Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ивочкин, Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 6, 85–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:17:04

УДК 514.853

М. Ю. Ивочкин**Топологический анализ движения
эллипсоида по гладкой плоскости**

Рассматривается задача о движении тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида по гладкой горизонтальной плоскости. Задача интегрируема и может быть рассмотрена как обобщение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа. Строятся бифуркационные диаграммы Смейла. Изучаются перестройки торов методами, развитыми в работах А. Т. Фоменко и его учеников.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

Задача о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости аналогична задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой: в ней также отсутствует четвертый интеграл для интегрируемости, но уже существенную роль играет вид поверхности тела, на которую обычно наложены условия выпуклости и касания плоскости в единственной точке. Известны всего два случая интегрируемости: 1) если тело – шар, причем центр масс совпадает с геометрическим центром и моменты инерции произвольны; 2) если тело является телом вращения и динамически симметрично (см. [1]). В первом случае задача идентична задаче для волчка Эйлера. В настоящей работе рассматривается второй случай: в качестве поверхности берется эллипсоид вращения и уравнения движения фактически сходны с уравнениями движения для волчка Лагранжа. Основная цель работы – построение бифуркационных диаграмм Смейла [2]. Описание перестроек инвариантных торов и топологических инвариантных поверхностей проводятся методами теории топологической классификации, развитой в работах А. Т. Фоменко и его учеников (см. [3], [4]). Задача в такой постановке для волчка Лагранжа изучалась в [5], [6].

§ 2. Постановка задачи

Рассматривается тело, имеющее форму эллипсоида, на гладкой горизонтальной плоскости (см. рис. 1). Ось симметрии поверхности тела является его осью динамической симметрии, причем центр масс лежит на этой оси на расстоянии s от геометрического центра эллипсоида-поверхности, а главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями поверхности тела (аналог волчка Лагранжа). На тело наложена одна голономная связь: высота

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00290).

Рис. 1. Эллипсоид на плоскости

центра масс над плоскостью будет зависеть лишь от углов Эйлера для главных центральных осей. Тогда система имеет пять степеней свободы. Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, Se_1, Se_2, Se_3 – главные центральные оси инерции тела, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости центра масс тела в осях $OXYZ$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела в осях Se_1, Se_2, Se_3 , $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор восходящей вертикали, направленный по OZ в осях Se_1, Se_2, Se_3 , m – масса тела, (b_1, b_2, b_3) – главные полуоси эллипсоида, $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – главный центральный тензор инерции тела, $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ – радиус-вектор из центра масс тела в точку касания к плоскости, $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ – вектор реакции плоскости, тоже параллельный OZ .

Закон изменения центра масс: $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} - mg\boldsymbol{\gamma}$.

В проекции на оси OX, OY получаем $\dot{v}_x = \dot{v}_y = 0$. Тогда можно выбрать инерциальную систему координат с началом в центре масс тела, двигающуюся равномерно вдоль горизонтальной плоскости и в которой $v_x = v_y = 0$. В проекции на OZ имеем $v_z = \dot{z}$, $m\dot{z} = N - mg$. Выразив отсюда значение N и подставив его в закон изменения главного кинетического момента относительно S , а также учитывая условие постоянства вертикального единичного орта, получим уравнения Эйлера–Пуассона

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times (m\dot{z} + mg)\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (2.1)$$

В общем случае для произвольного распределения масс нужно еще задать косинусы углов между главными осями эллипсоида и главными осями инерции тела, а также координаты геометрического центра в главных осях инерции и по ним найти выражения для $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$. В наших же предположениях

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{(\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{1/2}} - se_3, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1^2, b_2^2, b_3^2).$$

Тогда

$$z = -(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) = (b_1^2\gamma_1^2 + b_2^2\gamma_2^2 + b_3^2\gamma_3^2)^{1/2} + s\gamma_3$$

– высота центра масс.

Как известно [7], уравнения (2.1) можно переписать в виде гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, в которой фазовое пространство представляет собой орбиту коприсоединенного представления алгебры Ли.

