Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Шишмарев, М. Цуцуми, Асимптотика при больших временах решений комплексного уравнения Ландау–Гинзбурга, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 95–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:16:49

УДК 517.9+535.5

И. А. Шишмарёв, М. Цуцуми

Асимптотика при больших временах решений комплексного уравнения Ландау–Гинзбурга

Построена асимптотика при больших временах решений задачи Коши для комплексного уравнения Ландау–Гинзбурга. В многомерном по пространственным переменным случае начальное условие предполагается малым, в одномерном случае – произвольным. В обоих случаях главный член асимптотики выписан в явном виде и дана оценка остатка в равномерной метрике.

Библиография: 7 названий.

Введение

В последние годы было опубликовано много статей, посвященных различным свойствам решений комплексного уравнения Ландау–Гинзбурга (Л–Г) (см. [1]–[4]).

В настоящей работе мы рассматриваем задачу Коши для комплексного уравнения Л–Г:

$$u_t - (\alpha + i\beta)\Delta u + \lambda|u|^2 u + au = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad (0.1)$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t \geq 0$, α, β, a – действительные числа, λ – комплексное число, Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$. Нашей целью является изучение асимптотики решения задачи Коши (0.1) при $t \rightarrow \infty$. В одномерном случае ($n = 1$) такая асимптотика была построена в работе [5] при условии малости начальных данных $\bar{u}(x)$ и при $\alpha = 0$, $\lambda = \beta = 1$. Мы установим два результата: для любого числа измерений $n \geq 1$ будет найдена асимптотика решений задачи Коши (0.1) при достаточно малых начальных условиях $\bar{u}(x)$, а при $n = 1$ асимптотика решения будет построена при любых (а не только малых) начальных данных. В обоих указанных случаях мы выпишем в явной форме главный член асимптотики и дадим оценку остатка в равномерной метрике, однако методы, применяемые в этих двух случаях, существенно различаются (см. [5; гл. 8] и [6]).

§ 1. Многомерный случай

В этом параграфе мы построим асимптотику решений задачи Коши (0.1) при любом числе $n \geq 1$ пространственных переменных и при условии достаточной малости начального возмущения $\bar{u}(x)$. Как следует из работы [7], заведомо существует глобальное (во времени) единственное решение $u(x, t)$ задачи Коши (0.1),

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01158).

принадлежащее классу $C^\infty((0, \infty), H^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, \infty), H^\rho(\mathbb{R}^n))$, если $\bar{u}(x) \in H^\rho(\mathbb{R}^n)$, $\rho > \max(0, (n-2)/2)$ и норма $\|\bar{u}\|_{H^\rho}$ достаточно мала.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 0$, $a > 0$, β – любое действительное число, λ – любое комплексное число, начальное условие $\bar{u}(x)$ удовлетворяет требованиям:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &\in L_1(\mathbb{R}^n), \quad |\widehat{\bar{u}}(p)| \leq \varepsilon_1 M^{-\gamma}(p), \quad p \in \mathbb{R}^n; \\ |\widehat{\bar{u}}(p_1) - \widehat{\bar{u}}(p_2)| &\leq \varepsilon_1 |\Delta p|^\sigma M^{-\gamma+1}(p_2), \\ |\Delta p| = |p_1 - p_2| &\leq 1, \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n; \\ \sigma \in (0, 1], \quad \gamma &> n+1, \quad M(p) = \max(1, |p|), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало, $\widehat{\bar{u}}(p)$ – преобразование Фурье функции $\bar{u}(x)$. Тогда для указанного выше решения $u(x, t)$ задачи Коши (0.1) при $t \rightarrow \infty$ справедлива равномерная по $x \in \mathbb{R}^n$ асимптотика

$$u(x, t) = A \exp \left\{ -at - \frac{|x|^2}{4t\nu} \right\} \left(\frac{\pi}{t\nu} \right)^{n/2} + O(e^{-at} t^{-\frac{n+\sigma}{2}}), \quad (1.2)$$

$A = \text{const}$, $\nu = \alpha + i\beta$, под корнем понимается та ветвь, значения которой положительны на положительной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что при любом вещественном s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ – это гильбертово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |p|^2)^s |\widehat{\varphi}(p)|^2 dp,$$

$\widehat{\varphi}(p)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, $H^\infty = \bigcap_{s=1}^\infty H^s$. Из условия (1.1) следует, что начальная функция $\bar{u}(x)$ принадлежит пространству $H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n)$ и по теореме вложения Соболева непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, норма $\|\bar{u}\|_{H^{n/2+1}}$ достаточно мала и согласно приведенному выше результату из работы [7] рассматриваемое нами решение $u(x, t)$ принадлежит классу

$$C^\infty((0, \infty), H^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, \infty), H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n)).$$

В работе [7] доказана также эквивалентность задач (1.4) и (1.5) (см. ниже). Впрочем, этот последний факт, так же как и факт существования решения задачи (0.1) из указанного класса, легко следует из полученных ниже представлений (1.8), (1.27) и оценки (1.9).

Доказательство теоремы состоит из трех шагов.

1°. Вводя с помощью обратного преобразования Фурье линейный оператор

$$\mathbb{K}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)} K(p) \widehat{u}(p, t) dp, \quad (1.3)$$

где

$$\widehat{u}(p, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(p,x)} u(x, t) dx,$$

а $K(p) = a + \nu|p|^2$, $|p|^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$, $\nu = \alpha + i\beta$, запишем задачу Коши (0.1) в виде

$$u_t + \lambda|u|^2 u + \mathbb{K}(u) = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x). \quad (1.4)$$

Применяя к (1.4) преобразование Фурье, получаем

$$\hat{u}_t(p, t) + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}^*(p-q, t) \hat{u}(q-r, t) \hat{u}(r, t) dq dr + K(p) \hat{u}(p, t) = 0, \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{\bar{u}}(p) \quad (1.5)$$

(звездочка $*$ означает комплексное сопряжение). Интегрируя по t задачу (1.5), приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \hat{u}(p, t) = \hat{\bar{u}}(p) e^{-K(p)t} - \lambda \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}^*(p-q, \tau) \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Положим $\hat{\bar{u}}(p) = \varepsilon v(p)$ и представим $\hat{u}(p, t)$ в виде формального степенного ряда по ε :

$$\hat{u}(p, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{2N+1} v_N(p, t), \quad (1.7)$$

$\varepsilon = \varepsilon_1(1 + 4|\nu|)$ (см. (1.1)). Подставляя (1.7) в (1.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} v_0(p, t) &= v(p) e^{-K(p)t}, \\ v_N(p, t) &= -\lambda \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l v_{j-1}^*(p-q, \tau) v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dq dr. \end{aligned} \quad (1.8)$$

2°. Установим ряд оценок для функций $v_N(p, t)$, $N \geq 0$, $p \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Начнем с оценки

$$|v_N(p, t)| \leq c^N \exp \left\{ -at - \alpha \left(\frac{|p|}{2N+1} \right)^2 t \right\} (N+1)^{-\gamma_1} M^{-\gamma}(p), \quad (1.9)$$

