена (см. [4], [22]). Затруднения, обусловленные ее малой информативностью, преодолевались за счет различных дополнительных конструкций, включающих в себя поднятия отображений на подходящие накрытия, расщепления отображений в композиции, учет поведения локальных ориентаций многообразий вдоль путей и их образов и т.п. (см. [1], [3], [4], [14] и др.).

Первой попыткой построения когомологической теории степени отображений неориентируемых многообразий была отмеченная во введении конструкция Олума степени, “скрученной посредством фундаментальной группы”, в классе отображений замкнутых триангулируемых многообразий. В [21] в гладкой категории представлен гомологический подход к определению степени гладких отображений любых гладких многообразий, использующий теорию потоков автора, группы гомологий которых дуальны когомологиям, определяемым посредством так называемых нечетных дифференциальных форм. Специфика конструкций, по-видимому, не способствовала распространению этих подходов (согласно [3; лемма 3.5], например, инвариантность степени при гомотопиях из-за связи ее определения с начальной точкой для фундаментальной группы имеет место с точностью до знака, а некоторые ее простые свойства получаются после сопоставления с абсолютной степенью Хопфа; ср. с теоремой 4.5 ниже).

В этом параграфе представлены (и сравниваются между собой) два варианта определения степени – отдельно в терминах когомологий и гомологий.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – собственное отображение локально компактных пространств, $\mathcal{G}$ – пучок коэффициентов на Y и $f^* \mathcal{G}$ – обратный образ на X . В этих условиях определены индуцированные отображением гомоморфизмы f когомологий

$$f_c^*: H_c^*(Y; \mathcal{G}) \rightarrow H_c^*(X; f^* \mathcal{G})$$

(см. [23; гл. II, п. 4.16] или [11; гл. II, § 8]), а для локально постоянного $\mathcal{G}$ – также отображение гомологий

$$f_*: H_*(X; f^* \mathcal{G}) \rightarrow H_*(Y; \mathcal{G})$$

(см. [13; гл. 5, п. 3.5] для гомологий типа Стиррода–Ситникова, [11; гл. V, § 4] – в более общих условиях в терминах гомологий Бореля–Мура, а конкретно для собственных отображений – выводы из [11; гл. V, предложение 4.5]).

Всюду ниже коэффициенты для гомологий и когомологий предполагаются локально постоянными. Обратный образ $f^*\mathcal{G}$ такого $\mathcal{G}$ (как расслоенного пространства) инвариантен по отношению к гомотопиям отображения f . Гомотопия $F: X \times I \rightarrow Y$ отображения f индуцирует на $X \times I$ пучок $F^*\mathcal{G} = f^*\mathcal{G} \times I$. Для собственных f и F в силу [11; гл. II, следствие 11.3] (или теоремы 11.9 во втором издании [11; гл. II]) для любого $t \in I = [0, 1]$ определяемое как $t \rightarrow (x, t)$ включение X в $X \times I$ индуцирует не зависящий от t изоморфизм когомологий $H_c^*(X \times I; F^*\mathcal{G}) \rightarrow H_c^*(X; f^*\mathcal{G})$. Отсюда, очевидно, вытекает инвариантность гомоморфизма когомологий f_c^* по отношению к собственным гомотопиям f . В силу таких же аргументов для гомологий, представляющих содержание теоремы 6.2 из [11; гл. V] (теоремы 6.3 – во втором издании), аналогичный вывод справедлив для указанного выше гомоморфизма f_* гомологий второго рода.

Гомоморфизмы f_c^* и f_* определены и для относительных групп: собственному отображению $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ пар пространств с замкнутыми подмножествами $A \subset X$ и $B \subset Y$ отвечают гомоморфизмы $f_c^*: H_c^p(Y, B; \mathcal{G}) \rightarrow H_c^p(X, A; f^*\mathcal{G})$ и $f_*: H_p(X, A; f^*\mathcal{G}) \rightarrow H_p(Y, B; \mathcal{G})$; см. в связи с этим [11; гл. II, п. 12] (п. 12.7 во втором издании) по поводу f_c^* и в связи с f_* – конструкцию к теореме 2 в [27] (которая с учетом наличия отображения $f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ над f и локальной постоянности пучков автоматически переносится с постоянных на локально постоянные коэффициенты; см. [13; гл. 5, п. 3.2]). Выводы выше об инвариантности f_c^* и f_* при собственных гомотопиях остаются в силе и для собственных отображений пар (X, A) локально компактных пространств (достаточно рассмотреть включения в $(X, A) \times I$ наряду с пространством X также подпространства A и пары (X, A) , соответствующие отображения точных (ко)гомологических последовательностей и лемму о пяти изоморфизмах).

Степень отображения будет определена ниже для собственных отображений $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ многообразий с краями, $f(\partial M) \subset \partial N$. Из определения ориентирующего пучка $\mathcal{H}_n(M)$ для многообразия с краем (см. § 2) следует, что его ограничения на ∂M есть ориентирующий пучок многообразия ∂M (это верно и для гомологических многообразий в соответствии с их определением). Отображения f_c^* и f_* будут интересовать нас преимущественно в случае, когда коэффициентами $\mathcal{G}$ на N служит ориентирующий пучок $\mathcal{H}_n(N)$ многообразия N .

Пусть сперва $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – ориентируемое собственное отображение (гомологических) многообразий, $f^*\mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(M)$. В соответствии с п. в) теоремы 1.7 гомоморфизмом

$$f_c^*: Z = H_c^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \rightarrow H_c^n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) = Z$$

определяется число $f_c^*(1) \in Z$, которое естественно называть *степенью отображения* f . В этом определении использовано то обстоятельство, что когомологии с компактными носителями замкнутой пары (X, A) совпадают (как это следует, например, из [11; гл. II, теорема 12.1]) с когомологиями дополнения $X \setminus A$. Предполагается также, что выбраны фундаментальные классы многообразий $\text{Int } M$ и $\text{Int } N$ (при смене любого из них $\deg f$ изменит знак). Из приведенных выше общих наблюдений следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для всех собственных отображений g , гомотопных f посредством согласованных с границами собственных гомотопий, $\deg g = \deg f$.*

Если собственное отображение f не является ориентируемым, образ $f_c^*(\nu)$ фундаментального класса когомологий ν многообразия N принадлежит группе $H_c^n(M, \partial M; f^* \mathcal{H}_n(N)) = Z_2$ (см. п.г) теоремы 1.7). Для такого f элемент $f_c^*(\nu) \in Z_2$ будем называть *квазистепенью* f и обозначать как $\deg f$. Инвариант $\deg f$ не зависит от выбора фундаментального класса ν многообразия N . Вместе с f все отображения g , гомотопные f , неориентируемы, и при наличии собственных гомотопий $\deg g = \deg f$.

Самостоятельный интерес для ориентируемых отображений представляет принимающая значения в кольце Λ степень $\deg_\Lambda f$ над кольцом Λ , определяемая подобно обычной посредством когомологий H_c^n с коэффициентами в ориентирующих пучках $\mathcal{H}_n^\Lambda$ (см. конец § 1), а для неориентируемых f – также и квазистепень $\deg_\Lambda f$, принимающая значения (в силу п.г) теоремы 1.7 и отмеченного в конце § 1 соотношения $\mathcal{H}_n^\Lambda = \mathcal{H}_n \otimes \Lambda$ в $\Lambda/2\Lambda$.

