Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Шишков, А. Г. Щелков, Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 3, 129–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:56:00

УДК 517.9

А. Е. Шишков, А. Г. Щелков

Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях

Предлагается новый, не опирающийся на барьерную технику, подход к изучению асимптотических свойств обобщенных решений параболических начально-краевых задач с обострением граничных данных в конечный момент времени. Устанавливаются точные условия на характер обострения, обеспечивающие равномерную локализацию решения при произвольной финитной начальной функции. Основной результат статьи – это получение точных достаточных условий того, что множество сингулярности (или множество blow-up) произвольного решения остается сосредоточенным на границе области.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

В работе изучаются некоторые качественные свойства обобщенных решений смешанной задачи Коши–Дирихле для широкого класса квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнений типа нестационарной ньютоновско-неньютоновской фильтрации. Природу этих свойств продемонстрируем на примере следующей начально-краевой задачи для модельного уравнения нелинейной теплопроводности:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, \infty), \quad m > 1, \quad T < \infty; \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = f(t) \quad \forall t \in [0, T), \quad (1.3)$$

$$f(t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow T, \quad (1.4)$$

где u_0 и f являются заданными неотрицательными непрерывными функциями, удовлетворяющими следующему условию согласования: $u_0(0) = f(0)$. В случае ограниченности u_0 указанная задача имеет, как хорошо известно [1], единственное обобщенное решение $u(t, x)$. Это решение является непрерывной функцией [2], [3], причем если u_0 имеет компактный носитель, то для всех $t \in [0, T)$ носитель $u(t, \cdot)$ компактен (см. [4]–[6]) и можно определить подвижную границу (иначе говоря, термальный фронт, см. [7]):

$$\zeta(t) = \sup\{x \in [0, \infty) : u(t, x) > 0\} \quad \forall t \in [0, T).$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-1060).

Эта функция является непрерывной и монотонно возрастающей [8]. Условие (1.4) определяет так называемый граничный режим с обострением со временем обострения T . Наличие такого режима приводит к необходимости изучения предельного поведения решения $u(t, x)$ и фронта $\zeta(t)$ при $t \rightarrow T$. Такое изучение проводилось во многих исследованиях (см. [9], [10] и указанную там литературу).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Задача (1.1)–(1.3) при граничном режиме с обострением (1.4) обладает свойством *локализации*, если

$$\lim_{t \rightarrow T} \zeta(t) < \infty. \quad (1.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество $\Omega \in [0, \infty)$ называется *множеством интенсификации* или *множеством сингулярности* решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4), если для любой точки $x \in \Omega$

$$\limsup_{t \rightarrow T} u(t, x) = \infty. \quad (1.6)$$

Нахождение точных условий локализации решений и описание структуры множества сингулярности являются основными вопросами в проблематике, связанной с неограниченными граничными режимами. Первый общий результат в этом направлении был получен в [11]. В предположении, что

$$f(t) \in C^2(0, T), \quad f'(t) > 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (1.7)$$

$$\text{существует} \quad \lim_{t \rightarrow T} \left(\frac{f(t)}{f'(t)} \right)' = l, \quad (1.8)$$

было доказано, что произвольное решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4) сходится к некоторому аппроксимационному автомодельному решению при $t \rightarrow T$ равномерно по всем $x \in [0, \infty)$. Форма этого автомодельного решения позволяет сделать заключение, что локализация имеет место в том и только том случае, если

$$l = -\infty \quad \text{или} \quad \frac{f(t)^m}{f'(t)} \in L_\infty(0, T), \quad (1.9)$$

причем справедлива следующая характеристика множества сингулярности Ω :

$$\omega \equiv \sup\{x : x \in \Omega\} = \begin{cases} 0, & \text{если } l = -\infty, \\ c \limsup_{t \rightarrow T} \left[\frac{f(t)^m}{f'(t)} \right]^{1/2}, & \text{если } l > -\infty, \end{cases} \quad (1.10)$$

где c – постоянная, зависящая лишь от l .

Ранее [12] этот результат был установлен для модельного, предельного с точки зрения условия (1.9) граничного режима

$$f(t) = k(T - t)^{-\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < k = \text{const} < \infty. \quad (1.11)$$

В книге [10] рассмотрены граничные режимы с обострением и для некоторых других уравнений нелинейной теплопроводности. Так, для уравнений с градиентной нелинейностью

$$u_t = (|u_x|^{p-1} u_x)_x$$

найден автомодельное решение, соответствующее граничной функции

$$f(t) = k(T - t)^{-n}, \quad n > 0.$$

Из структуры этого решения следует, что предельный граничный режим, не разрушающий свойство локализации (S -режим в терминологии [10]), соответствует значению $n = (p - 1)^{-1}$, $p > 1$.

Ослабление жестких условий (1.8), (1.7) было осуществлено в [9]. Установлено, что для локализации необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{t \rightarrow T} \left[\frac{1}{f(t)} \int_0^t f(s)^m ds \right] < \infty, \quad (1.12)$$

при этом если имеет место локализация, то

$$\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{m-1}} u(t, x) < \infty \quad \forall x > 0, \quad (1.13)$$

если же локализация не имеет места, то

$$\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{m-1}} u(t, x) = \infty \quad \forall x \geq 0; \quad (1.14)$$

кроме того,

$$\liminf_{t \rightarrow T} u(t, x) = \infty \quad \forall x \in \Omega \quad (1.15)$$

и множество сингулярности Ω является связным интервалом $[0, \omega)$. Получена также общая двусторонняя оценка ω , из которой вытекает, в частности,

$$\nu b^{\frac{m-1}{2}} \leq \omega \leq \nu B^{\frac{m-1}{2}},$$

где

$$\nu = \left[\frac{2m(m+1)}{m-1} \right]^{1/2}, \quad B = \limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{m-1}} f(t), \\ b = \liminf_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{m-1}} f(t).$$

Показано также, что при выполнении условий (1.7), (1.8)

$$\limsup_{t \rightarrow T} \left[\frac{1}{f(t)} \int_0^t f(s)^m ds \right] = \limsup_{t \rightarrow T} \frac{f(t)^m}{f'(t)}.$$

Обобщение указанных результатов из [11] для задачи Неймана с граничным режимом с обострением для уравнения (1.1) было проведено в [13].

Отметим теперь, что все имеющиеся результаты по граничным режимам с обострением получены барьерной техникой и связаны с нахождением различных явных автомодельных решений. Этот подход в принципе неприменим к уравнениям, не допускающим соответствующих теорем сравнения.

В настоящей работе предлагается другой, не связанный с барьерной техникой подход к указанным задачам, позволяющий рассмотреть широкий класс квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях. Устанавливаются точные достаточные условия локализации решения, точные условия локализации множества сингулярности решения на границе исходной области.

Наш метод основан на специальных интегральных априорных оценках решений рассматриваемых задач и объединяет идеи, развивавшиеся в рамках:

- а) метода локальных энергетических оценок (см. [14], [15]);
- б) метода априорных оценок типа принципа Сен-Венана в теории единственности обобщенных решений линейных параболических задач (см. [16]);
- в) нелинейного варианта метода оценок типа принципа Сен-Венана, предложенного в [17].

§ 2. Формулировка основных результатов

В области $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}$, $n \geq 1$, $0 < T < \infty$, $R < \infty$, рассматривается следующая задача Коши–Дирихле:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q-1}u) - \sum_{i=1}^n D_{x_i} a_i(t, x, u, D_x u) = 0, \quad q > 0; \quad (2.1)$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t, x), \quad u|_{\Gamma(R)} = 0; \quad (2.2)$$

$$u(0, x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \quad (2.3)$$

$$\text{supp } u_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}, \quad 1 < d < R. \quad (2.4)$$

Здесь $\Gamma(s) \equiv (0, T) \times \partial B(s)$, $B(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < s\}$, каратеодориевы функции a_i удовлетворяют следующим условиям коэрцитивности и роста:

$$\sum_{i=1}^n a_i(t, x, s, \xi) \xi_i \geq d_0 |\xi|^{p+1} \quad \forall (t, x, s, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_0 > 0; \quad (2.5)$$

$$|a_i(t, x, s, \xi)| \leq d_1 |\xi|^p \quad \forall (t, x, s, \xi) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \quad d_1 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Выполняется основное структурное условие:

$$0 < q < p, \quad (2.7)$$

т.е. уравнение (2.1) является уравнением типа “медленной” диффузии. Граничная функция $\tilde{f}$ является следом на $\Gamma(1)$ некоторой функции $f(t, x)$ такой, что

$$f \in L_\infty((0, T_0) \times \Omega) \cap L_{p+1}(0, T_0; W_{p+1}^1(\Omega)) \quad \forall T_0 < T, \quad (2.8)$$

$$\text{supp } f \in [0, T] \times B(R_0), \quad R_0 < R, \quad (2.9)$$

$$f'_t \in L_1(0, T_0; L_{q+1}(\Omega)) \cap L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(0, T_0; L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)) \quad \forall T_0 < T. \quad (2.10)$$

Характер обострения граничного режима при $t = T$ будем описывать функцией

$$\begin{aligned} F(t) \equiv & \int_{\Omega} |f(t, x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_{\Omega} |D_x f(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |f'_{\tau}(\tau, x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx d\tau \\ & + \left(\int_0^t \left(\int_{\Omega} |f'_{\tau}(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \quad \forall t < T. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что функция $u(t, x)$ является *энергетическим обобщенным решением* задачи (2.1)–(2.3), если для любого $T_0 < T$:

- i) $u - f \in L_{p+1}(0, T_0; W_{p+1}^1(\Omega, \partial\Omega)) \cap L_{\infty}(0, T_0; L_{q+1}(\Omega))$;
- ii) $(|u|^{q-1}u)'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T_0; (W_{p+1}^1(\Omega, \partial\Omega))^*)$ и выполнено начальное условие (2.3) в смысле

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \zeta \rangle dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0) \zeta'_t dx dt = 0$$

для произвольной пробной функции $\zeta(t, x) \in L_{p+1}(0, T_0; W_{p+1}^1(\Omega, \partial\Omega)) \cap W_1^1(0, T_0; L_{\infty}(\Omega))$, обращающейся в нуль в окрестности $t = T_0$;

- iii) $a_i(t, x, u(t, x), D_x u(t, x)) \in L_{\frac{p+1}{p}}((0, T_0) \times \Omega)$, $i = 1, \dots, n$, и выполняется интегральное тождество

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta \rangle dt + \int_0^{T_0} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, D_x u) \eta_{x_i} dx dt = 0, \quad (2.12)$$

где $\eta(t, x)$ – произвольная функция из $L_{p+1}(0, T_0; W_{p+1}^1(\Omega, \partial\Omega))$.

