Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. У. Жамилов, У. А. Розиков, О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 9, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 05:41:15

УДК 517.988.52

У. У. Жамилов, У. А. Розиков

О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе

Для произвольного строго невольтерровского квадратичного оператора на двумерном симплексе доказана единственность неподвижной точки. Доказано, что эта точка непритягивающая. Дано описание ω -предельного множества траектории для некоторых подклассов таких операторов. Показано, что в отличие от вольтерровских операторов строго невольтерровские операторы имеют циклические траектории. Для двух конкретных операторов доказано, что существует циклическая траектория с периодом 3, и всякая траектория, начинающаяся на границе симплекса, сходится к этой циклической траектории, а траектории с начальной точкой (не неподвижной), лежащей внутри симплекса, расходятся; ω -предельное множество такой траектории бесконечно и лежит на границе симплекса. Также изучены подклассы строго невольтерровских операторов, траектории которых в пределе стремятся к циклической траектории с периодом 2.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: квадратичные стохастические операторы, симплекс, траектория.

§ 1. Введение

Одна из основных задач при исследовании динамической системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно “потомки” состояния системы определяются некоторым законом. Для решения задач, возникающих в математической генетике, используются квадратичные стохастические операторы. Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений (см., например, [1]–[17]). Понятие квадратичного стохастического оператора впервые было сформулировано в статье [5]. В работе С. Улама [6] была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных стохастических операторов. Эта задача в основном решается для вольтерровских операторов (см. [1]–[4], [12], [15]). Но класс невольтерровских операторов изучен мало. В настоящей работе изучаются квадратичные стохастические операторы, которые будем называть *строгими невольтерровскими*. Заметим, что класс строго невольтерровских операторов является подклассом невольтерровских операторов. Так как нет общей теории, изучающей такие операторы, то естественно вначале изучать их подклассы. Мотивацию рассмотрения произвольных (не только вольтерровских) квадратичных стохастических операторов можно найти, например, в [8], [10], [11], [14]. Результаты настоящей работы показывают, что динамика строго

невольтерровских операторов намного богаче, чем динамика вольтерровских операторов. Следовательно, каждый строго невольтерровский квадратичный оператор является интересным примером в теории многомерных нелинейных динамических систем с разнообразным поведением траекторий.

Структура работы следующая. В § 2 дается определение строго невольтерровского оператора и описывается вид произвольного строго невольтерровского оператора на двумерном симплексе S^2 . Такие отображения образуют трехпараметрическое семейство. Изучению неподвижных точек таких операторов посвящен § 3. Здесь показывается, что произвольный строго невольтерровский оператор на двумерном симплексе имеет единственную неподвижную точку. В § 4 доказывается, что эта точка не может быть притягивающей, следовательно, почти все траектории расходятся или сходятся к некоторой циклической траектории. В § 5 изучается вопрос о структуре ω -предельного множества траекторий строго невольтерровских операторов на S^2 . Этот вопрос решен для строго невольтерровских операторов, у которых один из параметров варьируется, а другие два принимают крайние значения (теорема 2, п. 2)), и рассмотрен один конкретный пример (теорема 2, п. 1)). Кроме того, для одного однопараметрического семейства изучена структура ω -предельного множества траекторий с начальными точками вблизи устойчивого 2-цикла, а также на локальном устойчивом многообразии неподвижной точки (теорема 2, п. 3)). Во всех случаях доказано, что ω -предельное множество последовательности (траектории) может быть конечным (имеющим более чем один элемент) множеством. Это существенное отличие строго невольтерровского оператора от вольтерровского, так как в последнем случае расходящиеся траектории имеют только бесконечное множество ω -предельных точек (см. [1]). В § 6 обсуждаются полученные результаты и сравниваются с известными результатами для вольтерровских операторов.

§ 2. Определения

Пусть $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

называется $(n-1)$ -мерным симплексом. Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E , и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

Квадратичный стохастический оператор $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ имеет вид

$$V: x'_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ij,k} x_i x_j, \quad (1)$$

где

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^n p_{ij,k} = 1. \quad (2)$$

В настоящее время хорошо развита теория вольтерровских квадратичных операторов (см. [1]–[4], [12]), т.е. операторов (1), (2) с условием

$$p_{ij,k} = 0 \quad \text{при } k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квадратичный оператор (1), (2) назовем *строго невольтерровским*, если

$$p_{ij,k} = 0 \quad \text{при } k \in \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Заметим, что строго невольтерровские операторы существуют только при $n \geq 3$, так как при $n = 2$ условия (2) и (4) одновременно не выполняются.

