Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Карасёв, Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 41–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:42:54

УДК 514.174

Р. Н. Карасёв

Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения

Доказаны аналоги теорем о центральной точке, центральной трансверсали, а также теоремы Тверберга, в которых вместо множеств точек рассматриваются множества гиперплоскостей или плоскостей заданной размерности.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Сформулируем классические теоремы комбинаторной и выпуклой геометрии, обобщения и аналоги которых будут доказаны в настоящей работе.

Первое утверждение – это теорема Неймана–Радо [1]–[3] (см. также обзор [4] или книгу [5]) о центральной точке меры.

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТОЧКЕ. *Для абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ найдется такая точка $x \in \mathbb{R}^d$, что для всякого полупространства $H \ni x$ имеет место неравенство $\mu(H) \geq 1/(d+1)$.*

Сформулируем также дискретный аналог этой теоремы. Здесь и далее через $[x]$ обозначим целую часть числа x .

ДИСКРЕТНАЯ ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТОЧКЕ. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано конечное множество X , состоящее из n точек. Тогда найдется точка $x \in \mathbb{R}^d$ такая, что для всякой полуплоскости $H \ni x$ имеет место неравенство*

$$|H \cap X| \geq \left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor.$$

Обобщение этой теоремы доказано Твербергом [6].

ТЕОРЕМА ТВЕРБЕРГА. *Пусть конечное множество $X \in \mathbb{R}^d$ состоит из $(d+1)(n-1)+1$ точки. Тогда X можно разбить на n множеств $X_1, \dots, X_n$, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

В работах [7]–[9] теорема о центральной точке была обобщена на случай нескольких мер.

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРАНСВЕРСАЛИ. *Пусть на $\mathbb{R}^d$ задана $m+1$ абсолютно непрерывная вероятностная мера $\mu_0, \dots, \mu_m$. Тогда найдется m -плоскость $L \in \mathbb{R}^d$ такая, что для всякого полупространства $H \supseteq L$ и всякого $i = 0, \dots, m$ имеет место оценка*

$$\mu_i(H) \geq \frac{1}{d-m+1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00648) и грантов Президента РФ МК-5724.2006.1 и МК-1005.2008.1.

Кроме того, в работе [10] с помощью топологической техники доказан следующий аналог теоремы Тверберга.

ЦВЕТНАЯ ТЕОРЕМА ТВЕРБЕРГА. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано множество, состоящее из $(d+1)t$ точек, где $t \geq 2r-1$, $r = p^k$, p – простое число. Пусть эти точки разбиты на $d+1$ множество (цвет) по t элементов в каждом.

Тогда из данных точек можно выбрать r непересекающихся наборов $X_1, \dots, X_r$ так, что выполнены следующие условия: для любого $i = 1, \dots, r$ верно, что $|X_i| = d+1$ и в X_i присутствуют все цвета. Кроме того,

$$\bigcap_{i=1}^r \text{conv } X_i \neq \emptyset.$$

При доказательстве теоремы о центральной трансверсали и цветной теоремы Тверберга авторы вышеуказанных работ существенно использовали топологические методы, связанные с вычислением топологических препятствий. В настоящей работе используются аналогичные топологические методы.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В § 2 даны формулировки основных результатов. В §§ 3, 4 приведены определения из теории меры, доказаны свойства центральных точек мер. В § 5 сформулированы обобщения теоремы Брауэра о неподвижной точке для семейств послонных отображений векторного расслоения. В §§ 6, 7 эти результаты доказаны. В §§ 8, 9 доказаны аналогии теорем о центральной точке и центральной трансверсали. В §§ 10–12 доказаны аналогии теоремы Тверберга. В § 13 сформулированы некоторые гипотезы, имеющие отношение к результатам работы.

§ 2. Основные результаты

В настоящей работе будут доказаны результаты, в формулировках которых вместо точек участвуют гиперплоскости и вместо мер на множестве точек – меры на множестве гиперплоскостей или плоскостей некоторой данной размерности. Их формулировки близки к теоремам о центральной точке, центральной трансверсали и теореме Тверберга, но они не являются простыми следствиями применения полярного преобразования к указанным выше теоремам. Это можно объяснить следующим образом: применив полярное преобразование с центром в нуле к конфигурациям в этих теоремах и применив соответствующую известную теорему, обратное преобразование придется применять уже с другим центром, найденным по соответствующей теореме. При этом исходная конфигурация не восстановится.

Доказательства в этой работе основаны на вычислении некоторых топологических препятствий в виде класса Эйлера и выводе из наличия препятствий соответствующих теорем существования.

Сначала сформулируем двойственную теорему о центральной точке конечного множества.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство $\mathcal{F}$ из n гиперплоскостей общего положения. Тогда найдется точка x такая, что всякий проходящий через нее луч пересекает как минимум $\lfloor (n+d)/(d+1) \rfloor$ гиперплоскостей из $\mathcal{F}$.

В настоящей работе общим положением семейства гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ называется такое их положение, когда любые d гиперплоскости имеют ровно одну общую точку, а любые $d + 1$ не имеют общей точки.

Также можно сформулировать двойственную теорему о центральной точке для мер. Сначала введем некоторые определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество k -плоскостей в $\mathbb{R}^d$ отождествим с каноническим расслоением $\gamma_d^{d-k} \rightarrow G_d^{d-k}$ над пространством Грассмана следующим образом. Всякой k -плоскости L сопоставим ортогональное ей $(d - k)$ -мерное линейное подпространство V и единственную точку $V \cap L \in V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество k -плоскостей, пересекающих данное множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$, обозначим через $I(X, k)$.

Сформулируем двойственную теорему о центральной точке для мер.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на многообразии гиперплоскостей γ_d^1 задана абсолютно непрерывная вероятностная мера μ с компактным носителем. Тогда найдется точка x такая, что для всякого луча r с началом в x

$$\mu(I(r, d - 1)) \geq \frac{1}{d + 1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем k -полуплоскостью в $\mathbb{R}^d$ непустое собственное подмножество некоторой k -плоскости L , выделяемое некоторым линейным неравенством $l(x) \geq 0$. При этом $(k - 1)$ -плоскость $\{x \in L : l(x) = 0\}$ называется краем полуплоскости.

Сформулируем также теорему, двойственную для теоремы о центральной трансверсали.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на множестве γ_d^{d-k} задано $d - k$ абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_{d-k}$ с компактными носителями. Тогда найдется $(d - k - 1)$ -плоскость L такая, что для всякой $(d - k)$ -полуплоскости M с краем L и любого $i = 1, \dots, d - k$

$$\mu_i(I(M, k)) \geq \frac{1}{k + 2}.$$

Из теоремы 1 выводится двойственная теорема Тверберга на плоскости.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть на плоскости дано семейство из $3n$ прямых общего положения. Тогда их можно разбить на тройки так, что все треугольники, образованные тройками, имеют общую точку.

Сформулируем двойственную теорему Тверберга для произвольной размерности. Для этого введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что $d + 1$ гиперплоскость $h_1, \dots, h_{d+1}$ общего положения в $\mathbb{R}^d$ образует симплекс S , если S является выпуклой оболочкой множества точек $\{x_i\}$, определяемых как

$$x_i = \bigcap_{j \neq i} h_j.$$

Очевидно, что каждая гипергрань S лежит на соответствующей гиперплоскости h_i .

ГИПОТЕЗА 1 (двойственная теорема Тверберга). Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения. Тогда их можно разбить на наборы из $d+1$ гиперплоскости так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую точку.

В настоящей работе доказан частный случай этой гипотезы с помощью топологических методов. Как и в случае доказательства топологического аналога теоремы Тверберга в [11], на n наложено ограничение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения, причем $n = p^k$, где p – простое число.