$p \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $N \geq 0$, $\gamma_1 > 1$, $c > 0$ – некоторая достаточно большая константа. Доказательство этой оценки проведем по индукции. При $N = 0$ оценка (1.9) следует из условий (1.1):

$$|v_0(p, t)| = \left| \frac{\hat{\bar{u}}(p)}{\varepsilon} e^{-K(p)t} \right| \leq M^{-\gamma}(p) e^{-at - \alpha|p|^2 t}. \quad (1.10)$$

Далее, при $N \geq 1$ ввиду (1.8) имеем

$$\begin{aligned}
|v_N(p, t)| &\leq |\lambda| c^{N-1} \int_0^t e^{-[a+\alpha|p|^2](t-\tau)} d\tau \\
&\times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l j^{-\gamma_1} (l-j+1)^{-\gamma_1} (N-l+1)^{-\gamma_1} \\
&\times M^{-\gamma}(p-q) M^{-\gamma}(q-r) M^{-\gamma}(r) \\
&\times \exp \left\{ -3a\tau - \alpha\tau \left[\left(\frac{|p-q|}{2(j-1)+1} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{|q-r|}{2(l-j)+1} \right)^2 + \left(\frac{|r|}{2(N-l)+1} \right)^2 \right] \right\} dq dr. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

При целых $l_1, l_2, 1 \leq l_2 \leq l_1 \leq N$, и любых положительных β и χ выполняются очевидные неравенства:

$$\begin{aligned}
&[l_2(l_1 - l_2 + 1)(N - l_1 + 1)]^{-\chi} \\
&\leq (2^2)^\chi (N+1)^{-\chi} [l_2^{-\chi}(l_1 - l_2 + 1)^{-\chi} \\
&\quad + l_2^{-\chi}(N - l_1 + 1)^{-\chi} + (l_1 - l_2 + 1)^{-\chi}(N - l_1 + 1)^{-\chi}], \quad (1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[M(p-q)M(q-r)M(r)]^{-\beta} \\
&\leq (2^2)^\beta M(p)^{-\beta} [M^{-\beta}(p-q)M^{-\beta}(q-r) \\
&\quad + M^{-\beta}(q-r)M^{-\beta}(r) + M^{-\beta}(p-q)M^{-\beta}(r)]. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\left(\frac{|p-q|}{2j-1} \right)^2 + \left(\frac{|q-r|}{2l-2j+1} \right)^2 + \left(\frac{|r|}{2N-2l+1} \right)^2 \geq \left(\frac{|p|}{2N+1} \right)^2. \quad (1.14)$$

Действительно, пусть $x, y, a, b > 0$ – любые положительные числа; если

$$\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}, \quad \text{то} \quad \frac{x}{a} \geq \frac{x+y}{a+b},$$

поэтому заведомо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geq \frac{x+y}{a+b},$$

следовательно,

$$\frac{|p-q|}{2j-1} + \frac{|q-r|}{2l-2j+1} + \frac{|r|}{2N-2l+1} \geq \frac{|p-q| + |q-r| + |r|}{2N+1} \geq \frac{|p|}{2N+1},$$

причем хотя бы один член в сумме слева больше правой части, и ввиду монотонности функции x^2 справедливо неравенство (1.14). Подставляя (1.12)–(1.14) в (1.11), получаем

$$|v_N(p, t)| \leq c^N \int_0^t \exp \left\{ -[a + \alpha |p|^2](t - \tau) - 3a\tau - \alpha\tau \left(\frac{|p|}{2N+1} \right)^2 \right\} d\tau \\ \times (N+1)^{-\gamma_1} M^{-\gamma}(p), \quad (1.15)$$

если $c > 0$ достаточно велико. Интеграл в (1.15) не превосходит

$$\frac{1}{2a} \exp \left\{ -at - \alpha t \left(\frac{|p|}{2N+1} \right)^2 \right\},$$

и мы приходим к оценке (1.9). Докажем теперь по индукции оценку

$$|v_N(p_1, t) - v_N(p_2, t)| \leq c^N (1+t) |\Delta p|^\sigma (N+1)^{-\gamma_1} \\ \times M^{-\gamma+1}(p_2) \exp \left\{ - \left(a + \frac{\alpha |p_2|^2}{(2N+1)^2} \right) t \right\} \quad (1.16)$$

при $|p_2| \leq |p_1|$, $|\Delta p| \equiv |p_1 - p_2| \leq 1$. При $N = 0$ в силу (1.1) имеем:

$$|v_0(p_1, t) - v_0(p_2, t)| = |e^{-K(p_1)t} (v(p_1) - v(p_2)) + v(p_2) (e^{-K(p_1)t} - e^{-K(p_2)t})| \\ \leq (1 + 4|\nu|)^{-1} (e^{-(a+\alpha|p_1|^2)t} |\Delta p|^\sigma M^{-\gamma+1}(p_2) \\ + 4M^{-\gamma}(p_2) e^{-at - \alpha|p_2|^2 t} |\nu| M(p_2) |\Delta p| t) \\ \leq e^{-(a+\alpha|p_2|^2)t} |\Delta p|^\sigma M^{-\gamma+1}(p_2) (t+1), \quad t \geq 0 \quad (1.17)$$

(здесь использовано неравенство $|e^z - 1| \leq |z|$, верное, если $\operatorname{Re} z \leq 0$). Далее, при $N \geq 1$

$$v_N(p_1, t) - v_N(p_2, t) = -\lambda \int_0^t (e^{-K(p_1)(t-\tau)} - e^{-K(p_2)(t-\tau)}) d\tau \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l v_{j-1}^*(p_2 - q, \tau) v_{l-j}(q - r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dq dr \\ - \lambda \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{|p_1 - q| < |p_2 - q|} dq \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l (v_{j-1}^*(p_1 - q, \tau) - v_{j-1}^*(p_2 - q, \tau)) v_{l-j}(q - r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dr \\ - \lambda \int_0^t e^{-K(p_1)(t-\tau)} d\tau \int_{|p_1 - q| \geq |p_2 - q|} dq \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l (v_{j-1}^*(p_1 - q, \tau) - v_{j-1}^*(p_2 - q, \tau)) v_{l-j}(q - r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dr \\ = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1.18)$$

Для оценки I_1 используем оценку (1.9) и оценку второго слагаемого в правой части (1.17):