Эти инварианты естественным образом связаны с $\deg f$ и $\deg f$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – собственное отображение топологических (или гомологических над Z) многообразий и Λ – некоторое кольцо. Если f ориентируемо, то $\deg_\Lambda f = \deg f \cdot 1$, где $1 \in \Lambda$. В частности, всегда $\deg f \equiv \deg_{Z_2} f \pmod{2}$. Для неориентируемого f имеем $\deg_\Lambda f = \deg f \otimes 1 \in Z_2 \otimes \Lambda = \Lambda/2\Lambda$. В частности, всегда $\deg_{Z_2} f = \deg f = \deg_{Z_2} f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, $\mathcal{H}_n^\Lambda = \mathcal{H}_n \otimes \Lambda$. Поэтому (по теореме 18.3 из [11; гл. II])

$$H_c^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n^\Lambda(N)) = H_c^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \otimes \Lambda.$$

Так как $f^* \mathcal{H}_n^\Lambda(N) = f^* \mathcal{H}_n(N) \otimes \Lambda$, то аналогичным образом

$$H_c^n(M, \partial M; f^* \mathcal{H}_n^\Lambda(N)) = H_c^n(M, \partial M; f^* \mathcal{H}_n(N)) \otimes \Lambda.$$

Определяющее $\deg_\Lambda f$ отображение f_c^* когомологий H_c^n над Λ имеет вид

$$\Lambda = Z \otimes \Lambda \xrightarrow{\deg f \otimes 1} Z \otimes \Lambda = \Lambda,$$

чем подтверждается первое утверждение теоремы. Для неориентируемого f аналогичное отображение f_c^* имеет вид (ср. с теоремой 1.7)

$$\Lambda = Z \otimes \Lambda \xrightarrow{\deg f \otimes 1} Z_2 \otimes \Lambda = \Lambda/2\Lambda,$$

чем подтверждается вторая часть теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Как видно из доказательства, ориентируемость f обеспечивает “ориентируемость f над Λ ”, т.е. совпадение $f^* \mathcal{H}_n^\Lambda(N)$ с $\mathcal{H}_n^\Lambda(M)$. Сверх того для неориентируемых f равенство $f^* \mathcal{H}_n^\Lambda(N) = \mathcal{H}_n^\Lambda(M)$ возможно в точности при условии, что $2\Lambda = 0$.

В доказательстве для частного случая использован следующий общий факт (который будет использован и ниже).

ЛЕММА 3.4. Для непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ и пучков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на Y имеет место

$$f^*(\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{B}) = f^*\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} f^*\mathcal{B}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, отображения $f^*\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ и $f^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ над f определяют отображение $f^*\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} f^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{B}$ над f . По свойству универсальности обратного образа пучка (см. [23; гл. II, п. 1.12]) оно факторизуется отображением $f^*\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} f^*\mathcal{B} \rightarrow f^*(\mathcal{A} \otimes_{\Lambda} \mathcal{B})$ пучков на пространстве X . Слои участвующих в этом выражении пучков в точках $x \in X$ совпадают со слоями соответствующих пучков в точках $f(x) \in Y$ (см. [23; гл. II, § 1.12]), а слои тензорного произведения пучков – с тензорными произведениями слоев этих пучков (см. [23; гл. II, § 2.8]). Таким образом, слои пучков в отображении выше совпадают, и само отображение – изоморфизм. Лемма доказана.

К настоящему времени более распространенными оказались подходы к определению степени отображений топологических многообразий с помощью сингулярных гомологий (для ориентируемых многообразий см. [5; гл. VII, § 4], для триангулируемых ориентируемых многообразий с краями – [28; гл. 4, упражнение F] и др., для ориентируемых отображений замкнутых топологических многообразий – [14; определение 4.10]). В оставшейся части этого параграфа такой подход рассматривается во всей общности. В классе ориентируемых отображений устанавливается эквивалентность гомологического и когомологического подходов. Выясняется в то же время, что дуальной формы определения квазистепени неориентируемых отображений в терминах целочисленных сингулярных гомологий не существует.

Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – ориентируемое отображение (гомологических) многообразий. При условии его собственности определен гомоморфизм гомологий (см. начало этого параграфа и теорему 1.1)

$$f_*: Z = H_n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \rightarrow H_n(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) = Z.$$

В предположении, что выбраны фундаментальные классы гомологий многообразий $\text{Int } M$ и $\text{Int } N$, определен образ первого из них – целое число, которое естественно называть *гомологической степенью* $\text{hdeg } f$ отображения f .

Заметим, что для неориентируемого отображения f отображение f_* лишено интереса: в силу теоремы 1.1 $H_n(M, \partial M; f^*\mathcal{H}_n(N)) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.5. Для ориентируемых собственных отображений (гомологических) многообразий $\text{hdeg } f = \pm \deg f$. Фундаментальные классы гомологий и когомологий всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы $\text{hdeg } f = \deg f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул универсальных коэффициентов из [11; гл. V, § 10, формула (17)] и изоморфизмов $H_c^*(M, \partial M) = H_c^*(M \setminus \partial M)$, $H_*(M, \partial M) = H_*(M \setminus \partial M)$ для любых локально постоянных коэффициентов $\mathcal{G}$ имеет место естественное по M и включениям открытых множеств $U \subset M$ преобразование, являющееся изоморфизмом:

$$H_n(M, \partial M; \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(H_c^n(M \setminus \partial M; \mathcal{G}), Z).$$

Так как $H_n(M, \partial M; \mathcal{H}_n^\Lambda(M)) = \Lambda = H_c^n(M, \partial M; \mathcal{H}_n^\Lambda(M))$ (см. теоремы 1.1 и 1.7), то для фундаментальных классов гомологий γ и когомологий ν многообразия $\langle \gamma, \nu \rangle = \pm 1$, причем они могут быть выбраны так, что $\langle \gamma, \nu \rangle = 1$. В силу естественного соотношения $\langle f_*(\gamma_M), \nu_N \rangle = \langle \gamma_M, f_c^*(\nu_N) \rangle$ имеем

$$\text{hdeg}_\Lambda f \cdot \langle \gamma_N, \nu_N \rangle = \deg_\Lambda f \cdot \langle \gamma_M, \nu_M \rangle,$$

откуда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Фигурирующее в начале доказательства преобразование в классической ситуации, когда имеются свободные коцепи, а коэффициенты $\mathcal{U}$ постоянны, обычно определяется спариванием между цепями и конечными коцепями. Стандартное спаривание между локально конечными сингулярными цепями и сингулярными коцепями с компактными носителями локально компактного пространства для постоянных коэффициентов было впервые рассмотрено (несмотря на то, что они не образуют свободный комплекс) в [17; гл. V, п. 6]. Сингулярная коцепь с компактным носителем – это коцепь, обращающаяся в нуль на сингулярных симплексах вне некоторого компактного множества, или, что эквивалентно, отличная от нуля лишь на конечном числе симплексов любого локально конечного их набора (см. [17], а также [13; гл. 1, п. 2.9]). При использовании достаточно мелких сингулярных симплексов в определенных условиях указанное спаривание возможно и при локально постоянных коэффициентах (см. пример такого рода в начале доказательства теоремы 10.2 в [29]).