Перейдем к каноническим импульсам

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{J_1 + a\gamma_1^2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & 0 \\ \frac{a\gamma_1\gamma_2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & \frac{J_1 + a\gamma_2^2}{J_1(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_3} \end{pmatrix},$$

где

$$a = \frac{m(b_3^2 - b_1^2)^2\gamma_3^2}{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2}.$$

Пусть $e(3) = \mathfrak{so}(3) \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ – шестимерная алгебра Ли группы движений $\mathbb{R}^3$, и пусть $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ – естественные координаты в коалгебре $e(3)^*$. Базисные скобки Пуассона имеют следующий вид:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Скобка Пуассона вырождена и обладает двумя функциями Казимира, коммутирующими в структуре (2.2) с любой функцией от $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$: $K = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ и $\Gamma = \gamma^2$. Интеграл K – проекция кинетического момента на вертикальную ось. Он связан с инвариантностью вращений тела относительно вертикали. Интеграл Γ – геометрический, выражающий условие постоянства единичного орта. Положив $\gamma^2 = 1$, исключим единственный сингулярный слой. Тогда уровень $M_{1,k}^4 = \{K = k, \gamma^2 = 1\}$ диффеоморфен TS^2 .

Соответствующие уравнения Гамильтона, которые имеют вид обобщенных уравнений Кирхгофа, таковы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + mgz, \\ H &= \frac{1}{2(J_1 + a(\gamma_1^2 + \gamma_2^2))} \left(M_1^2 + M_2^2 + \frac{a(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)^2}{J_1} \right) \\ &\quad + \frac{M_3^2}{2J_3} + mg((b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2)^{1/2} + s\gamma_3). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дополнительный интеграл Лагранжа $M_3 = J_3\omega$.

В соответствии с программой Смейла [2] исследования симметрии рассмотрим отображение момента

$$\mathfrak{F} = (H, M_3): M_{1,k}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Образ критического множества есть бифуркационная диаграмма Σ отображения $\mathfrak{F}$. Множество Σ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$ по теореме Сарда. Над каждой

связной компонентой $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ отображение (2.4) является расслоением по теореме о неявной функции. Если все слои слоения компактны, то тип интегральных многообразий может измениться лишь при переходе через Σ . В этих связных компонентах интегральные многообразия представляют собой объединение двумерных торов, как всякое связное ориентируемое компактное двумерное многообразие, допускающее касательное векторное поле без особых точек (так как особые точки лежат на особых слоях первых интегралов).

Изучим особенности отображения (2.4). Пусть $\tilde{H}$, $\tilde{M}_3$ – ограничения функций H , M_3 на $M_{1,k}^4$ соответственно.

Предположим, что ранг дифференциала (2.4) уменьшился ровно на единицу в некоторой точке. Тогда, например, $d\tilde{M}_3 = \lambda d\tilde{H}$ и пусть $d\tilde{H} \neq 0$. В этом случае ядро дифференциала трехмерно, три касательных вектора к $M_{1,k}^4$ перейдут при отображении в нуль, а один – в ненулевой вектор, причем тангенс его угла наклона равен множителю Лагранжа λ . В таком случае можно рассмотреть ограничение функции M_3 уже на трехмерное изоэнергетическое многообразие (локально) $Q_{h,k}^3 = \{H = h, K = k, \Gamma = 1\}$ и рассматривать критические точки. Таким образом, сначала ищутся те значения h , k , при которых имеем изоэнергетическое многообразие, т.е. строятся бифуркационные диаграммы в плоскости (k, h) , а затем и бифуркационные диаграммы отображения в плоскости (h, ω) . Связь между этими бифуркационными диаграммами такова: фиксированной точке, не принадлежащей $\Sigma_{k,h}$, соответствует вертикальный отрезок, соединяющий внешние точки $\Sigma_{h,\omega}$ при соответствующей фиксированной h . Затем строятся молекулы, т.е. исследуются особенности функции M_3 на изоэнергетическом многообразии $Q_{h,k}^3$.

§ 3. Построение бифуркационных диаграмм, перестройки торов

Поскольку интеграл Лагранжа линеен, будем рассматривать вместо него на многообразии $Q_{h,k}^3$ интеграл энергии на уровне совместности $P_{k,\omega}^3 = \{K = k, \Gamma = 1, M_3 = J\omega\}$. Эти подходы равносильны для $Q_{h,k}^3$, являющихся многообразием, так как критические множества у функций M_3 на $Q_{h,k}^3$ и H на $P_{k,\omega}^3$ (за исключением тех слоев, где лежат точки $\gamma_3 = \pm 1$) одинаковы и соответствующие индексы гессианов тоже равны. Пусть $x = \gamma_3$.