Через $W_r^1(\Omega, S)$ обозначаем замыкание в норме $W_r^1(\Omega)$ множества функций из $C^{\infty}(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности $S \subset \partial\Omega$, $W_r^1(\Omega) \equiv W_r^1(\Omega, \emptyset)$.

Мы не будем рассматривать вопрос о разрешимости задачи (2.1)–(2.3) в общих предположениях. Приведем только известные результаты. Сформулируем сначала дополнительные ограничения на структуру уравнения (2.1):

1) функции a_i , $i = 1, \dots, n$, непрерывны по всем своим аргументам и удовлетворяют следующему условию монотонности:

$$\sum_{i=1}^n (a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta)) (\xi_i - \eta_i) \geq \delta |\xi - \eta|^{p+1}, \quad \delta > 0;$$

2) функции $u_0(x)$ и $\tilde{f}(t, x)$ удовлетворяют условию согласования:

$$f(0, x) - u_0(x) \in W_{p+1}^1(\Omega, \partial\Omega);$$

3) функции a_i , $i = 1, \dots, n$, не зависят от (t, x) и

$$\sum_{i=1}^n |a_i(s, \xi) - a_i(v, \xi)|^{\frac{p+1}{p}} \leq c(1 + |s|^{q+1} + |v|^{q+1} + |\xi|^{p+1}) |s - v| \quad \forall s, v \in \mathbb{R}^1.$$

Введем монотонно возрастающую последовательность $\{T_j\}$, $T_j \rightarrow T$ при $j \rightarrow \infty$, $T_j < T$. При выполнении условий 1), 2), как следует из [18], при любом $j \in \mathbb{N}$ существует по крайней мере одно энергетическое решение $u_j(t, x)$ задачи (2.1)–(2.3) в области $Q_j = (0, T_j) \times \Omega$ в смысле определения 2.1. То есть существуют функции $u_j(t, x)$, удовлетворяющие условиям i), ii), iii) из определения 2.1 с T_j вместо T_0 .

Пусть теперь выполнены все дополнительные предположения 1), 2), 3). Тогда, как следует из [19], указанные решения $u_j(t, x)$ являются единственными решениями задачи (2.1)–(2.3) в областях Q_j . Следовательно,

$$u_j(t, x) = u_i(t, x) \text{ для почти всех } (t, x) \in Q_i, \quad \forall j, i \in \mathbb{N}, \quad j > i.$$

Это значит, что последовательность $\{u_j\}$ определяет единую функцию $u(t, x)$ в области Q , являющуюся, как легко проверить, решением задачи (2.1)–(2.3) в смысле определения 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу условия (2.7) решение из определения 2.1 обладает свойством конечности скорости распространения носителя (см., например, [15]), откуда в силу условия (2.4) следует, что при любом граничном режиме (т.е. при любом росте функции $F(t)$ при $t \rightarrow T$) существует $T' = T'(F, R)$, $0 < T' \leq T$, такое, что

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \text{supp } u(t, \cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T'.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Мы будем говорить, что задача (2.1)–(2.3) обладает свойством *локализации*, если ее произвольное энергетическое решение $u(t, x)$ имеет следующее свойство:

$$\zeta(t) < R \quad \forall t < T. \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены структурные условия (2.5)–(2.7) и условие (2.4) на начальную функцию u_0 . Пусть граничный режим таков, что

$$F(t) \leq \omega(T - t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad \omega = \text{const} < \infty. \quad (2.14)$$

Тогда существуют постоянные $R_0 = R_0(d, d_0, d_1, q, p, \|u_0\|_{L_{q+1}(\Omega)}) < \infty$ и $K = K(R) > 0$ такие, что задача (2.1)–(2.4) обладает свойством локализации, как только $R > R_0$, $\omega < K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2 (о точности условия (2.14)). Задача (1.1)–(1.3), записанная относительно новой неизвестной функции

$$v(t, x) = u(t, x)^m,$$

является частным случаем задачи (2.1)–(2.3) с параметрами

$$p = 1, \quad q = \frac{1}{m}, \quad n = 1$$

и граничным режимом

$$\tilde{f}(t) = f(t)^m.$$

Предельному с точки зрения условий (1.9), (1.11), (1.12) режиму

$$f(t) = k(T - t)^{-\frac{1}{m-1}}$$

соответствует

$$\tilde{f}(t) = k^m(T - t)^{-\frac{m}{m-1}} = k^{\frac{1}{q}}(T - t)^{-\frac{1}{1-q}}.$$

Зафиксируем теперь некоторую функцию $\psi(x) \in C^1[0, \infty)$, $\psi(0) = 1$, $\text{supp } \psi \in [0, R)$, и в качестве продолжения $f(t, x)$ возьмем

$$f(t, x) \equiv \tilde{f}(t)\psi(x).$$

Тривиальные вычисления показывают, что для функции граничного режима $F(t)$, построенной по функции $f(t, x)$ по формуле (2.11), справедлива оценка:

$$F(t) \leq c(T - t)^{-\frac{q+1}{1-q}} \quad \forall t < T, \quad c = \text{const} < \infty,$$

и, следовательно, теорема 1 гарантирует наличие локализации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Измеримое множество $G \subset \overline{\Omega}$ будем называть *множеством регулярности* решения $u(t, x)$ задачи (2.1)–(2.3), если

$$\int_G |u(t, x)|^{q+1} dx + \int_{(0, t) \times G} |u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau < c = c(G) < \infty \quad \forall t < T.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Множество $S \subset \overline{\Omega}$ называется *множеством сингулярности* некоторого решения $u(t, x)$ задачи (2.1)–(2.3), если

$$S = \overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup G \right),$$

где справа стоит объединение всех множеств регулярности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в условиях теоремы 1 функция граничного режима $F(t)$ удовлетворяет дополнительному ограничению

$$F(t) \leq \omega(t)(T - t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad (2.15)$$

где $\omega(t)$ – произвольная монотонно невозрастающая непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая лишь одному условию:

$$\omega(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow T. \quad (2.16)$$

Тогда для произвольного обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3) множество сингулярности

$$S \subset \partial B(1),$$

т.е. $\overline{\Omega} \setminus B(r)$ является множеством регулярности $\forall r > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Модельность области Ω в задаче (2.1)–(2.3) определялась лишь желанием избежать дополнительных громоздких, но достаточно очевидных построений и вычислений. Все результаты остаются справедливыми для областей вида $B(R) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, $R < \infty$. Здесь Ω – произвольная односвязная область с C^1 -гладкой границей $\partial\Omega$: $\overline{\Omega} \subset B(R)$.

§3. Предварительные сведения и вспомогательные построения и утверждения

Пусть G – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей ∂G , пусть G_r – область, гомотетичная области G с коэффициентом гомотетии $r > 0$. Тогда хорошо известно следующее интерполяционное неравенство (см. [15]):

$$\|v\|_{L_{p+1}(\partial G_r)} \leq C \left(\|D_x v\|_{L_{p+1}(G_r)} + r^{-\delta} \|v\|_{L_{q+1}(G_r)} \right)^\theta \|v\|_{L_{q+1}(G_r)}^{1-\theta}, \quad (3.1)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из соболевского пространства $W_{p+1}^1(G_r)$, $0 \leq q \leq p < \infty$,

$$\delta = \frac{n(p-q) + (p+1)(q+1)}{(p+1)(q+1)}, \quad \theta = \frac{n(p-q) + q + 1}{n(p-q) + (q+1)(p+1)},$$

универсальная постоянная $C < \infty$ зависит только от известных параметров и не зависит, в частности, от $v(x)$, r .

Введем теперь следующие семейства подобластей, связанных с областями Ω , Q задачи (2.1)–(2.3):

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \Omega_R \setminus B(s) \quad \forall s > 1, \\ Q_{t_1}^{t_2}(s) &= (t_1, t_2) \times \Omega(s), \quad 0 \leq t_1 < t_2 < T. \end{aligned}$$

Исходя из неравенства (3.1) легко выводится следующее интерполяционное неравенство для введенного семейства ограниченных областей $\Omega(s)$:

$$\|v\|_{L_{p+1}(\partial \Omega(s))} < C_1 \|D_x v\|_{L_{p+1}(\Omega(s))}^\theta \|v\|_{L_{q+1}(\Omega(s))}^{1-\theta} \quad \forall s > 1, \quad (3.2)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из $W_{p+1}^1(\Omega(s), \partial B(R))$, θ – из (3.1), постоянная $C_1 < \infty$ не зависит от $v(x)$, $s > 1$.

