Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Парфенов, Поперечники некоторых классов целых функций, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 87–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:24:52

УДК 517.51

О. Г. Парфёнов

Поперечники некоторых классов целых функций

В работе изучается асимптотическое поведение поперечников классов целых функций в равномерной метрике на некотором компакте. Получена формула логарифмической асимптотики, в которую кроме естественных параметров, определяющих рост функций данного класса на бесконечности, входит емкость компакта. При некоторых дополнительных условиях получена формула слабой асимптотики. Рассмотрен пример вычисления сильной асимптотики.

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

Пусть $d\nu$ – конечная борелевская мера на $[0, \infty)$ такая, что для любого натурального n

$$\int t^n d\nu(t) < \infty$$

и носитель ν содержит точку ∞ . Обозначим через $\mathbf{A}^p(\nu)$ класс целых функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являющийся замыканием множества многочленов по норме

$$\|f\|_{\mathbf{A}^p(\nu)}^p = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p d\nu(r) d\varphi, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $z = re^{i\varphi}$. Эти классы состоят из целых функций, рост которых может быть каким угодно (он описывается мерой ν). Для каждого p , $1 \leq p < \infty$, определим последовательность:

$$m_n(\nu, p) = \left(\int_0^\infty t^{np} d\nu(t) \right)^{1/p}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Отметим сразу, что эта последовательность имеет сверхстепенной рост, т.е. для любого $k > 0$ имеем: $m_n(\nu, p)n^{-k} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть далее K – компакт в $\mathbb{C}$ и $C(K)$ – банахово пространство непрерывных функций с обычной нормой. Работа посвящена исследованию поперечников единичного шара $\mathbf{A}^p(\nu)$ в пространстве $C(K)$. Мы будем рассматривать поперечники в смысле Гельфанда, Бернштейна, Колмогорова, а также линейные. Точные определения приводятся ниже. Будем обозначать пока любой из этих поперечников символом $u_n(\cdot)$. Разумеется, убывание поперечников определяется последовательностью $\{m_n(\nu, p)\}_0^\infty$. Мы устанавливаем также связь скорости убывания

Работы выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №98-01-00868).

поперечников с емкостью компакта K . Напомним определение емкости K . Обозначим:

$$M_n = \min_{P_n^0} \max_{z \in K} |P_n^0(z)|,$$

где P_n^0 — произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. По теореме Сегё (см. [1; гл. 7, §3]) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^{1/n} = \text{cap } K, \quad (3)$$

называемый *емкостью (логарифмической)* компакта K . Разумеется, имеется много эквивалентных определений (см. [1; гл. 7]), мы выбрали наиболее удобное для настоящей работы.

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ такие, что*

$$u_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K)) \leq A_\varepsilon (1 + \varepsilon)^n \frac{(\text{cap } K)^n}{m_n(\nu, p)}, \quad (4)$$

$$u_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K)) \geq B_\varepsilon (1 - \varepsilon)^n \frac{(\text{cap } K)^n}{m_n(\nu, p)}. \quad (5)$$

Напоминаем, что u_n — любой из четырех видов поперечников, перечисленных вначале, $\mathbf{BA}^p(\nu)$ — единичный шар класса $\mathbf{A}^p(\nu)$.

Таким образом, в теореме 1 вычислена логарифмическая асимптотика поперечников. Для получения более точных оценок нужна более точная информация о компакте K . Мы получим слабую асимптотику, т.е. соотношения типа (4), (5) при $\varepsilon = 0$ и некоторых ограничениях на меру ν и компакт K (см. §3).

Наконец, сильная асимптотика зависит от положения K в $\mathbb{C}$; мы приводим один пример на эту тему в конце работы. План статьи следующий: в §2 мы докажем теорему 1, в §3 рассматривается слабая асимптотика поперечников, наконец, в §4 содержится пример на тему сильной асимптотики.

Работа обсуждалась на семинаре проф. В.М. Тихомирова в МГУ. Автор выражает искреннюю признательность В.М. Тихомирову и всем участникам его семинара по теории приближений за внимание к работе и ценные замечания.

§2. Доказательство теоремы 1

1. Основные определения. Кратко напомним определения поперечников и соотношения между ними. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и T — линейный ограниченный оператор, действующий из X в Y . Далее нумерация поперечников производится начиная с $n = 0$.

1) n -м поперечником по Бернштейну называется число

$$b_n(T) = \sup_{L_{n+1}} \inf_{x \in L_{n+1}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X},$$

L_{n+1} — произвольное $(n+1)$ -мерное подпространство X .

2) n -м поперечником по Гельфанду называется число

$$d^n(T) = \inf_{L_n^-} \sup_{x \in L_n^-} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X},$$

L_n^- – произвольное подпространство X коразмерности n .

