Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Провоторов, Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 10, 105–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:25:50

УДК 517.927.25

В. В. Провоторов

Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде

Рассматривается задача Штурма–Лиувилля на графе-звезде. Исследуются структура собственных значений и собственных функций этой задачи и их свойства. Особое внимание уделено вопросам полноты системы собственных функций в пространстве функций с суммируемым квадратом и разложению по этой системе в обобщенный ряд Фурье заданной функции. Эти вопросы являются ключевыми при изучении граничных задач для линейных уравнений в частных производных на графе методом Фурье, возникающих, например, при моделировании колебательных процессов упругой мачты с поддерживающими упругими растяжками.

Библиография: 8 названий.

В работе исследуется вопрос обоснования метода разделения переменных для уравнений в частных производных, заданных на графе Γ , приводящий к важной задаче разложения заданной функции по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля на Γ . Основные результаты работы – описание структуры множеств собственных значений и собственных функций, теоремы о полноте и базисности в $L_2(\Gamma)$ собственных функций, а также об условиях равномерной сходимости ряда по собственным функциям. Подобные исследования начаты в [1; теоремы 1 и 4], где результат – теорема разложения – сформулирован для истокпредставимых функций. В настоящей работе от разлагаемой функции требуется меньшая гладкость (абсолютная непрерывность на Γ). Приведенные исследования лежат в основе изучения прикладных задач, связанных с описанием колебательных процессов, например при моделировании механической системы, состоящей из упругой мачты и поддерживающих ее упругих растяжек [2; соотношения (1)–(6)]. Одна из таких модельных задач приводится ниже. В работе проведено исследование только для случая графа-звезды. Переход к произвольному графу-дереву, которое можно рассматривать как “объединение” конечного числа подграфов, каждый из которых – граф-звезда, осуществляется естественной “склеивкой” решений на подграфах и очевиден, хотя сопряжен с некоторыми техническими сложностями.

В дальнейшем будем пользоваться понятиями и обозначениями, использованными в монографии [3; гл. 1, п. 1.3]. Пусть многообразие Γ – геометрический граф-звезда с ребрами γ_k , $k = \overline{1, m}$, и узлом ξ ; каждое ребро γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, параметризовано отрезком $[0, \pi/2]$, а ребро γ_m – отрезком $[\pi/2, \pi]$, ориентация на ребрах γ_k , $k = \overline{1, m-1}$, – “к узлу ξ ”, на γ_m – “от узла ξ ”. Запись $x \in \gamma_k$ означает, что каждой точке x ребра γ_k придается численное значение $0 \leq x \leq \pi/2$ или $\pi/2 \leq x \leq \pi$, $x = \pi/2 \in \gamma_k$ (k фиксированное, $k = \overline{1, m}$, означает принадлежность точки x узлу ξ), сужение функции $f(x)$ на ребро γ_k обозначается

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00397).

через $f(x)_{\gamma_k}$. Пусть $C(\Gamma)$ – множество непрерывных на Γ функций, $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле ξ по разным ребрам могут быть различными, функции не приписывается никакого значения в узле), $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Задача Штурма–Лиувилля на графе Γ – это задача поиска функции $y(x) \in C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, удовлетворяющей уравнениям

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \gamma_k, \quad (1)$$

на ребрах графа γ_k , $k = \overline{1, m}$, соотношению в узле ξ (условию согласования [3; гл. 1, п. 1.3])

$$\sum_{k=1}^{m-1} y' \left(\frac{\pi}{2} \right)_{\gamma_k} = y' \left(\frac{\pi}{2} \right)_{\gamma_m} \quad (2)$$

и краевым условиям

$$y'(0)_{\gamma_k} - h_k y(0)_{\gamma_k} = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad y'(\pi)_{\gamma_m} + H y(\pi)_{\gamma_m} = 0 \quad (3)$$

при некотором λ , называемом спектральным параметром. Всюду далее будем предполагать, что выполнены следующие условия: h_k , $k = \overline{1, m-1}$, и H – вещественные; вещественнозначная функция $q(x) \in C(\Gamma)$. Соотношения (1), (2) рассматриваются как реализация единого уравнения на связном множестве Γ , поэтому их называют *уравнением на графе Γ* [3; гл. 3, п. 3.2].

Предварительно мы изучим свойства собственных значений и собственных функций, установим свойства функции Грина краевой задачи (1)–(3) на основе асимптотических формул для решений уравнения (1), (2).

В дальнейшем нам потребуется следующая известная теорема, доказательство которой можно найти, например, в монографии [4; гл. 1, § 1.5, теорема 1.5]. Определим функции $Q_k(x)$, $x \in [0, \pi]$, $k = \overline{1, m-1}$, так:

$$Q_k(x) \equiv q(x)_{\gamma_k}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad Q_k(x) \equiv q(x)_{\gamma_m}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

ТЕОРЕМА 1. *Для любого фиксированного $k = \overline{1, m-1}$ и любого α существует единственное решение $z_k(x, \lambda) \in C^1[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$ уравнения*

$$-z_k'' + Q_k(x)z_k = \lambda z_k \quad (4)$$

такое, что $z_k(0, \lambda) = \sin \alpha$, $z_k'(0, \lambda) = -\cos \alpha$. Для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ функция $z_k(x, \lambda)$ является целой аналитической функцией от λ .

Пусть для каждого фиксированного k , $k = \overline{1, m-1}$, функции

$$\mu_k(x, \lambda), \eta_k(x, \lambda) \in C^1[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$$

– решения уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям $\mu_k(\pi/2, \lambda) = 1$, $\mu_k'(\pi/2, \lambda) = 0$, $\eta_k(\pi/2, \lambda) = 0$, $\eta_k'(\pi/2, \lambda) = 1$ соответственно (ясно, что функции $\mu_k(x, \lambda)$, $\eta_k(x, \lambda)$ при $x \in [\pi/2, \pi]$ не зависят от индекса k , т.е. $\mu_k(x, \lambda) \equiv \mu(x, \lambda)$, $\eta_k(x, \lambda) \equiv \eta(x, \lambda)$, $x \in [\pi/2, \pi]$). Тогда функции

$$\begin{aligned} \omega_k(x, \lambda) &= \begin{cases} \delta_{ik} \eta_k(x, \lambda), & x \in \gamma_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ \eta(x, \lambda), & x \in \gamma_m, \end{cases} \\ \omega_m(x, \lambda) &= \begin{cases} \mu_k(x, \lambda), & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \mu(x, \lambda), & x \in \gamma_m \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

(здесь δ_{ik} – символ Кронекера), очевидно, являются линейно независимыми решениями уравнения (1), (2).

ЛЕММА 1. *Многообразие решений уравнения (1), (2) m -мерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(x, \lambda)$ – произвольное решение уравнения (1), (2). Тогда

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} c_{1k}\mu_k(x, \lambda) + c_{2k}\eta_k(x, \lambda), & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ c_{1m}\mu(x, \lambda) + c_{2m}\eta(x, \lambda), & x \in \gamma_m. \end{cases} \quad (6)$$

Непрерывность и гладкость (2) в узле ξ функции $y(x, \lambda)$ связывают постоянные c_{1k}, c_{2k} соотношениями $c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1m}$, $\sum_{k=1}^{m-1} c_{2k} = c_{2m}$. Пусть $c_{2k} = c_k$, $k = \overline{1, m-1}$, $c_{1k} = c_m$, $k = \overline{1, m}$. Тогда $c_{2m} = \sum_{k=1}^{m-1} c_k$ и функция $y(x, \lambda)$ в силу представления (6) принимает вид

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^m c_k \omega_k(x, \lambda), \quad x \in \Gamma,$$

т.е. произвольное решение уравнения (1), (2) является некоторой линейной комбинацией функций $\omega_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$.

Систему решений $\{\omega_k(x, \lambda)\}_1^m$ назовем *базовой системой решений уравнения (1), (2)*.

Пусть для каждого фиксированного k , $k = \overline{1, m-1}$, функции

$$u_k(x, \lambda), v_k(x, \lambda) \in C^1[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$$

являются решениями уравнения (4) с начальными условиями $u_k(0, \lambda) = 1$, $u'_k(0, \lambda) = h_k$, $v_k(\pi, \lambda) = 1$, $v'_k(\pi, \lambda) = -H$. В силу теоремы 1 при каждом фиксированном λ функции $u_k(x, \lambda)$, $v_k(x, \lambda)$ являются целыми аналитическими по λ , при этом $u'_k(0, \lambda) - h_k u_k(0, \lambda) = 0$, $v'_k(\pi, \lambda) + H v_k(\pi, \lambda) = 0$ и $v_k(x, \lambda)$ при $x \in [\pi/2, \pi]$ не зависят от индекса k , т.е. $v_k(x, \lambda) \equiv v(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m-1}$, $x \in [\pi/2, \pi]$. Рассмотрим систему функций

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, \lambda) &= \begin{cases} u_k\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \mu_i(x, \lambda), & x \in \gamma_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad i \neq k, \\ u_k(x, \lambda), & x \in \gamma_k \cup \gamma_m, \end{cases} \\ \varphi_m(x, \lambda) &= \begin{cases} v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \mu_i(x, \lambda), & x \in \gamma_i, \quad i = \overline{2, m-1}, \\ v(x, \lambda), & x \in \gamma_1 \cup \gamma_m. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, что функции $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, являются решениями уравнения (1), (2) и удовлетворяют краевым условиям $\varphi'_k(0, \lambda)_{\gamma_k} - h_k \varphi_k(0, \lambda)_{\gamma_k} = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $\varphi'_m(\pi, \lambda)_{\gamma_m} + H \varphi_m(\pi, \lambda)_{\gamma_m} = 0$. Покажем их линейную независимость на Γ .