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq c^{N-1} \int_0^t |e^{-K(p_1)(t-\tau)} - e^{-K(p_2)(t-\tau)}| d\tau \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} M^{-\gamma}(p_2 - q) M^{-\gamma}(q - r) M^{-\gamma}(r) \\
&\quad \times \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l j^{-\gamma_1} (l - j + 1)^{-\gamma_1} (N - l + 1)^{-\gamma_1} \\
&\quad \times \exp \left\{ -3a\tau - \alpha\tau \left[\left(\frac{|p_2 - q|}{2j - 1} \right)^2 + \left(\frac{|q - r|}{2l - 2j + 1} \right)^2 + \left(\frac{|r|}{2N - 2l + 1} \right)^2 \right] \right\} dq dr \\
&\leq c^N M^{-\gamma}(p_2) (N + 1)^{-\gamma_1} \int_0^t \exp \{ -(a + \alpha|p_2|^2)(t - \tau) \} M(p_2) |\Delta p|(t - \tau) \\
&\quad \times \exp \left\{ -3a\tau - \alpha\tau \frac{|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \right\} d\tau \\
&\leq c^N M^{-\gamma+1}(p_2) (N + 1)^{-\gamma_1} t |\Delta p| \\
&\quad \times \int_0^t \exp \left\{ - \left(a + \frac{\alpha|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \right) t + a\tau + \frac{\alpha|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \tau - 3a\tau - \alpha\tau \frac{|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \right\} d\tau \\
&\leq c^N M^{-\gamma+1}(p_2) (N + 1)^{-\gamma_1} t |\Delta p| \exp \left\{ - \left(a + \frac{\alpha|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \right) t \right\}. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Интегралы I_2 и I_3 оцениваются одинаково, оценим один из них, используя предположение индукции о справедливости (1.16) при $k < N$ и оценку (1.9):

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq c^{N-1} \int_0^t e^{-\operatorname{Re} K(p_1)(t-\tau)} d\tau (1 + \tau) |\Delta p|^\sigma \\
&\quad \times (N + 1)^{-\gamma_1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} M^{-\gamma+1}(p_1 - q) M^{-\gamma}(q - r) M^{-\gamma}(r) \\
&\quad \times \exp \left\{ -3a\tau - \alpha\tau \left[\left(\frac{|p_1 - q|}{2j - 1} \right)^2 + \left(\frac{|q - r|}{2l - 2j + 1} \right)^2 + \left(\frac{|r|}{2N - 2l + 1} \right)^2 \right] \right\} dq dr \\
&\leq c^N |\Delta p|^\sigma (1 + t) (N + 1)^{-\gamma_1} M^{-\gamma+1}(p_2) \exp \left\{ - \left(a + \frac{\alpha|p_2|^2}{(2N + 1)^2} \right) t \right\}, \quad (1.20)
\end{aligned}$$

поскольку $|p_2| \leq |p_1|$ и $|\Delta p| \leq 1$. Из (1.18)–(1.20) следует доказываемая оценка (1.16).

Наконец, установим оценку

$$|v_N(p, t) e^{K(p)t} - v_N(0, t) e^{at}| \leq c^N \exp \left\{ \alpha|p|^2 t - c_0 \frac{\alpha|p|^2 t}{(2N + 1)^2} \right\} (N + 1)^{-\gamma_1} |\Delta p|^\sigma \quad (1.21)$$

при $|p| \leq 1$, $|\Delta p| = |p - 0| = |p| \leq 1$ с некоторой константой $c_0 \in (0, 1]$, $t \geq 0$. Снова применим индукцию по N . При $N = 0$ имеем

$$|v_0(p, t)e^{K(p)t} - v_0(0, t)e^{at}| = \frac{1}{\varepsilon} |\widehat{u}(p) - \widehat{u}(0)| \leq |\Delta p|^\sigma M^{-\gamma+1}(p),$$

и выполнена оценка (1.21). При $N \geq 1$ используем представление

$$\begin{aligned} & v_N(p, t)e^{K(p)t} - v_N(0, t)e^{at} \\ &= -\lambda \int_0^t (e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}) d\tau \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l v_{j-1}^*(-q, \tau) v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dq dr \\ & \quad - \lambda \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{|p-q| < |q|} dq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l (v_{j-1}^*(p-q, \tau) - v_{j-1}^*(-q, \tau)) \\ & \quad \times v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dr - \lambda \int_0^t e^{K(p)\tau} d\tau \int_{|p-q| \geq |q|} dq \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l (v_{j-1}^*(p-q, \tau) - v_{j-1}^*(-q, \tau)) v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dr \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Имеем при $|p| \leq 1$

$$|e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| = e^{a\tau + \alpha|p|^2\tau} |1 - e^{-(\alpha + i\beta)|p|^2\tau}| \leq e^{a\tau + \alpha|p|^2\tau} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tau |p|^2,$$

поэтому ввиду (1.9)

$$|I_1| \leq c^{N-1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} |p|^2 (N+1)^{-\gamma_1} \int_0^t e^{-2a\tau + \alpha|p|^2\tau} \tau d\tau. \tag{1.23}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha|p|^2\tau &\leq \alpha|p|^2t - c_0 \frac{\alpha|p|^2}{(2N+1)^2} (t-\tau) \quad \text{при всех } N \geq 0 \text{ и } c_0 \leq 1, \\ c_0 \frac{\alpha|p|^2\tau}{(2N+1)^2} &\leq a\tau \quad \text{при всех } \tau \geq 0, \text{ если } c_0 \leq \frac{a}{\alpha}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

так как $|p| \leq 1$. Поэтому при $c_0 = \min(1, a/\alpha)$ оценки (1.23), (1.24) дают

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c^{N-1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} |p|^2 (N+1)^{-\gamma_1} \exp\left\{\alpha|p|^2t - \frac{c_0\alpha|p|^2t}{(2N+1)^2}\right\} \int_0^\infty e^{-a\tau} \tau d\tau \\ &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} |p|^2 \exp\left\{\alpha|p|^2t \left(1 - \frac{c_0}{(2N+1)^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Оценим I_2 (I_3 оценивается аналогично), используя (1.9) и (1.16), $|\Delta p| = |p| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c^{N-1} (N+1)^{-\gamma_1} |p|^\sigma \int_0^t \exp\{a\tau + \alpha|p|^2\tau\} (1+\tau) e^{-3a\tau} d\tau \\ &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} |p|^\sigma \exp\left\{\alpha|p|^2 t \left(1 - \frac{c_0}{(2N+1)^2}\right)\right\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

(см. (1.23)). Сопоставляя оценки (1.25), (1.26), приходим к оценке (1.21) с $c_0 = \min(1, a/\alpha)$.

3°. Теперь обратим преобразование Фурье

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p, x)} \widehat{u}(p, t) dp = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{2N+1} \psi_N(x, t), \quad (1.27)$$

где

$$\psi_N(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p, x)} v_N(p, t) dp,$$

а ε выбрано из условия $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{c}$, c — максимальная константа в оценках (1.9), (1.16), (1.21). Представим $\psi_N(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_N(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p, x)} v_N(p, t) dp = \int_{|p| \geq 1} e^{i(p, x)} v_N(p, t) dp \\ &\quad + \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} (v_N(0, t) e^{at} - \Phi_N) dp \\ &\quad + \Phi_N \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} dp \\ &\quad + \int_{|p| \leq 1} e^{i(p, x) - K(p)t} (v_N(p, t) e^{K(p)t} - v_N(0, t) e^{at}) dp \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где $\Phi_N = \lim_{t \rightarrow \infty} v_N(0, t) e^{at}$.