В наших условиях, очевидно, определено спаривание $\langle c, \xi \rangle$ со значениями в Z между локально конечными сингулярными цепями c с коэффициентами $\mathcal{H}_n$ и сингулярными коцепями ξ с компактными носителями с теми же коэффициентами: сечению пучка $\mathcal{H}_n$ как значению коцепи ξ на некотором сингулярном симплексе σ и сечению того же пучка как коэффициенту, с которым σ входит в цепь c , отвечает результат их тензорного умножения как сечение постоянно пучка $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n = Z$. Это спаривание между цепями и коцепями приводит, как обычно, к спариванию сингулярных групп $H_p(M; \mathcal{H}_n) \otimes H_c^p(M; \mathcal{H}_n) \rightarrow Z$, определяющему фигурирующее выше преобразование (несмотря на отсутствие в данной ситуации свободных коцепей с компактными носителями).

Из приведенного выше доказательства теоремы 3.5 следует существование на топологическом многообразии локально конечного “ориентирующего” сингулярного цикла z (определяющего фундаментальный класс гомологий) и сингулярного фундаментального коцикла z' с компактным носителем (определяющего фундаментальный класс когомологий), для которых $\langle z, z' \rangle = 1$.

§ 4. Свойства степени и квазистепени

ТЕОРЕМА 4.1. *Степень мультипликативна: композиция gf ориентируемых собственных отображений $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ и $g: (N, \partial N) \rightarrow (L, \partial L)$ – ориентируемое собственное отображение, причем $\deg_\Lambda gf = \deg_\Lambda f \cdot \deg_\Lambda g$. За пределами класса ориентируемых отображений это свойство, как правило, утрачивается.*

Доказательство – следствие соотношения $(gf)^*\mathcal{G} = f^*(g^*\mathcal{G})$ для обратных образов пучков коэффициентов (ср., например, [6; гл. 2, предложение 5.7]) и соотношения $(gf)_c^* = f_c^*g_c^*$ для индуцированных гомоморфизмов когомологий (см. [11; гл. II, § 8]).

Пусть $\pi: S^2 \rightarrow P^2$ – стандартная проекция сферы на проективную плоскость. В соответствии с теоремой 4.4 ниже $\deg \pi = 2$. Свойство мультипликативности нарушается для композиций πf и $f\pi$, где $f: P^2 \rightarrow S^2$ – отображение, отмеченное во введении ($\deg f = 1$, $(\pi f)^* = 0 = (f\pi)^*$); в связи с нарушением этого свойства см. также § 5.

Пусть j – индекс подгруппы $f_*(\pi_1(M, x_0)) \subset \pi_1(N, f(x_0))$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – собственное отображение топологических многообразий, для которого $j = \infty$. В этом случае $\deg f = 0$, если f ориентируемо, и $\deg f = 0$ для неориентируемых f .

Для отображений замкнутых триангулируемых многообразий аналогичный результат получен в [3; п. 3.9(с), п. 16.3 и теорема VIII] в процессе сопоставления представленной там интерпретации $\deg f$ со степенью Хопфа $\mathcal{A}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Пусть $\pi: \bar{N} \rightarrow N$ – отвечающее подгруппе $f_*(\pi_1(M, x_0))$ накрытие и $\bar{f}: M \rightarrow \bar{N}$ – поднятие f , $f = \pi\bar{f}$. Имеем $\pi^*\mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(\bar{N})$ (следствие 2.2). Для компактного множества $C \subset \bar{N}$ справедливо включение $\bar{f}^{-1}(C) \subset f^{-1}(\pi(C))$, поэтому отображение $\bar{f}$ собственное и множество $\bar{K} = \bar{f}(M)$ замкнуто в $\bar{N}$. Так как слои π бесконечны, включение $\bar{K} \subset \bar{N}$ строгое. Достаточно показать, что $H_c^n(\bar{K}, \bar{K} \cap \partial\bar{N}; \mathcal{H}_n(\bar{N})) = 0$.

Эта группа равна $H_c^n(K; \mathcal{H}_n(\bar{N}))$, где $K = \bar{K} \setminus \partial\bar{N}$ – замкнутое в $\text{Int } \bar{N}$ множество с непустым дополнением. По двойственности Пуанкаре (см. [13; § 8, п. 5.4]) эта группа изоморфна $H_0^c(\text{Int } \bar{N}, \text{Int } \bar{N} \setminus K; Z)$. Равенство нулю последней – следствие эпиморфизма $H_0^c(\text{Int } \bar{N} \setminus K; Z) \rightarrow H_0^c(\text{Int } \bar{N}; Z) = Z$ в точной последовательности пары $(\text{Int } \bar{N}, \text{Int } \bar{N} \setminus K)$.

В процессе доказательства получено также следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Отличие от нуля любого из инвариантов $\deg f$ или $\deg f$ для собственного отображения (гомологических) многообразий влечет сюръективность $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$.

В соответствии со следствием 2.2 собственное (следовательно, конечнократное) накрывающее отображение $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ (гомологических) многообразий ориентируемо: $f^*\mathcal{H}_n(N) = \mathcal{H}_n(M)$. В соответствии с теоремой 1.8 фундаментальный класс когомологий многообразия N реализуем на достаточно малой открытой области $U \subset \text{Int } N$, так что его прообраз будет состоять из конечного набора фундаментальных классов компонент множества $f^{-1}(U) \subset \text{Int } M$. Воспользовавшись той же теоремой для M , сложим образы этих классов в $H_c^n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$. Как оснащенные карты эти компоненты имеют в M одинаковую ориентацию (см. § 1), определяемую ориентацией оснащенной карты U в N . Этим доказана

ТЕОРЕМА 4.4. Степень $\deg f$ конечнократного накрывающего отображения $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ (гомологических) многообразий равна кратности f .

Для отображений замкнутых топологических многообразий этот результат посредством гомологического подхода к определению степени получен в [14; лемма 4.11]. В [21] в рамках рассматриваемого там определения степени гладких отображений через гомологии потоков этот результат получен для накрывающих отображений гладких многообразий.

ТЕОРЕМА 4.5. *Степень ориентируемого собственного отображения топологических многообразий $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$, для которого индекс j подгруппы $f_*(\pi_1(M, x_0)) \subset \pi_1(N, f(x_0))$ конечен, имеет вид $\deg f = j \cdot \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. В частности, $f_*(\pi_1(M, x_0)) = \pi_1(N, f(x_0))$, если $\deg f = 1$. Аналогично, $\operatorname{dg} f = j \cdot \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}_2$, для неориентируемых f . В частности, $\operatorname{dg} f = 0$, если число j четно.*

В классе замкнутых ориентируемых многообразий первое из утверждений получено в [3; п. 3.9(в), п. 16.3 и теорема VIII] в процессе сопоставления представленной там интерпретации $\deg f$ со степенью Хопфа $\mathcal{A}(f)$, а для отображений ориентируемых топологических многообразий – в [1; следствие 3.4].