Сделаем параметры безразмерными. Пусть

$$mg = 1, \quad b_1 = 1, \quad J_1 = 1, \quad b_3 = b > 0, \quad c = b^2 - 1, \quad J_3 = J > 0.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для системы с гамильтонианом (2.3) разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(h, \omega)$ имеют при разных значениях k вид, изображенный на рис. 2, причем для случая $-1 < c < 0$: если $0 < s < -c/\sqrt{c+1}$, то b)–f), если $-c/\sqrt{c+1} < s < -c(c+2)/(c+1)^{2/3}$, то a)–f), если $s > -c(c+2)/(c+1)^{2/3}$, то a), f). Для случая $c > 0$: если $0 < s < c/\sqrt{c+1}$, то g), a), f), если $s > c/\sqrt{c+1}$, то a), f).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие для критических множеств имеет вид

$$\begin{aligned} dH &= \lambda_1 dK + \lambda_2 d\Gamma + \lambda_3 dM_3, \\ K &= k, \quad M_3 = J\omega, \quad \Gamma = 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,\omega}$ для случая смещенного центра масс

Из него получаем $M_1 = \lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma})_1$, $M_2 = \lambda_1(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\gamma})_2$, $M_3 = J(\lambda_1\gamma_3 + \lambda_3)$. Подставив найденные M_i в выражение для H , получим второй приведенный потенциал

$$V_{k,\omega}(x) = \frac{(k - J\omega x)^2}{2(1 - x^2)} + \frac{J\omega^2}{2} + (cx^2 + 1)^{1/2} + sx, \quad k \neq \pm J\omega. \quad (3.2)$$

Область возможности движения имеет следующий вид:

$$U_{k,\omega,h} = \{x \in [-1, 1] : V_{k,\omega}(x) \leq h\} \subset S^2. \quad (3.3)$$

Критические точки $V_{k,\omega}(x)$ задают критические множества.

Бифуркационные диаграммы таковы

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(k - J\omega x)^2}{2(1 - x^2)} + \frac{J\omega^2}{2} + (cx^2 + 1)^{1/2} + sx, \quad x \in [-1, 1], \\ M_{\pm}(x) &= \frac{k(1 + x^2) \pm (1 - x^2)(k^2 - 4cx^2(cx^2 + 1)^{-1/2} - 4sx)^{1/2}}{2x}. \end{aligned} \quad (3.4_{\pm})$$

Введем переменные $p = (k + J\omega)/2$, $q = (k - J\omega)/2$. В них приведенный потенциал запишется в виде

$$V_{p,q}(x) = \frac{p^2}{1 + x} + \frac{q^2}{1 - x} + \frac{(p - q)^2}{2J} + \sqrt{cx^2 + 1} + sx.$$

Продифференцируем его три раза и приравняем к нулю полученные выражения:

$$V'_{p,q}(x) = -\frac{p^2}{(1 + x)^2} + \frac{q^2}{(1 - x)^2} + \frac{cx}{(cx^2 + 1)^{1/2}} + s = 0, \quad (3.5)$$

$$V''_{p,q}(x) = \frac{2p^2}{(1 + x)^3} + \frac{2q^2}{(1 - x)^3} + \frac{c}{(cx^2 + 1)^{3/2}} = 0, \quad (3.6)$$

$$V'''_{p,q}(x) = \frac{-6p^2}{(1 + x)^4} + \frac{6q^2}{(1 - x)^4} + \frac{-3c^2x}{(cx^2 + 1)^{5/2}} = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим расположение на плоскости (q, p) прямой $p + q = k$ и гиперболы, задаваемой уравнением (3.5).

Условие пересечения имеет вид

$$F(q) = \frac{4xq^2}{(1 - x^2)^2} + \frac{2kq}{(1 + x)^2} - \frac{k^2}{(1 + x)^2} + \frac{cx}{\sqrt{cx^2 + 1}} + s = 0.$$

Дискриминант

$$\frac{D}{4} = \frac{k^2 - 4cx^2(cx^2 + 1)^{-1/2} - 4sx}{(1 - x^2)^2} = \frac{k^2 - \overline{G(x)}}{(1 - x^2)^2} > 0$$

задает область определения (3.4_±). Введем $G(x) = \sqrt{\overline{G(x)}}$. Пусть $(p_0, q_0) > 0$ – точка пересечения гиперболы (3.5) и эллипса (3.6), а

$$\begin{aligned} F_1(x) &= p_0 + q_0, & F_2(x) &= q_0 - p_0, \\ F_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{i+1}(1+x)^{3/2} \sqrt{\frac{c(2cx^3 + 3x - 1)}{2(cx^2 + 1)^{3/2}}} + s \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-x)^{3/2} \sqrt{\frac{-c(2cx^3 + 3x + 1)}{2(cx^2 + 1)^{3/2}}} - s, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим точку пересечения прямой $p+q = k$ и гиперболы (3.5). Эта точка лежит внутри эллипса, граница которого задается уравнением (3.6), тогда и только тогда, когда точки пересечения гиперболы и эллипса лежат по разные стороны от прямой. Доказательство этого утверждения элементарно следует из вида возможного расположения кривых (например, как на рис. 3). Таким образом, функция $\overline{G(x)}$ отвечает за параметризацию $\Sigma_{h,\omega}$, а $F_i(x)$, $i = 1, 2$, – за знак $V'_{k,\omega}(x)$.