Оценим I_1 . В силу (1.9) имеем¹

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} \int_{|p| \geq 1} M^{-\gamma}(p) \exp\left\{-at - \alpha \frac{|p|^2 t}{(2N+1)^2}\right\} dp \\ &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} \exp\left\{-at - \frac{\alpha t}{(2N+1)^2}\right\} s_n \int_1^\infty |p|^{-\gamma+n-1} d|p| \\ &\leq \tilde{c}^N e^{-at} t^{-\mu}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

¹Здесь и ниже через $\tilde{c}$ обозначены различные константы, большие чем c . Мы дважды пользуемся элементарным неравенством $e^x \geq \left(\frac{x}{e\nu}\right)^\nu$ при всех $x, \nu > 0$, оценивая сначала $\exp\left\{-\frac{\alpha t}{(2N+1)^2}\right\}$, а затем N^k , где $k > 0$ фиксировано.

$\mu > n/2$ – любое фиксированное, s_n – площадь $(n-1)$ -мерной сферы.

Оценим I_2 .

$$\begin{aligned}\Phi_N &= \lim_{t \rightarrow \infty} v_N(0, t) e^{at} \\ &= \int_0^\infty e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l v_{j-1}^*(-q, \tau) v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dq dr,\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}v_N(0, t) e^{at} - \Phi_N \\ = - \int_t^\infty e^{a\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^l v_{j-1}^*(-q, \tau) v_{l-j}(q-r, \tau) v_{N-l}(r, \tau) dq dr.\end{aligned}$$

Используя (1.9), получаем

$$\begin{aligned}|v_N(0, t) e^{at} - \Phi_N| \\ \leq c^{N-1} \int_t^\infty e^{a\tau} \exp \left\{ -3a\tau - \alpha\tau \left[\left(\frac{|q|}{2j-1} \right)^2 + \left(\frac{|q-r|}{2l-2j+1} \right)^2 + \left(\frac{|r|}{2N-2l+1} \right)^2 \right] \right\} d\tau \\ \leq c^{N-1} \int_t^\infty e^{-2a\tau} d\tau \leq c^N e^{-2at}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Отсюда, в частности, $|\Phi_N| \leq c^N$ и

$$|I_2| \leq c^N \int_{|p| \leq 1} \exp \{ -at - \alpha|p|^2 t - 2at \} dp \leq \tilde{c}^N e^{-3at}.\tag{1.31}$$

Оценим I_4 . Ввиду (1.21) имеем:

$$\begin{aligned}|I_4| &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} \int_{|p| \leq 1} \exp \{ -at - \alpha|p|^2 t + \alpha|p|^2 t - \theta|p|^2 \} |p|^\sigma dp \\ &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} e^{-at} s_n \int_0^1 e^{-\theta|p|^2} |p|^{n-1+\sigma} d|p| \\ &\leq c^N (N+1)^{-\gamma_1} e^{-at} s_n \frac{1}{2\theta^{\frac{\sigma+n}{2}}} \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{\sigma+n}{2}-1} dx \\ &\leq \tilde{c}^N e^{-at} t^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \quad \theta = \frac{c_0 \alpha t}{(2N+1)^2}.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Оценим I_3 .

$$I_3 = \Phi_N \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-K(p)t} dp - \Phi_N \int_{|p| \geq 1} e^{i(p,x)-K(p)t} dp, \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{|p| \geq 1} e^{i(p,x)-K(p)t} dp \right| &\leq s_n e^{-at-\alpha t/2} \int_1^\infty e^{-\alpha|p|^2 t/2} |p|^{n-1} d|p| \\ &\leq \tilde{c} e^{-at-\alpha t/2} t^{-n/2}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(p,x)-K(p)t} dp &= e^{-at} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^\infty e^{ip_k x_k - \nu p_k^2 t} dp_k \\ &= \exp \left\{ -at - \frac{|x|^2}{4t\nu} \right\} \left(\frac{\pi}{t\nu} \right)^{n/2}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\nu = \alpha + i\beta, \quad \alpha > 0.$$

Собирая формулы (1.27)–(1.29), (1.31)–(1.35), получаем утверждение теоремы 1, поскольку

$$\psi_N(x, t) = \Phi_N \exp \left\{ -at - \frac{|x|^2}{4t\nu} \right\} \left(\frac{\pi}{t\nu} \right)^{n/2} + \tilde{c}^N O(e^{-at} t^{-\frac{n+\sigma}{2}}). \quad (1.36)$$

Подставляя (1.36) в (1.27), находим

$$u(x, t) = A \exp \left\{ -at - \frac{|x|^2}{4t\nu} \right\} \left(\frac{\pi}{t\nu} \right)^{n/2} + O(e^{-at} t^{-\frac{n+\sigma}{2}}), \quad (1.37)$$

где

$$A = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{N=0}^\infty \Phi_N \varepsilon^{2N+1},$$

а так как $|\Phi_N| \leq c^N$, то при $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{\tilde{c}}$ ряд сходится и ввиду (1.9)

$$A = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx.$$

В самом деле, $\Phi_N = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} v_N(0, t)$, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{N=0}^\infty \Phi_N \varepsilon^{2N+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \sum_{N=0}^\infty v_N(0, t) \varepsilon^{2N+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \hat{u}(0, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx. \end{aligned}$$

Константы Φ_N могут быть вычислены независимо от $u(x, t)$ только через символ $K(p)$ оператора $\mathbb{K}(u)$ и начальное условие $\bar{u}(x)$ в явном виде с помощью диаграммной техники (см. [5]).

§ 2. Одномерный случай, немалые начальные возмущения

Здесь мы рассмотрим одномерную по пространственной переменной задачу Коши для комплексного уравнения Л–Г:

$$u_t - (\alpha + i\beta)u_{xx} + \lambda|u|^2u + au = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

В отношении коэффициентов уравнения (2.1) будем предполагать, что $\alpha > 0$, $a > 0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Обозначим при любом $s \geq 0$

$$J_s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |p|^{2s} |\hat{u}(p, t)|^2 dp. \quad (2.2)$$

Как мы увидим ниже, $J_0(t)$ и $J_1(t)$ убывают со временем, а в силу интерполяционного неравенства это же верно и для $J_s(t)$ при любом $s \in [0, 1]$. Поэтому на основании теоремы 3 и следствия 1 из работы [7] можно утверждать, что задача (2.1) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее классу $C^\infty((0, \infty), H^\infty(\mathbb{R})) \cap C^0([0, \infty), H^\rho(\mathbb{R}))$, если $\bar{u}(x) \in H^\rho(\mathbb{R})$ при $\rho > 0$. Целью параграфа является построение асимптотики этого решения задачи (2.1) при $t \rightarrow \infty$ в случае произвольного начального условия $\bar{u}(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты уравнения Л–Г (2.1) и начальное возмущение $\bar{u}(x)$ удовлетворяют условиям: $\alpha > 0$, $a > 0$, β – любое вещественное число, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$,

$$\bar{u}(x) \in H^\rho(\mathbb{R}), \quad \rho > 0, \quad (1 + |x|)\bar{u}(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Тогда для указанного выше решения $u(x, t)$ задачи Коши (2.1) справедлива равномерная по $x \in \mathbb{R}$ асимптотика при $t \rightarrow \infty$

$$u(x, t) = Ae^{-at - \frac{x^2}{4t\nu}} \sqrt{\frac{\pi}{t\nu}} + O(e^{-at} t^{-1}), \quad (2.4)$$