Доказательство теоремы – это следствие представления f как композиции $f = \pi \bar{f}$ для отвечающего образу фундаментальной группы накрытия $\pi: \bar{N} \rightarrow N$ (см. доказательство теоремы 4.2, а также теоремы 4.1 и 4.4).

Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – непрерывное собственное отображение (гомологических над $\mathbb{Z}$) многообразий, ориентируемое над полем Λ (см. замечание 3.3) и имеющее ненулевую степень $\deg_\Lambda f$ над Λ .

ТЕОРЕМА 4.6. *В этой ситуации для любой локально постоянной системы коэффициентов $\mathcal{G}$ со слоем Λ на N отображения $f^*: H^*(N, \mathcal{G}) \rightarrow H^*(M; f^*\mathcal{G})$ и $f_c^*: H_c^*(N, \partial N; \mathcal{G}) \rightarrow H_c^*(M, \partial M; f^*\mathcal{G})$ – мономорфизмы.*

В случае, когда $\mathcal{G} = R$ – вещественные числа, а f – ориентируемое гладкое собственное отображение гладких многообразий (без края), этот результат для когомологий, определяемых комплексами четных и нечетных дифференциальных форм, известен как теорема Хопфа (см. [21; § 18]).

Какого-либо аналога этой теоремы для неориентируемых отображений не существует: для неориентируемого над полем Λ отображения f в соответствии с теоремой 3.2 всегда $\operatorname{dg}_\Lambda f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. Воспользуемся имеющимся на N невырожденным спариванием (см. [11; гл. V, следствие 10.6])

$$\smile: H^p(N; \mathcal{G}) \otimes_\Lambda H_c^{n-p}(N, \partial N; \mathcal{G}^{-1} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_n^\Lambda(N)) \rightarrow \Lambda = H_c^n(N, \partial N; \mathcal{H}_n^\Lambda(N)).$$

Здесь $\mathcal{G}^{-1}$ – локально постоянные коэффициенты, однозначным образом определяющиеся условием $\mathcal{G}^{-1} \otimes_\Lambda \mathcal{G} = \Lambda$. Так как $\mathcal{H}_n^\Lambda(N) = \mathcal{H}_n^\Lambda(N)^{-1}$, то соотношения $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{-1} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_n^\Lambda(N)$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_n^\Lambda(N)$ эквивалентны, так что при доказательстве одного из утверждений можно пользоваться коэффициентами $\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{-1} \otimes_\Lambda \mathcal{H}_n^\Lambda(N)$.

Для не равного нулю элемента $h \in H^p(N; \mathcal{G})$ (соответственно $h' \in H_c^{n-p}(N, \partial N; \mathcal{F}(\mathcal{G}))$) существует элемент $h' \in H_c^{n-p}(N, \partial N; \mathcal{F}(\mathcal{G}))$ (соответственно $h \in H^p(N; \mathcal{G})$) такой, что $h \smile h' = 1 \in \Lambda$. Имеем

$$H_c^{n-p}(N, \partial N; \mathcal{F}(\mathcal{G})) = H_{c|\operatorname{Int} N}^{n-p}(N; \mathcal{F}(\mathcal{G}))$$

(см. [11; гл. II, теорема 12.1]). В соответствии с [11; § 8]

$$\begin{aligned} f_c^*(h \smile h') &= f^*(h) \smile f_c^*(h'), & f^*(h) &\in H^p(M; f^*\mathcal{G}), \\ f_c^*(h') &\in H_{c|\text{Int } M}^{n-p}(M, f^*\mathcal{F}(\mathcal{G})) = H_c^{n-p}(M, \partial M; f^*\mathcal{F}(\mathcal{G})). \end{aligned}$$

В силу леммы 3.4, очевидно,

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{G}^{-1}) &= (f^*\mathcal{G})^{-1}, \\ f^*\mathcal{F}(\mathcal{G}) &= f^*(\mathcal{G}^{-1} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}_n^{\Lambda}(N)) = (f^*\mathcal{G})^{-1} \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}_n^{\Lambda}(M) = \mathcal{F}(f^*\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Тем самым, $f^*(h) \smile f_v^*(h') = \deg_{\Lambda} f \neq 0$ есть результат спаривания интересующих нас элементов посредством

$$\smile: H^p(M; f^*\mathcal{G}) \otimes_{\Lambda} H_c^{n-p}(M, \partial M; \mathcal{F}(f^*\mathcal{G})) \rightarrow \Lambda = H_c^n(M, \partial M; \mathcal{H}_n^{\Lambda}(M)).$$

Следовательно, $f^*(h) \neq 0 \neq f_c^*(h')$.

Заметим, что для топологических многообразий использованное в доказательстве $\smile$ -умножение эквивалентно классическому (см. [11; гл. 3, § 1]).

ЛЕММА 4.7. *Для любой компоненты M' края ∂M многообразия M связывающий гомоморфизм*

$$\delta: H_c^{n-1}(M'; \mathcal{H}_{n-1}^{\Lambda}(M')) \rightarrow H_c^n(M, \partial M; \mathcal{H}_n^{\Lambda}(M))$$

есть изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ограничение $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(M)$ на M' совпадает с $\mathcal{H}_{n-1}^{\Lambda}(M')$, то δ – связывающий гомоморфизм в когомологической последовательности пары $(M' \cup \text{Int } M, M')$. Пусть x_0 – любая точка M' , U – гомеоморфная полушарию достаточно малая окрестность x_0 и $U' = U \cap M'$. Естественность δ по отношению к отображениям пар и теорема 1.8 позволяют заменить изучаемый гомоморфизм на $\delta: H_c^{n-1}(U'; \Lambda) \rightarrow H_c^n(U, U'; \Lambda) = H_c^n(U \setminus U'; \Lambda)$. Изоморфность последнего – следствие того, что пара (U, U') получается выкалыванием одной точки из пары (B^n, S^{n-1}) с теми же когомологиями (B^n – шар размерности n). Лемма доказана.

Из леммы (и теоремы 3.2), очевидно, вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.8. *Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – собственное отображение связных топологических многообразий со связными краями и f_0 – ограничение f на ∂M . Если f ориентируемо, то $\deg_{\Lambda} f = \deg_{\Lambda} f_0$. В неориентируемом случае $\deg f_0 = \text{dg } f \pmod{2}$, если f_0 ориентируемо, иначе $\text{dg } f = \text{dg } f_0$. При несвязной границе ∂M для ограничений f_i отображения f на компоненты $M_i \subset \partial M$ инварианты $\deg f_i$ (соответственно $\text{dg } f_i$) отличны от нуля лишь для конечного множества компонент M_i , причем их сумма равна $\deg f$ (соответственно $\text{dg } f$ по модулю 2).*

Пусть W – связное $(n+1)$ -мерное (топологическое) многообразие с краем $\partial W = \bigcup_i M_i$, M_i – компоненты края, $f: W \rightarrow N$ – собственное отображение в n -мерное многообразие без края, f_i – ограничения f на M_i и f_0 – ограничение f на ∂W .