ЛЕММА 3.1. *Для почти всех a, b , $0 \leq a < b < T$, имеет место следующая глобальная априорная оценка произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (2.1)–(2.3):*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(b, x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \\ \leq c_1 \int_{\Omega} |u(a, x)|^{q+1} dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) F_1(a, b), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\zeta_1(s) = \sup_{0 \leq \tau < s} \zeta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ – из определения 2.2;

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &\equiv \int_{\Omega} |f(b, x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1} dx dt \\ &\quad + \left(\int_a^b \|f'_t\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt \right)^{q+1} + \int_a^b \|f'_t\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{p_1} dt; \quad F_1(0, b) \equiv F(b); \end{aligned}$$

здесь $p_1 = \frac{p+1}{p-q+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы интегрирования по частям, установленной в [18], для почти всех $0 \leq a < b < T$ имеем равенство:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \langle (|u|^{q-1}u)'_t, u - f \rangle dt \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{\Omega} (|u(b, x)|^{q+1} - |u(a, x)|^{q+1}) dx \\
&+ \int_a^b \int_{\Omega} (|u(t, x)|^{q-1}u(t, x) - |u(a, x)|^{q-1}u(a, x)) f'_t(t, x) dx dt \\
&- \int_{\Omega} (|u(b, x)|^{q-1}u(b, x) - |u(a, x)|^{q-1}u(a, x)) f(b, x) dx. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Поэтому, подставляя в интегральное тождество (2.12) в качестве пробной функции $u(t, x) - f(t, x)$, получаем с учетом равенства (3.4) и структурных условий (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u(b, x)|^{q+1} dx + d_0 \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \\
&\leq \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^p |D_x f| dx dt + \int_{\Omega} (|u(b, x)|^q + |u(a, x)|^q) |f(b, x)| dx \\
&- \int_a^b \int_{\Omega} (|u(t, x)|^{q-1}u(t, x) - |u(a, x)|^{q-1}u(a, x)) f'_t(t, x) dx dt \\
&+ \frac{q}{q+1} \int_{\Omega} |u(a, x)|^{q+1} dx. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Оценим сверху стандартным образом слагаемые справа в неравенстве (3.5):

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^p |D_x f| dx dt \\
&\leq \varepsilon_1 \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt + c_1(\varepsilon_1) \int_a^b \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1} dx dt; \\
& \int_{\Omega} (|u(b, x)|^q + |u(a, x)|^q) |f(b, x)| dx \\
&\leq \varepsilon_1 [\|u(b, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} + \|u(a, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1}] \\
&+ c_2(\varepsilon_1) \|f(b, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} \quad \forall \varepsilon_1 > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_{\Omega} |u(a, x)|^q |f'_t(t, x)| dx dt \\
& \leq \int_a^b \left(\int_{\Omega} |u(a, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |f'_t|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \\
& = \|u(a, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^q \cdot \int_a^b \left(\int_{\Omega} |f'_t(t, x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \\
& \leq \varepsilon_1 \|u(a, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} \\
& \quad + c_3(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega} |f'_t|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} \quad \forall \varepsilon_1 > 0; \\
& \int_a^b \int_{\Omega} |u(t, x)|^q |f'_t(t, x)| dx dt \\
& \leq \int_a^b \left(\int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |f'_t(t, x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Пуанкаре имеем:

$$\int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx \leq \zeta(t)^{p+1} \int_{\Omega} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx,$$

поэтому, продолжая предпоследнее неравенство, получим:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_{\Omega} |u(t, x)|^q |f'_t(t, x)| dx dt \\
& \leq \int_a^b \zeta(t)^q \left(\int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |f'_t|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \\
& \leq \varepsilon_2 \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt + c_4(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \int_{\Omega} |f'_t|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx dt \quad \forall \varepsilon_2 > 0.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, выводим из неравенства (3.5):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \right) \int_{\Omega} |u(b, x)|^{q+1} dx + (d_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_a^b \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \\
& \leq \left(\frac{q}{1+q} + 2\varepsilon_1 \right) \int_{\Omega} |u(a, x)|^{q+1} dx + c_2(\varepsilon_1) \|f(b, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}^{q+1} \\
& \quad + c_1(\varepsilon_1) \int_a^b \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1} dx dt + c_3(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \|f'_t(t, x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt \right)^{q+1} \\
& \quad + c_4(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \|f'_t(t, x)\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{p_1} dt, \quad p_1 = \frac{p+1}{p-q+1}.
\end{aligned}$$

Фиксируя теперь $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ так, что

$$\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \geq \frac{q}{2(q+1)}, \quad (d_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq \frac{d_0}{2},$$

приходим к необходимой оценке (3.3).

ЛЕММА 3.2. Пусть $u(t, x)$ – произвольное обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3). Тогда в условиях леммы 3.1 для почти всех $s > 1$ выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx + \frac{d_0(q+1)}{q} \int_{Q_a^b(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \\ & \leq \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + c \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{Q_a^b(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \\ & \quad \times \left(\int_a^b \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где θ – из (3.1), $c < \infty$ зависит только от известных параметров задачи (2.1)–(2.3), $\Gamma_a^b(s) = (a, b) \times \partial B(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $s > 1$, $\delta > 0$ и введем липшицеву срезающую функцию $\eta_{s,\delta}(\tau)$: $\eta_{s,\delta}(\tau) = 0$ при $\tau < s$, $\eta_{s,\delta}(\tau) = 1$ при $\tau > s + \delta$, $\eta_{s,\delta}(\tau) = (\tau - s)/\delta$ при $s \leq \tau \leq s + \delta$. Подставим в интегральное тождество (2.12) в качестве пробной функции $\eta(t, x) \equiv u(t, x)\eta_{s,\delta}(|x|)$, запишем сначала равенство с $T_0 = b$, затем с $T_0 = a$ и вычтем второе из первого. Используя формулу интегрирования по частям из [18], получаем

$$\begin{aligned} & \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} \eta_{s,\delta}(|x|) dx + \int_{Q_a^b(s)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots, D_x u) u_{x_i} \cdot \eta_{s,\delta}(|x|) dx dt \\ & = \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} \eta_{s,\delta}(|x|) dx \\ & \quad - \int_{Q_a^b(s) \setminus Q_a^b(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots, D_x u) u \cdot (\eta_{s,\delta}(|x|))_{x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отсюда, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ (см. [15]), приходим в силу условий (2.5), (2.6) к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b, x)|^{q+1} dx + \int_{Q_a^b(s)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots, D_x u) u_{x_i} dx dt \\ & = \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx + \int_{\Gamma_a^b(s)} \sum_{i=1}^n a_i(\dots, D_x u) u \nu_i d\gamma dt \\ & \leq \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^{q+1} dx \\ & \quad + c \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} |u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{1}{p+1}}, \end{aligned}$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – вектор единичной нормали к $\partial B(s)$.

Оценивая $\int_{\partial B(s)} |u(t, x)|^{p+1} d\gamma$ при помощи интерполяционного неравенства (3.2) и интегрируя по t в интервале (a, b) , непосредственно из последнего неравенства выводим доказываемое соотношение (3.6).

Введем теперь монотонную последовательность

$$t_j \rightarrow T, \quad t_0 = 0, \quad t_{j+1} > t_j, \quad j = 1, 2, \dots; \quad \Delta_j \equiv t_j - t_{j-1},$$

и определим два семейства функций:

$$h_j(s) = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \quad \forall s > 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$E_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |D_x u(t, x)|^{p+1} dx dt \quad \forall s > 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $u(t, x)$ – рассматриваемое обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и $u(t, x)$ – произвольное энергетическое решение рассматриваемой задачи. Тогда для введенных выше семейств функций $\{h_j(s)\}$, $\{E_j(s)\}$, связанных с $u(t, x)$, выполняется следующая система дифференциальных неравенств:

$$E_j(s) \leq r_1 h_{j-1}(s) + r_2 \Delta_j^\nu \left(-\frac{dE_j(s)}{ds} \right)^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (3.8)$$

$$h_j(s) \leq (1 + \delta_j) h_{j-1}(s) + r_3 \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \Delta_j^\nu \left(-\frac{dE_j(s)}{ds} \right)^{1+\mu} \quad (3.9)$$

$$\forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta_j > 0,$$

где постоянные $r_1, r_2, r_3 < \infty$ зависят лишь от известных параметров,

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1) + \theta(p-q)} < 1, \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1) + \theta(p-q)}, \quad \theta - \text{из (3.1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя легко проверяемое соотношение

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial B(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt = -\frac{d}{ds} E_j(s),$$

выводим из неравенства (3.6) при $a = t_{j-1}, b = t_j$:

$$\begin{aligned} E_j(s) &\leq \frac{q}{d_0(q+1)} \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1}, x)|^{q+1} dx \\ &\quad + c_1 E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}} \\ &\leq \frac{q}{d_0(q+1)} h_{j-1}(s) + c_1 E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} h_j(s)^{\frac{1-\theta}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Снова возвращаясь к неравенству (3.6), полагая в нем $a = t_{j-1}$, $b = \tilde{t} \in (t_{j-1}, t_j]$, получим, что для почти всех $\tilde{t}$ из указанного интервала имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(s)} |u(\tilde{t}, x)|^{q+1} dx &\leq \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1}, x)|^{q+1} dx \\ &\quad + c_2 \left(\int_{t_{j-1}}^{\tilde{t}} \int_{\partial B(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\quad \times \left(\int_{t_{j-1}}^{\tilde{t}} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \left(\int_{t_{j-1}}^{\tilde{t}} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности $\tilde{t} \in (t_{j-1}, t_j]$ легко выводим:

$$h_j(s) \leq h_{j-1}(s) + c_3 h_j(s)^{\frac{1-\theta}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}} E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}}. \quad (3.11)$$

Складывая теперь неравенства (3.10), (3.11), а затем применяя неравенство Юнга с “ ε ”, получаем:

$$\begin{aligned} h_j(s) + E_j(s) &\leq \left(1 + \frac{q}{d_0(q+1)} \right) h_{j-1}(s) + c_3 h_j(s)^{\frac{1-\theta}{q+1}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}} E_j(s)^{\frac{\theta}{p+1}} (-E'_j(s))^{\frac{p}{p+1}} \\ &\leq \left(1 + \frac{q}{d_0(q+1)} \right) h_{j-1}(s) + \varepsilon h_j(s) + \varepsilon E_j(s) + c_4(\varepsilon) \Delta_j^\nu (-E'_j(s))^{1+\mu}, \end{aligned}$$

где ν и μ — из (3.8), (3.9). Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 1/2$, приходим к доказываемому соотношению (3.8) с $r_1 = 2 \left(1 + \frac{q}{d_0(q+1)} \right)$, $r_2 = 2c_4(1/2)$.