Тогда эти плоскости можно разбить на n непересекающихся наборов из $d+1$ плоскости так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую внутреннюю точку.

Также будет доказана двойственная версия цветной теоремы Тверберга.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)t$ гиперплоскостей общего положения, где $t \geq 2r - 1$, $r = p^k$, p – простое число. Пусть эти гиперплоскости разбиты на $d+1$ семейство (цвет) по t элементов в каждом.

Тогда из данных плоскостей можно выбрать r непересекающихся наборов из $d+1$ плоскости так, что все симплексы, образованные этими наборами, имеют общую внутреннюю точку и каждый набор разноцветный, т.е. не содержит пары одноцветных плоскостей.

§ 3. Некоторые свойства мер

По теореме Радона–Никодима (см. [12]) абсолютно непрерывные меры в $\mathbb{R}^d$ задаются функцией плотности класса L_1 . Для многообразий будем рассматривать такие меры, которые в каждой локальной системе координат задаются плотностью класса L_1 .

Далее в настоящей работе будут рассматриваться только абсолютно непрерывные меры на многообразии, для которых мера всего многообразия конечна. В основном будут рассматриваться вероятностные меры, для которых мера всего многообразия равна единице.

В этом параграфе будет дано несколько определений и доказано несколько технических лемм о мерах. В некоторых случаях терминология будет отличаться от стандартной. Далее будем обозначать через $\text{bd } X$ и $\text{cl } X$ границу и замыкание множества $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть P – некоторое топологическое пространство. Будем говорить, что мера μ_p на многообразии непрерывно зависит от параметра $p \in P$, если для всякого открытого множества U число $\mu_p(U)$ непрерывно зависит от p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Носителем меры μ на многообразии X назовем множество

$$\text{supp } \mu = \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ для любой окрестности } U \ni x\}.$$

Носитель меры, очевидно, замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для всякого локально тривиального расслоения многообразий $f: X \rightarrow Y$ мера μ с компактным носителем на X определяет *проекцию меры* $f_*\mu$ на Y по формуле

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

ЛЕММА 1. Мера $f_*\mu$ локально задается функцией класса L_1 , и если μ_p непрерывно зависит от p , то $f_*\mu_p$ также непрерывно зависит от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из теоремы Фубини [12], второе выполняется по определению непрерывности.

Докажем леммы о проекции меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. На множестве отображений многообразий $f: X \rightarrow Y$ определим *компактно-открытую топологию* следующим образом: базой открытых множеств назовем множества

$$U_{K,V} = \{f: X \rightarrow Y : f(K) \subseteq V\}$$

для всякого компакта $K \subseteq X$ и открытого множества $V \subseteq Y$.

ЛЕММА 2. Пусть есть семейство отображений многообразий $f_p: X \rightarrow Y$, непрерывно зависящих от параметра. Пусть каждое f_p является локально тривиальными расслоением.

Тогда для всякой меры μ с компактным носителем на X меры $f_{p*}\mu$ непрерывно зависят от $p \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C = \text{supp } \mu$. Тогда для всякого параметра q можно взять относительно компактную окрестность $V \supseteq f_q(C)$ и по определению компактно-открытой топологии найдется такая окрестность множества параметров $U \ni q$, что $f_p(C) \subseteq V$. Следовательно, можно считать, что носители проекций мер лежат в одном и том же компакте.

Возьмем некоторое открытое множество $W \subseteq Y$ и докажем, что $\mu(f_p^{-1}(W))$ непрерывно зависит от p в точке q . Согласно сказанному выше можно считать, что W относительно компактно. Возьмем $W' = f_q^{-1}(W)$ и найдем такой компакт C_1 и такое открытое множество C_2 , что $C_1 \subseteq W' \subseteq \text{cl } W' \subseteq C_2 \cap C \subseteq C$ и

$$|\mu(C_1) - \mu(W')| < \varepsilon, \quad |\mu(C_2) - \mu(W')| < \varepsilon.$$

Это можно сделать, так как мера μ задается функцией класса L_1 .

Тогда $f_p(C_1) \subseteq W$ и $f_p(C \setminus C_2) \cap \text{cl } W = \emptyset$ для p из некоторой окрестности q по определению компактно-открытой топологии. Но тогда и множества $f_p^{-1}(W)$ заключены между C_1 и C_2 . Следовательно, их меры отличаются от $\mu(W')$ не более чем на ε .

Усилим предыдущую лемму на случай, когда отображения почти всюду являются локально тривиальными расслоениями, непрерывно зависящими от параметра.

ЛЕММА 3. Пусть задано семейство отображений $f_p: X \setminus S_p \rightarrow Y$, где S_p – некоторые замкнутые множества, зависящие от параметра, а множество параметров – это некоторое топологическое пространство P . Предположим,

что каждое f_p является локально тривиальным расслоением на своем множестве определения. Пусть задана мера μ с компактным носителем на X и для всякой $q \in P$ для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \ni q$ такая, что

$$\mu\left(\bigcup_{p \in U} S_p\right) < \varepsilon.$$

Пусть также f_p , ограниченное на $X \setminus \bigcup_{p \in U} S_p$, непрерывно зависит от $p \in U$. Тогда меры $f_{p*}\mu$ непрерывно зависят от $p \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой $q \in P$ удалим $\bigcup_{p \in U} S_p$ из X и воспользуемся леммой 2. Далее заметим, что получившиеся меры отличаются от исходной не более чем на ε , и получим требуемое утверждение предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Меру назовем *связной*, если ее носитель связан.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Меру μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$ назовем *1-выпуклой*, если носитель ее проекции на любую прямую связан.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Полосой* в $\mathbb{R}^d$ назовем пространство между двумя параллельными гиперплоскостями, включающее в себя также и эти гиперплоскости. *Толщиной* *полосы* назовем расстояние между гиперплоскостями.

Докажем леммы о мерах полос и полупространств.

ЛЕММА 4. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство вероятностных мер $\{\mu_p\}_{p \in P}$, непрерывно параметризуемых компактом P . Пусть носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой полосы L толщины меньше δ и любого $p \in P$

$$\mu_p(L) < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все носители мер лежат в множестве S .

Предположим противное. Тогда найдется последовательность полос L_i и значений параметра p_i таких, что толщина полос стремится к нулю, а их меры $\mu_{p_i}(L_i) > \varepsilon$. Так как все полосы задевают S , то их множество компактно, т.е. можно считать, что они приближаются к некоторой гиперплоскости H . Параметры p_i также можно считать стремящимися к некоторому p . Возьмем теперь такое δ , чтобы мера $\mu_p(H + B_\delta)$ (δ -окрестности H) была меньше $\varepsilon/2$. Множества $L_i \cap S$ при достаточно большом i лежат в $H + B_\delta$, а меры $\mu_{p_i}(H + B_\delta)$ стремятся к числу, меньшему $\varepsilon/2$, что приводит к противоречию.

ЛЕММА 5. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задано семейство вероятностных мер $\{\mu_p\}_{p \in P}$, непрерывно зависящих от параметра $p \in P$. Пусть носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда мера полупространства $\mu_p(H)$ непрерывно зависит от пары (p, H) .

Любое полупространство можно задать соотношением $(n, x) \geq c$, где $n \in S^{d-1}$, $c \in \mathbb{R}$. Далее будем считать, что полупространства параметризуются множеством $S^{d-1} \times \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все носители мер лежат в множестве S .