ТЕОРЕМА 4.9. *Если f ориентируемо над кольцом Λ , то степени $\deg_{\Lambda} f_i$ отличны от нуля только для конечного числа подмногообразий M_i и $\sum_i \deg_{\Lambda} f_i = 0$. В частности, $\deg_{\Lambda} f_1 = \deg_{\Lambda} f_2$ для бордантовых f_1 и f_2 ($\partial W = M_1 \cup M_2$) и $\deg_{\Lambda} f_1 = 0$, если $\partial W = M_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ограничение $\mathcal{H}_{n+1}^{\Lambda}(W)$ на ∂W дает ориентирующие пучки компонент M_i , то все отображения f_i ориентируемы. Гомоморфизм $(f_0)_c^*$ – это отображение $\Lambda = H_c^n(N; \mathcal{H}_n^{\Lambda}(N))$ в прямую сумму $\bigoplus_i H_c^n(M_i; \mathcal{H}_n^{\Lambda}(M_i))$, при котором образ фундаментального класса когомологий принадлежит конечной подсумме, в связи с чем все $\deg_{\Lambda} f_i$, кроме конечного числа, равны нулю. В соответствии с леммой 4.7 отображение

$$\delta: \bigoplus_i \Lambda = \bigoplus_i H_c^n(M_i; \mathcal{H}_n^{\Lambda}(M_i)) \rightarrow \mathcal{H}_c^{n+1}(W, \partial W; \mathcal{H}_{n+1}^{\Lambda}(W)) = \Lambda$$

переводит прямую сумму $\bigoplus_i \deg_{\Lambda} f_i$ в обычную сумму $\sum_i \deg_{\Lambda} f_i$. Ее равенство нулю – следствие равенства нулю композиции $\delta(f_0)_c^*$, так как $f_0 = f\varepsilon$, где $\varepsilon: \partial W \subset W$ – включение. В этом случае $(f_0)_c^* = \varepsilon^* f^*$, но $\delta\varepsilon^* = 0$ в силу точности когомологической последовательности пары $(W, \partial W)$. Теорема доказана.

Условие ориентируемости f в теореме существенно. Это видно на примере, в котором $f: W \rightarrow S^1$ – стандартная проекция листа Мёбиуса на окружность, не являющаяся ориентируемой в обычном смысле, но ориентируемая, например, над $\mathbb{Z}_2$.

Пусть $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ – собственное отображение (гомологических) многообразий, $y \in \text{Int } N = N \setminus \partial N$ – некоторая точка, $U \subset \text{Int } N$ – достаточно малая (по отношению к $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(N)$) связная окрестность y . Поскольку M – (гомологическое) многообразие, то открытое множество $V = f^{-1}(U)$ представляется в виде объединения своих связных компонент: $V = \bigcup_i V_i$. Пусть f_i – ограничения f на множества V_i . Очевидно, что $f_i: V_i \rightarrow U$ – собственные отображения, а так как пучок $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(N)$ постоянен на U , то определены степени $\deg_{\Lambda} f_i$ (по отношению к ограничениям на U и V_i ориентирующих пучков многообразий).

ТЕОРЕМА 4.10. *Степени $\deg_{\Lambda} f_i$ отличны от нуля только для конечного числа компонент V_i . При этом $\deg_{\Lambda} f = \sum_i \deg_{\Lambda} f_i$, если отображение f ориентируемо. В противном случае (при $\Lambda = \mathbb{Z}$) имеем $\sum_i \deg f_i = \text{dg } f \pmod{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in N \setminus f(M)$, то $\deg_{\Lambda} f$ (или $\text{dg } f$) и все $\deg_{\Lambda} f_i$ равны нулю (см. предложение 4.3). Предполагаем далее, что $y \in f(M) = N$. Пусть ν , ν_2 – фундаментальные классы когомологий соответственно для $(M, \partial M)$ и $(N, \partial N)$, ν'_2 – фундаментальный класс многообразия U , ν_i – фундаментальные классы когомологий многообразий V_i , j_2 – включение $U \subset N$ и j_1 – включение $V \subset M$. Так как $j_{2*}(\nu'_2) = \nu_2$ (теорема 1.8), то $f_c^*(j_{2*}(\nu'_2)) = \deg_{\Lambda} f \cdot \nu$ для ориентируемого f , и это есть элемент $\text{dg } f \in \mathcal{H}_c^n(M, \partial M; f^* \mathcal{H}_n(N))$ в противном случае. При любых коэффициентах $\mathcal{H}_c^n(V) = \bigoplus_i \mathcal{H}_c^n(V_i)$. Следовательно, для ограничения $f_0: V \rightarrow U$ отображения f имеем, что $(f_0)_c^*(\nu'_2) = \bigoplus_i \deg_{\Lambda} f_i \cdot \nu_i$ – конечная сумма. Для ориентируемого f , поскольку $j_{1*}(\nu_i) = \nu$, имеем $j_{1*}((f_0)_c^*(\nu'_2)) = (\sum_i \deg_{\Lambda} f_i) \nu$, и остается учесть соотношение $f j_1 = j_2 f_0$. В случае неориентируемого f четность $\deg f_i$ совпадает с $\deg_{\mathbb{Z}_2} f$, поэтому

утверждение справедливо для $\Lambda = \mathbb{Z}_2$, и остается применить теорему 3.2. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. В частном случае, когда ограничения f_i отображения f на компоненты V_i множества $V = f^{-1}(U)$ в теореме 4.10 – гомеоморфизмы $V_i \rightarrow U$ (так будет, например, в регулярных значениях гладкого отображения f), число таких компонент конечно и $\deg_{\Lambda} f_i = \pm 1$. Знак $\deg_{\Lambda} f_i$ определяется посредством переносов из некоторой точки $x_0 \in M$ слоев $\mathcal{H}_n^{\Lambda}(M)$ и $f^* \mathcal{H}_n^{\Lambda}(N)$ вдоль путей из этой точки в V_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Условие малости открытого множества U в теореме 4.10 не является существенным. Теорема справедлива, очевидно, для любого связного открытого множества $U \subset \text{Int } N$ с тем лишь уточнением, что в левой части содержащегося в ней сравнения по $\bmod 2$ символы $\deg f_i$ должны быть заменены на $\text{dg } f_i$ для всех отображений f_i , оказывающихся неориентируемыми. В такой форме теорема представляет собой наиболее завершенную версию (в том числе и для отображений ориентируемых многообразий) свойства аддитивности степени, свободную от излишних ограничений (см., например, [5; гл. IV, предложение 5.8 и гл. VIII, предложение 4.7]).

В заключение этого параграфа скажем еще о некоторых локальных свойствах степени. Для собственного отображения $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ (гомологических) многообразий пусть y – некоторая внутренняя точка N , полный прообраз которой есть конечное множество $\{x_{\alpha}\}$. Пусть U – достаточно малая окрестность y , $V = f^{-1}(U)$ и V_{α} – связная компонента V , содержащая x_{α} . Считаем, что $V_{\alpha} \cap V_{\beta} = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$ (это так для малых U). В соответствии с двойственностью (ср. с теоремой 1.2) когомологии $H^*(V_{\alpha}, V_{\alpha} \setminus x_{\alpha})$ совпадают с гомологиями точки x_{α} в дополнительных к n размерностях. Таким образом, единственной нетривиальной группой является $H^n(V_{\alpha}, V_{\alpha} \setminus x_{\alpha}) = \Lambda$, и аналогично для точки y . Ограничением f до отображения пар $(V_{\alpha}, V_{\alpha} \setminus x_{\alpha}) \rightarrow (U, U \setminus y)$ посредством индуцированного отображения когомологий определена локальная степень $\deg_{\Lambda}(f, x_{\alpha})$ отображения f в точке x_{α} .