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение. Пусть $y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, – решения уравнения (1), (2) и

$$y_k(x, \lambda) = \sum_{i=1}^m a_{ki} \omega_i(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m}, \quad (8)$$

где a_{ki} – надлежащим образом подобранные константы.

ЛЕММА 2. Решения $y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, уравнения (1), (2) линейно независимы на Γ тогда и только тогда, когда матрица $\|a_{ki}\|$, $k, i = \overline{1, m}$, представлений $y_k(x, \lambda)$ в виде (8) через базовую систему решений (5) является невырожденной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, линейно независимы, если соотношение $\sum_{k=1}^m \alpha_k y_k(x, \lambda) = 0$, $x \in \Gamma$, имеет место только при $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m}$. Учитывая (8), рассмотрим соотношение

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i=1}^m a_{ki} \omega_i(x, \lambda) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Так как функции $\omega_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, являются линейно независимыми, то

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k a_{ki} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, получаем систему линейных однородных уравнений относительно α_k с определителем, отличным от нуля. Следовательно, $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m}$. Лемма доказана.

Разложение функций $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, по базовой системе (5) имеет следующий вид:

$$\varphi_k(x, \lambda) = \sum_{i=1}^m \varphi_{ki} \omega_i(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Для каждого фиксированного $k = \overline{1, m}$ в соответствии с (9) получаем m систем линейных алгебраических уравнений относительно постоянных φ_{ki} , $k, i = \overline{1, m}$, которые и определяют эти постоянные:

$$\begin{aligned} \varphi_{ki} &= \delta_{ki} u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad \varphi_{km} = u_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right), \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \varphi_{m1} &= v'_1 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) = v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right), \quad \varphi_{mi} = 0, \quad i = \overline{2, m-1}, \quad \varphi_{mm} = v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right). \end{aligned}$$

Определитель матрицы коэффициентов разложений функций $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, равен

$$- \prod_{k=2}^{m-1} u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \delta_1(\lambda),$$

где

$$\delta_1(\lambda) = u_1 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) - u'_1 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right).$$

Таким образом, система функций $\{\varphi_k(x, \lambda)\}_1^m$ является линейно независимой системой решений уравнения (1), (2), если λ не является нулем функции

$$- \prod_{k=2}^{m-1} u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \delta_1(\lambda).$$

Пусть $(Ly)(x) \equiv -y'' + q(x)y$ — дифференциальное выражение, заданное на многообразии $\mathfrak{R}$, состоящем из функций $y(x) \in C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих условиям согласования (2).

Обозначим

$$\langle g_1(x), g_2(x) \rangle = g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x), \quad x \in \Gamma$$

(в конечных точках ребер γ_k применяется одностороннее дифференцирование).

ТЕОРЕМА 2. Для любых функций $g_1(x), g_2(x) \in \mathfrak{R}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (Lg_1)(x)g_2(x) dx &= \langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{x=\pi} - \sum_{k=1}^{m-1} \langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{x=0 \in \gamma_k} \\ &\quad + \int_{\Gamma} g_1(x)(Lg_2)(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где интеграл на Γ определяется как сумма интегралов на γ_k , $k = \overline{1, m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} (Lg_1)(x)g_2(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} (Lg_1)(x)g_2(x) dx.$$

Вычислим каждый интеграл на γ_k , используя дважды метод интегрирования по частям. Учитывая условие согласования (2), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} (Lg_1)(x)g_2(x) dx &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} [-g_1''(x) + q(x)g_1(x)]g_2(x) dx \\ &= [g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x)]_{x=\pi} - \sum_{k=1}^{m-1} [g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x)]_{x=0 \in \gamma_k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} [g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x)]_{x=\pi/2 \in \gamma_k} - [g_1(x)g_2'(x) - g_1'(x)g_2(x)]_{x=\pi/2 \in \gamma_m} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} g_1(x)(-g_2''(x) + q(x)g_2(x)) dx \\ &= \langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{x=\pi} - \sum_{k=1}^{m-1} \langle g_1(x), g_2(x) \rangle_{x=0 \in \gamma_k} + \int_{\Gamma} g_1(x)(Lg_2)(x) dx. \end{aligned}$$

Формула (10) является аналогом формулы Лагранжа на интервале.

ТЕОРЕМА 3. Собственные значения и собственные функции краевой задачи (1)–(3) вещественны. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство теоремы повторяет классические рассуждения, приводимые на интервале (см., например, [4; гл. 1, § 1, теорема 1.1.2]). При этом существенную роль играет формула Лагранжа (10).

Введенные выше функции $u_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m-1}$, $v(x, \lambda)$ позволяют построить решение $y(x, \lambda)$ краевой задачи (1)–(3):

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} \alpha_k u_k(x, \lambda), & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \beta v(x, \lambda), & x \in \gamma_m \end{cases} \quad (11)$$

(α_k, β – некоторые постоянные). Зафиксируем λ : пусть $\lambda = \lambda_0$. Определение нетривиального решения $y(x, \lambda_0)$ краевой задачи (1)–(3) сводится к определению коэффициентов α_k , $k = \overline{1, m-1}$, и β . В силу непрерывности функции $y_0(x)$ в узле ξ получаем

$$\alpha_1 u_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) = \alpha_2 u_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) = \dots = \alpha_{m-1} u_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right),$$

а условие согласования (2) дает равенство

$$y'_0 \left(\frac{\pi}{2} \right)_{\gamma_m} = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right).$$

С другой стороны, $y_0(x)_{\gamma_m} = \beta v(x, \lambda_0)$, и мы приходим к следующей системе уравнений относительно α_k , $k = \overline{1, m-1}$, и β , одновременно отличных от нуля:

$$\begin{cases} \alpha_k u_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) = \beta v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right), & k = \overline{1, m-1}, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) = \beta v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right). \end{cases} \quad (12)$$

Определитель этой системы $D(\lambda_0) = 0$, где

$$D(\lambda) = v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ u'_k \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \right\} - v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \prod_{i=1}^{m-1} u_i \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right).$$

Рассмотрим числовое множество $\Lambda(\lambda) = \{u_k(\pi/2, \lambda), k = \overline{1, m-1}\}$, зависящее от λ . Пусть $m_\Lambda(\lambda)$ – количество его нулевых элементов: $0 \leq m_\Lambda(\lambda) \leq m-1$. Множеству $\Lambda(\lambda)$ соответствует множество коэффициентов $\{\alpha_k, k = \overline{1, m-1}\}$. Заметим, что если при некотором λ_0 выполнено условие $v(\pi/2, \lambda_0) = 0$, то в силу системы (12) $m_\Lambda(\lambda_0) \neq 0$, иначе из первых $m-1$ уравнений системы (12) следует, что коэффициенты $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, а из последнего уравнения системы получаем, что $\beta = 0$. Это означает, что $y(x, \lambda_0)_\Gamma \equiv 0$. Аналогично можно показать, что если $v(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, то $m_\Lambda(\lambda_0) \neq 1$.