Теперь об оценке (3.9). Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выберем такое $t' \in (t_{j-1}, t_j]$, $t' = t'(\varepsilon)$, что

$$(1 - \varepsilon)h_j(s) = \int_{\Omega(s)} |u(t', x)|^{q+1} dx.$$

Теперь из соотношения (3.6) при $a = t_{j-1}$, $b = t'$ получаем:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)h_j(s) + \frac{d_0(q+1)}{q} \int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt &\leq h_{j-1}(s) + c h_j(s)^{\frac{1-\theta}{1+q}} \Delta_j^{\frac{1-\theta}{p+1}} \left(\int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \\ &\quad \times \left(\int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\partial B(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &= h_{j-1}(s) + (\varepsilon h_j(s))^{\frac{1-\theta}{1+q}} \left(h \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \\ &\quad \times \left(c^{\frac{p+1}{p}} h^{-\frac{\theta}{p}} \int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\partial B(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\quad \times (\varepsilon^{-\frac{p+1}{q+1}} \Delta_j)^{\frac{1-\theta}{p+1}} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall h > 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Юнга получаем:

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon)h_j(s) + \left[\frac{d_0(q+1)}{q} - h \right] \int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\Omega(s)} |D_x u|^{p+1} dx dt \\ \leq h_{j-1}(s) + (\varepsilon^{-\frac{p+1}{q+1}} \Delta_j)^\nu \left(c^{\frac{p+1}{p}} h^{-\frac{\theta}{p}} \int_{t_{j-1}}^{t'} \int_{\partial B(s)} |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{1+\mu} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \forall h > 0. \end{aligned}$$

Фиксируя в этом соотношении $h = \frac{d_0(q+1)}{2q}$ и полагая $\varepsilon = \frac{\delta_j}{2(1+\delta_j)}$, приходим к требуемой оценке (3.9).

§ 4. Достаточное условие локализации решения

В настоящем параграфе проводится доказательство теоремы 1 на основе изучения свойств функций, удовлетворяющих бесконечной дифференциальной системе (3.8), (3.9). Сначала детализируем выбор последовательности $\{t_j\}$. Зафиксируем два числа

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$$

и выбор точек последовательности $\{t_j\}$ обусловим лишь одним ограничением:

$$\xi_1 < \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} < \xi_2 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

При этом, как несложно убедиться, будут выполняться соотношения:

$$\frac{\xi_1}{1 - \xi_1} \Delta_j \leq T - t_j \equiv \sum_{i=j+1}^{\infty} \Delta_i \leq \frac{\xi_2}{1 - \xi_2} \Delta_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Теперь введем нормированные функции:

$$A_j(s) = \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s), \quad H_j(s) \equiv \Delta_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s), \quad j = 1, 2, \dots$$

При этом соотношения (3.8), (3.9) эквивалентны соотношениям:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 (-A'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad r_4 = r_1 \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}, \quad (4.3)$$

$$H_j(s) \leq (1 + \delta_j) \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} H_{j-1}(s) + r'_3 \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} (-A'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

где $H_0(s) \equiv T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s)$.

Зафиксируем теперь некоторое λ , $1 > \lambda > \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}}$, и выберем параметры δ_j так, что

$$(1 + \delta_j) \xi_2^{\frac{q+1}{p-q}} = \lambda \implies \delta_j = \delta_0 \equiv \lambda \xi_2^{-\frac{q+1}{p-q}} - 1.$$

При этом соотношение (4.4) примет вид:

$$H_j(s) \leq \lambda H_{j-1}(s) + r_3 (-A'_j(s))^{1+\mu}, \quad r_3 = r'_3(\delta_0) \delta_0^{-\frac{\nu(p+1)}{q+1}}. \quad (4.4^*)$$

Начнем теперь итерировать соотношение (4.3), оценивая при этом все $H_i(s)$ при помощи соотношения (4.4*), и получим:

$$\begin{aligned} A_j(s) &\leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 (-A'_j(s))^{1+\mu} \\ &\leq r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu} + r_2 (-A'_j(s))^{1+\mu} \\ &\leq r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda (-A'_{j-2}(s))^{1+\mu} \\ &\quad + r_4 r_3 (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu} + r_2 (-A'_j(s))^{1+\mu} \\ &\leq \dots \leq r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \left[\lambda^{j-2} (-A'_1(s))^{1+\mu} + \lambda^{j-3} (-A'_2(s))^{1+\mu} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \lambda^2 (-A'_{j-3}(s))^{1+\mu} + \lambda (-A'_{j-2}(s))^{1+\mu} \right. \\ &\quad \left. + (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} (-A'_j(s))^{1+\mu} \right] \\ &\leq r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^j (-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A'_i(s))^{1+\mu}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $r_5 = \frac{r_3 r_4}{\lambda} \max\left(1, \frac{\lambda r_2}{r_3 r_4}\right)$.

Из неравенства (4.5) в силу выпуклости вниз функции $f(s) = s^{1+\mu}$, $\mu > 0$, вытекает:

$$A_j(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left[\sum_{i=1}^j (-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A'_i(s)) \right]^{1+\mu}. \quad (4.6)$$

Введем теперь еще одно семейство неотрицательных функций:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2, \dots$$

Очевидно равенство: $U_j(s) - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) = A_j(s)$, $U_0(s) = 0$; поэтому соотношение (4.6) может быть переписано в виде:

$$U_j(s) \leq \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 (-U'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Оценим сверху начальное значение $U_j(1)$:

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} \Delta_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для оценки сверху $E_j(1)$ воспользуемся неравенством (3.3) из леммы 3.1. В силу (4.2) имеем:

$$F_1(1, t_j) \equiv F(t_j) \leq \omega(T - t_j)^{-\alpha_1} \leq \omega \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right)^{\alpha_1} \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}},$$

поэтому из соотношения (3.3) при $a = 0, b = t_j$ вытекает

$$E_j(1) \leq c_1 h_0(1) + c_3 \omega \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right) \Delta_j^{-\frac{q+1}{p-q}}, \quad c_3 = c_2 \left(\frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \right)^{\frac{q+1}{p-q}}.$$

Следовательно,

$$U_j(1) \leq c_1 g_j T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1) + c_3 \omega \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} \right)^{-1} \left(1 + \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right),$$

где

$$\begin{aligned} g_j &\equiv \sum_{i=1}^j \lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} 2^{-\frac{i(q+1)}{p-q}} \leq \lambda^{\frac{j}{1+\mu}} \left(\lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} - 1 \right)^{-1}, \quad \text{если } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} > 1, \\ g_j &\leq j 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}}, \quad \text{если } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} = 1, \\ g_j &\leq 2^{-\frac{j(q+1)}{p-q}} \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} \right), \quad \text{если } \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} 2^{\frac{q+1}{p-q}} < 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $g_j \leq g_0 = \text{const} < \infty$, где g_0 не зависит от $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, полученная оценка для $U_j(1)$ может быть записана в виде:

$$U_j(1) \leq (c_4 + c_5 \omega) + c_5 \omega \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

где

$$c_4 = c_1 g_0 T^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(1), \quad c_5 = c_3 \left(1 - \lambda^{\frac{1}{1+\mu}} \right)^{-1}.$$

Так как $h_0(s) = 0 \quad \forall s > d$, то неравенства (4.7), (4.8) порождают следующую систему:

$$\begin{aligned} U_j(s) &\leq \lambda_1 U_{j-1}(s) + r_5 \left(-U'_j(s) \right)^{1+\mu} \quad \forall s > d, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ U_j(d) &\leq (c_4 + c_5 \omega) + c_5 \omega \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 = \lambda^{\frac{1}{1+\mu}}. \end{aligned}$$

Из этой системы в силу леммы 6.1 (см. §6) вытекает следующая равномерная оценка носителей функций $U_j(s)$:

$$\zeta(t_j) \leq \sup \{ s : s \in \text{supp } U_j \} \leq c_6 \left[c_4 + c_5 \omega + c_5 \omega \zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \right]^{\frac{\mu}{1+\mu}} + d,$$

где $c_6 = \left(\frac{r_5}{1 - \lambda_1} \right)^{\frac{1}{1+\mu}} \cdot \frac{1 + \mu}{\mu}$. Из последнего неравенства вытекает, наконец,

$$\zeta(t_j) \leq d + c_6 (c_4 + c_5 \omega)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \omega^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta_1(t_j)^{\frac{\mu}{1+\mu}} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (4.9)$$

где

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q) + (q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geq 1, \quad p > q.$$

Очевидно, что для доказательства теоремы 1 достаточно установить оценку сверху для функции $\zeta(t)$. Очевидно также, что такую оценку достаточно установить на множестве

$$S = \{t \in (0, T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\}. \quad (4.10)$$

С другой стороны, легко проверить, что существует число $T_0 < T$, зависящее лишь от параметров ξ_1, ξ_2 из (4.1), такое, что любое число $\tilde{t} \in (T_0, T)$ может быть представлено как некоторая точка из соответствующей последовательности $\{t_j\}$, удовлетворяющей ограничениям (4.1), (4.2), причем $t_0 = 0$. Возьмем теперь произвольную точку $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} \in [T_0, T) \cap S, \quad \tilde{t} = t_{j_0}, \quad j_0 \in \mathbb{N}.$$

Тогда в силу установленного соотношения (4.9) и определения (4.10) имеем:

$$\begin{aligned} \zeta(\tilde{t}) = \zeta(t_{j_0}) &\leq d + c_6(c_4 + c_5\omega)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}} \zeta(\tilde{t})^\varkappa \omega^{\frac{\mu}{\mu+1}} \\ &\leq d + c_6(c_4 + c_5\omega)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon \zeta(\tilde{t}) + c_7(\varepsilon)(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}})^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}}, \end{aligned}$$