A – некоторая постоянная, $\nu = \alpha + i\beta$, значение корня положительно на положительной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Используя неравенство Гёльдера с $r = \gamma/s$ и $r' = \gamma/(\gamma - s)$, $0 < s < \gamma$, получаем интерполяционное неравенство

$$\begin{aligned} J_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |p|^{2s} |\hat{u}(p, t)|^{\frac{2}{r} + \frac{2}{r'}} dp \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(p, t)|^2 dp \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{\mathbb{R}} |p|^{2sr} |\hat{u}(p, t)|^2 dp \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= J_0^{1-\frac{s}{\gamma}}(t) J_{\frac{s}{\gamma}}(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Умножим уравнение (2.1) на $u^*(x, t)$, а сопряженное уравнение — на $u(x, t)$, сложим полученные выражения и результат проинтегрируем по всем $x \in \mathbb{R}$, тогда при $t > 0$

$$\dot{J}_0(t) + 2 \operatorname{Re} \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx + 2aJ_0(t) + 2 \operatorname{Re} \nu \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx = 0; \quad (2.6)$$

при интегрировании по частям использовано то, что $u(x, t) \in C^\infty((0, \infty), H^\infty(\mathbb{R}))$. Так как $\alpha = \operatorname{Re} \nu > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, из (2.6) получим неравенство

$$\dot{J}_0(t) \leq -2aJ_0(t), \quad \text{т.е.} \quad J_0(t) \leq J_0(0)e^{-2at}. \quad (2.7)$$

Установим грубую оценку для $J_1(t)$. Для этого продифференцируем уравнение (2.1) и его сопряженное по x , умножим результат на u_x^* и на u_x соответственно, сложим полученные выражения и проинтегрируем по всем $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \left[\int_{\mathbb{R}} \nu u_{xxx} u_x^* dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^2 |u_x|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^{*2} dx \right] \\ + 2a \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\dot{J}_1(t) = -2aJ_1(t) - 2 \operatorname{Re} \nu \int_{\mathbb{R}} |u_{xx}|^2 dx - 4 \operatorname{Re} \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^2 |u_x|^2 dx - 2 \operatorname{Re} \left[\lambda \int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^{*2} dx \right]. \quad (2.8)$$

Далее,

$$\left| 2 \operatorname{Re} \left[\lambda \int_{\mathbb{R}} u^2 u_x^{*2} dx \right] \right| \leq 2|\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}} |u|^2 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx \leq 4|\lambda| J_0^{1/2}(t) J_1^{3/2}(t), \quad (2.9)$$

поскольку верна оценка

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)|^2 &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^x (|u(y, t)|^2)_y dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u(y, t)| |u_y(y, t)| dy \\ &\leq 2 J_0^{1/2}(t) J_1^{1/2}(t). \end{aligned}$$

Из (2.8) и (2.9) ввиду условия $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ найдем

$$\dot{J}_1(t) \leq -2aJ_1(t) - 2 \operatorname{Re} \nu J_2(t) + 4|\lambda| J_0^{1/2}(t) J_1^{3/2}(t). \quad (2.10)$$

Далее, согласно (2.5) $J_1(t) \leq J_2^{1/2}(t) J_0^{1/2}(t)$ и, значит,

$$4|\lambda| J_0^{1/2}(t) J_1^{3/2}(t) \leq 4|\lambda| J_0^{5/4}(t) J_2^{3/4}(t). \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) с учетом того, что $a > 0$, получим

$$\begin{aligned} \dot{J}_1(t) &\leq -2 \operatorname{Re} \nu J_2(t) + 4|\lambda| J_0^{5/4}(t) J_2^{3/4}(t) \\ &= 2J_2^{3/4}(t) [2|\lambda| J_0^{5/4}(t) - \operatorname{Re} \nu J_2^{1/4}(t)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

По условию $\operatorname{Re} \nu = \alpha > 0$, и неравенство (2.12) при каждом $t \geq 0$ представляет две возможности:

1) $2|\lambda| J_0^{5/4}(t) \geq \alpha J_2^{1/4}(t)$, тогда при таком t ввиду (2.7)

$$J_1(t) \leq J_2^{1/2}(t) J_0^{1/2}(t) \leq J_0^{1/2}(t) \left(\frac{2|\lambda|}{\alpha} \right)^2 J_0^{5/2}(t) \leq \left(\frac{2|\lambda|}{\alpha} \right)^2 J_0^3(0); \quad (2.13)$$

2) $2|\lambda| J_0^{5/4}(t) < \alpha J_2^{1/4}(t)$, тогда $\dot{J}_1(t)$ при таком t отрицательна, и мы опустимся по времени либо до начального момента, либо до момента, когда выполнено условие 1). Таким образом, при всех $t \geq 0$ справедлива оценка

$$J_1(t) \leq \max \left\{ J_1(0), \left(\frac{2|\lambda|}{\alpha} \right)^2 J_0^3(0) \right\}, \quad (2.14)$$

т.е. $J_1(t)$ ограничена при всех $t \geq 0$.

Теперь усилим оценки (2.7) и (2.14) для $J_0(t)$ и $J_1(t)$. Применяя, как и в § 1, преобразование Фурье, представляем решение задачи Коши (2.1) в виде

$$\widehat{u}(p, t) = \widehat{\bar{u}}(p) e^{-K(p)t} + w(p, t), \quad (2.15)$$

где

$$w(p, t) = -\lambda \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}^*(p-q, \tau) \widehat{u}(q-r, \tau) \widehat{u}(r, \tau) dq dr. \quad (2.16)$$

Для дальнейшего нам потребуется оценка функции $w(p, t)$:²

$$\begin{aligned} |w(p, t)| &\leq |\lambda| \int_0^t e^{-a(t-\tau) - \alpha p^2(t-\tau)} d\tau \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}^*(p-q, \tau) \widehat{u}(q-r, \tau) \widehat{u}(r, \tau)| dq dr, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}^*(p-q, \tau) \widehat{u}(q-r, \tau) \widehat{u}(r, \tau)| dq dr \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}^*(p-q, \tau)| dq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(r, \tau)|^2 dr \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(q-r, \tau)|^2 dr \right\}^{1/2} \\ &\leq c J_0(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{u}^*(q, \tau)| (1 + |q|)}{(1 + |q|)} dq \leq c J_0(\tau) \sqrt{J_0(\tau) + J_1(\tau)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

²Здесь и ниже буквой c обозначаются различные положительные константы.