Пусть Ω – множество собственных значений краевой задачи (1)–(3); $\Omega^I, \Omega_\Gamma^{\text{II}}, \Omega_\Gamma^{\text{III}}$ – множества чисел λ следующего вида:

$$\begin{aligned} \Omega^I &= \left\{ \lambda : v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \neq 0, m_\Lambda(\lambda) = 0 \right\}, \\ \Omega_\Gamma^{\text{II}} &= \left\{ \lambda : v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \neq 0, m_\Lambda(\lambda) = \Upsilon \right\}, & \Upsilon = \overline{2, m-1}, \\ \Omega_\Gamma^{\text{III}} &= \left\{ \lambda : v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) = 0, m_\Lambda(\lambda) = \Upsilon \right\}, & \Upsilon = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место равенство*

$$\Omega = \Omega^I \cup \left(\bigcup_{\Upsilon=2}^{m-1} \Omega_\Gamma^{\text{II}} \right) \cup \left(\bigcup_{\Upsilon=1}^{m-1} \Omega_\Gamma^{\text{III}} \right)$$

(множества $\Omega^I, \Omega_\Gamma^{\text{II}}, \Omega_\Gamma^{\text{III}}$ не имеют общих элементов). При этом

- 1) если собственное значение $\lambda_0 \in \Omega^I \cup \Omega_2^{\text{II}} \cup \Omega_1^{\text{III}}$, то оно простое,
- 2) если $\lambda_0 \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{II}}$, $\Upsilon = \overline{3, m-1}$, то его кратность равна $\Upsilon - 1$,
- 3) если $\lambda_0 \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}}$, $\Upsilon = \overline{2, m-1}$, то его кратность равна Υ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем включение

$$\Omega^I \cup \left(\bigcup_{\Upsilon=2}^{m-1} \Omega_{\Upsilon}^{\text{II}} \right) \cup \left(\bigcup_{\Upsilon=1}^{m-1} \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}} \right) \subset \Omega.$$

1) Пусть $\lambda_0 \in \Omega^I$. Тогда $u_k(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $v(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$ и постоянные α_k , $k = \overline{2, m-1}$, и β определяются из системы (12):

$$\alpha_k = \alpha_1 \frac{u_1(\pi/2, \lambda_0)}{u_k(\pi/2, \lambda_0)}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \beta = \alpha_1 \frac{u_1(\pi/2, \lambda_0)}{v(\pi/2, \lambda_0)}.$$

Собственная функция $y_0(x)$ имеет вид

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{v(\pi/2, \lambda_0)}{u_k(\pi/2, \lambda_0)} u_k(x, \lambda_0), & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ v(x, \lambda_0), & x \in \gamma_m. \end{cases} \quad (13)$$

2) Если $\lambda_0 \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{II}}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$, то $u_k(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $k \neq m_i$, $i = \overline{1, \Upsilon}$, m_i , $i = \overline{1, \Upsilon}$, – индексы элементов множества $\Lambda(\lambda_0)$, равных нулю, т.е. $u_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = 0$, $i = \overline{1, \Upsilon}$. Из первых $m-1$ уравнений системы (12) вытекает, что $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $k \neq m_i$, $i = \overline{1, \Upsilon}$, $\beta = 0$, $\sum_{i=1}^{\Upsilon} \alpha_{m_i} u'_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = 0$. Представление (11) дает $\Upsilon - 1$ собственных функций

$$y_0^{i-1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad k \neq m_1, m_i, \\ u'_{m_i} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) u_{m_1}(x, \lambda_0), & x \in \gamma_{m_1}, \\ -u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) u_{m_i}(x, \lambda_0), & x \in \gamma_{m_i}. \end{cases} \quad (14)$$

3) Если $\lambda_0 \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}}$, $1 \leq \Upsilon \leq m-1$, то $v(\pi/2, \lambda_0) = 0$, $u_k(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $k \neq m_i$, $i = \overline{1, \Upsilon}$, m_i , $i = \overline{1, \Upsilon}$, – индексы элементов множества $\Lambda(\lambda_0)$, равных нулю, т.е. $u_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = 0$, $i = \overline{1, \Upsilon}$. Аналогично предыдущему пункту $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $k \neq m_i$, $i = \overline{1, \Upsilon}$, $\sum_{i=1}^{\Upsilon} \alpha_{m_i} u'_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = \beta v(\pi/2, \lambda_0)$, а представление (11) дает Υ собственных функций

$$y_0^i(x) = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad k \neq m_i, \\ v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) u_{m_i}(x, \lambda_0), & x \in \gamma_{m_i}, \\ u'_{m_i} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_0 \right) v(x, \lambda_0), & x \in \gamma_m. \end{cases} \quad (15)$$

Пусть теперь $\lambda_0 \in \Omega$, а $y_0(x)$ – соответствующая λ_0 собственная функция. Очевидно, что равенство $y_0(0)_{\gamma_k} = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, невозможно, иначе в силу краевых условий (3) $y'_0(\pi/2)_{\gamma_k} = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, т.е. $y_0(x)_{\gamma_k} = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, и $y_0(x)_{\Gamma} = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел $y_0(0)_{\gamma_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, отлично от нуля. Учитывая представление решения (11) краевой задачи (1)–(3), будем считать, что для некоторого фиксированного m_1 , $1 \leq m_1 \leq m-1$, значение

$y_0(0)_{\gamma_{m_1}} = y(0, \lambda_0)_{\gamma_{m_1}} \neq 0$ и, следовательно, $\alpha_{m_1} \neq 0$. Рассмотрим два случая: $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$ и $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_0) = 0$.

1. Если $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, то $u_k(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $v(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$ (равенство $\prod_{k=1}^{m-1} u_k(\pi/2, \lambda_0)v(\pi/2, \lambda_0) = 0$ невозможно, так как в этом случае в силу системы (11) возникает противоречие: $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_0) = 0$). Следовательно, $\lambda_0 \in \Omega^I$.

2. Если $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_0) = 0$, то возможны такие случаи:

а) $u_k(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $k \neq m_1$, $v(\pi/2, \lambda_0) = 0$ (случай, когда $\prod_{k=1, k \neq m_1}^{m-1} u_k(\pi/2, \lambda_0)v(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, невозможен, так как иначе $y(x, \lambda_0)_\Gamma \equiv 0$) и, следовательно, $\lambda_0 \in \Omega_1^{II}$;

б) $u_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = 0$, $1 \leq m_i \leq m-1$, $i = \overline{2, \Upsilon}$, Υ – фиксированное число, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$, $v(\pi/2, \lambda_0) \neq 0$, откуда следует, что $\lambda_0 \in \Omega_\Upsilon^{II}$;

в) $u_{m_i}(\pi/2, \lambda_0) = 0$, $1 \leq m_i \leq m-1$, $i = \overline{2, \Upsilon}$, Υ – фиксированное число, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$, $v(\pi/2, \lambda_0) = 0$, откуда следует, что $\lambda_0 \in \Omega_\Upsilon^{III}$.

Отсутствие общих элементов у множеств Ω^I , Ω_Υ^{II} , Ω_Υ^{III} очевидно.

СЛЕДСТВИЕ. Из соотношений (13)–(15) и представлений (7) функций $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, получаем следующие утверждения.

а) Если $\lambda_n = \lambda_n^I \in \Omega^I$, то простому собственному значению λ_n^I соответствует имеющая представление (13) собственная функция

$$\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) = \frac{1}{\beta_n^I} \varphi(x, \lambda_n^I),$$

где

$$\beta_n^I = \frac{1}{v(\pi/2, \lambda_n^I)} \prod_{i=1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^I\right),$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^{m-1} \prod_{i=1, i \neq k}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi_k(x, \lambda) \\ &\quad - (m-2) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{u_i(\pi/2, \lambda)}{\delta_1(\lambda)} \left(v'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi_1(x, \lambda) - u'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi_m(x, \lambda) \right), \end{aligned}$$

$\delta_1(\lambda) = v'(\pi/2, \lambda)u_1(\pi/2, \lambda) - u'_1(\pi/2, \lambda)v(\pi/2, \lambda)$. Аналогично при $\lambda_n = \lambda_n^{II} \in \Omega_2^{II}$ и $\lambda_n = \lambda_n^{III} \in \Omega_1^{III}$. Например, при $\lambda_n = \lambda_n^{III} \in \Omega_1^{III}$ простому собственному значению λ_n^{III} соответствует имеющая представление (15) (при $\Upsilon = 1$) собственная функция

$$\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^{III}, \beta_n^{III}) = \frac{1}{\beta_n^{III}} \varphi(x, \lambda_n^{III}),$$

где

$$\beta_n^{III} = \frac{u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{III})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{III})} \prod_{i=1, i \neq m_1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{III}\right)$$

(индекс m_1 определяется условием $u_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{III}) = 0$).