Рис. 3. Расположение гиперболы, эллипса, прямой

Для случая $-1 < c < 0$ существует два разделяющих значения у $F_i(x)$:

$$\left\{ \frac{-c}{\sqrt{c+1}}, \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}} \right\},$$

а для $c > 0$ – одно

$$s = \frac{c}{\sqrt{c+1}}.$$

Для случая $-1 < c < 0$ при

$$0 < s < \frac{-c}{\sqrt{c+1}}$$

при разных x ветви гиперболы могут лежать в разных четвертях. Для расположения их пересечения с прямой относительно эллипса возможны восемь вариантов; при $-1 < c < 0$ при

$$\frac{-c}{\sqrt{c+1}} < s < \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}}$$

Рис. 4. Изменение вида бифуркационных диаграмм при разных k при $-1 < c < 0$

это расположение аналогично изображенному на рис. 3. Для случая

$$s > \frac{-c(c+2)}{(c+1)^{3/2}}$$

вторая производная потенциала всегда положительна, так же как и для случая $c > 0$ (см. рис. 4, 5).

ТЕОРЕМА 2. *Перестройки торов изображены на рис. 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathbb{R}^3(M_1, M_2, M_3)$ при фиксированной $\gamma \in S^2$ множество $\{H = h\}$ представляет собой эллипсоид, а пересечение плоскостей $\{K = k\}$ и $\{M_3 = J\omega\}$ в случае их непараллельности задает прямую. При этом в качестве меры их пересечения используется при фиксированных параметрах приведенный потенциал (3.2). Слой над каждой точкой $\gamma \in S^2$ гомеоморфен либо двум точкам (если $\gamma \in U_{k,\omega,h} \setminus \partial U_{k,\omega,h}$), либо точке (если $\gamma \in \partial U_{k,\omega,h}$), либо пуст (если $\gamma \notin U_{k,\omega,h}$). Приведенный потенциал не определен при $k = \pm J\omega$, когда точки $\gamma_3 = \pm 1$ принадлежат области возможного движения (ОВД) (3.3).

Рис. 5. Изменение вида бифуркационных диаграмм при разных k при $c > 0$

Собственные значения гессиана $d^2H|_{P_{k,\omega}^3}$ такие же, как и для волчка Лагранжа, т.е.

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1 + \frac{(k - J\omega x)^2}{(1 - x^2)^2}, \quad \mu_3 = (1 - x^2)V''_{k,\omega}.$$

ЛЕММА. 1) *Случай неособых поверхностей.*

Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть кольцо, то такому распределению параметров отвечает двумерный тор.

2) Два случая с особыми поверхностями, когда на поверхности лежит одна критическая окружность.

Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть окружность, то такому распределению параметров также отвечает окружность, а бифуркация появления из пустого множества и перехода в тор есть атом A .

Если $k \neq \pm J\omega$ и связная компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть два кольца, соединенные критической окружностью, то такому распределению параметров отвечает восьмерка, умноженная на окружность, т.е. бифуркация раздвоения тора (атом B).

3) Два случая с особыми поверхностями, когда на поверхности лежит одна невырожденная критическая точка.

Если $k = \pm J\omega$ и компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть точка $\{\gamma_3 = \pm 1\}$, то такому распределению параметров также отвечает изолированная точка (случай центр-центр).

Если $k = \pm J\omega$ и компонента ОВД $U_{k,\omega,h}$ есть диск с центром в $\{\gamma_3 = \pm 1\}$, то такому распределению параметров отвечает тор с “перетяжкой” (случай фокус-фокус).

Утверждение теоремы следует из леммы и доказательства теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Если центр масс не смещен ($s = 0$), то в трехмерном пространстве $\Sigma_{k,h,\omega}$ задает ласточкин хвост с двумя дополнительными поверхностями при $-1 < c < 0$ и поверхность с двумя лучами при $c > 0$ (рис. 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что единственная точка, в которой верны одновременно (3.5)–(3.7), есть точка $x = 0$.