что приводит к оценке:

$$\begin{aligned} \zeta(\tilde{t}) &\leq (1 - \varepsilon)^{-1} [d + c_6(c_4 + c_5\omega)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_7(\varepsilon)(c_6 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}})^{\frac{1}{1-\varkappa}} \omega^{\frac{\mu}{(1+\mu)(1-\varkappa)}}] \equiv D(\varepsilon, \omega), \\ D(\varepsilon, 0) &= (1 - \varepsilon)^{-1} (d + c_6 c_4^{\frac{\mu}{1+\mu}}) = \frac{D_0}{1 - \varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Заметим теперь, что все постоянные c_i , которые фигурировали в вышеприведенных вычислениях, не зависят от внешнего радиуса R области Ω . Поэтому при выполнении условия

$$d + c_6 c_4^{\frac{\mu}{1+\mu}} < R \quad (4.12)$$

можно найти $\varepsilon_0 > 0, \omega = \omega(R) > 0$ такие, что

$$\zeta(\tilde{t}) < D(\varepsilon, \omega) < R \quad \forall \tilde{t} \in [T_0, T). \quad (4.13)$$

Эта оценка, как легко видеть, эквивалентна наличию свойства локализации у рассматриваемой граничной задачи при R и $\omega > 0$, удовлетворяющих соотношениям (4.12), (4.13). Отметим еще, что $\omega(R) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

§ 5. Условия отсутствия внутренних точек сингулярности решения

Доказательство теоремы 2 также основывается на рассмотрении свойств бесконечной системы (3.8), (3.9). Будем поэтапно детализировать выбор последовательности $\{t_i\}$. Пока будем считать выполненным только одно ограничение:

$$\Delta_{i+1} \leq \xi_2 \Delta_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \xi_2 = \text{const} < 1. \quad (5.1)$$

Зафиксируем теперь число ξ :

$$\frac{v}{1+\mu} < \xi < \frac{\nu}{\mu} \equiv \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad (5.2)$$

и введем нормированные семейства неизвестных функций:

$$A_j(s) \equiv \Delta_j^\xi E_j(s), \quad H_j(s) = \Delta_j^\xi h_j(s), \quad j = 1, 2, \dots$$

При этом, как несложно проверить, соотношения (3.8), (3.9) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} A_j(s) &\leq r_1 \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^\xi H_{j-1}(s) + r_2 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-A'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1, \\ H_j(s) &\leq (1 + \delta_j) \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^\xi H_{j-1}(s) + r_3 \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-A'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall s > 1. \end{aligned}$$

Зафиксируем число λ , $1 > \lambda > \xi_2^\xi$, и определим δ_j :

$$\delta_j = \delta_0 = \lambda \xi_2^{-\xi} - 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Тогда в силу (5.1)

$$(1 + \delta_0) \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^\xi \equiv \lambda_j < \lambda < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Теперь стартовые неравенства примут вид:

$$A_j(s) \leq r_4 \lambda_j H_{j-1}(s) + r_2 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-A'_j(s))^{1+\mu}, \quad r_4 = r_1 (1 + \delta_0)^{-1}; \quad (5.4)$$

$$H_j(s) \leq \lambda_j H_{j-1}(s) + r_5 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-A'_j(s))^{1+\mu}, \quad r_5 = r_3 \delta_0^{-\frac{\nu(p+1)}{q+1}}. \quad (5.5)$$

Итерируем неравенство (5.4), учитывая при этом оценку (5.5), и получаем:

$$\begin{aligned} A_j(s) &\leq r_4 \prod_{i=1}^j \lambda_i H_0(s) + r_4 r_5 \left[\lambda_j \lambda_{j-1} \cdots \lambda_2 \Delta_1^{\nu-\xi\mu} (-A'_1(s))^{1+\mu} \right. \\ &\quad + \lambda_j \cdots \lambda_3 \Delta_2^{\nu-\xi\mu} (-A'_2(s))^{1+\mu} \\ &\quad + \cdots + \lambda_j \Delta_{j-1}^{\nu-\xi\mu} (-A'_{j-1}(s))^{1+\mu} \left. \right] \\ &\quad + r_2 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-A'_j(s))^{1+\mu}, \quad H_0(s) \equiv T^\xi h_0(s). \end{aligned}$$

Так как

$$\lambda_j \lambda_{j-1} \cdots \lambda_{i+1} \Delta_i^{\nu-\xi\mu} = (1 + \delta_0)^{j-i} \Delta_j^{\nu-\xi\mu} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{(1+\mu)\xi-\nu},$$

то из последнего неравенства вытекает соотношение:

$$\begin{aligned}
 A_j(s) &\leq r_4(1 + \delta_0)^j \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0} \right)^\xi H_0(s) \\
 &\quad + \left[\sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{j-i} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi(1+\mu)-\nu} (-A'_i(s))^{1+\mu} \right] r_6 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} \\
 &\quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s > 1.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Введем еще одно семейство функций:

$$\begin{aligned}
 U_j(s) &= \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} A_i(s) \\
 &\equiv \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \Delta_i^\xi E_i(s), \quad j = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Теперь из соотношений (5.6) вытекает:

$$A_j(s) \leq r_4(1 + \delta_0)^j \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0} \right)^\xi H_0(s) + r_6 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-U'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Очевидно следующее соотношение:

$$U_j(s) - A_j(s) = U_{j-1}(s)(1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}},$$

поэтому из неравенства (5.7) вытекает оценка:

$$\begin{aligned}
 U_j(s) &\leq r_4(1 + \delta_0)^j \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_0} \right)^\xi H_0(s) \\
 &\quad + (1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_6 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-U'_j(s))^{1+\mu} \\
 &\leq r_4 \lambda^j H_0(s) + \mu_j U_{j-1}(s) + r_6 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-U'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\
 \mu_j &\equiv (1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Дальнейшее рассмотрение распадается на два случая в зависимости от степени сингулярности граничного режима.

1) *Случай “пологих” режимов*, т.е.

$$F(t) \leq \omega(T - t)^{-\alpha} \quad \forall t < T, \quad \omega = \text{const} < \infty, \quad \alpha < \alpha_1 \equiv \frac{q+1}{p-q}. \tag{5.9}$$

Выбор последовательности $\{t_i\}$ будет связан с нашей основной неизвестной “энергетической” функцией

$$E(t, s) \equiv \int_0^t \int_{\Omega(s)} |D_x u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau.$$

Зафиксируем произвольно точку $s' > 1$ такую, что

$$E(t, s') \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow T.$$

Если бы такой точки не оказалось, то утверждение теоремы 2 уже было бы “почти” доказано. Поэтому

$$E(t_j, s') \equiv \sum_{i=1}^j E_i(s') \equiv \sum_{i=1}^j [E(t_i, s') - E(t_{i-1}, s')] \rightarrow \infty$$

при $j \rightarrow \infty$ в случае любой последовательности $t_j \rightarrow T$.

Зафиксируем теперь число η так, что

$$\frac{\nu}{1+\mu} < \xi < \eta < \frac{\nu}{\mu} \equiv \frac{q+1}{p-q}, \quad \alpha < \eta. \quad (5.10)$$

Наконец, зафиксируем постоянную $g > 0$ и определим последовательность $\{t_i\}$ следующим равенством:

$$(t_j - t_{j-1})^{-\eta} \equiv \Delta_j^{-\eta} = g(E(t_j, s') - E(t_{j-1}, s')) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Корректность этого определения легко следует из непрерывности и монотонности функции $E(t, s')$.

Проверим теперь, что при соответствующем выборе постоянной g построенная последовательность будет удовлетворять условию (5.1). Более того, покажем выполнение более сильного неравенства

$$\Delta_j \geq (1+\gamma)(T - t_j) \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (5.12)$$

с некоторым единым $\gamma > 0$. Допустим, что неравенство (5.12) не имеет места, т.е. существует номер i такой, что

$$\Delta_i < (1+\gamma)(T - t_i) \iff \Delta_i^{-\alpha} > (1+\gamma)^{-\alpha}(T - t_i)^{-\alpha}. \quad (5.13)$$

Мы находимся сейчас в условиях применимости теоремы 1, поэтому

$$\zeta_1(t) \leq \tilde{c} = \text{const} < \infty \quad \forall t < T$$

и, следовательно, из (3.3) вытекает априорная оценка:

$$E_j(1) \leq c_1 h_0(1) + c_2 F(t_j) \leq c_1 h_0(1) + c_2 \omega(T - t_j)^{-\alpha} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Теперь в силу (5.11), (5.13) и (5.14) имеем:

$$\Delta_i^{-\eta} = gE_i(s') \leq gc_1h_0(1) + gc_2\omega(T - t_i)^{-\alpha} \leq gc_1h_0(1) + \omega gc_2(1 + \gamma)^\alpha \Delta_i^{-\alpha}$$

или

$$1 \leq g[c_1h_0(1)\Delta_i^\eta + c_2(1 + \gamma)^\alpha\omega\Delta_i^{\eta-\alpha}] \leq g[c_1h_0(1)T^\eta + c_2(1 + \gamma)^\alpha T^{\eta-\alpha}\omega].$$

Следовательно, предположив заранее, что

$$g < [c_1h_0(1)T^\eta + c_2\omega(1 + \gamma)^\alpha T^{\eta-\alpha}]^{-1}, \quad (5.15)$$

получим противоречие с допущением (5.13).