б) Если $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_{\text{I}}^{\text{III}}$, то кратному собственному значению λ_n^{III} соответствуют Υ имеющих представление (15) собственных функций

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= \frac{1}{u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \left(u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \varphi_{m_1}(x, \lambda_n^{\text{III}}) \right. \\ &\quad \left. - u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \varphi_{m_k}(x, \lambda_n^{\text{III}}) \right), \quad k = \overline{1, \Upsilon-1}, \\ \widehat{\varphi}_{\Upsilon}(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= \varphi_m(x, \lambda_n^{\text{III}}).\end{aligned}$$

Процесс ортогонализации Сони́на–Шмидта [5; гл. 2, §3, п. 2.3.4] для функций $\widehat{\varphi}_k(x, \lambda_n^{\text{III}})$ приводит к системе взаимно ортогональных собственных функций $\chi_k(x, \lambda_n^{\text{III}})$, $k = \overline{1, \Upsilon}$, где

$$\begin{aligned}\chi_1(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= \widehat{\varphi}_1(x, \lambda_n^{\text{III}}), \\ \chi_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= - \sum_{i=1}^{k-1} \theta_{ki} \chi_i(x, \lambda_n^{\text{III}}) + \widehat{\varphi}_k(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad k = \overline{2, \Upsilon}, \\ \theta_{ki} &= \frac{\int_{\Gamma} \widehat{\varphi}_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) \chi_i(x, \lambda_n^{\text{III}}) dx}{\int_{\Gamma} \chi_i^2(x, \lambda_n^{\text{III}}) dx}.\end{aligned}$$

Эти функции таковы:

$$\begin{aligned}\chi_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^k \vartheta_{m_i}(\lambda_n^{\text{III}})}{d_k(\lambda_n^{\text{III}}) \vartheta_{m_j}(\lambda_n^{\text{III}})} u'_{m_{k+1}} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) u'_{m_j} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) u_{m_j}(x, \lambda_n^{\text{III}}), \\ \quad x \in \gamma_{m_j}, \quad j = \overline{1, k}, \\ -u_{m_{k+1}}(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad x \in \gamma_{m_{k+1}}, \\ 0, \quad x \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad j \neq m_i, \quad i = \overline{1, k+1}, \end{cases} \\ \chi_{\Upsilon}(x, \lambda_n^{\text{III}}) &= \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^{\Upsilon} \vartheta_{m_i}(\lambda_n^{\text{III}})}{d_{m_0}(\lambda_n^{\text{III}}) \vartheta_{m_j}(\lambda_n^{\text{III}})} v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) u'_{m_j} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) u_{m_j}(x, \lambda_n^{\text{III}}), \\ \quad x \in \gamma_{m_j}, \quad j = \overline{1, \Upsilon}, \\ 0, \quad x \in \gamma_j, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad j \neq m_i, \quad i = \overline{1, \Upsilon}, \\ v(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad x \in \gamma_m, \end{cases}\end{aligned} \tag{16}$$

здесь

$$d_k(\lambda_n^{\text{III}}) = \sum_{j=1}^k u_{m_j}'^2 \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \prod_{i=1, i \neq j}^k \vartheta_{m_i}(\lambda_n^{\text{III}}), \quad k = \overline{1, \Upsilon},$$

представления $\vartheta_j(\lambda)$, $\vartheta(\lambda)$ указаны ниже перед теоремой 5.

в) Если $\lambda_n = \lambda_n^{\text{II}} \in \Omega_{\text{I}}^{\text{II}}$, то кратному собственному значению λ_n^{II} соответствуют $\Upsilon - 1$ имеющих представление (14) собственных функций $\widehat{\varphi}_k(x, \lambda_n^{\text{II}})$, $k = \overline{1, \Upsilon-1}$; соответствующая система взаимно ортогональных собственных функций – $\chi_k(x, \lambda_n^{\text{II}})$, $k = \overline{1, \Upsilon-1}$.

Пусть

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_n^I &= \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}^2(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) dx, & \widehat{\omega}_n^{III} &= \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}^2(x, \lambda_n^{III}, \beta_n^{III}) dx, \\ \vartheta_k(\lambda) &= \int_{\gamma_k} u_k^2(x, \lambda) dx, & k &= \overline{1, m+1}, & \vartheta(\lambda) &= \int_{\gamma_m} v^2(x, \lambda) dx.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть λ_n – собственное значение краевой задачи (1)–(3). Тогда

а) при $\lambda_n = \lambda_n^I \in \Omega^I$

$$\frac{d}{d\lambda} D(\lambda_n^I) = -\beta_n^I \widehat{\omega}_n^I, \quad \beta_n^I = \frac{1}{(\pi/2, \lambda_n^I)} \prod_{i=1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^I\right);$$

при $\lambda_n = \lambda_n^{III} \in \Omega_1^{III}$

$$\frac{d}{d\lambda} D(\lambda_n^{III}) = -\beta_n^{III} \widehat{\omega}_n^{III}, \quad \beta_n^{III} = \frac{u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{III})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{III})} \prod_{i=1, i \neq m_1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{III}\right);$$

б) при $\lambda_n = \lambda_n^{\Pi} \in \Omega_{\Upsilon}^{\Pi}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$,

$$\frac{d}{d\lambda} u_{m_k}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\Pi}\right) = \frac{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\Pi})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\Pi})}, \quad k = \overline{1, \Upsilon};$$

в) при $\lambda_n = \lambda_n^{III} \in \Omega_{\Upsilon}^{III}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} u_{m_k}\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{III}\right) &= \frac{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{III})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{III})}, & k &= \overline{1, \Upsilon}, \\ \frac{d}{d\lambda} v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{III}\right) &= -\frac{\vartheta(\lambda_n^{III})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{III})}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\lambda_n = \lambda_n^I \in \Omega^I$. Рассмотрим функцию $\varphi(x, \lambda)$ (следствие а) теоремы 4). Применяя формулу Лагранжа (10) к функциям $\varphi(x, \lambda)$ и $\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I)$, получаем

$$(\lambda - \lambda_n') \int_{\Gamma} \varphi(x, \lambda) \widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) dx = \langle \varphi(x, \lambda), \widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) \rangle_{x=\pi} \quad (17)$$

(слагаемые в точках $0 \in \gamma_k$, $k = \overline{1, m-1}$, и узле ξ равны нулю в силу представлений функций $\varphi(x, \lambda)$, $\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I)$ и условий согласования (2)). Исходя из представления функции $\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I)$ на γ_m можно заменить λ_n^I в правой части соотношения (17) на λ и получить следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n^I) \int_{\Gamma} \varphi(x, \lambda) \widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) dx \\ = [-\varphi'(x, \lambda) \widehat{\varphi}(x, \lambda, \beta_n^I) + \varphi(x, \lambda) \widehat{\varphi}'(x, \lambda, \beta_n^I)]_{x=\pi} \\ = [-\varphi'(x, \lambda) \widehat{\varphi}(x, \lambda, \beta_n^I) + \varphi(x, \lambda) \widehat{\varphi}'(x, \lambda, \beta_n^I)]_{x=\pi/2 \in \gamma_m} = -D(\lambda).\end{aligned}$$

Поделив левые и правые части этих равенств на $\lambda - \lambda_n^I$ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_n^I$, получаем

$$\frac{d}{d\lambda} D(\lambda_n^I) = -\beta_n^I \widehat{\omega}_n^I \neq 0.$$

Аналогично поступаем и при $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_1^{\text{III}}$, применяя формулу Лагранжа к функциям $\varphi(x, \lambda)$ и $\widehat{\varphi}(x, \lambda_n^{\text{III}}, \beta_n^{\text{III}})$.

б) При $\lambda_n = \lambda_n^{\text{II}} \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{II}}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$, применяя формулу Лагранжа к функциям $\Phi_k(x, \lambda) = u'_{m_k}(\pi/2, \lambda)\varphi_{m_1}(x, \lambda) - u'_{m_1}(\pi/2, \lambda)\varphi_{m_k}(x, \lambda)$, $k = \overline{2, \Upsilon}$, $\Phi_k(x, \lambda_n^{\text{II}})$, получаем

$$\begin{aligned} & u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \frac{d}{d\lambda} u_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) + u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \\ &= \frac{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})}{u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})} \vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{II}}) + \frac{u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})} \vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{II}}), \quad k = \overline{2, \Upsilon}. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее для функций $\Phi(x, \lambda)$ (см. пункт в)) и $\Phi(x, \lambda_n^{\text{II}})$ выводим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \left(\sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \right)^2 \frac{d}{d\lambda} u_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \\ &+ u'^2_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \\ &= \left(\sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \right)^2 \vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{II}}) + u'^2_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) \sum_{k=2}^{\Upsilon} \vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{II}}). \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) задают систему Υ уравнений, однозначно разрешенную относительно $\frac{d}{d\lambda} u_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})$, $k = \overline{1, \Upsilon}$, и аналогичную системе (18), (19). Ее решение имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right) = \frac{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{II}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{II}})} \neq 0, \quad k = \overline{1, \Upsilon}.$$

в) Пусть $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$. Очевидно, что функции $\varphi_k(x, \lambda_n^{\text{III}})$ (представление (7)) являются собственными функциями для λ_n^{III} . Применяя формулу Лагранжа (10) к функциям $\varphi_{m_k}(x, \lambda)$, $\varphi_{m_k}(x, \lambda_n^{\text{III}})$, получим

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda_n^{\text{III}}) \int_{\Gamma} \varphi_{m_k}(x, \lambda) \widehat{\varphi}_{m_k}(x, \lambda_n^{\text{III}}) dx = \langle \varphi_{m_k}(x, \lambda), \widehat{\varphi}_{m_k}(x, \lambda_n^{\text{III}}) \rangle_{x=\pi} \\ &= \frac{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \left[v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) - v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \right] \end{aligned}$$

(здесь, как и выше, возможна замена λ_n^{III} на λ). Переход к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_n^{\text{III}}$ дает

$$\begin{aligned} & v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) - u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \frac{d}{d\lambda} v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \\ &= \frac{v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{III}}) + \frac{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \vartheta(\lambda_n^{\text{III}}), \quad k = \overline{1, \Upsilon}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{k=2}^{\Upsilon} \left(u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \varphi_{m_1}(x, \lambda) - u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda \right) \varphi_{m_k}(x, \lambda) \right).$$