На плоскости (q, p) уравнения (3.5) и (3.7) задают гиперболу, а (3.6) – эллипс. Необходимое условие их пересечения в одной из четырех (или двух) точек

Рис. 6. Типичные поверхности критических значений в пространстве (k, h, ω)

таково:

$$\begin{vmatrix} \frac{-1}{(1+x)^2} & \frac{1}{(1-x)^2} & \frac{cx}{(cx^2+1)^{1/2}} \\ \frac{2}{(1+x)^3} & \frac{2}{(1-x)^3} & \frac{c}{(cx^2+1)^{3/2}} \\ \frac{-6}{(1+x)^4} & \frac{6}{(1-x)^4} & \frac{-3c^2x}{(cx^2+1)^{5/2}} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) равносильно уравнению $xP(x) = 0$, где $P(x) = 2c^2x^4 + 5cx^2 + c + 4$. “Бипарабола” $P(x)$ положительна на интервале $(0, 1)$, так как $P(\pm 1) = 2(c+1)(c+2) > 0$, а абсцисса вершины “бипараболы” больше единицы. Заметим, что $V_{k,\omega}^{(4)} = -c(c+4)/8 \neq 0$. Тогда в точке $x = 0$ при значениях параметров $k^2 = -c$, $\omega = 0$ второй приведенный потенциал имеет тип A_3 (см. [8]). Докажем, что в этой точке имеет место версальная деформация [9], откуда будет следовать, что в пространстве (k, h, ω) образ критического множества есть локально ласточкин хвост [8].

Выражения для производных по параметру имеют следующий вид:

$$\frac{\partial V_{k,\omega}}{\partial k} = \frac{\sqrt{-c}}{1-x^2}, \quad \frac{\partial V_{k,\omega}}{\partial \omega} = \frac{-J\sqrt{-c}x}{1-x^2}.$$

Необходимое и достаточное условие версальной деформации выполнено, т.е.

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-c} \\ -J\sqrt{-c} & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажем, что точки типа A_2 лежат только на ребрах ласточкиного хвоста, а при $k > \sqrt{-c}$ нет атомов типа B . Докажем также, что при $0 < k < \sqrt{-c}$, если рассматривать сечения $k = \text{const}$, а также те критические точки x , лежащие на внешних кривых, выходящих из точек, где лежат $x = \pm 1$, то найдется такое $x_0(k)$, что всем x таким, что $|x| < |x_0|$, будет соответствовать атом B , а иначе – атом A .

Координаты точки пересечения гиперболы и эллипса $(q_0, p_0) > 0$ имеют следующий вид:

$$q_0 = \frac{\sqrt{-c} \sqrt{(1-x)^3} u}{2(cx^2+1)^{3/4}}, \quad p_0 = \frac{\sqrt{-c} \sqrt{(1+x)^3} v}{(cx^2+1)^{3/4}},$$

 Рис. 7. Бифуркационная диаграмма для случая $-1 < c < 0$

 Рис. 8. Бифуркационные диаграммы для случая $c > 0$

где

$$u = \sqrt{2cx^3 + 3x + 1}, \quad v = \sqrt{-2cx^3 - 3x + 1}.$$

Условия критерия означают, что $q_0 + p_0 > k$, $q_0 - p_0 < k$.

Рассмотрим функции

$$F_i(x) = \frac{\sqrt{(1-x)^3}u + (-1)^{i+1}\sqrt{(1+x)^3}v}{2(cx^2 + 1)^{3/4}}, \quad i = 1, 2.$$

Докажем, что функция $F_1(x)$ монотонно убывает, а $F_2(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0, 1)$. Если это так, то неравенства верны для всех x из промежутка $[0, x_0]$, где x_0 – точка пересечения кривой $F_1(x)$ или $F_2(x)$ с горизонтальной прямой $k/\sqrt{-c}$. В этом случае нужное утверждение будет доказано.

Производные функций $F_1(x), F_2(x)$ таковы

$$F'_i(x) = \frac{-3x}{4(cx^2 + 1)^{7/4}} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{u} + (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{1+x}}{v} \right) P(x) (-1)^{i+1} < 0, \\ x > 0, \quad i = 1, 2.$$

Докажем, что бифуркационные диаграммы $\Sigma_{h,\omega}$ в случае $s = 0$ (сечения поверхностей см. на рис. 6) имеют вид как на рис. 7, 8, а типичные – как на рис. 9.

Рис. 9. Типичные бифуркационные диаграммы для случаев $-1 < c < 0$, $0 < J < 1$ и $0 < c$, $1 < J$

Будем рассматривать точки пересечения прямой и эллипса при $1 > x > 0$, а параметр – при $q > 0$ (противоположный случай исследуется аналогично).

Если $c > 0$, то $V''_{p,q}(x) > 0$. В таком случае уравнения (3.4_±) задают график функции $h = h(\omega)$, причем критические точки и значения этой функции однозначно определяются из вида бифуркационных диаграмм, которые будут построены в § 4.