Итак, имеем последовательность $\{\Delta_i\}$, удовлетворяющую (5.11) и ограничению (5.1) с $\xi_2 = (1 + \gamma)^{-1} < 1$. Соответственно $\delta_0 > 0$ зафиксировано так, что выполнено также неравенство (5.3) и

$$\mu_j = (1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \right)^{\eta - \frac{\nu}{1+\mu}} < \mu_0 < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

Соотношение (5.8) теперь дает

$$U_j(s) \leq r_4\lambda^j H_0(s) + \mu_0 U_{j-1}(s) + r_6 \Delta_j^{\nu-\xi\mu} (-U'_j(s))^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

Кроме того, имеем в силу (5.11) и (5.16):

$$\begin{aligned} U_j(s') &= \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \Delta_i^\xi \Delta_i^{-\eta} g^{-1} \\ &= g^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\xi)} \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\eta - \frac{\nu}{1+\mu}} \\ &\leq g^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\xi)} \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \prod_{k=i+1}^j \left(\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \right)^{\eta - \frac{\nu}{1+\mu}} \\ &\leq g^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\xi)} \sum_{i=1}^j \mu_0^{j-i} \\ &\leq g^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\xi)} (1 - \mu_0)^{-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$U_j(s') \leq g^{-1} (1 - \mu_0)^{-1} \Delta_j^{-(\eta-\xi)} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

Применим теперь к дифференциальной системе (5.17), (5.18) лемму 6.3 из § 6. В результате получим следующую равномерную априорную оценку:

$$U_j(s) \leq c \max\{U_0(s - s'), H_0(s)\} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s > s', \quad (5.19)$$

где $U_0(s) = s^{-\frac{(\eta-\xi)(1+\mu)}{\nu-\xi\mu}}$. Очевидно, легко указать такое $s^{(0)} > 0$, что

$$U_j(s) \leq c U_0(s - s') \quad \forall s: s' < s < s' + s^{(0)}, \quad (5.19^*)$$

и, следовательно, в силу определения (5.11) имеем:

$$\begin{aligned} E(t_j, s) - E(t_{j-1}, s) &\equiv E_j(s) \leq c U_0(s - s') \Delta_j^{-\xi} = c g^{\frac{\xi}{\eta}} U_0(s - s') E_j(s')^{\frac{\xi}{\eta}} \\ &\equiv c g^{\frac{\xi}{\eta}} U_0(s - s') (E(t_j, s') - E(t_{j-1}, s'))^{\frac{\xi}{\eta}} \\ \forall s \in (s', s' + s^{(0)}), \quad j &= 1, 2, \dots, \quad E(t_0, s) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Теперь получим оценку типа (5.20) для $E(t, s')$ в произвольной точке $t \in (0, T)$. Определим отображение

$$\Gamma: [0, T) \rightarrow (0, T)$$

следующим равенством:

$$(\Gamma(t) - t)^{-\eta} = g(E(\Gamma(t), s') - E(t, s')) \quad \forall t \in (0, T), \quad (5.21)$$

где $g > 0$ из определения (5.11), $E(t, s')$ – “энергетическая” функция рассматриваемого решения $u(t, x)$, $s' = \text{const}$.

Очевидно, что монотонная последовательность, определяемая формулой (5.11), есть последовательность, задаваемая рекуррентным соотношением:

$$t_{j+1} = \Gamma(t_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad t_0 = 0. \quad (5.11^*)$$

Из непрерывности и монотонности функции $E(t, s')$ по t и из сделанного допущения о том, что $E(t, s') \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$, легко выводится непрерывность и строгое монотонное возрастание функции $\Gamma(t)$ на всем интервале $(0, T)$. Следовательно, функция $\Gamma(t)$ является непрерывным монотонным взаимнооднозначным отображением отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ на $[t_i, t_{i+1}]$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь t – произвольная точка из интервала $[t_1, T)$. Пусть для определенности $t \in (t_{j-1}, t_j]$ при некотором конкретном $j \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, единственным образом находится последовательность $\{\tilde{t}_i\}$ такая, что

$$\tilde{t}_1 \in (t_0, t_1], \quad \tilde{t}_{i+1} = \Gamma(\tilde{t}_i), \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad \tilde{t}_j = t.$$

Относительно расположения точки $\tilde{t}_1$ возможны два варианта:

- а) $\tilde{t}_1 \geq (1 + \xi_2)^{-1} T$,
- б) $0 < \tilde{t}_1 < (1 + \xi_2)^{-1} T$.

В случае а) последовательность $\{\tilde{t}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, j$, $\tilde{t}_0 = 0$, удовлетворяет всем условиям, необходимым для получения оценок (5.19), (5.19*) и, следовательно,

$$\begin{aligned} E(\tilde{t}_i, s) - E(\tilde{t}_{i-1}, s) &\leq c g^{\frac{\xi}{\eta}} U_0(s - s') (E(\tilde{t}_i, s') - E(\tilde{t}_{i-1}, s'))^{\frac{\xi}{\eta}} \\ \forall s \in (s', s' + s^{(0)}), \quad i &= 2, 3, \dots, j; \\ E(\tilde{t}_1, s) &\leq c U_0(s - s') (1 + \xi_2)^{\xi} T^{-\xi} \quad \forall s \in (s', s' + s^{(0)}). \end{aligned}$$

Складывая все эти неравенства, находим:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{t}_j, s) &\equiv E(t, s) \\
&\leq c U_0(s - s') \left[g^{\frac{\xi}{\eta}} (E(\tilde{t}_j, s') - E(\tilde{t}_{j-1}, s'))^{\frac{\xi}{\eta}} \sum_{i=2}^j \xi_2^{(j-i)\xi} + (1 + \xi_2)^\xi T^{-\xi} \right] \\
&\leq c U_0(s - s') \left[g^{\frac{\xi}{\eta}} E(t, s')^{\frac{\xi}{\eta}} (1 - \xi_2^\xi)^{-1} + (1 + \xi_2)^\xi T^{-\xi} \right] \\
&\leq c_1 U_0(s - s') (T^{-\xi} + E(t, s')^{\frac{\xi}{\eta}}). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

В случае b) имеем в силу (3.3):

$$\begin{aligned}
h(\tilde{t}_1, 1) + E(\tilde{t}_1, 1) &\equiv \int_{\Omega} |u(\tilde{t}_1, x)|^{q+1} dx + \int_0^{\tilde{t}_1} \int_{\Omega} |D_x u|^{p+1} dx dt \\
&\leq c_1 h_0(1) + c_2 F(\tilde{t}_1) \leq c_1 h_0(1) + c_2 \omega (T - \tilde{t}_1)^{-\alpha} \\
&\leq c_1 h_0(1) + c_2 \omega \frac{(1 + \xi_2)^\alpha}{\xi_2^\alpha} T^{-\alpha}, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

поэтому, рассматривая $u(t, x)$ как решение задачи (2.1)–(2.2) в области $(\tilde{t}_1, T) \times \Omega$ с начальным условием

$$u(\tilde{t}_1, x) = u_1(x),$$

где u_1 – след рассматриваемого решения задачи (2.1)–(2.3) на гиперплоскости $t = \tilde{t}_1$, получим аналогично (5.20):

$$\begin{aligned}
E(\tilde{t}_i, s) - E(\tilde{t}_{i-1}, s) &\leq c g^{\frac{\xi}{\eta}} U_0(s - s') (E(\tilde{t}_i, s') - E(\tilde{t}_{i-1}, s'))^{\frac{\xi}{\eta}} \\
\forall s \in (s', s' + s^{(1)}), \quad i = 2, 3, \dots, j, \quad s^{(1)} &\equiv s^{(1)}(h(\tilde{t}_1, 1)).
\end{aligned}$$

Складывая все эти неравенства, а также (5.23), получаем:

$$\begin{aligned}
E(t, s) &\equiv E(\tilde{t}_j, s) \leq c U_0(s - s') g^{\frac{\xi}{\eta}} (1 - \xi_2^\xi)^{-1} (E(\tilde{t}_j, s') - E(\tilde{t}_{j-1}, s'))^{\frac{\xi}{\eta}} \\
&\quad + c_1 h_0(1) + c_2 \omega \frac{(1 + \xi_2)^\alpha}{\xi_2^\alpha} T^{-\alpha} \\
&\leq c_1 U_0(s - s') (E(t, s')^{\frac{\xi}{\eta}} + T^{-\alpha}) \quad \forall s \in (s', s' + s^{(1)}). \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Теперь доказательство ограниченности функции $E(t, s)$ в любой области вида $(0, T) \times (s', R)$ $\forall s' > 1$ проведем методом от противного, т.е. предположим, что существует интервал $(1, s')$ такой, что

$$E(t_j, s') \equiv R_j \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t_j \rightarrow T. \tag{5.25}$$

Зафиксируем произвольно номер j и при $t = t_j$ рассмотрим установленные оценки (5.22), (5.24). Имеем:

$$E(t_j, s) \leq U_0(s - v) E(t_j, v)^\theta \quad \forall s, v, \quad 1 < v < s < s'; \quad \theta = \frac{\xi}{\eta} < 1. \tag{5.26}$$

Введем теперь убывающую последовательность точек $\{s_i\}$:

$$s_i = 1 + (s' - 1)2^{-(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad s_1 = s', \quad s_i > 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (5.27)$$

В силу (5.26) теперь имеем серию соотношений:

$$E(t_j, s_i) \leq U_0(s_i - s_{i+1})E(t_j, s_{i+1})^\theta \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Итерируя последнее неравенство, получаем:

$$\begin{aligned} E(t_j, s') &\equiv E(t_j, s_1) \leq U_0(s_1 - s_2)E(t_j, s_2)^\theta \\ &\leq U_0(s_1 - s_2)U_0(s_2 - s_3)^\theta E(t_j, s_3)^{\theta^2} \\ &\leq \dots \leq \prod_{i=1}^k U_0(s_i - s_{i+1})^{\theta^{i-1}} E(t_j, s_{k+1})^{\theta^k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(t_j, s') \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^k U_0(s_i - s_{i+1})^{\theta^{i-1}} E(t_j, s_{k+1})^{\theta^k}. \quad (5.28)$$

Так как

$$E(t_j, s_{k+1}) \leq E(t_j, 1) \leq N_j < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

то в силу того, что $\theta < 1$, следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(t_j, s_{k+1})^{\theta^k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} N_j^{\theta^k} = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.29)$$

Теперь в силу определения функции U_0 имеем:

$$\begin{aligned} U_0(s_i - s_{i+1}) &\leq c(s_i - s_{i+1})^{-\frac{(\eta-\xi)(1+\mu)}{\nu-\xi\mu}} \equiv c(s_i - s_{i+1})^{-\beta} \\ &= c(s' - 1)^{-\beta} 2^{i\beta} = c_1 2^{i\beta} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{i=1}^{\infty} U_0(s_i - s_{i+1})^{\theta^{i-1}} \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta^{i-1} \ln(U_0(s_i - s_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \theta^{i-1} (\ln c_1 + i\beta \ln 2) \\ &= \ln c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \theta^{i-1} + \beta \ln 2 \sum_{i=1}^{\infty} i \theta^{i-1} \leq c_2 < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому из (5.28) вытекает оценка:

$$E(t_j, s') \leq \exp c_2 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

где, очевидно, $c_2 < \infty$ не зависит от номера j . Эта оценка противоречит допущению (5.25). Следовательно, ограниченность функции $E(t, s)$ в произвольной области вида $(0, T) \times (s', R)$ $\forall s' > 1$ при граничном режиме (5.9) доказана.