Тогда $\Phi(x, \lambda_n^{\text{III}})$ – собственная функция. Применяя формулу Лагранжа для $\Phi(x, \lambda)$ и $\Phi(x, \lambda_n^{\text{III}})$, получаем

$$\begin{aligned} & u'_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \left(\sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \right)^2 \frac{d}{d\lambda} u_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \\ & + u'^2_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \\ & = \left(\sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \right)^2 \vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{III}}) + u'^2_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \sum_{k=2}^{\Upsilon} \vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{III}}). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, получена система (20), (21), состоящая из $\Upsilon + 1$ уравнения относительно

$$\frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right), \quad k = \overline{1, \Upsilon}, \quad \frac{d}{d\lambda} v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right)$$

с определителем

$$u'^2_{m_1} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \left(v' \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \right)^{\Upsilon-1} \left(\left(\sum_{k=2}^{\Upsilon} u'_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \right)^2 + \sum_{k=2}^{\Upsilon} u'^2_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \right) \neq 0.$$

Значит, система (20), (21) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) &= \frac{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{III}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \neq 0, \quad k = \overline{1, \Upsilon}, \\ \frac{d}{d\lambda} v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) &= -\frac{\vartheta(\lambda_n^{\text{III}})}{v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \neq 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Отличие от нуля производных*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} D(\lambda_n^{\text{I}}), \quad \frac{d}{d\lambda} D(\lambda_n^{\text{III}}), \\ & \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{II}} \right), \quad \frac{d}{d\lambda} v \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right), \quad \frac{d}{d\lambda} u_{m_k} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda_n^{\text{III}} \right) \end{aligned}$$

означает простоту нулей $\lambda_n^{\text{I}}, \lambda_n^{\text{II}}, \lambda_n^{\text{III}}$ функции $D(\lambda)$.

Функцией Грина краевой задачи (1)–(3) [3; гл. 3, § 3.2, п. 3.2.3] назовем функцию $G(x, t, \lambda)$ такую, что решение неоднородной задачи

$$Ly - \lambda y = f(x),$$

$$y'(0)_{\gamma_k} - h_k y(0)_{\gamma_k} = 0, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad y'(\pi)_{\gamma_m} + Hy(\pi)_{\gamma_m} = 0$$

при любой функции $f(x)$ может быть представлено в виде

$$y(x, \lambda) = \int_{\Gamma} G(x, t, \lambda) f(t) dt,$$

т.е. функция $y(x, \lambda)$ является истокпредставимой с помощью ядра $G(x, t, \lambda)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &= \langle \varphi_k(x, \lambda), \varphi_m(x, \lambda) \rangle_{\gamma_k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \\ \Delta_m(\lambda) &= \langle \varphi_1(x, \lambda), \varphi_m(x, \lambda) \rangle_{\gamma_m}. \end{aligned}$$

В соответствии с представлениями (7) функций $\varphi_k(x, \lambda)$ имеем

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_m(\lambda) = \delta_1(\lambda), \quad \Delta_k(\lambda) = -v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) u'_k\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right), \quad k = \overline{2, m-1}.$$

Определим $G(x, t, \lambda)$ соотношением $G(x, t, \lambda) = G_0(x, t, \lambda) + g(x, \lambda)$, где

$$G_0(x, t, \lambda) = \frac{\delta_{ik}}{\Delta_k(\lambda)} \begin{cases} \begin{cases} \varphi_k(x, \lambda) \varphi_m(t, \lambda), & x \leq t, \\ \varphi_k(t, \lambda) \varphi_m(x, \lambda), & t \leq x, \end{cases} & \begin{matrix} x \in \gamma_k, \\ (k=\overline{1, m-1}) \end{matrix} & \begin{matrix} t \in \gamma_i, \\ (i=\overline{1, m}) \end{matrix} \\ \begin{cases} \varphi_1(x, \lambda) \varphi_m(t, \lambda), & x \leq t, \\ \varphi_1(t, \lambda) \varphi_m(x, \lambda), & t \leq x, \end{cases} & \begin{matrix} x \in \gamma_k, \\ (k=m) \end{matrix} & \begin{matrix} t \in \gamma_i, \\ (i=\overline{1, m}) \end{matrix} \end{cases}$$

$$g(x, \lambda)_{\gamma_k} = c_k \varphi_k(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m},$$

$c_k, k = \overline{1, m}$, определяются как решение системы m линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} u_k\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) c_k - v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) c_m \\ = G_0(x, t, \lambda)_{x=\pi/2 \in \gamma_m} - G_0(x, t, \lambda)_{x=\pi/2 \in \gamma_k}, & k = \overline{1, m-1}, \\ \sum_{k=1}^{m-1} u'_k\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) c_k - v'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) c_m \\ = \frac{\partial G_0}{\partial x}(x, t, \lambda)_{x=\pi/2 \in \gamma_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial G_0}{\partial x}(x, t, \lambda)_{x=\pi/2 \in \gamma_k}, \end{cases}$$

порожденной непрерывностью решения $y(x, \lambda)$ в узле ξ и условиями согласования (2). Определитель системы равен

$$D(\lambda) = v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ u'_k\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \right\} - v'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{i=1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right),$$

коэффициенты $c_k \equiv c_k(t, \lambda)$, $t \in \Gamma$, $k = \overline{1, m}$, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} c_k(t, \lambda)_{\gamma_k} &= -\frac{v(\pi/2, \lambda) D_k(\lambda)}{\Delta_k(\lambda) D(\lambda)} \varphi_k(t, \lambda), & k \neq m, \\ c_m(t, \lambda)_{\gamma_m} &= -\frac{D_k(\lambda)}{\Delta_m(\lambda) D(\lambda)} \varphi_m(t, \lambda), \\ c_i(t, \lambda)_{\gamma_k} &= -\frac{v(\pi/2, \lambda)}{D(\lambda)} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i, k)}}^{m-1} u_j\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi_k(t, \lambda), & i = \overline{1, m-1}, \quad i \neq k, \\ c_m(t, \lambda)_{\gamma_k} &= c_k(t, \lambda)_{\gamma_m} = -\frac{1}{D(\lambda)} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{m-1} u_j\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \varphi_k(t, \lambda), & k \neq m, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}
 D_1(\lambda) &= v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{j=2}^{m-1} \left\{ u'_j\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{\substack{i=2 \\ (i \neq j)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \right\}, \\
 D_k(\lambda) &= v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{m-1} u'_j\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k, j)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) - v'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right), \\
 k &= \overline{2, m-1}, \\
 D_m(\lambda) &= u_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{j=1}^{m-1} u'_j\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) - u'_1\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \prod_{i=1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, если λ не является нулем функций $\Delta_k(\lambda)D(\lambda)$, то функция Грина краевой задачи (1)–(3) существует и принимает вид

$$G(x, t, \lambda) = G_0(x, t, \lambda) + c_k(t, \lambda)\varphi_k(x, \lambda), \quad x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Очевидна симметричность функции $G(x, t, \lambda)$ по переменным $x, t \in \Gamma$.

Изучим асимптотическое поведение функций $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, в комплексной λ -плоскости спектрального параметра. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau = \operatorname{Im} \rho$, обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - k| \geq \delta > 0, k = 0, 1, 2, \dots\}$.

ТЕОРЕМА 6. При $|\rho| \rightarrow +\infty$ верны следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(x, \lambda) &= \begin{cases} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \cos \rho\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & x \in \gamma_i, \\ \cos \rho x, & x \in \gamma_k \cup \gamma_m, \end{cases} \quad \substack{(i=\overline{1, m-1}, i \neq k) \\ (k=\overline{1, m-1})} + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{|\rho|}\right), \\
 \varphi_m(x, \lambda) &= \rho \begin{cases} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \cos \rho\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & x \in \gamma_i, \\ \cos \rho(\pi - x), & x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \end{cases} + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{|\rho|}\right), \quad \substack{(i=\overline{2, m-1}) \\ (i=\overline{1, m-1}, i \neq k)}, \\
 \varphi'_k(x, \lambda) &= \rho \begin{cases} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \sin \rho\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & x \in \gamma_i, \\ -\sin \rho x, & x \in \gamma_k \cup \gamma_m, \end{cases} \quad \substack{(i=\overline{1, m-1}, i \neq k) \\ (k=\overline{1, m-1})} + O(\exp(|\tau|x)), \quad (23) \\
 \varphi'_m(x, \lambda) &= \rho \begin{cases} \cos\left(\frac{\rho\pi}{2}\right) \sin \rho\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & x \in \gamma_i, \\ \sin \rho(\pi - x), & x \in \gamma_1 \cup \gamma_m, \end{cases} \quad \substack{(i=\overline{2, m-1}) \\ (i=\overline{1, m-1}, i \neq k)} + O(\exp(|\tau|x)), \\
 \Delta_k(\lambda) &= \rho \sin \rho \pi \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \overline{2, m-1}, \\ 1, & k = 1, m, \end{cases} + O(\exp(|\tau|x)), \quad \rho \in G_\delta.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотические формулы (23) можно получить из представлений (7) для функций $\varphi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$, и вида $\Delta_k(\lambda)$, используя следующие асимптотические формулы для функций $u_k(x, \lambda)$, $v_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$,

и определителя $\delta_1(\lambda)$ [6; гл. 1, § 1.1, лемма 1.1.2, теорема 1.1.3]: при $|\rho| \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} u_k(x, \lambda) &= \cos \rho x + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{|\rho|}\right), \\ u'_k(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho x + O(\exp(|\tau|x)), \\ v_k(x, \lambda) &= \cos \rho(\pi - x) + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{|\rho|}\right), \\ v'_k(x, \lambda) &= \rho \sin \rho(\pi - x) + O(\exp(|\tau|x)), \\ \delta_1(\lambda) &= \rho \sin \rho \pi [1 + O(\exp(|\tau|x))] \end{aligned}$$

при $\rho \in G_\delta$.