В настоящей работе мы рассмотрим случай $n = 3$. Тогда произвольный строго невольтерровский оператор имеет вид

$$V : \begin{cases} x'_1 = \alpha x_2^2 + cx_3^2 + 2x_2x_3, \\ x'_2 = ax_1^2 + dx_3^2 + 2x_1x_3, \\ x'_3 = bx_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\alpha, \beta, a, b, c, d \geq 0, \quad \alpha + \beta = a + b = c + d = 1. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вид оператора (5) для случая $\alpha = \beta = a = b = c = d = 1/2$ Р. Мухитдинову был сообщен У. Розиковым. В [13] показано, что этот оператор имеет единственную неподвижную точку $(1/3, 1/3, 1/3)$.

§ 3. Единственность неподвижной точки

Неподвижная точка оператора (5) есть решение уравнения $V(x) = x$, т.е. решение системы

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_2^2 + cx_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_2 = ax_1^2 + dx_3^2 + 2x_1x_3, \\ x_3 = bx_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2. \end{cases} \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Для любых $\alpha, \beta, a, b, c, d \geq 0$, $\alpha + \beta = a + b = c + d = 1$, оператор (5) имеет единственную неподвижную точку $\lambda^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Подставляя $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ в первое уравнение системы (7), получаем

$$\alpha x_2^2 + (2x_3 + 1)x_2 + cx_3^2 + x_3 - 1 = 0. \quad (8)$$

Из (8) получаем

$$x_2 = \frac{-2x_3 - 1 + \sqrt{4(1 - \alpha c)x_3^2 + 4(1 - \alpha)x_3 + 1 + 4\alpha}}{2\alpha} \geq 0, \quad (9)$$

где $x_3 \in [0, \frac{\sqrt{1+4c}-1}{2c}]$, если $c \neq 0$, и $x_3 \in [0, 1]$, если $c = 0$. Аналогично, из второго уравнения системы (7) получаем

$$x_1 = \frac{-2x_3 - 1 + \sqrt{4(1-ad)x_3^2 + 4(1-a)x_3 + 1 + 4a}}{2a} \geq 0, \quad (10)$$

где $x_3 \in [0, \frac{\sqrt{1+4d}-1}{2d}]$, если $d \neq 0$, и $x_3 \in [0, 1]$, если $d = 0$. Следовательно, система (7) может иметь решение только при

$$x_3 \in \left[0, \frac{\sqrt{1+4c}-1}{2c}\right] \cap \left[0, \frac{\sqrt{1+4d}-1}{2d}\right],$$

если $c \neq 0$, $d \neq 0$. В силу (6) c и d не могут быть одновременно равными нулю. Если один из них равен нулю, скажем $c = 0$, то система (7) может иметь решение только при $x_3 \in [0, \frac{\sqrt{1+4d}-1}{2d}]$. Подставляя (9) и (10) в $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получаем ($x = x_3$)

$$f(x) = x, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{\alpha\sqrt{4(1-ad)x^2 + 4(1-a)x + 1 + 4a}}{2(\alpha + a - \alpha a)} \\ & + \frac{a\sqrt{4(1-\alpha c)x^2 + 4(1-\alpha)x + 1 + 4\alpha - \alpha - a - 2\alpha a}}{2(\alpha + a - \alpha a)}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} f'(x) = & \frac{\alpha[2(1-ad)x + 1 - a]}{(\alpha + a - \alpha a)\sqrt{4(1-ad)x^2 + 4(1-a)x + 1 + 4a}} \\ & + \frac{a[2(1-\alpha c)x + 1 - \alpha]}{(\alpha + a - \alpha a)\sqrt{4(1-\alpha c)x^2 + 4(1-\alpha)x + 1 + 4\alpha}} \geq 0, \\ f''(x) = & \frac{2a\alpha}{\alpha + a - \alpha a} \left[\frac{6 - d - (4d + 1)a}{\sqrt{[4(1-ad)x^2 + 4(1-a)x + 1 + 4a]^3}} \right. \\ & \left. + \frac{6 - c - (4c + 1)\alpha}{\sqrt{[4(1-\alpha c)x^2 + 4(1-\alpha)x + 1 + 4\alpha]^3}} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства следуют из (6) и из легко проверяемых неравенств

$$\alpha + a - \alpha a > 0, \quad 6 - d - (4d + 1)a \geq 0, \quad 6 - c - (4c + 1)\alpha \geq 0.$$

Следовательно, функция f возрастает и выпуклая. Кроме того,

$$\begin{aligned} f(0) = & \frac{a(\sqrt{1+4\alpha} - 1 - \alpha) + \alpha(\sqrt{1+4a} - 1 - a)}{2(\alpha + a - \alpha a)} > 0, \\ f(1) = & \frac{\alpha\sqrt{9-4ad} + a\sqrt{9-4\alpha c} - \alpha - a - 2\alpha a}{2(\alpha + a - \alpha a)} < 1. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из $\sqrt{9-4ad} \leq 3$, $\sqrt{9-4\alpha c} \leq 3$. Следовательно, уравнение (11) имеет единственное решение $x^* = x_3^*$. Подставляя x_3^* в (9) и (10), получим x_2^* и x_1^* .