Отображение когомологий f^* индуцируется не только отображениями пар $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ с замкнутыми подмножествами A и B , но и для более общих пар (см. [11; гл. II, § 12] и п. 12.7 во втором издании). В частности, это имеет место для отображения $f: (M, M \setminus f^{-1}(y)) \rightarrow (N, N \setminus y)$, эквивалентного по свойству вырезания отображению $\bigcup_{\alpha} (V_{\alpha}, V_{\alpha} \setminus x_{\alpha}) \rightarrow (U, U \setminus y)$. Заменяя в доказательстве теоремы 4.10 фигурирующие там множества V_{α} , U на соответствующие пары $(V_{\alpha}, V_{\alpha} \setminus x_{\alpha})$, $(U, U \setminus y)$ и пользуясь, как прежде, теоремой 1.8, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.13. Для точки $y \in \text{Int } N$, имеющей конечное множество прообразов $\{x_{\alpha}\}$ в собственном отображении $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ (гомологических) многообразий, $\deg_{\Lambda} f = \sum_{\alpha} \deg_{\Lambda}(f, x_{\alpha})$, если f ориентируемо, и $\sum_{\alpha} \deg(f, x_{\alpha}) = \text{dg } f \pmod{2}$ для неориентируемых f .

В рассматриваемом в [5; гл. IV, § 5] частном случае инварианты $\deg(f, x_{\alpha})$ называются *кратностями прообразов* точки y при отображении f .

В частности, если f симплициально, а точка y принадлежит внутренности некоторого n -мерного симплекса, то число ее прообразов конечно, и все локальные степени в ее прообразах равны ± 1 , так что $\deg f$ есть нижняя граница для числа прообразов любого n -мерного симплекса. Знак локальной степени в этом случае определяется таким же способом, как в замечании 4.11.

§ 5. Абсолютная степень Хопфа

Следуя [1], абсолютную степень собственного отображения $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ будем обозначать $\mathcal{A}(f)$. Для ее определения и анализа в [1] предложена следующая диаграмма отображений (связных) многообразий:

$$\begin{array}{ccccc} M' & \longrightarrow & \widetilde{M} & \xrightarrow{p} & M \\ f' \downarrow & & \tilde{f} \downarrow & & \bar{f} \downarrow \searrow f \\ N' & \longrightarrow & \widetilde{N} & \xrightarrow{\bar{p}} & \bar{N} \xrightarrow{\pi} N \end{array}$$

Здесь π – накрытие многообразия N , отвечающее подгруппе $f_*(\pi_1(M, x_0)) \subset \pi_1(N, f(x_0))$, $\bar{f}$ – поднятие отображения f в накрывающее пространство, p – минимальное ориентируемое накрытие многообразия M (возможно, что $\widetilde{M} = M$), $\bar{p}$ – максимальное накрытие многообразия $\bar{N}$ (кратность которого, очевидно, не может превосходить 2), в пространство которого существует поднятие $\tilde{f}$ отображения $\bar{f}p$, N' – минимальное ориентируемое накрытие $\widetilde{N}$ и M' – накрытие многообразия $\widetilde{M}$, индуцированное из N' отображением $\tilde{f}$.

Заметим, что, так как накрывающие отображения ориентируемы (следствие 2.2), отображение f тогда и только тогда ориентируемо, когда таково $\bar{f}$.

Степень $\mathcal{A}(f)$ полагается равной нулю, если кратность j накрытия π бесконечна. В этом случае, заметим, в зависимости от свойств ориентируемости f и в соответствии с теоремой 4.2 также $\deg f = 0$ или $\deg f = 0$. Поскольку в этом случае $\bar{f}(M) \neq \bar{N}$, то для неориентируемого f также и $\deg \bar{f} = 0$ (предложение 4.3).

При $j < \infty$ отображение f делятся на три типа, для каждого из которых $\mathcal{A}(f)$ определяется отдельно.

Тип I: (а) M и $\bar{N}$ ориентируемы (в этом случае $\tilde{f} = \bar{f}$ и $M \rightarrow \bar{N}$ – отображение ориентируемых многообразий); (б) M и $\bar{N}$ неориентируемы, но $\widetilde{N}$ ориентируемо (поэтому $\tilde{f}$ – отображение ориентируемых многообразий).

Для этого типа $\mathcal{A}(f) = j \cdot \deg \tilde{f}$ ($\deg \tilde{f}$ – классическая степень).

Тип II: (а) M неориентируемо, $\widetilde{N} \neq \bar{N}$ и $\widetilde{N}$ неориентируемо; (б) M ориентируемо, но $\bar{N}$ неориентируемо; (в) M неориентируемо, $\widetilde{N} \neq \bar{N}$ и $\bar{N}$ ориентируемо.

Для этого типа $\mathcal{A}(f) = 0$.

Тип III: M неориентируемо и $\widetilde{N} = \bar{N}$.

В этом случае $\mathcal{A}(f) = j$, если $\deg_{Z_2} \bar{f} \neq 0$, и $\mathcal{A}(f) = 0$, если $\deg_{Z_2} \bar{f} = 0$ (j – кратность накрытия π).

В этом описании $\mathcal{A}(f)$ пока не участвовал левый край диаграммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Совпадение $\tilde{N} = \bar{N}$ равносильно тому, что отображением $\bar{f}p$ индуцируется эпиморфизм фундаментальных групп, т.е. тому, что некоторая (а потому и любая) петля в $\bar{N}$ накрывается как петлей из M , сохраняющей локальную ориентацию M , так и петлей, обращающей такую ориентацию. Это равносильно тому, что при отображении f образ некоторой петли из M , обращающий локальную ориентацию M , стягиваем в N . В работах [4], [22] это свойство кладется в основу определения одного из классов отображений в принятой там классификации.

ТЕОРЕМА 5.2. *При $j < \infty$ ориентируемые собственные отображения многообразий – это в точности отображения типа I. Для ориентируемых отображений f (в том числе и при $j = \infty$) $\mathcal{A}(f) = |\deg f|$. Для неориентируемых отображений $\mathcal{A}(f) = 0$ при $\deg \bar{f} = 0$ и $\mathcal{A}(f) = j$ при $\deg \bar{f} = 1 \in \mathbb{Z}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Его остается провести в случае $j < \infty$.

Пусть сперва f ориентируемо. Если N ориентируемо, то ориентируемость f (и π ; см. следствие 2.2) влечет ориентируемость M и $\bar{N}$. В этом случае $\tilde{f} = \bar{f}$. В соответствии с теоремами 4.1 и 4.4

$$\deg f = \deg \pi \cdot \deg \bar{f} = j \cdot \deg \tilde{f} = \mathcal{A}(f)$$

(тип I, (a)).