СЛЕДСТВИЕ. Из представления (22) и асимптотических формул (23) следует, что для функции Грина верна оценка

$$G(x, t, \lambda) \leq \frac{C}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad (24)$$

при фиксированном $\delta > 0$ (C – постоянная).

ТЕОРЕМА 7. Система собственных функций краевой задачи (1)–(3) полна и образует ортогональный базис в $L_2(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим истокопредставимую функцию $Y(x, \lambda)$:

$$Y(x, \lambda) = \int_{\Gamma} G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad f(x) \in C[\Gamma],$$

и в комплексной λ -плоскости спектрального параметра получим вычеты в точках $\lambda_n \in \Omega$.

Используя представление функции Грина (22), на каждом из ребер γ_k , $k = \overline{1, m}$, получим следующие соотношения.

1) При $\lambda_n = \lambda_n^I \in \Omega^I$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^I} Y(x, \lambda)_{\gamma_k} &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^I} (\lambda - \lambda_n^I) Y(x, \lambda)_{\gamma_k} \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^I} \frac{(\lambda - \lambda_n^I)}{D(\lambda)} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{v(\pi/2, \lambda)}{u_j(\pi/2, \lambda)} \int_{\gamma_j} \varphi_j(t, \lambda) f(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_m} \varphi_m(t, \lambda) f(t) dt \right\} \varphi_k(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^I} Y(x, \lambda)_{\gamma_m} &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^I} (\lambda - \lambda_n^I) Y(x, \lambda)_{\gamma_m} \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^I} \frac{(\lambda - \lambda_n^I)}{D(\lambda)v(\pi/2, \lambda)} \prod_{i=1}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{v(\pi/2, \lambda)}{u_j(\pi/2, \lambda)} \int_{\gamma_j} \varphi_j(t, \lambda) f(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_m} \varphi_m(t, \lambda) f(t) dt \right\} \varphi_m(x, \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая следствие а) из теоремы 4 и п. а) теоремы 5,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^I} Y(x, \lambda)_{\Gamma} = \frac{1}{\widehat{\omega}_n^I} \widehat{\varphi}(x, \lambda_n^I, \beta_n^I) \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}(t, \lambda_n^I, \beta_n^I) f(t) dt. \quad (25)$$

Аналогичные рассуждения для $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_1^{\text{III}}$ приводят к соотношению

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{III}}} Y(x, \lambda)_\Gamma = \frac{1}{\widehat{\omega}_n^{\text{III}}} \widehat{\varphi}(x, \lambda_n^{\text{III}}, \beta_n^{\text{III}}) \int_\Gamma \widehat{\varphi}(t, \lambda_n^{\text{III}}, \beta_n^{\text{III}}) f(t) dt. \quad (26)$$

2) Пусть $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_\Upsilon^{\text{III}}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{III}}} Y(x, \lambda)_\Gamma &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n^{\text{III}}} (\lambda - \lambda_n^{\text{III}}) Y(x, \lambda)_\Gamma \\ &= \begin{cases} \frac{\vartheta(\lambda_n^{\text{III}}) u'_{m_1}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{III}}) v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \varphi_{m_1}(x, \lambda_n^{\text{III}}) \\ \quad \times \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^{\Upsilon-1} \frac{u'_{m_{i+1}}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_{i+1}}(\lambda_n^{\text{III}})} \widehat{\varphi}_i(t, \lambda_n^{\text{III}}) + \widehat{\varphi}_\Upsilon(t, \lambda_n^{\text{III}}) \right) f(t) dt, & x \in \gamma_{m_1}, \\ \varphi_{m_k}(x, \lambda_n^{\text{III}}) \left(-\frac{\vartheta(\lambda_n^{\text{III}}) u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{III}}) v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \left(\frac{u_{m_1}^{\prime 2}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{III}}) u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \right. \right. \\ \quad \times \int_\Gamma \widehat{\varphi}_{k-1}(t, \lambda_n^{\text{III}}) f(t) dt + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k-1)}}^{\Upsilon-1} \frac{u'_{m_{i+1}}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_{i+1}}(\lambda_n^{\text{III}})} \\ \quad \times \left. \int_\Gamma \left(\frac{u'_{m_{i+1}}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \widehat{\varphi}_{k-1}(t, \lambda_n^{\text{III}}) - \widehat{\varphi}_i(t, \lambda_n^{\text{III}}) \right) f(t) dt \right) \\ \quad - \frac{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_k}(\lambda_n^{\text{III}})} \int_\Gamma \left(\frac{v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{u'_{m_k}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \widehat{\varphi}_{k-1}(t, \lambda_n^{\text{III}}) - \widehat{\varphi}_\Upsilon(t, \lambda_n^{\text{III}}) \right) f(t) dt \Big), \\ \quad x \in \gamma_{m_k}, \quad k = \overline{2, \Upsilon}, \\ 0, & x \in \gamma_k, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad k \neq m_i, \quad i = \overline{1, \Upsilon}, \\ \varphi_m(x, \lambda_n^{\text{III}}) \left(\frac{u_{m_1}^{\prime 2}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_1}(\lambda_n^{\text{III}}) v'(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})} \int_\Gamma \widehat{\varphi}_\Upsilon(t, \lambda_n^{\text{III}}) f(t) dt \right. \\ \quad + \sum_{i=1}^{\Upsilon-1} \frac{u'_{m_{i+1}}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta_{m_{i+1}}(\lambda_n^{\text{III}})} \\ \quad \times \left. \int_\Gamma \left(\frac{u'_{m_{i+1}}(\pi/2, \lambda_n^{\text{III}})}{\vartheta(\lambda_n^{\text{III}})} \widehat{\varphi}_\Upsilon(t, \lambda_n^{\text{III}}) - \widehat{\varphi}_i(t, \lambda_n^{\text{III}}) \right) f(t) dt \right), & x \in \gamma_m. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая формулу (16) и п. б) теоремы 5, получаем

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{III}}} Y(x, \lambda)_\Gamma = \sum_{i=1}^{\Upsilon} \frac{1}{\int_\Gamma \chi_i^2(t, \lambda_n^{\text{III}}) dt} \chi_i(x, \lambda_n^{\text{III}}) \int_\Gamma \chi_i(t, \lambda_n^{\text{III}}) f(t) dt. \quad (27)$$

3) При $\lambda_n = \lambda_n^{\text{II}} \in \Omega_\Upsilon^{\text{II}}$, $2 \leq \Upsilon \leq m-1$, рассуждения, аналогичные предыдущему п. 2), приводят к представлению

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{II}}} Y(x, \lambda)_\Gamma = \sum_{i=1}^{\Upsilon-1} \frac{1}{\int_\Gamma \chi_i^2(t, \lambda_n^{\text{II}}) dt} \chi_i(x, \lambda_n^{\text{II}}) \int_\Gamma \chi_i(t, \lambda_n^{\text{II}}) f(t) dt. \quad (28)$$

Из полученных представлений вычетов (25)–(28) в точках λ_n следует, что если функция $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям, то

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x, \lambda) = 0$$

и, следовательно, при каждом фиксированном $x \in \Gamma$ функция $Y(x, \lambda)$ является целой по λ . Из (24) при фиксированном $\delta > 0$ и достаточно большом $\rho^* > 0$ получаем [6; гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.5] оценку

$$|Y(x, \lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*$$

(здесь C_δ – фиксированная постоянная). Используя принцип максимума модуля для аналитических функций [7; гл. IV, § 11, п. 36, теорема 1], заключаем, что $Y(x, \lambda) = 0$, $x \in \Gamma$. Отсюда следует, что $f(x) = 0$ п.в. на Γ . Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям, вытекает из теоремы 3; $\Upsilon - 1$ и Υ собственных функций, соответствующих каждому из собственных значений множеств $\Omega_\Gamma^{\text{II}}$ и $\Omega_\Gamma^{\text{III}}$, ортогональны по построению (следствия б) и в) к теореме 4). Теорема доказана.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ – множество всех собственных значений краевой задачи (1)–(3) с учетом кратности, упорядоченных по возрастанию. Пусть $\{y_n(x)\}_{n \geq 1}$ – множество собственных функций $y_n(x)$, соответствующих собственным значениям λ_n (кратным собственным значениям соответствуют собственные функции, упомянутые в следствии из теоремы 4 и взятые в произвольном порядке).