Рассмотрим последовательность полупространств $H_i \rightarrow H$ и значений параметра $p_i \rightarrow p$. Пусть H задается неравенством

$$(n, x) \geq c.$$

Положим

$$H_\delta^- = \{x \in \mathbb{R}^d : (n, x) \geq c + \delta\}, \quad H_\delta^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : (n, x) \geq c - \delta\}.$$

При достаточно малом δ меры $\mu_p(H_\delta^+)$, $\mu_p(H_\delta^-)$ и $\mu_p(H)$ отличаются не более чем на ε . Более того, начиная с некоторого значения индекса i будем иметь

$$S \cap H_\delta^- \subseteq S \cap H_i \subseteq S \cap H_\delta^+.$$

Также при достаточно больших i разности

$$\mu_{p_i}(H) - \mu_p(H), \quad \mu_{p_i}(H_\delta^-) - \mu_p(H_\delta^-), \quad \mu_{p_i}(H_\delta^+) - \mu_p(H_\delta^+)$$

не превосходят по модулю ε . Отсюда следует, что меры $\mu_{p_i}(H_i)$ отличаются от $\mu_p(H)$ не более чем на 2ε для достаточно больших i .

ЛЕММА 6. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задано семейство вероятностных мер $\{\mu_p\}_{p \in P}$, непрерывно зависящих от параметра $p \in P$. Пусть носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда функция

$$f_p(y) = \min_{H \ni y} \mu_p(H)$$

непрерывно зависит от p и y (минимум берется по полупространствам).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что в приведенной выше формуле можно считать, что H содержит y на своей границе. Тогда H в определении функции можно параметризовать компактом $(d-1)$ -мерной сферой.

Остается заметить, что по лемме 5 выражение под знаком минимума непрерывно на $P \times \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$, а минимум берется по компакту S^{d-1} . Следовательно, и результат непрерывен.

§ 4. Центральные точки мер

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Точка x называется *центральной точкой меры* μ в $\mathbb{R}^d$, если для любого полупространства $H \ni x$ выполнено неравенство

$$\mu(H) \geq \frac{\mu(\mathbb{R}^d)}{d+1}.$$

Обозначим множество центральных точек μ через $\text{cent } \mu$.

Докажем лемму о структуре множества центральных точек меры с компактным носителем. Оно непусто в силу теоремы о центральной точке из [1], [2]. Для определенности меры будем считать вероятностными.

ЛЕММА 7. Пусть μ – вероятностная мера с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\text{cent } \mu$ – это либо выпуклое тело с непустой внутренностью, либо одна точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\text{cent } \mu = \bigcap \left\{ H : H \text{ – полупространство и } \mu(H) \geq \frac{d}{d+1} \right\}.$$

Отсюда ясно, что $\text{cent } \mu$ – выпуклый компакт. Назовем полупространство H *плохим*, если $\mu(H) \leq 1/(d+1)$.

Всякая точка $y \notin \text{cent } \mu$ лежит внутри некоторого плохого полупространства. Устремляя точку y к некоторой точке $x \in \text{bd}(\text{cent } \mu)$, из компактности множества нормалей полупространств и леммы 5 получим, что x также лежит в некотором плохом полупространстве.

Предположим, что внутренность $\text{cent } \mu$ пуста и $\text{cent } \mu$ не является одной точкой. Обозначим аффинную оболочку $\text{cent } \mu$ через L . Из предыдущего абзаца ясно, что $\mathbb{R}^d$ покрыто плохими полупространствами, край которых содержит L . Обозначим их семейство через $\mathcal{H}$.

Рассмотрим факторпространство $\mathbb{R}^d/L$ и проекцию меры μ на него. Возьмем

$$\varepsilon < \frac{1}{d(d+1)}$$

и δ из леммы 4. Теперь рассмотрим проекции на $\mathbb{R}^d/L$ дополнений δ -окрестностей полупространств $\mathcal{H}$. Пусть они образуют семейство замкнутых полупространств $\mathcal{G}$. Так как они имеют пустое пересечение, то некоторые d из них имеют пустое пересечение по теореме Хелли. Рассмотрев соответствующие им плохие полупространства, найдем, что $\mathbb{R}^d$ покрыто ими с точностью до d полос толщины δ . Но это невозможно, так как тогда

$$\mu(\mathbb{R}^d) < \frac{d}{d+1} + d\varepsilon < 1.$$

Получаем противоречие. Лемма доказана.

Докажем два утверждения о непрерывности $\text{cent } \mu$ в зависимости от μ . Обозначим открытый шар радиуса ε с центром в начале координат через D_ε , а замкнутый – через B_ε . Обозначим также ε -окрестность $X \subseteq \mathbb{R}^d$ через $X + D_\varepsilon$, т.е.

$$X + D_\varepsilon = \{x + y : x \in X, y \in D_\varepsilon\}.$$

ЛЕММА 8. Пусть семейство 1-выпуклых вероятностных мер с компактными носителями μ_p в $\mathbb{R}^d$ непрерывно зависит от параметра $p \in P$ и все носители мер не выходят за пределы фиксированного компакта. Тогда для любого $q \in P$ и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \ni q$ такая, что если $p \in U$, то $\text{cent } \mu_p \subseteq \text{cent } \mu_q + D_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{cent } \mu_q = C$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда для всякой точки $y \notin C + D_\varepsilon$ найдется полупространство H такое, что $H \cap C = \emptyset$, $y \in \text{int } H$ и $\mu_q(H) = 1/(d+1)$. Из 1-выпуклости меры следует, что можно считать, что $\mu_q(H) < 1/(d+1)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f_q(y)$ из леммы 6.

Заметим, что $f_q(y) < 1/(d+1)$ на $\mathbb{R}^d \setminus C + D_\varepsilon$. Так как $f_q(y) = 0$ за пределами выпуклой оболочки носителя μ_q и эта функция непрерывно зависит от точки y , то она достигает максимума на $\mathbb{R}^d \setminus C + D_\varepsilon$ и этот максимум меньше чем $1/(d+1)$. Следовательно, неравенство $f_p(y) < 1/(d+1)$ сохранится для $y \in \mathbb{R}^d \setminus C + D_\varepsilon$ в некоторой окрестности точки q в множестве параметров.

ЛЕММА 9. Пусть семейство 1-выпуклых вероятностных мер с компактными носителями μ_p в $\mathbb{R}^d$ непрерывно зависит от параметра $p \in P$ и все носители мер не выходят за пределы фиксированного компакта. Тогда для любого параметра $q \in P$ и любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \ni q$ такая, что если $p \in U$, то $\text{cent } \mu_p + D_\varepsilon \supseteq \text{cent } \mu_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C = \text{cent } \mu_q$ — одна точка, то лемма 9 следует из леммы 8. Если $C = \text{cent } \mu_q$ состоит более чем из одной точки, то C имеет непустую внутренность.

Рассмотрим выпуклое множество $C' \subset \text{int } C$ такое, что $C' + D_\varepsilon \supseteq C$, а также функцию $f_q(y)$, непрерывную по лемме 6. Из 1-выпуклости мер на C' следует, что f_q строго больше чем $1/(d+1)$. Следовательно, для некоторой окрестности $U \ni q$ при $p \in U$ это соотношение сохранится и $C' \subseteq \text{cent } \mu_p$ для $p \in U$.

Итак, доказано, что множество центральных точек непрерывно зависит от вероятностной меры в метрике Хаусдорфа, если носители всех мер содержатся в одном и том же компакте и все меры 1-выпуклы.

§ 5. Теоремы о неподвижной точке на расслоениях

Будем использовать обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке, в котором фигурируют несколько послойных отображений пространства шаров векторного расслоения. Будем также считать, что во всяком векторном расслоении η введено евклидово скалярное произведение на слоях, непрерывно зависящее от слоя. Пространства единичных сфер и шаров расслоения обозначим через $S(\eta)$ и $B(\eta)$ соответственно. Когомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть дано векторное расслоение $\eta \rightarrow X$ и число $k \geq 1$, причем для старшего класса Штиффеля–Уитни $w(\eta) \in H^*(X)$ выполняется

$$w(\eta)^k \neq 0.$$

Пусть дано $k+1$ послойное непрерывное отображение $f_i: B(\eta) \rightarrow B(\eta)$, $i = 1, \dots, k+1$. Тогда найдется точка $x \in B(\eta)$, для которой

$$x = f_1(x) = \dots = f_{k+1}(x).$$

Сформулируем также вариант этой теоремы, более удобный для практического использования.