Сопоставляя (2.17), (2.18), получаем оценку для $w(p, t)$ при всех $p \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$:

$$|w(p, t)| \leq c e^{-at} \int_0^t e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau) - 2a\tau} d\tau \leq c e^{-at}. \quad (2.19)$$

Теперь усилим оценку (2.7) для $J_0(t)$. Согласно (2.6) ввиду условия $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\dot{J}_0(t) \leq -2aJ_0(t) - 2\alpha \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx. \quad (2.20)$$

Далее, при любом $\xi \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} p^2 |\widehat{u}(p, t)|^2 dp \geq \frac{1}{2\pi} \int_{|p| \geq \xi} p^2 |\widehat{u}|^2 dp \\ &\geq \frac{\xi^2}{2\pi} \int_{|p| \geq \xi} |\widehat{u}(p, t)|^2 dp = \frac{\xi^2}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(p, t)|^2 dp - \int_{|p| \leq \xi} |\widehat{u}|^2 dp \right) \\ &\geq \xi^2 J_0(t) - \frac{\xi^2}{2\pi} \cdot 2\xi U^2(t) e^{-2at}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$U(t) = \sup_{|p| \leq \xi} \sup_{0 \leq \tau \leq t} e^{a\tau} |\widehat{u}(p, \tau)|, \quad (2.22)$$

поскольку

$$\sup_{|p| \leq \xi} |\widehat{u}(p, t)| \leq e^{-at} \sup_{|p| \leq \xi} \sup_{0 \leq \tau \leq t} e^{a\tau} |\widehat{u}(p, \tau)| = e^{-at} U(t). \quad (2.23)$$

Положим в (2.21) $\xi = (2\alpha(1+t))^{-1/2}$, тогда из (2.20) и (2.21) получим

$$\dot{J}_0(t) \leq -2aJ_0(t) - \frac{J_0(t)}{1+t} + \frac{2\alpha}{\pi} \frac{U^2(t) e^{-2at}}{(2\alpha(1+t))^{3/2}}. \quad (2.24)$$

Положив $J_0(t) = e^{-2at}(1+t)^{-1}f(t)$, проинтегрируем неравенство (2.24) и найдем

$$J_0(t) \leq c e^{-2at}(1+t)^{-1/2} U^2(t). \quad (2.25)$$

Из определения (2.22) функции $U(t)$ ввиду (2.15) и (2.19) при $|\xi| \leq c_0$, $c_0 = 1/\sqrt{2\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned} U(t) &\leq \sup_{|p| \leq c_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\widehat{u}(p)| e^{-a\tau - \alpha p^2 \tau + a\tau} + \sup_{|p| \leq c_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t} e^{a\tau} |w(p, \tau)| \\ &\leq \sup_{|p| \leq c_0} |\widehat{u}(p)| + c \leq \|\overline{u}\|_{L_1} + c \leq c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.25) и (2.26) получаем оценку

$$J_0(t) \leq c e^{-2at}(1+t)^{-1/2}. \quad (2.27)$$

Установим более точную оценку для $J_1(t)$; обозначим $F(t, p) = e^{-\operatorname{Re} K(p)t}$,

$$2\pi J_1(t) \leq 2\|p\widehat{u}(p)F(t, p)\|_{L_2}^2 + 2\|p w(p, t)\|_{L_2}^2; \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \|p\widehat{u}(p)F(t, p)\|_{L_2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} p^2 |\widehat{u}(p)|^2 e^{-2at-2\alpha p^2 t} dp \\ &\leq e^{-2at} \sup_{p \in \mathbb{R}} |\widehat{u}(p)|^2 2 \int_0^\infty p^2 e^{-2\alpha p^2 t} dp \\ &\leq c e^{-2at} t^{-3/2} \|\widehat{u}\|_{L_1}^2; \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \|p w(p, t)\|_{L_2}^2 &\leq |\lambda|^2 \left\| p \int_0^t e^{-\operatorname{Re} K(p)(t-\tau)} d\tau \right. \\ &\quad \times \left. \iint_{-\infty}^\infty |\widehat{u}^*(p-q, \tau) \widehat{u}(q-r, \tau) \widehat{u}(r, \tau)| dq dr \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq 2|\lambda|^2 \left(\left\| p \int_{t/2}^t \{\dots\} \right\|_{L_2}^2 + \left\| p \int_0^{t/2} \{\dots\} \right\|_{L_2}^2 \right) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценивая двойной интеграл как в (2.18), получаем с учетом оценок (2.14) и (2.27)

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c e^{-2at} \left\| p \int_{t/2}^t e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} J_0(\tau) \sqrt{J_0(\tau) + J_1(\tau)} d\tau \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq c e^{-2at} \left\| p \int_{t/2}^t e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} e^{-2a\tau} (1+\tau)^{-1/2} d\tau \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq c e^{-3at} \frac{1}{1+t} \left\{ \int_0^1 p^2 \left(\int_{t/2}^t e^{-\alpha p^2(t-\tau)} d\tau \right)^2 dp \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty p^2 \left(\int_{t/2}^t e^{-\alpha p^2(t-\tau)} d\tau \right)^2 dp \right\} \\ &\leq c e^{-3at} (1+t)^{-1} \left\{ t^2 + \int_1^\infty p^2 \left(\frac{1 - e^{-\alpha p^2 t/2}}{\alpha p^2} \right)^2 dp \right\} \\ &\leq c e^{-3at} (1+t)^{-1} (t^2 + 1) \leq c e^{-2at} (1+t)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

так как $e^{-at} \leq c(1+t)^{-\mu}$, $\mu \geq 0$ – любое;

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c e^{-2at} \left\| p \int_0^{t/2} e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} J_0(\tau) \sqrt{J_0(\tau) + J_1(\tau)} d\tau \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq c e^{-2at} \left\| p e^{-\alpha p^2 t/2} \int_0^{t/2} e^{-a\tau} (1+\tau)^{-1/2} d\tau \right\|_{L_2}^2 \\ &\leq c e^{-2at} \int_0^\infty p^2 e^{-\alpha p^2 t} dp = c e^{-2at} t^{-3/2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Собирая оценки (2.28)–(2.31), получаем оценку для $J_1(t)$ (с учетом (2.14)):

$$J_1(t) \leq c e^{-2at} (1+t)^{-3/2}, \quad t \geq 0. \quad (2.32)$$

2°. Пользуясь представлением (2.15), обращаем преобразование Фурье

$$\begin{aligned} 2\pi u(x, t) &= \widehat{u}(0) \int_{\mathbb{R}} e^{ipx - K(p)t} dp \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} e^{ipx - K(p)t} (\widehat{u}(p) - \widehat{u}(0)) dp + \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} w(p, t) dp \\ &= \widehat{u}(0) \exp \left\{ -at - \frac{|x|^2}{4t\nu} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{t\nu}} + I_1 + I_2; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq e^{-at} \sup_{p \in \mathbb{R}} |\widehat{u}'(p)| \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha p^2 t} |p| dp \\ &\leq c e^{-at} \int_0^\infty e^{-\alpha p^2 t} p dp = c e^{-at} t^{-1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

поскольку $|\widehat{u}'(p)| \leq c$, так как по условию $x\bar{u}(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Оценим интеграл