2) *Случай граничного режима, близкого к критическому*, т.е.

$$F(t) \leq \tilde{\omega}(t)(T-t)^{-\alpha_1} \quad \forall t < T, \quad \alpha_1 = \frac{q+1}{p-q}, \quad (5.31)$$

где $\tilde{\omega}(t)$ – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая лишь одному условию

$$\lim_{t \rightarrow T} \tilde{\omega}(t) = 0. \quad (5.32)$$

В этом случае определяем последовательность $\{t_i\}$ равенством:

$$t_{i+1} - t_i \equiv \Delta_{i+1} = \xi_2 \Delta_i = \xi_2 (t_i - t_{i-1}) \quad \forall i \geq 2, \quad t_1 = (1 - \xi_2)T.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i = T.$$

Указанная последовательность удовлетворяет условию (5.1), поэтому для выше введенных функций $U_j(s)$ выполняется система неравенств (5.17). Но оценку начального значения $U_j(1)$ мы сейчас проведем иначе, чем в случае 1).

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \Delta_i^\xi E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.33)$$

В силу (5.14) и (5.32) имеем оценку для $E_i(1)$:

$$\begin{aligned} E_i(1) &\leq c_1 h_0(1) + c_2 F(t_i) \leq c_1 h_0(1) + c_2 \tilde{\omega}_i (T - t_i)^{-\alpha_1} \\ &= c_1 h_0(1) + c_2 \xi_2^{\alpha_1} (1 - \xi_2)^{-\alpha_1} \Delta_i^{-\alpha_1} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \tilde{\omega}_i \equiv \tilde{\omega}(t_i). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Поэтому из (5.33) следует:

$$U_j(1) \leq c_3 h_0(1) + c_4 \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \Delta_i^{\xi - \alpha_1} \tilde{\omega}_i, \quad (5.35)$$

где

$$\begin{aligned} c_3 &\leq c_1 \sum_{i=1}^j \left(\prod_{k=i}^{j-1} (1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \right) \Delta_i^\xi \leq c_1 \sum_{i=1}^j \mu_0^{j-i} \Delta_i^\xi \\ &\leq c_1 \Delta_1^\xi (1 - \mu_0)^{-1} \leq c_1 (1 - \mu_0)^{-1} T^\xi, \quad c_4 = c_2 \xi_2^{\alpha_1} (1 - \xi_2)^{-\alpha_1}. \end{aligned}$$

Пусть $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, – произвольная последовательность, мажорирующая последовательность $\{\tilde{\omega}_i\}$:

$$\omega_i \geq \tilde{\omega}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \omega_i \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

и удовлетворяющая дополнительному условию правильности:

$$\omega_{i+1} \geq \omega_i \mu_0 \xi_2^{\alpha_1 - \xi} \chi^{-1} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (5.37)$$

где χ , $0 < \chi < 1$, — произвольное фиксированное число.

Так как $\mu_0 \xi_2^{\alpha_1 - \xi} < 1$, то, как несложно убедиться, найти такое $\chi < 1$ и последовательность $\{\omega_i\}$ можно для любой исходной последовательности $\{\tilde{\omega}_i\}$, $\tilde{\omega}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Вернемся теперь снова к неравенству (5.35). В силу (5.36), (5.37) имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \Delta_i^{\xi - \alpha_1} \tilde{\omega}_i \\ & \leq \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)} \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_i} \right)^{\alpha_1 - \frac{\nu}{1+\mu}} \frac{\omega_i}{\omega_j} \\ & \leq \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)} \sum_{i=1}^j (1 + \delta_0)^{\frac{j-i}{1+\mu}} \xi_2^{(j-i)(\alpha_1 - \frac{\nu}{1+\mu})} \frac{\omega_i}{\omega_j} \\ & \leq \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)} \sum_{i=1}^j [(1 + \delta_0)^{\frac{1}{1+\mu}} \xi_2^{\xi - \frac{\nu}{1+\mu}} \xi_2^{\alpha_1 - \xi} \chi \xi_2^{\xi - \alpha_1} \mu_0^{-1}]^{j-i} \\ & \leq \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)} \sum_{i=1}^j \chi^{j-i} \leq (1 - \chi)^{-1} \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)}. \end{aligned}$$

Поэтому, продолжая (5.35), получаем:

$$U_j(1) \leq c_3 h_0(1) + c_4 (1 - \chi)^{-1} \omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)}. \quad (5.38)$$

Теперь рассмотрим дифференциальную систему (5.17), (5.38). Так как

$$[\omega_j \Delta_j^{-(\alpha_1 - \xi)}]^\mu \Delta_j^{\nu - \xi \mu} = \omega_j^\mu \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

то к указанной системе применима лемма 6.2 из §6 и, следовательно, существует некоторая функция $U_0(s)$: $U_0(s) < \infty \quad \forall s > 1$, $U_0(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 1$, такая, что справедлива следующая равномерная априорная оценка:

$$U_j(s) \leq U_0(s) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall s > 1. \quad (5.39)$$

Следовательно,

$$E_j(s) = E(t_j, s) - E(t_{j-1}, s) \leq c U_0(s) \Delta_j^{-\xi} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Суммируя эти неравенства, получаем:

$$E(t_j, s) \leq c U_0(s) (1 - \xi_2^\xi)^{-1} \Delta_j^{-\xi} = \tilde{c} U_0(s) (T - t_j)^{-\xi},$$

где $\tilde{c} = c (1 - \xi_2^\xi)^{-1} (1 - \xi_2)^{-\xi} \xi_2^\xi$.

Из последней оценки окончательно следует:

$$E(t, s) \leq c' U_0(s) (T - t)^{-\xi} \quad \forall t < T, \quad c' = \tilde{c} (1 - \xi_2)^{-\xi}. \quad (5.40)$$

Теперь мы готовы закончить рассуждения для случая произвольного “пологого” граничного режима, удовлетворяющего условию (5.31). Для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ энергетическая функция $E(t, 1 + \delta)$ удовлетворяет, как это следует из (5.40), степенной оценке на рост:

$$E(t, 1 + \delta) \leq \omega (T - t)^{-\xi} \quad \forall t < T, \quad \omega = \omega(\delta) = c' U_0(1 + \delta),$$

где $\xi < (q + 1)/(p - q)$. Поэтому, проводя рассуждения из части 1), устанавливаем, что

$$E(t, s) < \text{const} = c(\delta) < \infty \quad \forall (t, s) \in (0, T) \times (1 + 2\delta, R).$$

Так как $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то приходим к требуемой ограниченности функции $E(t, s)$. Теперь оценка

$$M(t, s) \equiv \int_{(0, t) \times \Omega(s)} |u(\tau, x)|^{p+1} dx d\tau \leq c = c(s) < \infty \quad \forall t \leq T, \quad \forall s > 1$$

получается благодаря неравенству Пуанкаре. Наконец, из соотношения (3.7) при $a = 0$ вытекает неравенство:

$$\begin{aligned} N(b, s) &\equiv \int_{\Omega(s+\delta)} |u(b, x)|^{q+1} dx \\ &\leq h_0(s) + c \delta^{-1} E(b, s)^{\frac{p}{p+1}} M(b, s)^{\frac{1}{p+1}} \quad \forall s > 0, \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$N(t, s) \leq c = c(s) < \infty \quad \forall t \leq T, \quad \forall s > 1.$$

Теорема 2 доказана полностью.