ТЕОРЕМА 7. Пусть дано векторное расслоение $\eta \rightarrow X$ и число $k \geq 1$, причем для старшего класса Штиффеля–Уитни $w(\eta) \in H^*(X)$ выполняется

$$w(\eta)^k \neq 0.$$

Пусть даны $k + 1$ послойное непрерывное отображение $f_i: \eta \rightarrow \eta$, $i = 1, \dots, k + 1$, и число $M \in \mathbb{R}$ такие, что для векторов $x \in \eta$, у которых $|x| \geq M$, выполняется неравенство

$$(x, f_1(x) - x) < 0.$$

Тогда найдется точка $x \in \eta$, для которой

$$x = f_1(x) = \dots = f_{k+1}(x).$$

Заметим, что в этой теореме только одно отображение должно удовлетворять условиям, гарантирующим для него неподвижную точку в каждом слое. Остальные вообще могут быть любыми послойными непрерывными отображениями.

Если множество X состоит из одной точки, то из теорем 6 и 7 получаются варианты обычной теоремы о неподвижной точке.

Далее теорема 7 будет применяться к пространству γ_d^k , поэтому нам понадобится следующее утверждение из [8], [9], [13].

ТЕОРЕМА 8. В расслоении $\gamma_d^k \rightarrow G_d^k$ для старшего класса Штиффеля–Уитни $w = w(\gamma_d^k) \in H^*(G_d^k, \mathbb{Z}_2)$ имеет место соотношение $w^{d-k} \neq 0$.

§ 6. Относительный класс Эйлера

Для доказательства теоремы 6 необходимо дать определение класса Эйлера в относительных когомологиях. Общие сведения о топологии векторных расслоений см. в [14], [15]. Понятие относительного характеристического класса введено в [16], но нам нужны некоторые специфические свойства относительного класса Эйлера, которые приводятся в этом параграфе. Далее, если не оговорено иначе, для ориентируемых расслоений рассматриваются когомологии с целыми коэффициентами; если же расслоение может быть неориентируемым, то рассматриваются когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Рассмотрим пару пространств $Y \subseteq X$ и m -мерное векторное расслоение $\eta \rightarrow X$. Пусть также задано сечение s расслоения η над Y , не обращающееся в нуль. Назовем такую конструкцию (η, s) *частичным сечением*.

В некоторых случаях будем считать, что сечение s некоторым образом продолжено на все пространство X . Естественно, в этом случае оно может обращаться в нуль на $X \setminus Y$. Очевидно, все такие продолжения гомотопны между собой.

Нетрудно понять, что частичные сечения над парой (X, Y) гомотопически классифицируются отображениями пары (X, Y) в пару $(BO(m), BO(m - 1))$, или $(BSO(m), BSO(m - 1))$ для ориентируемых расслоений.

Пару $(BO(m), BO(m - 1))$ можно описать следующим образом. Рассмотрим каноническое m -мерное векторное расслоение $\gamma \rightarrow BO(m)$. Тогда пара $(B(\gamma), S(\gamma))$ является одной из возможных реализаций $(BO(m), BO(m - 1))$. Согласно изоморфизму Тома существует $u \in H^m(BO(m), BO(m - 1))$ такой,

что умножение элементов $H^*(BO(m))$ на u дает изоморфизм когомологий с коэффициентами в Z_2 , т.е.

$$H^*(BO(m), BO(m-1)) = uH^*(BO(m)).$$

Такая же ситуация имеет место для пары $(BSO(m), BSO(m-1))$ и когомологий с целыми коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Образ класса Тома

$$u \in H^m(BO(m), BO(m-1), Z_2)$$

в $H^m(X, Y, Z_2)$ будем называть *классом Эйлера по модулю два частичного сечения*. В ориентируемом случае образ класса Тома

$$u \in H^m(BSO(m), BSO(m-1), \mathbb{Z})$$

в $H^m(X, Y, \mathbb{Z})$ будем называть *классом Эйлера частичного сечения*. Обозначим класс Эйлера частичного сечения через $e(\eta, s)$.

Обозначим через pt пространство, состоящее из одной точки, и сформулируем лемму, сразу следующую из определений классов Тома и Эйлера.

ЛЕММА 10. Для пары пространств $(X \sqcup pt, pt)$ относительный класс Эйлера совпадает с обычным классом Эйлера или со старшим классом Штиффеля–Уитни (в неориентируемом случае).

Из определения ясно, что класс Эйлера является первым препятствием (возможно, по модулю два) к продолжению частичного ненулевого сечения до полного.

Введем операцию суммы для частичных сечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть над (X_1, Y_1) задано частичное сечение (η_1, s_1) , а над (X_2, Y_2) задано частичное сечение (η_2, s_2) . Будем считать сечения s_i продолженными на X_i , $i = 1, 2$. Тогда в произведении расслоений $\eta_1 \times \eta_2$ сечение $s_1 + s_2$ дает частичное сечение над парой $(X_1 \times X_2, (X_1 \times Y_2) \cup (Y_1 \times X_2))$. Назовем эту операцию *суммой частичных сечений*.

ЛЕММА 11. Для суммы частичных сечений имеет место формула

$$e(\eta_1 \times \eta_2, s_1 + s_2) = e(\eta_1, s_1) \times e(\eta_2, s_2).$$

Лемма следует из рассмотрения классифицирующих пространств и мультипликативности класса Тома. В частности, для прямой суммы расслоений над одним и тем же пространством справедлива следующая

ЛЕММА 12. Для прямой суммы частичных сечений (η_1, s_1) над (X, Y_1) и (η_2, s_2) над (X, Y_2)

$$e(\eta_1 \oplus \eta_2, s_1 \oplus s_2) = e(\eta_1, s_1)e(\eta_2, s_2) \in H^*(X, Y_1 \cup Y_2).$$

§ 7. Доказательство теорем о неподвижной точке

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Заметим, что достаточно доказать теорему для компактного пространства X , так как если $w(\eta)^k \neq 0$ в когомологиях X , то этот класс не равен нулю и в когомологиях некоторого компактного подпространства X .

Заменим в каждом слое отображения f_i , $i = 1, \dots, k+1$, на их композиции с гомотетиями с коэффициентом $(1 - \varepsilon)$. Если для новых отображений при любом $\varepsilon > 0$ теорема верна, то из соображений компактности она верна и для исходных отображений. Так что далее считаем, что

$$f_i: B(\eta) \rightarrow B(\eta) \setminus S(\eta).$$

Теперь возьмем расслоение η' , индуцированное из η над $B(\eta)$ проекцией на X . Отображение $s_1: B(\eta) \rightarrow \eta'$, заданное формулой $s_1: x \mapsto x - f_1(x)$, дает частичное сечение (η', s_1) над $(B(\eta), S(\eta))$, которое гомотопически эквивалентно стандартному частичному сечению (η', s_0) , где $s_0: x \mapsto x$. Следовательно, класс $e(\eta', s_1)$, как и $e(\eta', s_0)$, равен классу Тома $u(\eta) \in H^*(B(\eta), S(\eta))$, что следует прямо из определения класса Эйлера частичного сечения и приведенной выше явной конструкции пары $(BO(m), BO(m-1))$.

Далее по лемме 11 и изоморфизму Тома получаем, что

$$e(\eta' \oplus \eta'^k, s_1 \oplus 0) = u(\eta)w(\eta')^k \neq 0.$$

Значит, сечение $s_1 \oplus 0$ нельзя продолжить до ненулевого сечения расслоения $\eta' \oplus \eta'^k$ над $B(\eta)$.