Пусть теперь $-1 < c < 0$.

Докажем, что (3.4_±) задает при $x > 0$ график монотонно возрастающей функции. Прямым подсчетом получаем, что

$$M'_+(x) = -\frac{k(1-x^2)}{2x^2} - \left(\frac{(x^2+1)k^2}{2x^2} + \frac{cx^2(3cx^2+c+4)}{(cx^2+1)^{3/2}} \right) \left(\sqrt{k^2 - \frac{4cx^2}{\sqrt{(cx^2+1)^{3/2}}}} \right)^{-1} < 0$$

и $h'(x) < 0$.

Так как $F(0) < 0$ при $x > 0$, то $F(q)$ имеет ровно два корня – один положительный, а другой отрицательный. С точки зрения бифуркационной диаграммы на рис. 7 это означает следующее: при фиксированном k , $0 < k < \sqrt{-c}$, любая критическая точка $x \in [-1, 1]$ лежит на $\Sigma_{k,\omega}$. Так как $x > 0$, то точкам, где $q > 0$, соответствует внешняя дуга $\Sigma_{k,\omega}$, выходящая из точки, где лежит $x = 1$, а $q < 0$ отвечает “внутренней” дуге $\Sigma_{k,\omega}$. Для $x < 0$ случай симметричен.

Теперь изучим, в каких местах $\Sigma_{h,\omega}$ возможны деформации, меняющие топологию с точки зрения изоэнергетических многообразий (см. рис. 9).

Можно прямыми вычислениями показать, что график функции $\omega_-(x)$ при $0 < k < \sqrt{-c}$ имеет вид как на рис. 10.

Из (3.1) следует, что $\lambda_3(x)$ есть тангенс угла наклона касательной к $\Sigma_{h,\omega}$ и имеет вид

$$\lambda_3(x) = \omega - \frac{k - I\omega x}{1 - x^2} - \frac{k}{1 + x}.$$

Можно показать, что при тех $x > 0$, где $\omega_-(x) > 0$, выполнено неравенство $\lambda(x) < 0$. Последнее означает, что при $x_0 < x < 1$ (x_0 – внутренний экстремум ω_-) $h = h(\omega)$ является графиком, имеющим не более двух внутренних экстремумов (см. § 4).

Рис. 10. График функции $\omega_-(x)$

ТЕОРЕМА 4. Если центр масс не смещен ($s = 0$), то точки $\gamma_3 = \pm 1$ имеют тип особенности фокус-фокус при $c > 0$, $k^2 < 4c/\sqrt{c+1}$; если $c > 0$, $k^2 > 4c/\sqrt{c+1}$ или $-1 < c < 0$, то эти точки принадлежат связной компоненте $\Sigma_{h,\omega}$ и имеют особенность типа центр-центр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем локальные координаты в окрестности точки $(0, 0, \pm J\omega, 0, 0, 1)$ и линеаризуем в них уравнения (2.3). Получим:

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 + (J-1)\omega M_2 - \frac{c}{\sqrt{c+1}} \gamma_2 &= 0, & \dot{\gamma}_1 - \omega \gamma_2 + M_2 &= 0, \\ \dot{M}_2 - (J-1)\omega M_1 + \frac{c}{\sqrt{c+1}} \gamma_1 &= 0, & \dot{\gamma}_2 + \omega \gamma_1 - M_1 &= 0. \end{aligned}$$

Положим $u = M_1 + iM_2$, $v = \gamma_1 + i\gamma_2$. В результате получим

$$\dot{u} - (J-1)i\omega u + \frac{c}{\sqrt{c+1}} iv = 0, \quad \dot{v} + i\omega v - u = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^2 - (J-2)\omega i \lambda + (J-1)\omega^2 - \frac{c}{\sqrt{c+1}} = 0.$$

Как и для любой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, это уравнение имеет корни вида $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $-\alpha + i\beta$, $-\alpha - i\beta$. В нашем случае

$$\alpha = \left(\frac{c}{\sqrt{c+1}} - \frac{k^2}{4} \right)^{1/2}, \quad \beta = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{J} \right).$$

Рис. 11. Бифуркация собственных значений

Таким образом, тип особенности – фокус-фокус, если

$$\frac{c}{\sqrt{c+1}} - \frac{k^2}{4} > 0,$$

и центр-центр в противоположном случае. Переход от одного типа к другому называется гамильтоновой бифуркацией Хопфа (рис. 11). А для волчка Лагранжа точка $\gamma_3 = -1$ всегда имеет тип центр-центр.