Случай $a = 0, \alpha \neq 0$ и $a \neq 0, \alpha = 0$. Они проверяются аналогично.

Случай $a = 0, \alpha = 0$. Система (7) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = cx_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_2 = dx_3^2 + 2x_1x_3, \\ x_3 = (x_1 + x_2)^2. \end{cases} \quad (12)$$

Используя равенство $x_1 + x_2 = 1 - x_3$, легко проверить, что система (12) имеет единственное решение

$$x_1^* = \frac{(7 - 3\sqrt{5})c + 4\sqrt{5} - 8}{2(4 - \sqrt{5})}, \quad x_2^* = \frac{(3\sqrt{5} - 7)c + \sqrt{5} - 1}{2(4 - \sqrt{5})}, \quad x_3^* = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 4. Тип неподвижной точки

В этом параграфе проверим тип неподвижной точки $\lambda^* \equiv \lambda^*(\alpha, a, c) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ (см. теорему 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [18]). Если Якобиан J оператора V в неподвижной точке λ^* не имеет собственного значения на единичной окружности, то точка λ^* называется *гиперболической*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [18]). Гиперболическая неподвижная точка λ^* называется:

притягивающей, если все абсолютные величины собственных значений матрицы Якоби $J(\lambda^*)$ меньше единицы;

отталкивающей, если все абсолютные величины собственных значений матрицы Якоби $J(\lambda^*)$ больше единицы;

седловой, в остальных случаях.

Чтобы определить тип неподвижной точки для оператора (5), запишем его в виде

$$\begin{cases} x'_1 = cx_1^2 + (\alpha + c - 2)x_2^2 + 2(c - 1)x_1x_2 + 2(1 - c)x_2 - 2cx_1 + c, \\ x'_2 = (a + d - 2)x_1^2 + dx_2^2 + 2(d - 1)x_1x_2 + 2(1 - d)x_1 - 2dx_2 + d, \end{cases} \quad (13)$$

где $(x_1, x_2) \in \{(x, y) : x, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$, а x_1, x_2 — первые две координаты точек симплекса S^2 .

Собственные значения матрицы Якоби оператора (13) в точке λ^* имеют вид $\mu_{1,2} = -1 \pm \sqrt{D}$, где

$$D \equiv D(\alpha, a, c) = 1 - 4(1 - \alpha c)x_2^*x_3^* - 4(1 - ad)x_1^*x_3^* - 4(1 - b\beta)x_1^*x_2^*. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ при $D = 0$ (точка λ^* негиперболическая); $|\mu_1| < 1 < |\mu_2|$ при $D > 0$ (точка λ^* седловая); $|\mu_1| > 1, |\mu_2| > 1$ при $D < 0$ (точка λ^* отталкивающая). Так как притягивающий случай невозможен, то

для любого начального $\lambda^0 \in S^2$ сходимости (или ее отсутствия) траектории $\lambda^{(n)} = V(\lambda^{(n-1)})$, $n = 1, 2, \dots$, $\lambda^{(0)} = \lambda^0$, не следует из общей теории динамических систем. Поэтому проблема требует более подробного изучения. Интересно описать множество ω -предельных точек для каждой траектории $\{\lambda^{(n)}\}$. (Этой проблеме посвящен § 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Точка λ^* гиперболическая, если $D \neq 0$. Легко проверить, что $D = D(1/2, 1/2, 1/2) = 0$. Задача описания множества параметров (α, a, c) , при которых $D = 0$, оказалась достаточно сложной. (В конце этого параграфа мы решим эту задачу в классе параметров $\alpha = a$, $c = 1/2$.)