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} w(p, t) dp.$$

Рассмотрим при $0 \leq \mu < 1$ и $\theta > 1$ выражение $m^\mu(p) M^\theta(p) |w(p, t)|$, где $m(p) = \min(1, |p|)$, $M(p) = \max(1, |p|)$. Имеем согласно определению (2.16) функции $w(p, t)$:

$$\begin{aligned} m^\mu(p) M^\theta(p) |w(p, t)| &\leq |\lambda| m^\mu(p) M^\theta(p) \int_0^t e^{-\operatorname{Re} K(p)(t-\tau)} d\tau \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty |\widehat{u}^*(p-q, \tau) \widehat{u}(q-r, \tau) \widehat{u}(r, \tau)| dq dr \\ &= \int_{t/2}^t \{ \dots \} + \int_0^{t/2} \{ \dots \} = j_1 + j_2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для оценки интегралов j_1 и j_2 используем очевидные соотношения $m^\mu(p) M^\mu(p) = |p|^\mu$ и $M^\gamma(p) \leq c(M^\gamma(p-q) + M^\gamma(q-r) + M^\gamma(r))$, $\gamma = \theta - \mu$, $0 < \gamma \leq 1$, и оценки (2.27) и (2.32):

$$\begin{aligned} |j_1| &\leq c |p|^\mu \int_{t/2}^t e^{-\operatorname{Re} K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(r, \tau)| dr \\ &\quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}} M^{2\gamma}(p-q) |\widehat{u}^*(p-q, \tau)|^2 dq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(q-r, \tau)|^2 dq \right\}^{1/2} \\ &\leq c |p|^\mu e^{-at} \int_{t/2}^t e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} d\tau (J_\gamma(\tau) + J_0(\tau))^{1/2} (J_0(\tau) + J_1(\tau))^{1/2} J_0^{1/2}(\tau) \\ &\leq c e^{-at} |p|^\mu \int_{t/2}^t e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} J_0^{3/2}(\tau) d\tau \\ &\leq c e^{-2at} (1+t)^{-3/4} |p|^\mu \int_{t/2}^t \frac{d\tau}{|p|^\mu (t-\tau)^{\mu/2}} \\ &\leq c e^{-2at} (1+t)^{-3/4} t^{1-\mu/2} \\ &\leq c e^{-at} (t+1)^{-n} \quad \text{для любого } n \geq 0, \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Оценим теперь j_2 при $|p| \geq \sigma > 0$. Действуя как при оценке j_1 , получим

$$\begin{aligned} |j_2| &\leq c e^{-at} |p|^\mu \int_0^{t/2} e^{a\tau - \alpha p^2(t-\tau)} J_0^{3/2}(\tau) d\tau \\ &\leq c e^{-at} e^{-\alpha p^2 t/2} |p|^\mu \int_0^{t/2} e^{-2a\tau} d\tau \leq c e^{-at} |p|^\mu \frac{1}{(\alpha p^2 t/2)^s} \\ &\leq c e^{-at} \sigma^{\mu-2s} t^{-s} \quad \text{для любого } s > \frac{\mu}{2}, \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Представим $w(p, t)$ в виде

$$\begin{aligned} w(p, t) &= -\lambda \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^*(p-q, \tau) \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr \\ &= \int_{t/2}^t \{\dots\} + \int_{\substack{0 \\ |p| \geq \sigma}}^{t/2} \{\dots\} + \int_{\substack{0 \\ |p| \leq \sigma}}^{t/2} \{\dots\} \\ &\equiv w_1(p, t) + w_2(p, t) + w_3(p, t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ipx} w(p, t) dp = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} w_1 dp + \int_{|p| \geq \sigma} e^{ipx} w_2 dp + \int_{|p| \leq \sigma} e^{ipx} w_3 dp = J_1 + J_2 + J_3. \quad (2.39)$$

В силу (2.36) и (2.37) имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{m^\mu(p) M^\theta(p) |w_1(p, t)| dp}{m^\mu(p) M^\theta(p)} \leq c e^{-at} (1+t)^{-n} \\ &\quad \text{для любого } n \geq 0, \quad t \geq 1, \quad (2.40) \\ |J_2| &\leq \int_{|p| \geq \sigma} \frac{M^\theta(p) |w_2(p, t)| dp}{M^\theta(p)} \leq c e^{-at} (1+t)^{-n} \\ &\quad \text{для любого } n \geq 1, \quad t \geq 1. \quad (2.41) \end{aligned}$$

3°. Осталось рассмотреть интеграл

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{|p| \leq \sigma} e^{ipx - K(p)t} (w_3(0, t) e^{at} - \Phi) dp + \Phi \int_{|p| \leq \sigma} e^{ipx - K(p)t} dp \\ &\quad + \int_{|p| \leq \sigma} e^{ipx - K(p)t} (w_3(p, t) e^{K(p)t} - w_3(0, t) e^{at}) dp \equiv j_1 + j_2 + j_3, \end{aligned} \quad (2.42)$$

константа $\sigma \in (0, 1]$ будет выбрана ниже, $\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} w_3(0, t) e^{at}$. Оценим разность

$$\begin{aligned} w_3(p, t) e^{K(p)t} - w_3(0, t) e^{at} &= -\lambda \int_0^{t/2} (e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}) d\tau \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^*(-q, \tau) \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr - \lambda \int_0^{t/2} e^{K(p)\tau} d\tau \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}^*(p-q, \tau) - \hat{u}^*(-q, \tau)] \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq dr = i_1 + i_2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Поскольку $|e^{K(p)\tau} - e^{a\tau}| \leq e^{a\tau + \alpha p^2 \tau} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tau p^2$, то с учетом оценок (2.18), (2.27) и (2.32) получим

$$|i_1| \leq c p^2 \int_0^{t/2} e^{a\tau + \alpha p^2 \tau} J_0^{3/2}(\tau) d\tau \leq c p^2 \int_0^{t/2} e^{-2a\tau + \alpha p^2 \tau} \tau d\tau \leq c p^2 \quad (2.44)$$

при всех $t \geq 0$ и $|p| \leq \sigma$, если $\sigma > 0$ достаточно мало, так что $\sigma^2 \leq a/\alpha$. Далее,

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}^*(p-q, \tau) - \hat{u}^*(-q, \tau)] \hat{u}(q-r, \tau) \hat{u}(r, \tau) dq d\tau \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(r, \tau)| d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(q-r, \tau)|^2 dq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-q}^{p-q} \left| \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial z}(z, \tau) \right| dz \right)^2 dq \right\}^{1/2} \\ & \leq c J_0^{1/2}(\tau) (J_0(\tau) + J_1(\tau))^{1/2} |p|^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_0^{|p|} \left| \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial y}(y+q, \tau) \right|^2 dy \right\}^{1/2} \\ & \leq c |p| J_0^{1/2}(\tau) (J_0(\tau) + J_1(\tau))^{1/2} V_0^{1/2}(\tau) \leq c |p| J_0(\tau) V_0^{1/2}(\tau), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$V_0(\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(y, \tau) \right|^2 dy. \quad (2.46)$$

ЛЕММА. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех $t \geq 0$ существует функция

$$V_0(t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial p}(p, t) \right|^2 dp = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u(x, t)|^2 dx$$

и справедлива оценка

$$V_0(t) \leq c e^{-2at} (1+t)^{1/2}, \quad t \geq 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (2.47)$$

Доказательству леммы мы посвятим пункт 4°, а здесь закончим вывод асимптотики решения задачи (2.1).