Рассмотрим также сечения s_i , $i = 2, \dots, k+1$, расслоения η' над $B(\eta)$, определяемые по формуле

$$s_i: x \mapsto f_i(x) - f_1(x).$$

Сечение $s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_{k+1}$ гомотопно над $S(\eta)$ сечению $s_1 \oplus 0$ (например, можно рассмотреть гомотопию $s_1 \oplus ts_2 \oplus \dots \oplus ts_{k+1}$ при $t \in [0, 1]$). Следовательно, его тоже нельзя продолжить до ненулевого сечения η'^{k+1} над $B(\eta)$. Итак, в некоторой точке $x \in B(\eta)$

$$x = f_1(x) = \dots = f_{k+1}(x),$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. В доказательстве этой теоремы рассмотрим шары в расслоении η радиуса M ; далее доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Почти все приведенные выше рассуждения применимы и в этом случае, так как в них нигде не используется тот факт, что образ f_i лежит в $B(\eta)$, а не просто в η . Исключением является лишь один момент в доказательстве, где надо доказать, что сечение $s_1: x \mapsto x - f_1(x)$ гомотопически эквивалентно стандартному частичному сечению $s_0: x \mapsto x$. Однако в условиях теоремы сечения можно просто соединить гомотопией $(1-t)s_0 + ts_1$, которая не обращает сечения в нуль над $S(\eta)$.

§ 8. Лемма, необходимая для доказательства теоремы 1

Сформулируем лемму, которая одновременно обобщает дискретную теорему о центральной точке и теорему Брауэра о неподвижной точке отображения. Обозначим множество индексов

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

ЛЕММА 13. Пусть в выпуклом компактном теле $B \subset \mathbb{R}^d$ заданы n отображений $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}^d$, $i \in [n]$. Обозначим

$$l = \left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor.$$

Пусть для всякой точки $x \in B$ не более $l-1$ из точек $f_i(x)$ лежат за пределами B . Тогда найдется точка $x \in B$ такая, что всякое полупространство $H \ni x$ содержит не менее l точек $\{f_i(x)\}_{i \in [n]}$.

Иначе говоря, x является центральной точкой множества $\{f_i(x)\}_{i \in [n]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $I \subseteq [n]$ обозначим

$$f_I(x) = \{f_i(x) : i \in I\}.$$

Как и в стандартном доказательстве теоремы о неподвижной точке, нужно найти такое x , что

$$x \in \bigcap_{I \subseteq [n], |I|=n-l+1} \text{conv } f_I(x).$$

Пересечение справа непусто по теореме Хелли и лежит в B по условию. Если бы это пересечение было непрерывной функцией от x в метрике Хаусдорфа, то можно было бы выбрать непрерывную функцию

$$x \mapsto g(x) \in \bigcap_{I \subseteq [n], |I|=n-l+1} \text{conv } f_I(x).$$

Тогда существование точки x , требуемой в лемме, следовало бы из стандартной теоремы о неподвижной точке. Однако непрерывности в метрике Хаусдорфа может и не быть. В этом случае необходимы уточнения.

Рассмотрим множества

$$C_I(x) = \text{conv } f_I(x) + B_\varepsilon.$$

Они непрерывно зависят от x в метрике Хаусдорфа. Пересечение

$$C(x) = \bigcap_{I \subseteq [n], |I|=n-l+1} C_I(x) \cap B$$

имеет непустую внутренность и, следовательно, непрерывно зависит от x в метрике Хаусдорфа (см., например, [17]).

Таким образом, по теореме о неподвижной точке для многозначных отображений найдется $x \in B$ такое, что $x \in C(x)$. Устремляя ε к нулю и используя соображения компактности, получаем точку

$$x \in \bigcap_{I \subseteq [n], |I|=n-l+1} \text{conv } f_I(x),$$

что и требовалось.

§ 9. Доказательства теорем о центральной точке

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathcal{F} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Для всякого $i \in [n]$ определим отображения $f_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ как ортогональные проекции точки x на h_i .

Будем рассматривать случай $n \geq d + 1$, так как иначе теорема очевидна – можно просто выбрать точку на одной из гиперплоскостей. Введем множество прямых $\mathcal{L}$, образованных пересечениями гиперплоскостей $\mathcal{F}$ по $d - 1$ гиперплоскости. Множество непараллельных единичных направляющих векторов $\mathcal{L}$ обозначим через $E = \{e_1, e_1, \dots, e_m\}$. Ясно, что если $n \geq d + 1$, то линейная оболочка E совпадает с $\mathbb{R}^d$.

Теперь рассмотрим множество

$$B_R = \{x : |(x, e_i)| \leq R \forall i \in [m]\}.$$

Покажем, что при достаточно большом R отображения f_i переводят B_R в себя. Обозначим

$$m = \max |(e_j, e)|,$$

где максимум берется по парам $e_j, j \in [m]$, и единичным векторам e , параллельным плоскости $h_i, i \in [n]$, таким, что h_i не содержит прямой из $\mathcal{L}$ с направляющим вектором e_j . Из общего положения $\mathcal{F}$ получаем, что $m < 1$. Положим также

$$D = \max_{i \in [n]} \text{dist}(0, h_i).$$

Возьмем некоторое $x \in B_R$. Если h_i не проходит через прямую из $\mathcal{L}$ с направляющим вектором e_j , то

$$|(f_i(x), e_j)| \leq m|(x, e_j)| + 2D \leq R$$

при $R \geq 2D/(1 - m)$. Если же h_i проходит через прямую с направляющим вектором e_j , то $(x - f_i(x), e_j) = 0$ и $(f_i(x), e_j) = (x, e_j)$.

Применим теперь лемму 13 к множеству B_R и отображениям f_i . Тогда получаем точку x такую, что всякое полупространство $H \ni x$ содержит не менее $l = \lfloor (n + d)/(d + 1) \rfloor$ точек $f_i(x)$. Так как $f_i(x)$ – это проекции, получаем, что для всякого луча r с началом в x найдется не менее l гиперплоскостей из $\mathcal{F}$, которые либо пересекаются с r , либо параллельны ему.

Теперь докажем, что всякий луч r с началом в x пересекает не менее l гиперплоскостей из $\mathcal{F}$. Рассмотрим единичную сферу S с центром в x и спроецируем гиперплоскости из $\mathcal{F}$ на нее, получив семейство $\mathcal{G}$, состоящее либо из открытых полусфер, либо полных сфер (если x принадлежит соответствующей $h \in \mathcal{F}$). Уже доказано, что замыкания множеств из $\mathcal{G}$ покрывают S с кратностью не менее l . Теперь надо показать, что сами множества $\mathcal{G}$ покрывают S с кратностью не менее l .

Предположим противное: $e \in S$ покрыта $k < l$ множествами из $\mathcal{G}$ и лежит на границе как минимум $l - k$ множеств из $\mathcal{G}$. Обозначим такие множества через $\mathcal{H}$. Из общего положения исходных гиперплоскостей следует, что $|\mathcal{H}| \leq d - 1$ и в любой окрестности точки e найдется точка, которая не лежит ни в каком замыкании $\text{cl } X$ множества $X \in \mathcal{H}$. Тогда достаточно близкая к e

точка e' лежит в точности в тех же множествах из $\mathcal{G}$, что и e (что следует из открытости этих множеств) и не лежит на границе никакого множества из $\mathcal{G}$. Следовательно, она принадлежит замыканиям не более чем k множеств из $\mathcal{G}$. Получаем противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Применим к семейству прямых теорему 1 и найдем центральную точку x . Занумеруем прямые семейства по кругу $\{l_1, l_2, l_3, \dots, l_{3n}\}$ в соответствии с направлениями проекций x на эти прямые. Если точка x лежит на прямой, то за направление проекции на прямую можно взять любую нормаль к этой прямой.