Рассмотрим случай $\alpha = a > 0$, $c = 1/2$. Тогда уравнение (11) примет вид

$$\sqrt{2(2-a)x^2 + 4(1-a)x + 1 + 4a} = (2-a)x + a + 1. \quad (15)$$

Единственное решение уравнения (15) имеет вид

$$x = x_3 = \frac{3-a-\sqrt{5-2a}}{2-a}.$$

Легко проверить, что $x_3 \in [0, 1]$ для любого $0 < a \leq 1$. Следовательно, λ^* имеет вид

$$\lambda^* = \lambda^*\left(a, a, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5-2a}-1}{2(2-a)}, \frac{\sqrt{5-2a}-1}{2(2-a)}, \frac{3-a-\sqrt{5-2a}}{2-a}\right).$$

В этом случае

$$D = D\left(a, a, \frac{1}{2}\right) = 9 - 2a - 4\sqrt{5-2a}.$$

Заметим, что $D(a, a, 1/2) \geq 0$ и $D(a, a, 1/2) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $\alpha = a = 0$ и произвольного $c \in [0, 1]$ легко проверить, что $D(0, 0, c) = 9 - 4\sqrt{5} > 0$. Кроме того, можно проверить, что $D(\alpha, a, c) \geq -1/3$. Эта оценка неумлучшаема, так как $D(0, 1, 1) = -1/3 < 0$. Таким образом, D может принимать как отрицательные, так и неотрицательные значения.

Эти результаты приводят к следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА 1. $D(\alpha, a, c) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = a = c = 1/2$.

§ 5. ω -предельное множество

В теории динамических систем очень важна задача описания ω -предельного множества траектории. В этом параграфе мы решим эту проблему при некоторых дополнительных ограничениях на параметры.

Пусть $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0) \in S^2$ – начальная точка и $\{\lambda^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ – траектория точки λ^0 при действии оператора (5), т.е.

$$\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}) = V(\lambda^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0.$$

Обозначим через $\omega(\lambda^0)$ ω -предельное множество траектории $\{\lambda^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Поскольку $\{\lambda^{(n)}\} \subset S^2$, а S^2 компактно, мы имеем $\omega(\lambda^0) \neq \emptyset$. Заметим, что если $\omega(\lambda^0)$ содержит единственную точку, то траектория сходится к этой точке, она же является неподвижной точкой для оператора V , заданного формулой (5).

Для того чтобы систематически описать множество $\omega(\lambda^0)$, рассмотрим оператор (5) как семейство операторов с параметрами (6). Сопоставим оператору (5) матрицу $M = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ a & d \\ b & \beta \end{pmatrix}$, где элементы матрицы удовлетворяют условию (6).

Обозначим

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ a & d \\ b & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, a, b, c, d \geq 0, \alpha + \beta = a + b = c + d = 1 \right\}.$$

Обозначим через $0(M)$ число нулей в матрице M . Заметим, что $0 \leq 0(M) \leq 3$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Пусть

$$\mathcal{M}_i = \{M \in \mathcal{M} : 0(M) = i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Две матрицы $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ назовем *эквивалентными* и обозначим $M_1 \sim M_2$, если виды соответствующих операторов совпадают с точностью до переобозначения координат и параметров. Разобьем множество $\mathcal{M}_i$ на классы эквивалентности относительно этого отношения эквивалентности. Заметим, что

$$\mathcal{M}_3 = \{\mathcal{M}_3^{(1)}, \mathcal{M}_3^{(2)}\},$$

где

$$\mathcal{M}_3^{(1)} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3 : M \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_3^{(2)} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3 : M \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для $\mathcal{M}_2$ имеем $\mathcal{M}_2 = \{\mathcal{M}_2^{(j)}, j = 1, 2, 3\}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{(1)} &= \left\{ M \in \mathcal{M}_2 : M \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right\}, & \mathcal{M}_2^{(2)} &= \left\{ M \in \mathcal{M}_2 : M \sim \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{M}_2^{(3)} &= \left\{ M \in \mathcal{M}_2 : M \sim \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

По построению ясно, что траектории операторов V_1 и V_2 , соответствующих $M_1 \sim M_2$, совпадают с точностью до переобозначения параметров и координат предельных точек. Поэтому основной результат этого параграфа сформулируем для операторов, соответствующих какому-то одному представителю из каждого класса $\mathcal{M}_i^{(j)}$. Обозначим через $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ вершины симплекса S^2 , обозначим также

$$\text{int } S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 x_2 x_3 > 0\}, \quad \partial S^2 = S^2 \setminus \text{int } S^2.$$

ТЕОРЕМА 2. 1) Оператор, соответствующий матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3^{(1)}$, имеет единственную циклическую траекторию $\{e_1, e_2, e_3\}$, т.е. $V(e_1) = e_2$, $V(e_2) = e_3$, $V(e_3) = e_1$. Для любого $\lambda^0 \in \partial S^2$ ω -предельное множество имеет вид $\omega(\lambda^0) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Точнее, траектория, начинающаяся в произвольной точке $\lambda^0 \in \partial S^2$, сходится к циклической траектории $\{e_1, e_2, e_3\}$. Для $\lambda^0 \in \text{int } S^2 \setminus \{\lambda^*\}$ ω -предельное множество траектории бесконечно и лежит на границе симплекса.