ТЕОРЕМА 8. Для любой абсолютно непрерывной функции $f(x)$, $x \in \Gamma$, имеет место разложение в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям $\{y_n(x)\}_{n \geq 1}$ краевой задачи (1)–(3):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x), \quad a_n = \int_{\Gamma} f(t) y_n(t) dt, \quad (29)$$

причем ряд сходится равномерно на Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x)$ – произвольная абсолютно непрерывная на Γ функция. Функция $Y(x, \lambda) = \int_{\Gamma} G(x, t, \lambda_n) f(t) dt$ примет вид:

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda)_{\gamma_k} &= \frac{1}{\lambda \Delta_k(\lambda)} \left(\varphi_m(x, \lambda) \int_0^x [-\varphi_k''(t, \lambda) + q(t) \varphi_k(t, \lambda)] f(t) dt \right. \\ &\quad + \varphi_k(x, \lambda) \int_x^{\pi/2} [-\varphi_m''(t, \lambda) + q(t) \varphi_m(t, \lambda)] f(t) dt \\ &\quad - \frac{v(\pi/2, \lambda) D_k(\lambda)}{D(\lambda)} \varphi_k(x, \lambda) \int_{\gamma_k} [-\varphi_k''(t, \lambda) + q(t) \varphi_k(t, \lambda)] f(t) dt \Big) \\ &\quad - \frac{\varphi_k(x, \lambda)}{\lambda D(\lambda)} \theta_k(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda)_{\gamma_m} &= \frac{1}{\lambda \Delta_m(\lambda)} \left(\varphi_m(x, \lambda) \int_{\pi/2}^x [-\varphi_1''(t, \lambda) + q(t) \varphi_1(t, \lambda)] f(t) dt \right. \\ &\quad + \varphi_1(x, \lambda) \int_x^{\pi} [-\varphi_m''(t, \lambda) + q(t) \varphi_m(t, \lambda)] f(t) dt \\ &\quad - \frac{D_m(\lambda)}{D(\lambda)} \varphi_m(x, \lambda) \int_{\gamma_m} [-\varphi_m''(t, \lambda) + q(t) \varphi_m(t, \lambda)] f(t) dt \Big) \\ &\quad - \frac{\varphi_m(x, \lambda)}{\lambda D(\lambda)} \theta_m(x, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\theta_k(x, \lambda) &= v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{m-1} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j, k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_j} [-\varphi_j''(t, \lambda) + q(t)\varphi_j(t, \lambda)] f(t) dt \\ &\quad + \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_m} [-\varphi_m''(t, \lambda) + q(t)\varphi_m(t, \lambda)] f(t) dt, \\ \theta_m(x, \lambda) &= \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_j} [-\varphi_j''(t, \lambda) + q(t)\varphi_j(t, \lambda)] f(t) dt.\end{aligned}$$

Учитывая вид (7) функций $\varphi_k(x, \lambda)$, в представлении функции $Y(x, \lambda)$, $x \in \Gamma$, вычислим по частям интегралы, содержащие вторые производные от $\varphi_k(x, \lambda)$:

$$Y(x, \lambda)_\Gamma = \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(S_1(x, \lambda) + S_2(x, \lambda)), \quad (30)$$

здесь

$$\begin{aligned}S_1(x, \lambda)_{\gamma_k} &= \frac{1}{\Delta_k(\lambda)} \left(\varphi_m(x, \lambda) \int_0^x \varphi_k'(t, \lambda) f'(t) dt + \varphi_k(x, \lambda) \int_x^{\pi/2} \varphi_m'(t, \lambda) f'(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(\pi/2, \lambda) D_k(\lambda)}{D(\lambda)} \varphi_k(x, \lambda) \int_{\gamma_k} \varphi_k'(t, \lambda) f'(t) dt \right) \\ &\quad - \frac{\varphi_k(x, \lambda)}{D(\lambda)} \widehat{\theta}_k(x, \lambda), \quad k = \overline{1, m-1}, \\ S_1(x, \lambda)_{\gamma_m} &= \frac{1}{\Delta_m(\lambda)} \left(\varphi_m(x, \lambda) \int_{\pi/2}^x \varphi_1'(t, \lambda) f'(t) dt + \varphi_1(x, \lambda) \int_x^\pi \varphi_m'(t, \lambda) f'(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_m(\lambda)}{D(\lambda)} \varphi_m(x, \lambda) \int_{\gamma_m} \varphi_1'(t, \lambda) f'(t) dt \right) - \frac{\varphi_m(x, \lambda)}{D(\lambda)} \widehat{\theta}_m(x, \lambda),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_k(x, \lambda) &= v\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{m-1} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j, k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_j} \varphi_j'(t, \lambda) f'(t) dt \\ &\quad + \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_m} \varphi_m'(t, \lambda) f'(t) dt, \\ \widehat{\theta}_m(x, \lambda) &= \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{m-1} u_i\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \int_{\gamma_j} \varphi_j'(t, \lambda) f'(t) dt,\end{aligned}$$

функция $S_2(x, \lambda)_\Gamma$ представлена оставшимися слагаемыми $Y(x, \lambda)_\Gamma$, не содержащими производные $\varphi_k'(t, \lambda)$, $k = \overline{1, m}$. Из асимптотических формул (23) и вида функции $S_2(x, \lambda)_\Gamma$ можно получить следующую оценку при фиксированном $\delta > 0$ и достаточно большом $\rho^* > 0$:

$$\max_{x \in \Gamma} |S_2(x, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*. \quad (31)$$

Рассмотрим функцию $S_1(x, \lambda)_\Gamma$. Предположим сначала, что $f(x)$ абсолютно непрерывна на каждом из ребер γ_k , $k = \overline{1, m}$. Обозначим $g(x) = f'(x)$, $x \in \Gamma$ (производные в точке $\pi/2$ односторонние). Тогда интегрирование по частям приводит $S_1(x, \lambda)$ к виду, содержащему под знаком производной только функцию $g(x)$. В силу асимптотических формул (23) получаем оценку, аналогичную (31):

$$\max_{x \in \Gamma} |S_1(x, \lambda)| \leq \frac{C}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*.$$

Пусть теперь $g(x) \in L(\Gamma)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию $g_\varepsilon(x)$ так, чтобы

$$\int_\Gamma |g(t) - g_\varepsilon(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}}, \quad \tilde{C} = \max_{x \in \Gamma} \sup_{\rho \in G_\delta} |S_1(x, \lambda)|.$$

Тогда при $\rho \in G_\delta$, $\rho \geq \rho^*$ имеем

$$\max_{x \in \Gamma} |S_1(x, \lambda)| \leq \max_{x \in \Gamma} |S_1(x, \lambda, g_\varepsilon)| + \max_\Gamma |S_1(x, \lambda, g - g_\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\tilde{C}}{|\rho|}.$$

Следовательно, существует $\rho^0 > 0$ такое, что $\max_\Gamma |S_1(x, \lambda)| \leq \varepsilon$ при $\rho > \rho^0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \max_{x \in \Gamma} |S_1(x, \lambda)| = 0, \quad \rho \in G_\delta. \quad (32)$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R_N} Y(x, \lambda) d\lambda, \quad R_N = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \right\}, \quad 1 \leq N \in \mathbb{N}$$

(обход против часовой стрелки). Из (31), (32) вытекает, что

$$I_N(x) = f(x) + \varepsilon_N(x), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in \Gamma} |\varepsilon_N(x)| = 0.$$

С другой стороны, можно вычислить $I_N(x)$ с помощью теоремы о вычетах [7; гл. II, § 7, п. 26, теорема 1]. Рассмотрим следующие случаи (следствие из теоремы 4).