3) n -м поперечником по Колмогорову называется число

$$d_n(T) = \inf_{L_n} \sup_{x \in BX} \inf_{y \in L_n} \|Tx - y\|_Y,$$

L_n – произвольное n -мерное подпространство X .

4) n -м линейным поперечником называется число

$$\delta_n(T) = \inf_{T_n} \sup_{x \in BX} \|(T - T_n)x\|_Y,$$

T_n – произвольный линейный ограниченный оператор из X в Y ранга n .

Имеют место неравенства:

$$b_n(T) \leq d^n(T) \leq \delta_n(T), \quad (6)$$

$$b_n(T) \leq d_n(T) \leq \delta_n(T) \quad (7)$$

(см. [2; гл. 1]).

Мы будем рассматривать оператор вложения $\mathbf{J}$ из пространства $\mathbf{A}^p(\nu)$ в пространство $C(K)$. Определения поперечников для множеств можно найти в [2; гл. 2]. Отметим лишь равенство: для всех n и любого вида поперечников $u_n(\cdot)$ имеем

$$u_n(\mathbf{J}) = u_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K)).$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить оценку (4) для линейных поперечников, а для бернштейновских – оценку (5).

2. Оценка поперечников по Бернштейну снизу. Начнем с оценки снизу $b_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K))$. Заметим, что норма пространства $\mathbf{A}^p(\nu)$ эквивалентна норме

$$\left(\int_{|z| \geq R} |f(z)|^p d\nu(r) d\varphi \right)^{1/p} \quad (8)$$

при любом $R > 0$, так как носитель ν содержит ∞ . Рассмотрим подпространство $\mathbf{P}_n$ многочленов степени n в $\mathbf{A}^p(\nu)$ с нормой (8) при $R = R_0 = \max_{z \in K} |z|$. Имеем:

$$\inf_{P \in \mathbf{P}_n} \frac{\|P \mid C(K)\|}{\|P \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|} = \inf_{P \in \mathbf{P}_n \cap \mathbf{BA}^p(\nu)} \|P \mid C(K)\|. \quad (9)$$

Отсюда в силу компактности $\mathbf{P}_n \cap \mathbf{BA}^p(\nu)$ следует существование экстремального многочлена P_n^* для задачи (9). Докажем, что все корни $\{z_k\}_1^n$ многочлена P_n^*

лежат внутри круга с центром в нуле радиуса $R_0 = \max_{z \in K} |z|$. Допустим, что $|z_k| > R_0$ для некоторого k . Рассмотрим функцию

$$f_k(z) = \frac{|z_k|}{R_0} \cdot \frac{z - R_0^2/\bar{z}_k}{z - z_k}.$$

При $|z| < R_0$ имеем оценку $|f_k(z)| < 1$, а при $|z| > R_0$ — оценку $|f_k(z)| > 1$. Следовательно, при замене в многочлене P_n^* множителя $|z - z_k|$ на множитель $|z - R_0^2/\bar{z}_k|$ норма P_n^* в $C(K)$ уменьшится, а норма P_n^* в $\mathbf{A}^p(\nu)$ увеличится. Уточним, что речь идет о норме (8) при $R = R_0$. Это противоречит экстремальности P_n^* . Далее удобнее рассматривать многочлен $Q_n^* = P_n^*/a_n$, a_n — старший коэффициент P_n^* . Имеем:

$$\inf_{P \in \mathbf{P}_n} \frac{\|P \mid C(K)\|}{\|P \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|} = \frac{\|Q_n^* \mid C(K)\|}{\|Q_n^* \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|}.$$

Хорошо известна оценка (см., например, [3])

$$\|Q_n^* \mid C(K)\| \geq (\text{cap } K)^n \quad (10)$$

для любого многочлена степени n со старшим коэффициентом 1. Оценим теперь $\|Q_n^* \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|$ сверху. Возьмем $\varepsilon > 0$ и R : $R_0/R < \varepsilon$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|Q_n^* \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|^p &= \int_{\mathbb{C}} |Q_n^*|^p d\nu(r) d\varphi \leq c(R) \int_{|z| \geq R} |Q_n^*|^p d\nu(r) d\varphi \\ &\leq c(R) \int_{|z| \geq R} |z|^{np} (1 + \varepsilon)^{np} d\nu(r) d\varphi \\ &\leq c(R) \int_{\mathbb{C}} |z|^{np} (1 + \varepsilon)^{np} d\nu(r) d\varphi \\ &= 2\pi c(R) (1 + \varepsilon)^{np} m_n^p(\nu, p). \end{aligned} \quad (11)$$

Мы опять использовали эквивалентность нормы (8) норме $\mathbf{A}^p(\nu)$. Оценки (10) и (11) доказывают требуемую оценку снизу.