2) В случае $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^{(2)}$ существует единственная циклическая траектория $\{(c, d, 0), e_3\}$. Для любого $\lambda^0 \in S^2$ ω -предельное множество имеет вид

$$\omega(\lambda^0) = \begin{cases} \{(c, d, 0), e_3\}, & \text{если } \lambda_3^0 \neq x_3^*, \\ \{\lambda^*\}, & \text{если } \lambda_3^0 = x_3^*. \end{cases}$$

3) В случае $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^{(1)}$ существуют инвариантная кривая γ , проходящая через λ^* , и такое открытое множество S_*^2 , что $\{e_2, e_3\} \subset S_*^2 \subset S^2 \setminus \{\gamma\}$. Для любого $\lambda^0 \in S_*^2$ ω -предельное множество имеет вид $\omega(\lambda^0) = \{e_2, e_3\}$. Если $\lambda^0 \in \gamma$, то $\omega(\lambda^0) = \{\lambda^*\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $\alpha = 0$, $a = c = 1$ оператор (5) имеет вид

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_3(x_3 + 2x_2), \\ x'_2 = x_1(x_1 + 2x_3), \\ x'_3 = x_2(x_2 + 2x_1). \end{cases} \quad (16)$$

Сначала изучим траекторию для начальных точек из границы симплекса: пусть $\lambda^0 = (0, \varepsilon, 1 - \varepsilon) \in \partial S^2$ (случаи $\lambda_2^0 = 0$ и $\lambda_3^0 = 0$ изучаются аналогично), где $\varepsilon \in [0, 1]$. Легко видеть, что

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n)}(\varepsilon) = \begin{cases} (0, \varepsilon^{2^n}, 1 - \varepsilon^{2^n}), & \text{если } n = 3k, \\ (1 - \varepsilon^{2^n}, 0, \varepsilon^{2^n}), & \text{если } n = 3k + 1, \\ (\varepsilon^{2^n}, 1 - \varepsilon^{2^n}, 0), & \text{если } n = 3k + 2, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\omega(\lambda^0) = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{при } \lambda^0 \in \partial S^2. \quad (17)$$

Пусть теперь $\lambda^0 \in \text{int } S^2 \setminus \{\lambda^*\}$. В этом случае докажем, что $\lambda_1^{(n)} \lambda_2^{(n)} \lambda_3^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \text{int } S^2$ обозначим

$$\varphi(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \psi(\lambda) = (1 + \lambda_2 - \lambda_1)(1 + \lambda_3 - \lambda_2)(1 + \lambda_1 - \lambda_3).$$

Легко проверить, что $\varphi(V(\lambda)) \leq \varphi(\lambda)\psi(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$, так как $\psi(\lambda) \leq 1$. Последнее неравенство следует из классического неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Равенство (т.е. $\psi(\lambda) = 1$) выполняется только в том случае, когда

$$1 + \lambda_2 - \lambda_1 = 1 + \lambda_3 - \lambda_2 = 1 + \lambda_1 - \lambda_3.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$. Таким образом,

$$\max_{x \in S^2} \psi(x) = \psi(\lambda^*) = 1 \iff \lambda^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (18)$$

Следовательно, $\varphi(\lambda^{(n+1)}) \leq \varphi(\lambda^{(n)})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\lambda^{(n)}) = \eta$.

Докажем, что $\eta = 0$. Пусть $\eta > 0$; тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda^{(n)})}{\varphi(\lambda^{(n-1)})} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \lambda_2^{(n)} - \lambda_1^{(n)})(1 + \lambda_3^{(n)} - \lambda_2^{(n)})(1 + \lambda_1^{(n)} - \lambda_3^{(n)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(n)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь докажем, что если $\eta > 0$, то $\lambda^{(n)} \rightarrow \lambda^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим обратное, т.е. существует $\{n_k\}_{k=1,2,\dots}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(n_k)} = \nu \neq \lambda^*. \quad (20)$$

В силу непрерывности ψ из (18) и (20) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda^{(n_k)}) = \psi(\nu) < 1. \quad (21)$$

Так как $\nu \neq \lambda^*$, то неравенство (21) противоречит равенству (19). Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_3^{(n)} = \frac{1}{3}.$$

Но это невозможно, так как единственная неподвижная точка $\lambda^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ оператора (16) отталкивающая. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} \lambda_2^{(n)} \lambda_3^{(n)} = 0. \quad (22)$$

Так как $\varphi(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$, если $\lambda \in \text{int } S^2$, то равенство $\varphi(\lambda) = 0$ может выполняться только на ∂S^2 . Из (22) получим $\omega(\lambda^0) \subset \partial S^2$.