§ 4. Исследование изоэнергетических многообразий

Рассмотрим отображение

$$K \times H: S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(k, h). \quad (4.1)$$

Образ множества критических точек есть бифуркационная диаграмма $\Sigma_{k,h}$, а полный прообраз точки, не лежащей на $\Sigma_{k,h}$, является изоэнергетическим многообразием $Q_{h,k}^3$. Отображение (4.1) является собственным, т.е. прообраз компакта – компакт, тогда для каждой связной компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_{k,h}$ тип многообразия одинаков.

Условие функциональной зависимости имеет вид $dH = \lambda dK + \mu d\Gamma$. Переменные $\mathbf{M}$, γ разделились в силу линейности по γ интеграла проекции момента и квадратичности по $\mathbf{M}$ интеграла H . В таком случае $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{A}^{-1} \gamma$ и, подставляя это в выражение для H , получаем первый приведенный потенциал

$$V_k(\gamma_3) = \frac{k^2}{2(1 + (J-1)\gamma_3^2)} + (c\gamma_3^2 + 1)^{1/2} + s\gamma_3. \quad (4.2)$$

Область возможности движения на сфере Пуассона такова

$$U_{k,h}(\gamma_3) = \{\gamma_3 \in [-1, 1] : V_k(\gamma_3) \leq h\} \subset S^2. \quad (4.3)$$

Для каждой компоненты связности $\mathbb{R}^2(k, h) \setminus \Sigma_{k,h}$ тип многообразия $Q_{h,k}^3$ устанавливается на основании метода, предложенного Смейлом, связанного со стандартным надстраиванием $Q_{h,k}^3$ над областями возможности движения. При фиксированной $\gamma \in S^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3(M_1, M_2, M_3)$ множество $\{H = h\}$ представляет собой эллипсоид, а $\{K = k\}$ задает плоскость, причем в качестве меры их пересечения при фиксированных параметрах используется приведенный потенциал (4.2). Слой над каждой точкой $\gamma \in S^2$ гомеоморфен либо окружности (если $\gamma \in U_{k,h} \setminus \partial U_{k,h}$), либо точке (если $\gamma \in \partial U_{k,h}$), либо пуст (если $\gamma \notin U_{k,h}$).

ТЕОРЕМА 5. *Связные компоненты изоэнергетических поверхностей могут быть только следующего вида: S^3 , $\mathbb{R}P^3$, $S^1 \times S^2$.*

Для системы с гамильтонианом (2.3) при $s = 0$ разделяющие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(k, h)$ имеют следующий вид:

$$h = \frac{k^2}{2} + 1 \quad (4.4)$$

Рис. 12. Бифуркационная диаграмма для случая $0 < c, 0 < J < 1$ и $-1 < c < 0, 1 < J$

в прообразе каждой точки, где лежит одна критическая окружность $\gamma_3 = 0$;

$$h = \frac{k^2}{2J} + \sqrt{c+1} \quad (4.5)$$

в прообразе каждой точки, где лежат две критические точки $\gamma_3 = \pm 1$;

$$k^2 = \left(x - \frac{J-c-1}{J-1} \right)^2 \frac{J-1}{cx^{1/2}}, \quad h = \frac{3x^{1/2}}{2} + \frac{c+1-J}{2(J-1)x^{1/2}}, \quad x \in [1, c+1], \quad (4.6)$$

в прообразе каждой точки, где лежат две критические окружности $\gamma_3 = \pm \text{const} \neq 0, \pm 1$.

Бифуркационные диаграммы вида (4.6) существуют лишь при $c > 0, J > 1$ и $c < 0, J < 1$.

Для $-1 < c < 0, 1 < J$ и $c > 0, 0 < J < 1$ бифуркационные диаграммы, тип изоэнергетических многообразий и соответствующие графы Роба приведены на рис. 12.

Для $c > 0, J > 1$ бифуркационные диаграммы, тип изоэнергетических многообразий и соответствующие графы Роба приведены на рис. 13–18.

Бифуркационные диаграммы для случая $0 < J < 1, c < 0$ получаются из приведенных на рис. 13–18, если рассматривать их в обратном порядке, а соответствующие графы переворачивать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено в частном случае. Кроме того, в этом частном случае будут описаны кривые на плоскости k, h .

Критические множества задаются условием критических точек приведенного потенциала; отсюда следует вид бифуркационных диаграмм (4.4)–(4.6).