Тогда возьмем тройки (l_k, l_{k+n}, l_{k+2n}) (коэффициенты считаем по модулю $3n$). Каждая из них образует треугольник, содержащий x по свойству центральности x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала заметим, что достаточно доказать теорему для связной меры, так как несвязная мера может быть приближена последовательностью связных, носители которых содержатся в одном и том же компакте. Теорема для несвязной меры следует из теоремы для связных из соображений непрерывности и компактности. Далее будет показано, что множество точек, которые могли бы быть центральными, компактно.

Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим отображение

$$\pi_x: \gamma_d^1 \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

которое отображает гиперплоскость H в проекцию точки x на H . Это отображение однозначно везде, кроме множества меры нуль, поэтому корректно определены меры $\lambda_x = \pi_{x*}\mu$.

По лемме 3 эти меры непрерывно зависят от x . Эти меры связны и все они имеют компактные носители. Если множество значений x ограничить некоторым компактом, то и носители λ_x окажутся в некотором компакте.

Теперь для всякого x можно рассмотреть $\text{cent } \lambda_x$. По леммам 8 и 9 он непрерывно зависит от x в метрике Хаусдорфа, поэтому можно выбрать непрерывную функцию $f(x) \in \text{cent } \lambda_x$. Применим теорему 7 о неподвижной точке к отображению $f(x)$. Однако для этого надо сначала показать, что найдется константа M такая, что для всякого x , $|x| > M$, выполнено неравенство $(x, x - f(x)) > 0$.

Применим лемму 4 к мере λ_0 , положив $\varepsilon = 1/(2(d+1))$, и найдем соответствующее δ . Пусть носитель λ_0 лежит в круге радиуса R , $M > R^2/\delta$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $|x| > M$. Обозначим $H_x = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, x) \geq (x, x)\}$. Посмотрим, чему равна мера $\lambda_x(H_x)$. Для этого переведем множество H_x отображением $\pi_0 \circ \pi_x^{-1}$ в множество L_x . Можно проверить (достаточно рассмотреть двумерный случай), что

$$L_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : (y, x) \geq 0, \left| y - \frac{x}{2} \right| \geq \frac{|x|}{2} \right\}.$$

Следовательно, пересечение $L_x \cap S$ лежит в полосе толщины менее δ и поэтому $\lambda_0(L_x) = \lambda_x(H_x) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\text{cent } \lambda_x \cap H_x = \emptyset$ и $(x, x - f(x)) > 0$, т.е. теорема 7 о неподвижной точке применима.

Таким образом, имеем точку x , являющуюся центральной для λ_x . Как и в доказательстве теоремы 1, далее проверяется, что эта точка и есть искомая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как и в предыдущей теореме, будем считать меры связными. Рассмотрим некоторое линейное подпространство $L \subseteq \mathbb{R}^d$ размерности $k+1$. Ортогональной проекцией на $\mathcal{L}$ все k -плоскости в $\mathbb{R}^d$ проектируются в l -плоскости, $l \leq k$, в L , причем за исключением множества меры нуль проектируются именно k -плоскости в k -плоскости.

Таким образом, проекция дает меры $\nu_{i,L}$ на множестве гиперплоскостей γ_L^1 . Эти меры непрерывно зависят от L . Как в предыдущей теореме, для каждой точки $x \in L$ рассмотрим меры $\lambda_{i,L,x}$ на L , получающиеся из $\nu_{i,L}$ проекцией π_x в L . Их центральные точки зависят непрерывно от x и L , т.е. найдутся отображения

$$f_i: \gamma_d^{k+1} \rightarrow \gamma_d^{k+1} \quad (i = 1, \dots, d-k),$$

которые, как и в предыдущей теореме, удовлетворяют условиям теоремы 7 (с учетом теоремы 8).

Тогда получаем x и L такие, что $x \in \text{cent } \lambda_{i,L,x}$ для любого $i = 1, \dots, d-k$. Очевидно, что $(d-k-1)$ -плоскость, перпендикулярная к L в точке x , является искомой.

§ 10. Геометрические конструкции для доказательства теорем 4 и 5

Будем использовать конструкции из доказательства топологической теоремы Тверберга, следуя двум источникам. В книге [18] описаны конструкции для случая, когда количество множеств разбиения равно простому числу. Эти конструкции мы и будем использовать. В работе [11] рассмотрен случай степеней простого числа, но геометрические конструкции другие. Однако в [11] рассмотрены топологические факты о соответствующих кольцах эквивариантных когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $(t_1, \dots, t_n)$ рассмотрим подпространство A_n , определяемое соотношением

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1.$$

Если требуется считать A_n линейным пространством, то начало координат поместим в точку $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Для некоторого векторного пространства V и целого числа $n > 0$ определим

$$J_A^n(V) = nV \oplus A_n,$$

где запись nV означает прямую сумму n экземпляров V . Пространство V можно вложить в $J_A^n(V)$ с помощью отображения

$$v \mapsto v \oplus v \oplus \dots \oplus v \oplus \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

и рассмотреть ортогональное разложение

$$J_A^n(V) = V \oplus D_A^n(V).$$

Можно также определить $J_A^n(V)$ как аффинную оболочку n -кратного джойна $V * V * \dots * V$.

Действие любой группы G на множестве индексов $[n]$ определяет действие на n -кратной прямой сумме nV перестановками слагаемых и действие на A_n перестановками координат. Слагаемое V в сумме $J_A^n(V) = V \oplus D_A^n(V)$ при этих перестановках всегда неподвижно. Если группа G действует транзитивно на $[n]$, то ее представление $D_A^n(V)$ не имеет тривиальных слагаемых.

Далее будем рассматривать группы $G = (Z_p)^k$, p простое. Отождествим некоторым образом множество из n элементов $[n]$, $n = p^k$, с G и получим действие G на $[n]$ сдвигами. Тогда представление $D_A^n(V)$ группы G не имеет тривиальных слагаемых и (см. [19; гл. IV, § 1]) его класс Эйлера $e(D_A^n(V)) \neq 0 \in H_G^*(\text{pt}, Z_p)$.

§ 11. Топологические конструкции для доказательства теорем 4 и 5

Пусть $n = p^k$, p – простое число, $G = (Z_p)^k$. Напомним определение G -эквивариантных когомологий для G -пространства X с коэффициентами в некотором коммутативном кольце A

$$H_G^*(X, A) = H^*((X \times EG/G), A),$$

где EG – некоторый гомотопически тривиальный CW -комплекс, на котором G действует свободно.

Напомним некоторые сведения о кольце $\Lambda_p(k) = H_G^*(\text{pt}, Z_p)$ (см. [19; гл. IV, § 1]). Для $p = 2$ – это кольцо Z_2 -многочленов от k образующих $u_1, \dots, u_k$ степени один. Для $p \neq 2$ – это тензорное произведение кольца многочленов от k образующих $u_1, \dots, u_k$ степени два и внешней алгебры от k образующих $v_1, \dots, v_k$ степени один. Естественное эквивариантное отображение $X \rightarrow \text{pt}$ дает естественное отображение $\Lambda_p(k) \rightarrow H_G^*(X, Z_p)$ для любого G -пространства X .

Обозначим $S_2(k) = \Lambda_2(k)$ и $S_p(k) = Z_p[u_1, \dots, u_k]$ для $p \neq 2$. Это – коммутативные кольца многочленов. Имеет место следующая

ЛЕММА 14. *Для всякого ненулевого класса $x \in S_p^n(k)$ и числа $m \geq 0$ найдется класс $x' \in \Lambda_p^m(k)$ такой, что их произведение $xy \neq 0 \in \Lambda_p^{n+m}(k)$.*

Доказательство леммы тривиально следует из явного описания колец $\Lambda_p(k)$.