Теперь докажем, что $\omega(\lambda^0)$ – бесконечное множество для $\forall \lambda^0 \in \text{int } S^2 \setminus \{\lambda^*\}$. Для этого рассмотрим оператор

$$B : \begin{cases} x'_1 = x_1(x_1 + 2x_3), \\ x'_2 = x_2(x_2 + 2x_1), \\ x'_3 = x_3(x_3 + 2x_2). \end{cases} \quad (23)$$

Для $\lambda \in S^2$ обозначим через $\omega_B(\lambda)$ ω -предельное множество последовательности $\{B^{(n)}(\lambda)\}$. В [15] доказано, что для любого $\lambda \in \text{int } S^2$, $\lambda \neq \lambda^*$, ω -предельное множество $\omega_B(\lambda)$ траектории точки λ бесконечно и лежит на границе симплекса.

Теперь установим связь между операторами V (см. (16)) и B . Рассмотрим перестановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определим отображение $T_\pi: S^2 \rightarrow S^2$ как

$$T_\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}) = (x_3, x_1, x_2).$$

Легко проверить, что:

- (i) $V(x) = B(T_\pi(x))$;
- (ii) $B^{(n)}T_\pi = T_\pi B^{(n)} \quad \forall n \geq 1$;
- (iii)

$$V^{(n)} = \begin{cases} B^{(n)}, & \text{если } n = 3k, \\ T_\pi B^{(n)}, & \text{если } n = 3k + 1, \\ T_{\pi^2} B^{(n)}, & \text{если } n = 3k + 2, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $\pi^2 = \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что для любого $\lambda \in S^2$ и при каждом $\nu \in \omega_B(\lambda)$ множество $\omega(\lambda)$ содержит хотя бы один элемент из $\{\nu, T_\pi \nu, T_{\pi^2} \nu\}$. Действительно, пусть $\nu \in \omega_B(\lambda)$, т.е. существует последовательность $\{n_k\}_{k=1,2,\dots}$ такая, что $B^{(n_k)}(\lambda) \rightarrow \nu$ при $k \rightarrow +\infty$. Ясно, что по меньшей мере одна из последовательностей

$$\begin{aligned} \{n_k\}_{k=1,2,\dots} \cap \{3m\}_{m=0,1,2,\dots}, \quad \{n_k\}_{k=1,2,\dots} \cap \{3m+1\}_{m=0,1,2,\dots}, \\ \{n_k\}_{k=1,2,\dots} \cap \{3m+2\}_{m=0,1,2,\dots} \end{aligned}$$

бесконечна. Пусть для определенности

$$\{n_k\}_{k=1,2,\dots} \cap \{3m\}_{m=0,1,2,\dots} = \{n_{k_p}\}_{p=1,2,\dots}$$

является бесконечной последовательностью. Тогда из формулы (24) получим, что $V^{(n_{k_p})}(\lambda) \rightarrow \nu$ при $p \rightarrow \infty$, т.е. $\nu \in \omega(\lambda)$. Следовательно,

$$|\omega(\lambda)| \geq |\omega_B(\lambda)|, \quad (25)$$

где $|A|$ обозначает число элементов множества A . Так как в (25) $|\omega_B(\lambda)| = \infty$, то получаем $|\omega(\lambda)| = \infty$.

2) При $\alpha = a = 0$ оператор (5) имеет вид

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_3(2x_2 + cx_3), \\ x'_2 = x_3(2x_1 + dx_3), \\ x'_3 = (1 - x_3)^2. \end{cases} \quad (26)$$

Изучим поведение третьей координаты $x_3^{(n)}$. В силу третьего равенства из (26) траектория $x_3^{(n)}$ задается динамической системой $\psi(x) = (1 - x)^2$. Заметим, что ψ имеет единственную неподвижную точку $x_3^* = (3 - \sqrt{5})/2$ и эта точка отталкивающая, т.е. $|\psi'(x_3^*)| > 1$. Кроме того, функция $\psi(\psi(x))$ имеет только три неподвижные точки: 0, x_3^* , 1. Точки 0 и 1 являются притягивающими.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(2n)} &= \begin{cases} 0, & \text{если } x_3^0 \in [0, x_3^*), \\ x_3^*, & \text{если } x_3^0 = x_3^*, \\ 1, & \text{если } x_3^0 \in (x_3^*, 1], \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(2n+1)} &= \begin{cases} 1, & \text{если } x_3^0 \in [0, x_3^*), \\ x_3^*, & \text{если } x_3^0 = x_3^*, \\ 0, & \text{если } x_3^0 \in (x_3^*, 1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что прямая $\{x \in S^2 : x_3 = x_3^*\}$ инварианта относительно оператора (26). На этом инварианте траектория оператора имеет вид $\lambda^{(n)} = (\lambda_1^{(n)}, 1 - \lambda_1^{(n)} - x_3^*, x_3^*)$, где $\lambda_1^{(n)}$ удовлетворяет равенству