Пусть N неориентируемо при ориентируемом M . В этом случае вместе с f ориентируемо также и отображение $\bar{f}$. Кроме того,

$$\bar{f}_*(\pi_1(M, x_0)) = \pi_1(\bar{N}, \bar{f}(x_0)).$$

Это означает, что (вместе с M) многообразие $\bar{N}$ ориентируемо и $\tilde{f} = \bar{f}$. Как и в предыдущем, в этом случае

$$\deg f = \deg \pi \cdot \deg \bar{f} = j \cdot \deg \tilde{f} = \mathcal{A}(f)$$

(снова тип I, (a)).

Если M и N оба неориентируемы, то неориентируемо также $\bar{N}$ (отображение $\bar{f}$ ориентируемо и индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп). В этом случае $\tilde{N} \neq \bar{N}$. В самом деле, $\tilde{f}_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(\tilde{N})$ (см. [1; п. 1.7(в)]), и при $\tilde{N} = \bar{N}$ окажется, что $\tilde{f} = \bar{f}p$ – ориентируемое отображение, индуцирующее эпиморфизм фундаментальных групп, что противоречит ориентируемости $\tilde{M}$ при неориентируемом $\bar{N}$. Таким образом, $\deg \tilde{p} = 2$. Кроме того, ориентируемость $\bar{f}$, p и $\tilde{p}$ влечет ориентируемость $\tilde{p}\tilde{f} = \bar{f}p$, а следовательно, и $\tilde{f}$ и $\tilde{N}$, а тогда и наличие инварианта $\deg \tilde{f}$. Имеем

$$\deg \bar{f}p = \deg \tilde{p}\tilde{f} = 2 \deg \bar{f} = 2 \deg \tilde{f},$$

т.е. $\deg \tilde{f} = \deg \bar{f}$. Далее,

$$\deg f = \deg \pi \cdot \deg \bar{f} = j \cdot \deg \tilde{f} = \mathcal{A}(f)$$

(тип I, (б)).

Остается рассмотреть случай, когда отображение f неориентируемо. В этом случае (см. выше) неориентируемо и $\bar{f}$. Если M ориентируемо, то эпиморфность $\bar{f}_*$ для фундаментальных групп и неориентируемость $\bar{f}$ влекут неориентируемость многообразия $\bar{N}$. В этой ситуации $\mathcal{A}(f) = 0$ (тип II, (б)). Так как $\widetilde{M} = M$, то и $\widetilde{N} = \bar{N}$. Неориентируемость $\widetilde{N}$ влечет отличие N' от $\widetilde{N}$, а поэтому и $M' \neq \widetilde{M}$. В силу [1; лемма 3.3] для типа II всегда $\deg_{Z_2} f' = 0$, а в соответствии с [1; лемма 3.2] $\deg_{Z_2} f' = \deg_{Z_2} \tilde{f}$. Так как $\tilde{f} = \bar{f}$, то $\deg_{Z_2} f' = 0$. В соответствии с теоремой 3.2 $\deg_{Z_2} \bar{f} = \text{dg } \bar{f}$. Таким образом, для типа II, (б) $\text{dg } \bar{f} = 0 = \mathcal{A}(f)$.

Если (вместе с f и $\bar{f}$) многообразие M неориентируемо, то $\widetilde{M}$ – отличное от него ориентируемое многообразие. Предположим сперва, что $\widetilde{N} \neq \bar{N}$. В соответствии с [1; п. (1.7)(в)] отображение $\tilde{f}_*$ фундаментальных групп эпиморфно, поэтому если $\tilde{f}$ – неориентируемое отображение, многообразие $\widetilde{N}$ неориентируемо. В этом случае $\mathcal{A}(f) = 0$ (тип II, (а)). Кроме того, $N' \neq \widetilde{N}$, и в силу приведенных выше аргументов $\deg_{Z_2} f' = 0$ и $\deg_{Z_2} f' = \deg_{Z_2} \tilde{f} = \deg_{Z_2} \bar{f}$ (см. [1; лемма 3.2]), т.е., как и выше, $\deg_{Z_2} \bar{f} = 0 = \text{dg } \bar{f} = \mathcal{A}(f)$.

Пусть в тех же условиях (M вместе с f и $\bar{f}$ неориентируемо, $\widetilde{N} \neq \bar{N}$) отображение $\tilde{f}$ ориентируемо. Как отмечено выше, $\tilde{f}_*$ – эпиморфизм фундаментальных групп, поэтому образ $\pi_1(\widetilde{M})$ в $\pi_1(\bar{N})$ – подгруппа индекса 2, совпадающая с образом $H = p_*(\pi_1(\widetilde{M})) \subset \pi_1(M)$ при отображении $\tilde{f}_*$. Петля γ в M , определяющая элемент из H , не изменяет ориентацию M и накрывается петлей γ' из $\widetilde{M}$, обладающей тем же свойством. Так как $\tilde{f}$ ориентируемо, образы γ' в $\widetilde{N}$ и $\bar{N}$ не изменяют локальные ориентации этих многообразий. Тем самым, аналогичным свойством в $\bar{N}$ обладает образ при отображении $\bar{f}$ петли γ указанного типа. Петли γ в M , определяющие элементы фундаментальной группы, не принадлежащие H , изменяют локальную ориентацию M . Если бы их образы в $\bar{N}$ изменяли локальную ориентацию $\bar{N}$, то отображение $\bar{f}$ было бы ориентируемым. Так как две такие петли в M отличаются на петлю, определяющую элемент подгруппы H , то образ любой петли указанного типа в $\bar{N}$ не изменяет локальную ориентацию $\bar{N}$. Это означает, что многообразие $\bar{N}$ ориентируемо. Следовательно, $\mathcal{A}(f) = 0$ (тип II, (в)). Таким же образом, как и в предыдущем случае, получаем $\text{dg } \bar{f} = 0$, т.е. $\mathcal{A}(f) = 0 = \text{dg } \bar{f}$.

Остался неучтенным случай, когда многообразие M неориентируемо и $\widetilde{N} = \bar{N}$. Но это как раз тип III. С учетом равенства $\text{dg } \bar{f} = \deg_{Z_2} \bar{f}$ определение $\mathcal{A}(f)$ и в этом случае совпадает с тем, что содержится в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Соотношение $\mathcal{A}(f) = |\deg f|$ было известно в классе отображений ориентируемых многообразий (см. [1; теорема 3.1] и [4; теорема 5.5]). С учетом теоремы 3.2 следствием теоремы 5.2 является также соотношение

$$\mathcal{A}(f) = \deg_{Z_2} f \pmod{2}$$

(см. [1; теорема 3.1]). Для неориентируемого f в соответствии с теоремой 4.1, в частности,

$$\deg_{Z_2} f = \deg_{Z_2} \pi \cdot \deg_{Z_2} \bar{f} = j \cdot \text{dg } \bar{f} \pmod{2} = \mathcal{A}(f) \pmod{2}.$$

Теорема 5.2 обеспечивает более простой подход (в частности, по сравнению с [4]) к определению $\mathcal{A}(f)$ в конкретных ситуациях, приводя в то же время к различным упрощениям при изучении ее свойств и особенностей. В качестве примера рассмотрим вопрос о том, в какой мере абсолютная степень мультипликативна по отношению к композициям отображений.