Рассмотрим производные функций, задающих кривую (4.6):

$$k'(x) = h'(x) \sqrt{\frac{J-1}{c}} x^{1/4}, \quad h'(x) = 0.75 \left(x - \frac{c+1-J}{3(J-1)} \right) x^{-3/2}. \quad (4.7)$$

Ориентированная кривизна равна:

$$\kappa = - \frac{|3(J-1)| |x - c - 1 + J|}{4\sqrt{(J-1)(x^{1/2}(J-1)(c+1) - 1)} x^{9/4}} < 0.$$

Рис. 13. Бифуркационная диаграмма для случая $1 < J < 4(c+1)/(3c+4)$

Рис. 14. Бифуркационная диаграмма для случая $4(c+1)/(3c+4) < J < 2\sqrt{c+1}/(\sqrt{c+1}+1)$

Рис. 15. Бифуркационная диаграмма для случая $2\sqrt{c+1}/(\sqrt{c+1}+1) < J < (c+1)^{1/4}$

Рис. 16. Бифуркационная диаграмма для случая $(c+1)^{1/4} < J < (\sqrt{c+1}+1)/2$

Рис. 17. Бифуркационная диаграмма для случая $(\sqrt{c+1}+1)/2 < J < (c+4)/4$

Рис. 18. Бифуркационная диаграмма для случая $(c+4)/4 < J$

Рис. 19. Молекулы для бифуркационной диаграммы на рис. 7

Вид кривой (4.6) при $-1 < c < 0$, $0 < J < 1$ и $0 < c$, $1 < J$ определяется следующими параметрами: при $4(c+1)(3c+4)^{-1} < J < 0.25(c+4)$ это клюв (точка возврата степени $3/2$), в остальных же случаях – возрастающая дуга, причем концы кривой обязательно лежат на каждой кривой (4.4), (4.5). В случае точки возврата V_k имеет два экстремума в промежутке $(0, 1)$. Координаты точки возврата имеют вид:

$$k = \frac{4}{27^{1/4}} \left(\frac{c+1-J}{J-1} \right)^{3/4} \sqrt{\frac{J-1}{c}}, \quad h = \sqrt{3 \frac{c+1-J}{J-1}}.$$

Можно показать, что точка возврата всегда лежит внутри ограниченной области между параболой.

Ввиду четности приведенного потенциала $\gamma_3 = 0$ – всегда критическое значение. Механически это соответствует ситуации, когда ось симметрии эллипсоида лежит в горизонтальной плоскости, а сам он перманентно вращается вокруг вертикали, чего не может быть для волчка Лагранжа. Кроме того, в волчке Лагранжа критические точки $\gamma_3 = \pm 1$ лежат на разных ветвях бифуркационных диаграмм, а на непараболических ветвях лежит по одной критической окружности.

Молекулы для случая $-1 < c < 0$, $J > 1$, $s = 0$ (тогда нет изгибов у $\Sigma_{h,\omega}$) изображены на рис. 19. Данному условию удовлетворяет, например, однородный эллипсоид.

Для других изоэнергетических многообразий молекула строится аналогично.

Автор выражает благодарность А. В. Карапетяну за постановку задачи и А. А. Ошемкову за помощь в работе.

Список литературы

- [1] А. А. Буров, А. В. Карапетян, “О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости”, *ПММ*, **49:3** (1985), 501–503; англ. пер.: A. A. Burov, A. V. Karapetyan, “On the non-existence of the additional integral in the problem of the motion of a heavy rigid ellipsoid along a smooth plane”, *J. Appl. Math. Mech.*, **49:3** (1985), 387–389.

- [2] С. Смейл, “Топология и механика”, *УМН*, **27**:2 (1972), 77–133; пер. с англ.: S. Smale, “Topology and mechanics. I”, *Invent. Math.*, **10**:4 (1970), 305–331; “Topology and mechanics. II. The planar n -body problem”, *Invent. Math.*, **11**:1 (1970), 45–64.
- [3] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [4] А. Т. Фоменко, Х. Ципанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [5] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по векторному и тензорному анализу*, 1993, № 2, 23–109.
- [6] Я. В. Татаринев, “Частотная невырожденность волчка Лагранжа и уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе”, *Механика твердого тела*, 1987, № 4, 30–36.
- [7] С. П. Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса”, *УМН*, **37**:5 (1982), 3–49; англ. пер.: S. P. Novikov, “The Hamiltonian formalism and a many-valued analogue of Morse theory”, *Russian Math. Surveys*, **37**:5 (1982), 1–56.
- [8] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2004; англ. пер. 1-го изд.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, vol. I, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985; *Singularities of differentiable maps*, vol. II, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, MA, 1988.
- [9] Дж. Брус, П. Джиблин, *Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: J. W. Bruce, P. J. Giblin, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

М. Ю. Ивочкин (M. Yu. Ivochkin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ivochkin@yandex.ru

Поступила в редакцию

01.11.2007