3. Оценка линейных поперечников сверху. Оценим сверху линейные поперечники $\delta_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K))$. Возьмем произвольный набор точек $\{z_k\}_1^n$ в круге $\{z : |z| < R_0\}$ и для любой функции $f \in \mathbf{A}^p(\nu)$ построим интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в точках $\{z_k\}_1^n$. Обозначим его через f_n . По формуле Эрмита (см. [4])

$$\begin{aligned} f(z) - f_n(z) &= P_n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t) dt}{P_n(t)(t-z)}, \quad r > R_0, \\ P_n(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f(z) - f_n(z) \mid C(K)\| &\leq \|P_n \mid C(K)\| \cdot \|g_n \mid C(K)\|, \\ g_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t) dt}{P_n(t)(t-z)}. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $R_0/R < \varepsilon$. Имеем $|P_n(t)(t-z)| > |t(1-\varepsilon)|^{n+1}$; $|dt|/|t| = d\varphi$. Применим неравенство Минковского при $r \geq R$ по мере $d\varphi$

$$\|g_n \mid C(K)\|^p \leq \frac{(1-\varepsilon)^{-1}}{(2\pi)^p} \int_{|t|=r} \frac{|f(t)|^p d\varphi}{|t(1-\varepsilon)|^{np}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f(z) - f_n(z) \mid C(K)\|^p & \int_R^\infty r^{np} d\nu(r) \\ & \leq \|P_n \mid C(K)\|^p \frac{(1-\varepsilon)^{-1}}{(2\pi(1-\varepsilon)^n)^p} \int_{|t| \geq R} |f|^p d\nu d\varphi \\ & \leq \frac{(1-\varepsilon)^{-1}}{(2\pi(1-\varepsilon)^n)^p} \|P_n \mid C(K)\|^p \cdot \|f \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|^p. \end{aligned}$$

Остается заметить, что при фиксированном $R > 0$

$$\int_R^\infty t^{np} d\nu(t) \sim m_n^p(\nu, p), \quad n \rightarrow \infty.$$

(Поясним: $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.) Итак, мы показали, что

$$\|f - f_n \mid C(K)\| \leq C_\varepsilon \frac{(1+\varepsilon)^n}{m_n(\nu, p)} \|P_n \mid C(K)\| \cdot \|f \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|.$$

В данном неравенстве возьмем в качестве P_n чебышёвский многочлен компакта K . Остается сослаться на соотношение (3) из определения емкости. Теорема 1 полностью доказана.

§3. О слабой асимптотике поперечников

Пусть мера ν такова, что существуют постоянные $c > 0$, $\beta > 0$ такие, что при всех n

$$\int_0^\infty t^{np} d\nu(t) \leq c \int_{\beta n}^\infty t^{np} d\nu(t). \quad (12)$$

Другими словами, имеет место соотношение:

$$m_n^p(\nu, p) \asymp \left(\int_{\beta n}^\infty t^{np} d\nu(t) \right)^{1/p}. \quad (13)$$

(Запись $a_n \asymp b_n$, $n \rightarrow \infty$, означает, что существуют постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 a_n \leq b_n \leq c_2 a_n$.) Из соотношения (13) вытекает важное замечание. Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность точек внутри фиксированного круга радиуса R_0 и $P_n^0(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$. Тогда имеем

$$m_n(\nu, p) \asymp \|P_n^0 \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|. \quad (14)$$

Действительно,

$$\|P_n^0 \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|^p \asymp \int_{|z| \geq \beta n} |z|^{pn} \left| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{z_k}{z}\right) \right|^p d\nu d\theta.$$

Далее,

$$\left| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{z_k}{z}\right) \right|^p \leq \left(1 + \frac{R_0}{\beta n}\right)^{pn} \leq C \exp\left(\frac{R_0 p}{\beta}\right)$$

и, аналогично, это выражение можно оценить снизу.

Теперь легко получить следующий результат для компактов K , граница которых есть конечное объединение замкнутых кривых Жордана класса $C^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Для таких компактов теорему Сегё (3) можно значительно усилить (см. [3]). В частности, для таких компактов справедливо соотношение

$$\min_{P_n^0} \max_{z \in K} |P_n^0(z)| \asymp (\text{cap } K)^n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, условия (12) и (15). Тогда для поперечников $u_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K))$ (см. обозначения теоремы 1) имеет место формула

$$u_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K)) \asymp \frac{(\text{cap } K)^n}{m_n(p, \nu)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим поперечники по Бернштейну $b_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K))$ снизу. Повторяя соответствующие рассуждения теоремы 1, получаем, что нужно лишь усилить оценку сверху $\|P_n^0 \mid \mathbf{A}^p(\nu)\|$. Для получения оценки снизу достаточно соотношения (14).