1. Пусть $\lambda_n = \lambda_n^I \in \Omega^I$. Тогда

$$y(x, \lambda_n^I) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\omega}_n^I}} \widehat{\varphi}_1(x, \lambda_n^I \beta_n^I), \quad x \in \Gamma.$$

Вычеты функции $Y(x, \lambda)_\Gamma$ в точках λ_n^I определяются формулой (25):

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^I} Y(x, \lambda)_\Gamma = a(\lambda_n^I) y(x, \lambda_n^I), \quad a(\lambda_n^I) = \int_\Gamma y(t, \lambda_n^I) f(t) dt. \quad (33)$$

Аналогично для $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_1^{\text{III}}$ получаем, что

$$y(x, \lambda_n^{\text{III}}) = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\omega}_n^{\text{III}}}} \widehat{\varphi}_1(x, \lambda_n^{\text{III}} \beta_n^{\text{III}}), \quad x \in \Gamma.$$

Вычеты функции $Y(x, \lambda)_\Gamma$ в точках λ_n^{III} определяются формулой (26):

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{III}}} Y(x, \lambda)_\Gamma = a(\lambda_n^{\text{III}}) y(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad a(\lambda_n^{\text{III}}) = \int_\Gamma y(t, \lambda_n^{\text{III}}) f(t) dt. \quad (34)$$

2. Пусть $\lambda_n = \lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}}$, $\Upsilon = \overline{2, m-1}$. Каждому собственному значению λ_n^{III} соответствуют Υ собственных функций

$$y_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) = \frac{1}{\sqrt{\int_{\Gamma} \chi_k^2(t, \lambda_n^{\text{III}}) dt}} \chi_k(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad k = \overline{1, \Upsilon}$$

(следствие б) из теоремы 4); вычеты функции $Y(x, \lambda)_{\Gamma}$ в точках λ_n^{III} определяются формулой (27):

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{III}}} Y(x, \lambda)_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{\Upsilon} a_k(\lambda_n^{\text{III}}) y_k(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad a_k(\lambda_n^{\text{III}}) = \int_{\Gamma} y_k(t, \lambda_n^{\text{III}}) f(t) dt. \quad (35)$$

3. Пусть $\lambda_n = \lambda_n^{\text{II}} \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{II}}$, $\Upsilon = \overline{2, m-1}$. Каждому собственному значению λ_n^{II} соответствуют $\Upsilon - 1$ собственных функций

$$y_k(x, \lambda_n^{\text{II}}) = \frac{1}{\sqrt{\int_{\Gamma} \chi_k^2(t, \lambda_n^{\text{II}}) dt}} \chi_k(x, \lambda_n^{\text{II}}), \quad k = \overline{1, \Upsilon - 1}$$

(следствие в) из теоремы 4); вычеты функции $Y(x, \lambda)_{\Gamma}$ в точках λ_n^{II} определяются формулой (28):

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_n^{\text{II}}} Y(x, \lambda)_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{\Upsilon-1} a_k(\lambda_n^{\text{II}}) y_k(x, \lambda_n^{\text{II}}), \quad a_k(\lambda_n^{\text{II}}) = \int_{\Gamma} y_k(t, \lambda_n^{\text{II}}) f(t) dt. \quad (36)$$

Множество R_N (N фиксировано) содержит конечное число собственных чисел вида λ_n^{I} , λ_n^{II} , λ_n^{III} . Отсюда, учитывая формулы (33)–(36), получаем, что $I_N(x)$ будет содержать конечное число слагаемых вида

$$\begin{aligned} & a(\lambda_n^{\text{I}}) y(x, \lambda_n^{\text{I}}), \quad a(\lambda_n^{\text{III}}) y(x, \lambda_n^{\text{III}}), \quad (\lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_1^{\text{III}}), \\ & \sum_{k=1}^{\Upsilon-1} a_k(\lambda_n^{\text{II}}) y_k(x, \lambda_n^{\text{II}}), \quad \sum_{k=1}^{m_0} a_k(\lambda_n^{\text{III}}) y_k(x, \lambda_n^{\text{III}}) \quad (\lambda_n^{\text{III}} \in \Omega_{\Upsilon}^{\text{III}}). \end{aligned}$$

Перенумеровка коэффициентов $a(\lambda_n^{\text{I}})$, $a(\lambda_n^{\text{II}})$, $a_k(\lambda_n^{\text{III}})$ и переобозначение собственных функций в соответствии с кратностями собственных значений приводит к коэффициентам a_n и собственным функциям $y_n(x)$, а последующий переход к пределу при $N \rightarrow \infty$ дает (29). Остается отметить, что система собственных функций $\{y_n(x)\}_{n \geq 1}$ образует ортонормальный базис в $L_2(\Gamma)$: для $f(x) \in L_2(\Gamma)$ ряд (29) сходится в $L_2(\Gamma)$, причем имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{\Gamma} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Теорема доказана.

В заключение приведем пример моделирования колебательных процессов упругой мачты с поддерживающими упругими растяжками. Остановимся на модели так называемой одноуровневой системы “мачта–растяжки”, имеющей один узел закрепления растяжек к телу мачты [2; соотношения (25), (26)]. При этом мачтовый континуум, находящийся выше узла закрепления растяжек, имеет массу несравнимо меньшую, чем масса остальной части мачты, что

дает возможность пренебречь ею в модели. Если же учитывать указанное обстоятельство, то мачтовый континуум, находящийся выше узла закрепления растяжек, интерпретируется как точка узла закрепления растяжек, несущая сосредоточенную массу, равную массе этого континуума, и для исследования необходимо привлекать теорию дифференциальных уравнений с производными по мере [3; гл. 7]. Континуум, находящийся ниже узла закрепления растяжек, испытывает продольные колебания.

Пусть многообразие $\mathfrak{Z}$ – граф-звезда с ребрами $\mathfrak{Z}_k$, $k = \overline{1, m}$, и узлом ξ , и пусть каждое ребро $\mathfrak{Z}_k$, $k = \overline{1, m-1}$, параметризовано отрезком $[0, \ell/2]$, а ребро $\mathfrak{Z}_m$ – отрезком $[\ell/2, \ell]$. Моделирование колебательного процесса осуществляется на графе $\mathfrak{Z}$ и описывается для $(\zeta, t) \in \mathfrak{Z} \times [0, T]$ соотношениями, состоящими из m уравнений

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(a(\zeta) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}(\zeta, t) \right) - b(\zeta) \Omega(\zeta, t) \quad (37)$$

на каждом ребре $\mathfrak{Z}_k$, $k = \overline{1, m}$, и уравнением в узле ξ :

$$a\left(\frac{\ell}{2}\right)_{\mathfrak{Z}_m} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\left(\frac{\ell}{2}, t\right)_{\mathfrak{Z}_m} - \sum_{k=1}^{m-1} a\left(\frac{\ell}{2}\right)_{\mathfrak{Z}_k} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\left(\frac{\ell}{2}, t\right)_{\mathfrak{Z}_k} = b\left(\frac{\ell}{2}\right)_{\mathfrak{Z}_m} \Omega\left(\frac{\ell}{2}, t\right)_{\mathfrak{Z}_m} \quad (38)$$

(соотношения (37), (38) назовем *уравнением колебания на графе $\mathfrak{Z}$*).

Для получения математической модели физического процесса естественным образом ставятся начальные условия при $\zeta \in \mathfrak{Z}$, $t = 0$:

$$\Omega(\zeta, 0) = \tau(\zeta), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t}(\zeta, 0) = \hat{\tau}(\zeta), \quad (39)$$

и граничные условия в точках $0 \in \mathfrak{Z}_k$, $k = \overline{1, m-1}$, $\ell \in \mathfrak{Z}_m$ (условия во внешних узлах графа $\mathfrak{Z}$):

$$a(0)_{\mathfrak{Z}_k} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}(0, t)_{\mathfrak{Z}_k} - h_k \Omega(0, t)_{\mathfrak{Z}_k} = 0, \quad a(\ell) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}(\ell, t) + H \Omega(\ell, t) = 0. \quad (40)$$

Применение метода Фурье к задаче (37)–(40) и последующие преобразования, аналогичные преобразованиям Лиувилля (см., например, [8; гл. II, § 1.2]) приводят к задаче Штурма–Лиувилля (1)–(3) на графе Γ , где потенциал $q(x)$ определяется через функции $a(\zeta)$, $b(\zeta)$: компоненты $q(x)_{\gamma_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, определяют упругие характеристики поддерживающих растяжек, $q(x)_{\gamma_m}$ – упругие характеристики продольных колебаний мачты.

Обоснованием метода Фурье при отыскании решения граничной задачи (37)–(40) являются теоремы 7 и 8.

Список литературы

- [1] М. Г. Завгородний, “Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе”, *Докл. РАН*, **335:3** (1994), 281–283; англ. пер.: M. G. Zavgorodnii, “Spectral completeness of the root functions of a boundary value problem on a graph”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **49:2** (1994), 298–302.
- [2] В. В. Провоторов, “Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты”, *Вестн. Ворон. ун-та. Сер. Сист. анализ и информ. техн.*, 2006, № 2, 28–35.

- [3] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [4] Э. Ч. Титчмарш, *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, ч. 1, ИЛ, М., 1960; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1946.
- [5] Л. Я. Цлаф, *Вариационное исчисление и интегральные уравнения*, Наука, М., 1970.
- [6] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [7] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного*, Наука, М., 1976; фр. пер.: B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe. Tome 1. Fonctions d'une variable*, Traduit Russe Math., Mir, Moscow, 1990.
- [8] А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1979.

В. В. Провоторов (V. V. Provotorov)
Воронежский государственный университет
E-mail: zao_vpo@mail.ru

Поступила в редакцию
17.10.2007 и 19.05.2008