ЛЕММА 15. *Для всякого представления группы G в линейном пространстве V линейное пространство V можно рассматривать как G -эквивариантное расслоение над pt . Тогда его класс Эйлера по модулю p лежит в $S_p(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 2$ утверждение леммы очевидно. При $p \neq 2$ всякое нетривиальное неприводимое вещественное представление G двумерно и его класс Эйлера равен линейной комбинации введенных выше классов $u_i \in S_p(k)$ (см. также [19; гл. IV, § 1]).

Далее в утверждениях, которые верны для когомологий с произвольными коэффициентами, через A обозначено некоторое коммутативное кольцо коэффициентов. Докажем еще одну тривиальную, но важную лемму 16.

ЛЕММА 16. *Если G действует свободно на n -мерном симплициальном или CW -комплексе X , то когомологии $H_G^m(X, A)$ нулевые при $m > n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свободного действия следует, что

$$H_G^m(X, A) = H(X/G, A),$$

а последнее пространство n -мерно.

Также нам понадобится лемма 17 о произведении когомологий.

ЛЕММА 17. Пусть пространство X покрыто семейством открытых множеств $U_1, U_2, \dots, U_m$ и даны элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in H^*(X, A)$. Если для каждого $i = 1, \dots, m$ образ a_i в $H^*(U_i, A)$ нулевой, то $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ в $H^*(X, A)$.

Доказательство леммы легко следует из определения произведения в когомологиях.

Теперь перейдем к построению конфигурационных пространств (см. [18], где этот вопрос обсуждается очень подробно) для доказательства цветной и обычной теорем Тверберга.

Рассмотрим N -кратный джойн дискретного множества из n точек $EG_N = [n] * [n] * \cdots * [n]$. Как известно (см. [18]), это пространство $(N - 1)$ -мерно и $(N - 2)$ -связно.

Действие G на $[n]$ дает свободное действие G на EG_N , при этом каноническое отображение

$$H_G^*(\text{pt}, Z_p) \rightarrow H_G^*(EG_N, Z_p)$$

инъективно в размерностях не более $N - 1$. Это следует из рассмотрения спектральной последовательности Серра для расслоения $(EG \times EG_N)/G \rightarrow BG$ (см. [19; гл. III, § 1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Для симплициального комплекса K определим *вырезанный* (*deleted* в англоязычных публикациях) n -кратный джойн K_Δ^{*n} как комплекс с множеством вершин $V(K) \times [n]$ и множеством симплексов

$$\sigma = \sigma_1 \times \{1\} \cup \sigma_2 \times \{2\} \cup \cdots \cup \sigma_n \times \{n\},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — попарно дизъюнктные симплексы K .

Построенное выше пространство EG_N изоморфно как симплициальный комплекс *вырезанному* джойну $(N - 1)$ -мерного симплекса $(\Delta^{N-1})_\Delta^{*n}$, который является естественным конфигурационным пространством в доказательстве топологической теоремы Тверберга и теоремы 4. Группа G действует на джойне перестановками сомножителей.

Аналогично можно построить конфигурационное пространство для цветной теоремы Тверберга. Сначала рассмотрим симплициальный комплекс $K(k, t)$, множество вершин которого равно $[k] \times [t]$, первая координата дает цвет вершины. Симплексы $K(k, t)$ — это такие подмножества $K(k, t)$, которые содержат не более одной вершины каждого цвета.

Конфигурационным пространством для цветной теоремы Тверберга является r -кратный вырезанный джойн $L(k, t, r) = K(k, t)_\Delta^{*r}$. Это пространство $(rk - 2)$ -связно при условии $t \geq 2r - 1$ (см. [10]), и, следовательно, отображение

$$H_G^*(\text{pt}, Z_p) \rightarrow H_G^*(L(k, t, r), Z_p)$$

инъективно в размерностях меньших либо равных $rk - 1$ из спектральной последовательности Серра.

§ 12. Доказательство теорем 4 и 5

Приведем доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 5 получается из доказательства теоремы 4 заменой комплекса $\Delta^{n(d+1)-1}$ на комплекс $K(d+1, t)$ и соответствующей заменой их вырезанных джойнов.

Положим $N = n(d+1)$ и занумеруем гиперплоскости $\{h_i\}_{i=1}^N$. Положим $G = (Z_p)^k$.

Как и в доказательстве теоремы 1, определим отображение f_i как проекцию на h_i . Также рассмотрим выпуклое множество B , которое этими отображениями переводится в себя.

Полный симплициальный комплекс, вершины которого соответствуют гиперплоскостям h_i , отождествим с симплексом Δ^{N-1} . Зафиксируем точку $b \in B$. Определим отображение

$$s_b: (\Delta^{N-1})_{\Delta}^{*n} = EG_N \rightarrow J_A^n(\mathbb{R}^d).$$

Отображение

$$t_b: \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

определим на вершинах Δ^{N-1} как $f_i(b) - b$ для вершины v_i . Далее продолжим его по линейности на Δ^{N-1} . Отображение s_b будет n -кратным джойном отображения t_b . Теперь, рассматривая отображение s_b в зависимости от точки b , можем считать его непрерывным отображением

$$s: B \times (\Delta^{N-1})_{\Delta}^{*n} = B \times EG_N \rightarrow J_A^n(\mathbb{R}^d).$$

Отображение s эквивариантно относительно действия группы G на EG_N и $J_A^n(\mathbb{R}^d)$ и может считаться сечением соответствующего эквивариантного расслоения.

Проверим, что сечение s некоторые точки отображает в нуль. Заметим, что эквивариантный класс Эйлера $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))$ имеет размерность $(d+1)(n-1)$ и не равен нулю в $H_G^*(EG_N, Z_p)$, так как отображение

$$S_p^{(d+1)(n-1)}(k) \rightarrow H_G^{(d+1)(n-1)}(EG_N, Z_p)$$

инъективно. Более того, по лемме 14 найдется такой элемент $e' \in \Lambda^d(k)$, что образ $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))e'$ в $H_G^{n(d+1)-1}(EG_N, Z_p)$ не равен нулю.

Рассмотрим композицию $s_2 = \pi \circ s$ с проекцией π пространства $J_A^n(\mathbb{R}^d)$ на ортогональное дополнение к $D_A^n(\mathbb{R}^d)$, изоморфное $\mathbb{R}^d$. Получим, что относительный класс Эйлера частичного сечения s_2 тривиального расслоения $(B, \partial B) \times \mathbb{R}^d$ не равен нулю в $H^d(B, \partial B)$. Тогда по свойству мультипликативности относительный класс Эйлера сечения s не равен нулю в $H_G^{N-1}(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$, что гарантирует отображение в нуль некоторых пар $b \times y$. Множество всех таких пар обозначим через Z .

Посмотрим, что означает отображение в нуль некоторой пары $b \times y$, где $b \in B$, $y \in EG_N$. Точка y является выпуклой комбинацией точек из Δ^{N-1} (в соответствии с определением вырезанного джойна)

$$y = c_1 x_1 \oplus \cdots \oplus c_n x_n,$$

где точки $x_i \in \Delta^{N-1}$ имеют попарно дизъюнктные носители. Отображение в нуль означает, что $c_1 = \dots = c_n = 1/n$ и $t_b(x_1) = \dots = t_b(x_n) = b$. Представим x_i как выпуклую комбинацию вершин Δ^{N-1}

$$c_i x_i = a_{i1} v_1 \oplus \dots \oplus a_{iN} v_N.$$

Заметим, что по определению вырезанного джойна $a_{ij} \neq 0$ при каждом фиксированном $j \in [N]$ не более чем для одного индекса $i \in [n]$. Сформулируем лемму.