$$\lambda_1^{(n+1)} = x_3^*(2 - (2 - c)x_3^* - 2\lambda_1^{(n)}). \quad (28)$$

Из (28) легко получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{(n)} = x_1^*$. Заметим, что $V((c, d, 0)) = e_3$, $V(e_3) = (c, d, 0)$. Более того, $V((\lambda_1, \lambda_2, 0)) = e_3$. Эти равенства вместе с формулой (27) завершают доказательство п. 2).

3) При $\alpha = c = 0$ оператор (5) имеет вид

$$V : \begin{cases} x_1' = 2x_2x_3, \\ x_2' = (a-1)x_1^2 + (1-x_2)^2, \\ x_3' = (b-1)x_1^2 + (1-x_3)^2. \end{cases} \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Оператор (29) имеет устойчивый цикл $\{e_2, e_3\}$, а неподвижная точка λ^* оператора (29) седловая (см. ниже), отсюда (см. [18; с. 216–217]) следует п. 3) теоремы 2.

Докажем, что единственная неподвижная точка $\lambda^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ оператора (29) седловая, т.е. $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| > 1$. Для этого необходима следующая лемма.

ЛЕММА. 1) Первая координата x_1^* принадлежит множеству

$$\left[\frac{4\sqrt{5}-6}{11}; 2-\sqrt{3} \right].$$

2) $D(0, a, 0)$ – положительное число (см. (14)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства обозначим $x = x_1^*$, $y = x_2^*$, $z = x_3^*$. Равенство $V(\lambda^*) = \lambda^*$ примет вид

$$\begin{cases} x = 2yz, \\ y = (1-y)^2 - bx^2, \\ z = (1-z)^2 - ax^2. \end{cases} \quad (30)$$

1) $x = 2yz \leq (1-x)^2/2$. Отсюда $x \leq 2 - \sqrt{3}$. Из (30) получаем

$$y = \frac{3 - \sqrt{5 + 4bx^2}}{2}, \quad z = \frac{3 - \sqrt{5 + 4ax^2}}{2}. \quad (31)$$

В силу (31) из условия $x + y + z = 1$ и системы (30) получаем

$$4abx^4 = 11x^2 + 12x - 4. \quad (32)$$

Заметим, что уравнение (32) имеет решение тогда и только тогда, когда $11x^2 + 12x - 4 \geq 0$, т.е. $x \geq (4\sqrt{5} - 6)/11$.

2) Из формулы (14) в силу (30) получаем

$$D(0, a, 0) = 1 - 2x - 4x(ay + bz) = 1 - 8x + 2x \frac{4abx^2 + 4x + 4}{x + 2},$$

откуда в силу уравнения (32) и п. 1) леммы получаем

$$D(0, a, 0) = \frac{15x^2 + 26x - 8}{x(x + 2)} > 0, \quad \text{если } \frac{4}{15} < \frac{4\sqrt{5} - 6}{11} \leq x \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из $(4\sqrt{5} - 6)/11 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}$ следует, что $x = x_1^* \approx 0.2677$, где x_1^* – первая координата неподвижной точки λ^* .

Из леммы следует, что λ^* – седловая точка оператора (29). Таким образом, теорема 2 доказана.

На основе компьютерных вычислений можно сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. Имеет место равенство $S_*^2 = S^2 \setminus \{\gamma\}$.

Для любого оператора V , соответствующего матрице из $\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2^{(3)}$, очевидно, что $V(\text{int } S^2) \subset \text{int } S^2$, т.е. $\lambda^{(n)} \in \text{int } S^2$ для любого $\lambda^0 \in \text{int } S^2$. При любых $\lambda^0 \in \partial S^2$ имеет место

$$\lambda^{(n)} \in \text{int } S^2, \quad \text{где } n \geq 2.$$

Эти выводы и компьютерные вычисления приводят к следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА 3. В случаях

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^{(3)}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ a & d \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1, \quad \begin{pmatrix} \alpha & c \\ a & d \\ b & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_0$$

для любого $\lambda^0 \in S^2 \setminus \{\lambda^*\}$ множество ω -предельных точек удовлетворяет включению $\omega(\lambda^0) \subset \text{int } S^2$, т.е. $\omega(\lambda^0) \cap \partial S^2 = \emptyset$.