Оценим теперь сверху линейные поперечники $\delta_n(\mathbf{BA}^p(\nu), C(K))$. Напомним оценку приближения с помощью интерполяционных многочленов:

$$\|f(z) - f_n(z) \mid C(K)\| \leq \|P_n \mid C(K)\| \cdot \|g_n \mid C(K)\|, \quad (17)$$

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(t) dt}{P_n(t)(t-z)}. \quad (18)$$

Возьмем в качестве P_n чебышёвский многочлен P_n^* :

$$\|P_n^* \mid C(K)\| = \min_{P_n^0} \|P_n^0 \mid C(K)\|.$$

Как известно, корни P_n^* лежат внутри круга $\{z : |z| \leq R_0\}$, и при $r \geq \beta n$ из (18) получим

$$\|g_n \mid C(K)\|^p \leq \frac{C_\beta}{(2\pi)^p} \int_{|t|=r} \frac{|f(t)|^p d\varphi}{|t|^{np}} \quad (19)$$

(см. аналогичную оценку в доказательстве теоремы 1). Далее, умножим (17) на $|r|^{np}$ и проинтегрируем по мере $d\nu(r)$:

$$\|f(z) - f_n(z) \mid C(K)\|^p \int_{\beta n}^{\infty} r^{np} d\nu(r) \leq \|P_n^* \mid C(K)\|^p \frac{C_\beta}{(2\pi)^p} \int_{|z| \geq \beta n} |f|^p d\nu d\varphi.$$

Применяя (13) и (15), получим требуемую оценку сверху.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем пример мер ν , для которых выполнено условие (12). Именно, пусть $d\nu(t) = \exp(-t^s) dt$. Тогда при $s \leq 1$ выполнено (12) и, следовательно, соотношение (16). Соответственно при $s > 1$ условие (12) не выполнено (см., например, [5]).

§ 4. О сильной асимптотике. Пример

В заключение работы приведем пример, относящийся к сильной асимптотике. Пусть $d\nu(t) = t \exp(-t^2) dt$. Соответствующий класс целых функций называется классом Фока (Фока–Баргмана) и обозначается символом $\mathbf{F}^2$. Пусть

$$K = S_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbf{J}$ класса $\mathbf{F}^2$ в $\mathbf{L}_2(S_r(z_0))$. В данной ситуации все виды рассмотренных поперечников совпадают, кроме того, они совпадают с сингулярными числами (s -числами) оператора $\mathbf{J}$. Напомним, что для оператора $\mathbf{J}$ (компактного), действующего из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 , по определению n -м *сингулярным числом* называется $s_n(\mathbf{J}) = \lambda_n((\mathbf{J}^* \mathbf{J})^{1/2})$, где $\lambda_n(\cdot)$ – n -е собственное число с учетом кратности. Итак, рассмотрим оператор вложения $\mathbf{J}$ класса $\mathbf{F}^2$ в $\mathbf{L}_2(S_r(z_0))$. Можно доказать, что

$$s_n(\mathbf{J}) \asymp \frac{r^n}{\sqrt{n!}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы докажем более сильное соотношение

$$s_n(\mathbf{J}) \sim \exp\left(\frac{|z_0|^2}{2}\right) \frac{r^n}{\sqrt{n!}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Выполняя замену переменных $w = z - z_0$, можно заметить, что $\mathbf{J}$ унитарно эквивалентен оператору вложения класса целых функций $\mathbf{F}_{z_0, r}^2$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{F}_{z_0, r}^2} = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-|z - z_0|^2) dS$$

в $\mathbf{L}_2(S_r(0)) = \mathbf{L}_2(S_r)$. Далее, имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_{z_0, r}^2 & \xrightarrow{\mathbf{J}_1} & \mathbf{L}_2(S_r) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \tau \\ \mathbf{F}^2 & \xrightarrow{\mathbf{J}_2} & \mathbf{L}_2(S_r, p \, dm) \end{array}.$$

Операторы π, τ определим так: $(\pi f)(z) = f(z) \exp(z \bar{z}_0)$, $(\tau g)(z) = g(z) \exp(-z \bar{z}_0)$; $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ – операторы вложения, dm – мера Лебега и, наконец, вес $p(z) = \exp(-2 \operatorname{Re}(z \bar{z}_0))$. Так как π, τ унитарны, то $s_n(\mathbf{J}_1) = s_n(\mathbf{J}_2)$. Сингулярные числа взвешенных операторов свертки рассматривались автором в [6]. Именно таким оператором является $\mathbf{J}_2$. Отсюда получим (20).

Список литературы

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. *Pinkus A.* *N*-widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
3. *Widom H.* Extremal polynomials associated with system of curves in the complex plane // Adv. in Math. 1969. V. 3. № 2. P. 127–232.
4. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
5. *Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Поджорытов А. Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
6. *Парфёнов О. Г.* Сингулярные числа взвешенного оператора свертки // Матем. сб. 1987. Т. 133(175). № 3. С. 314–324.

Псковский государственный
педагогический институт им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
03.06.1997