Подставляя оценку (2.47) в интеграл i_2 , получаем при $|p| \leq \sigma \leq \sqrt{a/\alpha}$

$$\begin{aligned} |i_2| & \leq c \int_0^{t/2} e^{a\tau + \alpha p^2 \tau} |p| J_0(\tau) V_0^{1/2}(\tau) d\tau \\ & \leq c |p| \int_0^{t/2} \exp\{a\tau + \alpha p^2 \tau - 2a\tau - a\tau\} (1+\tau)^{-1/4} d\tau \\ & \leq c |p| \int_0^{\infty} e^{-a\tau} (1+\tau)^{-1/4} d\tau \leq c |p|. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Оценки (2.44) и (2.48) позволяют легко оценить интеграл j_3 в (2.42):

$$|j_3| \leq c \int_{|p| \leq \sigma} |p| e^{-at - \alpha p^2 t} dp \leq c e^{-at} t^{-1}. \quad (2.49)$$

Интегралы j_1 и j_2 вычисляются как в §1 с использованием (2.18), (2.27), (2.32):

$$\begin{aligned} |w_3(0, t)e^{at} - \Phi| &= \left| \lambda \int_{t/2}^{\infty} e^{a\tau} d\tau \iint_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}^*(-q, \tau) \widehat{u}(q - r, \tau) \widehat{u}(r, \tau) dq dr \right| \\ &\leq c \int_{t/2}^{\infty} e^{a\tau} J_0^{3/2}(\tau) d\tau \leq c \int_{t/2}^{\infty} e^{a\tau - 3a\tau} (1 + \tau)^{-3/4} d\tau \leq c e^{-at}, \\ |j_1| &\leq \int_{|p| \leq \sigma} e^{-at - \alpha p^2 t} |w_3(0, t)e^{at} - \Phi| dp \leq c e^{-2at}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= \Phi \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ipx - K(p)t} dp - \int_{|p| \geq \sigma} e^{ipx - K(p)t} dp \right) \\ &= \Phi \exp \left\{ -at - \frac{x^2}{4t\nu} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{t\nu}} + O(e^{-at} t^{-n}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$n \geq 1$ – любое, $t \geq 1$.

Наконец, собирая формулы (2.33), (2.34), (2.39)–(2.42), (2.49)–(2.51), получаем равномерную по $x \in \mathbb{R}$ асимптотику $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$2\pi u(x, t) = A \exp \left\{ -at - \frac{x^2}{4t\nu} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{t\nu}} + O(e^{-at} t^{-1}), \quad (2.52)$$

где

$$A = \widehat{u}(0) + \Phi = \widehat{u}(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} w(0, t)e^{at} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \widehat{u}(0, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx.$$

4⁰. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Введем при $r > 0$ срезающую функцию $\theta_r(x)$:

$$\theta_r(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq r, \\ r^2 + r - |x|, & r < |x| \leq r^2 + r, \\ 0, & |x| > r^2 + r. \end{cases}$$

Умножим уравнение (2.1) на $u^* \theta_r$, сопряженное уравнение – на $u \theta_r$, сложим полученные результаты, проинтегрируем по всем $x \in \mathbb{R}$ и, введя обозначение

$$V_{0,r}(t) = \int_{\mathbb{R}} \theta_r(x) |u(x, t)|^2 dx,$$

найдем

$$\dot{V}_{0,r}(t) = -2aV_{0,r}(t) - 2 \operatorname{Re} \lambda \int_{\mathbb{R}} \theta_r |u|^4 dx + 2 \int_{\mathbb{R}} \theta_r \operatorname{Re} [\nu u_{xx} u^*] dx. \quad (2.53)$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в (2.53) и учитывая, что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, приходим к неравенству

$$\dot{V}_{0,r}(t) \leq -2aV_{0,r}(t) - 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \nu \theta'_r u^* u_x dx - 2 \operatorname{Re} \nu \int_{-\infty}^{\infty} \theta_r |u_x|^2 dx. \quad (2.54)$$

Оценим второй интеграл в правой части (2.54) с помощью неравенства Коши:

$$\begin{aligned} & \left| 2 \operatorname{Re} \left[\nu 2 \int_{-r}^r x u^* u_x dx \right] \right| \\ & \leq 2|\nu| \left(\varepsilon \int_{-r}^r x^2 |u_x|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-r}^r |u|^2 dx \right), \quad \varepsilon = \frac{\operatorname{Re} \nu}{|\nu|}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} & \left| 2 \operatorname{Re} \left[\nu \int_{r \leq |x| \leq r^2+r} \operatorname{sgn} x u^* u_x dx \right] \right| \\ & \leq 2|\nu| \left\{ \int_{r \leq |x| \leq r^2+r} |u|^2 dx \cdot \int_{r \leq |x| \leq r^2+r} |u_x|^2 dx \right\}^{1/2} \\ & \leq 2|\nu| (J_0(t) J_1(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Подставляя (2.55), (2.56) в (2.54) и учитывая определение функции $\theta_r(x)$, ввиду оценок (2.27) и (2.32) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_{0,r}(t) & \leq -2aV_{0,r}(t) + 2|\nu| J_0^{1/2}(t) J_1^{1/2}(t) + \frac{2|\nu|^2}{\operatorname{Re} \nu} J_0(t) \\ & \leq -2aV_{0,r}(t) + c e^{-2at} (1+t)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Интегрируя неравенство (2.57), находим при всех $r > 0$

$$V_{0,r}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_r(x) |u(x, t)|^2 dx \leq c_1 e^{-2at} (1+t)^{1/2}, \quad (2.58)$$

где константа c_1 не зависит от r . Устремляя r к бесконечности в (2.58) и пользуясь теоремой Фату, получаем оба утверждения леммы.

Список литературы

1. Doering C., Gibbon J. D., Holm D., Nicolaenko B. Low-dimensional behaviour in the complex Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 279–309.
2. Yang Y. S. Boundary value problems of the Ginzburg–Landau equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1990. V. 114. P. 355–365.
3. Du Q. Global existence and uniqueness of solutions of the time-dependent Ginzburg–Landau model for superconductivity // Appl. Anal. 1994. V. 53. P. 1–17.
4. Tang Qi, Wang S. Time-dependent Ginzburg–Landau equations of superconductivity // Phys. D. 1995. V. 88. P. 139–166.
5. Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves // Transl. Math. Monographs, AMS, Providence. 1994.
6. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений нелинейных уравнений с малыми начальными возмущениями // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 855–864.
7. Naumkin P. I., Shishmarev I. A. On properties of solutions of the nonlinear system of equations. I // Partial differential equations. Models in Physics and Biology. Math. research. V. 82. Berlin: Academie Verlag, 1994. P. 235–250.