§ 6. Обсуждения

Условие (4) имеет такой смысл: “потомки” k не повторят признаки “родителей” i, j . С точки зрения биологии естественно ожидать, что “потомки” таких систем не имеют стабильной структуры, так как “потомки” теряют все свойства своих “родителей”. Результат настоящей работы (теорема 2) дает строго

математическое доказательство этого явления. Случай $\alpha = a = c = 1/2$ соответствует равновероятностному появлению потомков. В статистической механике такие системы называются *неупорядоченными системами*. Сравнивая свойства строго невольтерровских операторов со свойствами вольтерровских операторов (см. [1]–[11]), легко убедиться, что свойства траекторий этих операторов существенно различаются.

У. А. Розиков благодарит The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics (ICTP; г. Триест, Италия) за финансовую поддержку его пребывания в ICTP в июне–августе 2008 г. Авторы благодарят Р. Н. Ганиходжаева, Н. Н. Ганиходжаева и Ф. М. Мухамедова за полезные дискуссии, а также благодарят рецензента, замечания которого значительно улучшили стиль и содержание работы.

Список литературы

- [1] Р. Н. Ганиходжаев, “Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры”, *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 119–140; англ. пер.: R. N. Gani-khodzhaev, “Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:2 (1993), 489–506.
- [2] Р. Н. Ганиходжаев, А. Т. Саримсаков, “Математическая модель коалиции биологических систем”, *Докл. АН УзССР*, 1992, № 3, 14–17.
- [3] Р. Н. Ганиходжаев, “Об одном семействе квадратичных стохастических операторов, действующих в S^2 ”, *Докл. АН УзССР*, 1989, № 1, 3–5.
- [4] Р. Н. Ганиходжаев, Д. Б. Эшмаматова, “Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий”, *Владикавказ. матем. журн.*, **8**:2 (2006), 12–28.
- [5] С. Н. Бернштейн, “Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности”, *Ученые записки науч.-исслед. кафедры Украины. Отделение матем.*, 1924, № 1, 83–115.
- [6] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, New York–London, Interscience Publ., 1960.
- [7] С. С. Валландер, “О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований”, *Докл. АН СССР*, **202**:3 (1972), 515–517; англ. пер.: S. S. Vallander, “On the limit behavior of iteration sequences of certain quadratic transformations”, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 123–126.
- [8] Ю. И. Любич, *Математические структуры в популяционной генетике*, Наукова думка, Киев, 1983.
- [9] R. D. Jenks, “Quadratic differential systems for interactive population models”, *J. Differential Equations*, **5**:3 (1969), 497–514.
- [10] H. Kesten, “Quadratic transformations: a model for population growth. I”, *Advances in Appl. Probability*, **2**:1 (1970), 1–82.
- [11] H. Kesten, “Quadratic transformations: a model for population growth. II”, *Advances in Appl. Probability*, **2**:2 (1970), 179–228.
- [12] Ф. М. Мухамедов, “О бесконечномерных квадратичных вольтерровских операторах”, *УМН*, **55**:6 (2000), 149–150; англ. пер.: F. M. Mukhamedov, “Infinite-dimensional quadratic Volterra operators”, *Russian Math. Surveys*, **55**:6 (2000), 1161–1162.
- [13] Р. Т. Мухитдинов, “О строго невольтерровском квадратичном операторе”, *Тезисы докладов международной конференции “Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей”* (Ташкент, 2005), Университет, Ташкент, 2005, 134–135.

- [14] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The theory of evolution and dynamical systems. Mathematical aspects of selection*, London Math. Soc. Stud. Texts, **7**, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1988.
- [15] Н. Н. Ганиходжаев, Д. В. Занин, “Об одном необходимом условии эргодичности квадратичных операторов, определенных на двумерном симплексе”, *УМН*, **59**:3 (2004), 161–162; англ. пер.: N. N. Ganikhodzhaev, D. V. Zanin, “On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on the two-dimensional simplex”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 571–572.
- [16] N. N. Ganikhodzhaev, U. A. Rozikov, “On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:4 (2006), 467–473.
- [17] У. А. Розиков, У. У. Жамилов, “ F -квадратичные стохастические операторы”, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 606–612; англ. пер.: U. A. Rozikov, U. U. Zhamilov, “ F -quadratic stochastic operators”, *Math. Notes*, **83**:3–4 (2008), 554–559.
- [18] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Stud. Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO, 2003.

У. У. Жамилов (U. U. Zhamilov)

Институт математики и информационных технологий
НАН Узбекистана, г. Ташкент
E-mail: jamilovu@yandex.ru

Поступила в редакцию

30.10.2007 и 28.04.2009

У. А. Розиков (U. A. Rozikov)

Институт математики и информационных технологий
НАН Узбекистана, г. Ташкент
E-mail: rozikovu@yandex.ru, rozikovu@mail.ru