ЛЕММА 18. *Пусть $J \subseteq [N]$, $F = \{t_b(v_j) : j \in J\}$. Тогда если $b \in \text{conv } F$, то либо $b \in F$, либо в F не менее $d + 1$ элемента и b лежит строго внутри $\text{conv } F$.*

Лемма тривиально следует из того, что гиперплоскости находятся в общем положении.

Обозначим теперь для данной точки $b \times y \in Z$

$$J_b = \{j \in [N] : f_j(b) = t_b(v_j) = b\}.$$

Предположим, что для всех пар $b \times y \in Z$ множество J_b непусто. Рассмотрим отображение $p: Z \rightarrow EG_N$, определенное следующим образом. Пусть в паре $b \times y$ точка y задается координатами $\{a_{ij}\}$ (см. выше). Отображение p , записанное в тех же координатах, обращает в нуль все a_{ij} , кроме тех, у которых $j \in J_b$, а потом нормирует оставшиеся координаты на единичную сумму. Это отображение непрерывно и G -эквивариантно.

Образ $p(Z)$ лежит в $(d - 1)$ -мерном скелете EG_N , так как у точки образа отличаться от нуля могут не более d координат из a_{ij} , соответствующих гиперплоскостям, содержащим данную точку b . Указанный $(d - 1)$ -мерный скелет является $G - ANR$ (эквивариантным абсолютным окрестностным ретрактом), поэтому p может быть G -эквивариантно продолжено на некоторую окрестность $U \supseteq Z$.

Образ введенного выше класса $e' \in \Lambda_p^d(k)$ в $H_G^d(p(U), Z_p)$ равен нулю по лемме 16. Следовательно, его естественный образ в $H_G^d(U, Z_p)$ тоже равен нулю. Также ясно, что класс Эйлера $e(J_A^n(\mathbb{R}^d))$ в когомологиях $H_G^*(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$ обращается в нуль на $B \times EG_N \setminus Z$. По лемме 17 произведение $e(J_A^n(\mathbb{R}^d))e'$ должно обратиться в нуль в $H_G^*(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$, но $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))e' \neq 0 \in H_G(EG_N, Z_p)$, а из мультипликативности класса Эйлера следует, что $e(J_A^n(\mathbb{R}^d))e' \neq 0$.

Таким образом, наше предположение неверно и для какой-то пары $b \times y \in Z$ множество J_b обязательно пусто. Тогда множества

$$S_i = \{j \in [J] : a_{ij} \neq 0\}$$

не пересекаются и $\text{conv } t_b(S_i) \ni b$ для всех $i \in [n]$. По предыдущей лемме все эти множества обязаны иметь по $d + 1$ элементу и $\text{int conv } t_b(S_i) \ni b$. В этом случае наборы гиперплоскостей $\{h_j\}_{j \in S_i}$ образуют симплексы, содержащие b внутри себя.

§ 13. Гипотезы

Помимо уже сформулированной в § 2 гипотезы о двойственной теореме Тверберга, можно сформулировать еще пару гипотез, связанных с темой настоящей работы. Первая гипотеза в случае $k = 0$ является обычной теоремой о центральной точке, при $k = n - 1$ она совпадает с двойственной теоремой о центральной точке из настоящей работы. Для других значения k вопрос остается открытым.

ГИПОТЕЗА 2 (теорема о центральной точке для k -плоскостей). *Существует константа $c(k, d) > 0$ такая, что для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ с компактным носителем на множестве k -плоскостей в $\mathbb{R}^d$ найдется точка x такая, что для всякой $(n - k)$ -полуплоскости $M \ni x$ выполняется неравенство*

$$\mu(I(M, k)) \geq c(k, d).$$

Следующая гипотеза была бы двойственным аналогом цветной теоремы Тверберга на плоскости из [20].

ГИПОТЕЗА 3 (двойственная цветная теорема Тверберга на плоскости). *Пусть на плоскости задано семейство из $3n$ прямых общего положения, раскрашенных в три цвета по n прямым каждого цвета. Тогда их можно разбить на разноцветные тройки так, что все треугольники, образованные тройками, имеют общую точку.*

Автор благодарит А. Ю. Воловикова за содержательное обсуждение результатов и В. Л. Дольникова за ценные замечания при подготовке текста статьи.

Список литературы

- [1] B. H. Neumann, “On an invariant of plane regions and mass distributions”, *J. London Math. Soc.*, **20**:4 (1945), 226–237.
- [2] R. Rado, “A theorem on general measure”, *J. London Math. Soc.*, **21**:4 (1946), 291–300.
- [3] B. Grünbaum, “Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes”, *Pacific J. Math.*, **10**:4 (1960), 1257–1261.
- [4] J. Eckhoff, “Helly, Radon, and Carathéodory type theorems”, *Handbook of convex geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1993, 389–448.
- [5] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, *Helly’s theorem and its relatives*, Proc. Sympos. Pure Math., **7**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.
- [6] H. Tverberg, “A generalization of Radon’s theorem”, *J. London Math. Soc.*, **41**:1 (1966), 123–128.
- [7] R. T. Zivaljević, S. T. Vrećica, “An extension of the ham sandwich theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **22**:2 (1990), 183–186.
- [8] В. Л. Дольников, “О разбиении системы мер подпространством многочленов”, *Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. Доклады 8 Всесоюзного семинара “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики”* (Красновидово, 1990), ИПМ им. Келдыша, М., 1991, 80–85.

- [9] В. Л. Дольников, “Об одном обобщении теоремы о бутерброде”, *Матем. заметки*, **52**:2 (1992), 27–37; англ. пер.: V. L. Dol’nikov, “A generalization of the ham sandwich theorem”, *Math. Notes*, **52**:2 (1992), 771–779.
- [10] S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, “New cases of the colored Tverberg theorem”, *Jerusalem combinatorics '93* (Jerusalem, Israel, 1993), Contemp. Math., **178**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 325–334.
- [11] А. Ю. Воловиков, “К топологическому обобщению теоремы Тверберга”, *Матем. заметки*, **59**:3 (1996), 454–456; англ. пер.: A. Yu. Volovikov, “On a topological generalization of the Tverberg theorem”, *Math. Notes*, **59**:3 (1996), 324–326.
- [12] Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная*, Наука, М., 1964; англ. пер.: G. E. Shilov, B. L. Gurevich, *Integral, measure and derivative: a unified approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [13] В. Л. Дольников, “Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука”, *Докл. АН СССР*, **297**:4 (1987), 777–780; англ. пер.: V. L. Dol’nikov, “Generalized transversals of families of sets in $\mathbb{R}^n$ and connections between the Helly and Borsuk theorems”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:3 (1988), 519–522.
- [14] А. С. Мищенко, *Векторные расслоения и их применения*, Наука, М., 1984; англ. пер.: G. Luke, A. S. Mishchenko, *Vector bundles and their applications*, Math. Appl., **447**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [15] Д. Милнор, Д. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Ann. of Math. Stud., **76**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.
- [16] M. A. Kervaire, “Relative characteristic classes”, *Amer. J. Math.*, **79**:3 (1957), 517–558.
- [17] Е. С. Половинкин, *Элементы теории многозначных отображений*, Московский физико-технический институт, М., 1982.
- [18] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [19] W. Yi Hsiang, *Cohomology theory of topological transformation groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **85**, Springer-Verlag, New-York–Heidelberg, 1975; рус. пер.: У. И. Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.
- [20] I. Bárány, D. G. Larman, “A colored version of Tverberg’s theorem”, *J. London Math. Soc.* (2), **45**:2 (1992), 314–320.

Р. Н. Карасёв (R. N. Karasev)

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

E-mail: r_n_karasev@mail.ru

Поступила в редакцию

15.10.2007 и 04.03.2008