В соответствии с [22; теорема 3.5] $\mathcal{A}(gf) = \mathcal{A}(g) \cdot \mathcal{A}(f)$ для композиций собственных отображений типов I и II. Вывод делается на основе подхода к изучению абсолютной степени собственных непрерывных отображений топологических многообразий, основанного на использовании теории Нильсена корней отображения.

В соответствии с теоремой 5.2 для ориентируемых отображений это следует из теоремы 4.1. Если хотя бы одно из отображений в композиции неориентируемо (и не принадлежит к типу III), его абсолютная степень в соответствии с теоремой 5.2 равна нулю. Из совпадения абсолютной степени с геометрической нетрудно заключить, что такое отображение собственно гомотопно отображению, имеющему образ достаточно малых размеров, в результате композиция окажется не сюръективной и имеющей поэтому нулевую геометрическую, а потому и абсолютную степень (так что $\mathcal{A}(gf) = \mathcal{A}(g) \cdot \mathcal{A}(f) = 0$). Отметим, что такой же результат справедлив и в случае, если одно из отображений в композиции принадлежит типу III, но имеет абсолютную степень нуль.

В отличие от ориентируемых отображений для абсолютной степени неориентируемых отображений свойство мультипликативности, как об этом свидетельствуют примеры к теореме 4.1, как правило, нарушается.

Пусть $f: M \rightarrow N$ – неориентируемое собственное отображение и $g: L \rightarrow M$ – двукратное накрытие с ориентируемой композицией $fg: L \rightarrow N$ (см. предложение 2.3). Так как образ f_c^* принадлежит $Z_2 = H_c^n(M; f^* \mathcal{H}_n(N))$ (теорема 1.7), то оказывается нулевым отображение $(fg)_c^* = g_c^* f_c^*$. Следовательно, $\deg(fg) = A(fg) = 0$ (теорема 5.2). Так как $\mathcal{A}(g) = \deg g = 2$ (теоремы 4.4 и 5.2), то тождество $0 = \mathcal{A}(fg) = \mathcal{A}(f) \cdot \mathcal{A}(g)$ возможно лишь в том случае, если $\mathcal{A}(f) = 0$ ($\mathcal{A}(f) = 1$, например, для отображения $f: P^2 \rightarrow S^2$, отмеченного во введении). Кроме примеров к теореме 4.1, мультипликативность нарушена для композиции gf , где $g: S^2 \rightarrow S^2$ – отображение степени 2. Как показывает пример 3.2 в [22], свойство мультипликативности может нарушаться и в ситуациях, когда $\mathcal{A}(gf) \neq 0$. Более простой пример – композиция gf для отображения $g: S^2 \rightarrow S^2$ степени 3.

Список литературы

- [1] D. B. A. Epstein, “The degree of a map”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **16** (1966), 369–383.
- [2] H. Hopf, “Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten”, *Math. Ann.*, **102**:1 (1930), 562–623.
- [3] P. Olum, “Mappings of manifolds and the notion of degree”, *Ann. of Math.* (2), **58**:3 (1953), 458–480.
- [4] R. F. Brown, H. Schirmer, “Nielsen root theory and Hopf degree theory”, *Pacific J. Math.*, **198**:1 (2001), 49–80.

- [5] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976; пер. с англ.: A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **200**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [6] Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York–London–Sydney, 1966.
- [7] Е. Г. Скляренко, “Две ориентации”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 95–106; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “Two orientations”, *Math. Notes*, **83**:1–2 (2008), 88–96.
- [8] Д. Милнор, Д. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. of Math. Stud., **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [9] У. Масси, *Теория гомологий и когомологий. Подход, основанный на применении коцепей Александера–Спеньера*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: W. S. Massey, *Homology and cohomology theory. An approach based on Alexander–Spanier cochains*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **46**, Marcel Dekker, New York–Basel, 1978.
- [10] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Grad. Texts in Math., **82**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [11] Г. Э. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1967; 2d ed.: Grad. Texts in Math., **170**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [12] Е. Г. Скляренко, “К теории обобщенных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 831–843; англ. пер.: E. G. Skljarenko, “On the theory of generalized manifolds”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:4 (1971), 845–857.
- [13] Е. Г. Скляренко, “Гомологии и когомологии общих пространств”, *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНТИ, М., 1989, 129–266; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “Homology and cohomology theories of general spaces”, *General topology II*, Encyclopaedia Math. Sci., **50**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 119–246.
- [14] D. L. Gonçalves, J. Jezierski, “Lefschetz coincidence formula on non-orientable manifolds”, *Fund. Math.*, **153**:1 (1997), 1–23.
- [15] *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux*, 2e éd., Séminaire Henri Cartan, **3** (1950/51), Ecole Normale Supérieure, Paris, 1955.
- [16] Е. Г. Скляренко, “Мягкие пучки цепей для сингулярных гомологий”, *Матем. заметки*, **65**:3 (1999), 396–401; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “Flabby sheaves of chains for singular homology”, *Math. Notes*, **65**:3 (1999), 331–334.
- [17] *Topologie algébrique*, Séminaire Henri Cartan, **1** (1948/49), Ecole Normale Supérieure, Paris, 1949.
- [18] Н. Бурбаки, *Общая топология, основные структуры*, Наука, М., 1968; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Première partie. (Fascicule II.) Livre III: Topologie générale. Ch. 1: Structures topologiques. Ch. 2: Structures uniformes*, Hermann, Paris, 1961.
- [19] А. Э. Харлап, “Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия”, *Матем. сб.*, **96(138)**:3 (1975), 347–373; англ. пер.: A. È. Harlap, “Local homology and cohomology, homology dimension and generalized manifolds”, *Math. USSR-Sb.*, **25**:3 (1975), 323–349.
- [20] Д. Роте, “Периферическая когомологическая локальная связность”, *Fund. Math.*, **116**:1 (1983), 53–66.
- [21] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956; пер. с фр.: G. de Rham, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955.

- [22] R. B. S. Brooks, R. F. Brown, H. Schirmer, “The absolute degree and the Nielsen root number of compositions and Cartesian products of maps”, *Topology Appl.*, **116**:1 (2001), 5–27.
- [23] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, М., 1961; пер. с фр.: R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [24] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965; рус. пер.: Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс*, Мир, М., 1972.
- [25] Дж. Шварц, *Дифференциальная геометрия и топология*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: J. T. Schwartz, *Differential geometry and topology*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1968.
- [26] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [27] Е. Г. Скляренко, “Теория гомологий и аксиома точности”, *УМН*, **24**:5 (1969), 87–140; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “Homology theory and the exactness axiom”, *Russian Math. Surveys*, **24**:5 (1969), 91–142.
- [28] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1966.
- [29] Е. Г. Скляренко, “О природе гомологических умножений и двойственности”, *УМН*, **49**:1 (1994), 141–198; англ. пер.: E. G. Sklyarenko, “On the nature of homological products and duality”, *Russian Math. Surveys*, **49**:1 (1994), 151–215.

Е. Г. Скляренко (E. G. Sklyarenko)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: egskl@higeom.math.msu.su

Поступила в редакцию

08.10.2007