§6. Приложение

ЛЕММА 6.1. Пусть некоторое семейство непрерывно дифференцируемых неотрицательных невозрастающих на интервале $[0, \infty)$ функций $\{U_i(s)\}$, $i = 1, 2, \dots, j$, $j \leq \infty$, удовлетворяет следующей системе дифференциальных неравенств:

$$U_i(s) \leq \lambda U_{i-1}(s) + k (-U_i'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (0, \infty), \quad 0 < \lambda < 1, \quad U_0(s) \equiv 0, \quad (6.1)$$

$$U_i(0) \leq K_i < \infty \quad \forall i \leq j, \quad k = \text{const} < \infty, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad (6.2)$$

где $\{K_i\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел. Тогда для указанных функций $U_i(s)$ справедливы следующие априорные оценки:

$$U_i(s) \leq M_i(s) \equiv a_1 k^{-\frac{1}{\gamma}} [a_2 (k K_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s]^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \quad \forall i \leq j, \quad \forall s > 0, \quad (6.3)$$

где

$$a_1 = (1 - \lambda)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}, \quad a_2 = (1 + \gamma) \gamma^{-1} (1 - \lambda)^{-\frac{1}{1+\gamma}}, \quad f(s)_+ \equiv \max(0, f(s)).$$

В частности, справедливы следующие оценки для носителей всех функций $U_i(s)$:

$$\text{supp } U_i \in [0, b_i], \quad b_i = a_2 (k K_i^\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}}. \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные выше функции $M_i(s)$ являются, как несложно проверить, решениями следующих вспомогательных задач Коши:

$$M_i(s) = \lambda M_i(s) + k(-M'_i(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \quad (6.5)$$

$$M_i(0) = K_i \quad \forall i \leq j. \quad (6.6)$$

Докажем теперь оценку (6.3) по индукции. При $i = 1$ эта оценка проверяется непосредственно. Предположим, что (6.3) доказано уже для всех $i \leq j - 1$, т.е.

$$0 \leq U_i(s) \leq M_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, j - 1, \quad (6.7)$$

и докажем теперь, что

$$U_j(s) \leq M_j(s) \quad \forall s > 0. \quad (6.8)$$

Доказательство (6.8) проведем от противного, т.е. предположим, что (6.8) не имеет места. Тогда найдется интервал (s_1, s_2) такой, что

$$U_j(s) > M_j(s) > 0 \quad \forall s \in (s_1, s_2), \quad U_j(s_1) \equiv M_j(s_1). \quad (6.9)$$

Из определения функций $M_i(s)$ и предположения индукции (6.7) следует, что

$$M_j(s) \geq M_{j-1}(s) \geq U_{j-1}(s) \quad \forall s > 0.$$

В силу этого неравенства и предположения (6.9) теперь выполнено соотношение:

$$U_j(s) \geq U_{j-1}(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2).$$

И значит, $U_j(s)$ является решением следующей задачи:

$$U_j(s) \leq \lambda U_j(s) + k(-U'_j(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (s_1, s_2), \quad (6.10)$$

$$U_j(s_1) = M_j(s_1).$$

Интегрируя теперь непосредственно неравенство (6.10), легко приходим к оценке:

$$U_j(s) \leq M_j(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2),$$

что противоречит сделанному допущению (6.9), и значит, утверждение леммы 6.1 доказано.

ЛЕММА 6.2. Пусть некоторое семейство неотрицательных непрерывно дифференцируемых невозрастающих на интервале $[0, \infty)$ функций $\{U_i(s)\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет следующей дифференциальной системе:

$$U_i(s) \leq a + \lambda U_{i-1}(s) + k_i(-U'_i(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \quad i = 2, 3, \dots, \quad (6.11)$$

$$U_1(s) \leq a + k_1(-U'_1(s))^{1+\gamma},$$

$$U_i(0) \leq K_i, \quad 0 < \lambda < 1, \quad a = \text{const} < \infty, \quad \gamma > 0, \quad (6.12)$$

где $\{k_i\}$ — монотонно убывающая последовательность, $\{K_i\}$ — монотонно возрастающая последовательность: $k_i \rightarrow 0$, $K_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, причем

$$k_i K_i^\gamma \rightarrow 0 \quad \text{монотонно при } i \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Тогда существует непрерывная невозрастающая на интервале $(0, \infty)$ функция $U_0(s)$ такая, что $U_0(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$ и для всего семейства $\{U_i(s)\}$ выполняется равномерная априорная оценка:

$$U_i(s) \leq U_0(s), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \forall s > 0. \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова запишем последовательность вспомогательных задач Коши:

$$(1 - \lambda)M_i(s) = a + k_i(-M'_i(s))^{1+\gamma} \quad \forall s > 0, \quad (6.15)$$

$$M_i(0) = K_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

Легко проверить, что решениями этих задач являются функции:

$$M_i(s) = \frac{a}{1-\lambda} + a_1 k_i^{-\frac{1}{\gamma}} \left[a_2 \left(k_i \left(K_i - \frac{a}{1-\lambda} \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} - s \right]_+^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где a_1 и a_2 — из (6.3). Последовательность $\{M_i(s)\}$ не является монотонной последовательностью, но обладает в силу условий монотонности на последовательности $\{k_i\}$, $\{K_i\}$, $\{k_i K_i^\gamma\}$ следующим важным для нас свойством: существует строго монотонно убывающая последовательность $\{s_i\}$ такая, что $s_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, а также

$$M_{i+1}(s_i) = M_i(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.17)$$

$$M_{i+1}(s) > M_i(s) \quad \forall s, \quad 0 < s < s_i, \quad (6.18)$$

$$M_{i+1}(s) \leq M_i(s) \quad \forall s, \quad s_i < s < \infty. \quad (6.19)$$

По этой последовательности $\{s_i\}$ определим функцию

$$U_0(s) = M_i(s) \quad \forall s \in [s_i, s_{i-1}], \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad s_0 = +\infty. \quad (6.20)$$

Докажем, что эта функция является искомой, т.е. выполняется априорная оценка (6.14). Очевидно неравенство:

$$M_i(s) \leq U_0(s) \quad \forall s > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (6.21)$$

Введем еще монотонное семейство монотонно невозрастающих функций:

$$U_0^{(i)}(s) = \begin{cases} M_i(s) & \text{при } s \in [0, s_{i-1}], \\ M_j(s) & \text{при } s \in [s_j, s_{j-1}] \quad \forall j \leq i-1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$U_0^{(i)}(s) = U_0(s) \quad \forall s \geq s_i, \quad U_0^{(i)}(s) < U_0(s) \quad \forall s < s_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (6.22)$$

Мы будем доказывать неравенство:

$$U_i(s) \leq U_0^{(i)}(s) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in (0, \infty), \quad (6.23)$$

которое в силу соотношений (6.22) приведет к требуемой априорной оценке (6.14). При $i = 1$ неравенство (6.23) очевидно. Предположим, что это неравенство имеет

место при всех $i \leq j-1$. Докажем, что оно имеет место и при $i = j$. Доказываем от противного. Предположим, что существует интервал $\Delta = (v, w)$ такой, что

$$U_j(s) > U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta; \quad (6.24)$$

$$U_j(v) = U_0^{(j)}(v), \quad U_j(w) = U_0^{(j)}(w). \quad (6.25)$$

В силу (6.11), (6.12) имеем также:

$$U_j(s) \leq a + \lambda U_{j-1}(s) + k_j(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in (0, \infty); \quad U_j(0) \leq K_j. \quad (6.26)$$

В силу (6.18) имеем:

$$U_0^{(j)}(s) = M_j(s) > M_{j-1}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-1} \equiv \Delta \cap (0, s_{j-1}). \quad (6.27)$$

По предположению же индукции имеем также:

$$U_{j-1}(s) \leq M_{j-1}(s) \equiv U_0^{(j-1)}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-1}. \quad (6.28)$$

Теперь в силу (6.24), (6.27), (6.28) получаем из соотношения (6.26):

$$U_j(s) \leq a + \lambda U_j(s) + k_j(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in \Delta_j, \quad (6.29)$$

а в силу (6.25)

$$U_j(v) = U_0^{(j)}(v) = M_j(v). \quad (6.30)$$

Интегрируя теперь дифференциальное неравенство (6.29), получим с учетом (6.30)

$$U_j(s) \leq M_j(s) = U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta_j,$$

откуда ввиду предположения (6.24) следует, что $\Delta \cap (0, s_{j-1}) = \emptyset$. Пусть теперь

$$\Delta_{j-2} \equiv \Delta \cap [s_{j-1}, s_{j-2}] \neq \emptyset, \quad v \in [s_{j-1}, s_{j-2}]. \quad (6.31)$$

По построению функции $U_0^{(j)}(s)$ имеем:

$$U_0^{(j)}(s) = M_{j-1}(s) \quad \forall s \in [s_{j-1}, s_{j-2}],$$

а из предположения индукции следует:

$$U_{j-1}(s) \leq U_0^{(j-1)}(s) = M_{j-1}(s) \quad \forall s \in [s_{j-1}, s_{j-2}].$$

Используя теперь последние соотношения, выводим из неравенства (6.24):

$$U_j(s) > U_{j-1}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-2}.$$

Поэтому из (6.26) с учетом того, что $k_j \leq k_{j-1}$, выводим неравенство:

$$U_j(s) \leq a + \lambda U_j(s) + k_{j-1}(-U_j'(s))^{1+\gamma} \quad \forall s \in \Delta_{j-2}, \quad (6.32)$$

причем в силу (6.25) и (6.31)

$$U_j(v) = U_0^{(j)}(v) = M_{j-1}(v). \quad (6.33)$$

Интегрируя неравенство (6.32) с учетом (6.33), получаем оценку:

$$U_j(s) \leq M_{j-1}(s) = U_0^{(j)}(s) \quad \forall s \in \Delta_{j-2}.$$

Эта оценка с учетом предположения (6.24) доказывает, что $\Delta_{j-2} = \emptyset$. Продолжая дальше тем же способом, устанавливаем, что

$$\Delta \cap [s_i, s_{i-1}] = \emptyset \quad \forall i \leq j-1.$$

Тем самым лемма 6.2 доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть в условиях леммы 6.2 параметры системы (6.11), (6.12) удовлетворяют дополнительному соотношению:

$$K_i = rk_i^{\frac{-1+\mu}{\gamma}} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 < \mu = \text{const} < 1, \quad r < \infty. \quad (6.34)$$

Тогда для всего семейства функций $\{U_i(s)\}$ справедлива равномерная оценка (6.14) с

$$U_0(s) = c(s^{\frac{-1+\mu}{\mu} \cdot \frac{1+\gamma}{\gamma}} + a), \quad c = \text{const} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для случая $a = 0$ (в целях сокращения вычислений). Решения соответствующих модельных задач (6.15), (6.16) сейчас принимают вид:

$$M_i(s) = d^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} k_i^{-\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{r^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} k_i^{\frac{\mu}{1+\gamma}}}{d} - s \right]_+^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $d = \frac{\gamma}{\gamma+1} (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\gamma}}$. Включим последовательность функций $\{M_i(s)\}$ в семейство, зависящее от непрерывного параметра τ :

$$M_\tau(s) = d^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \tau^{-1} \left[\frac{r^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \tau^{\frac{\mu\gamma}{1+\gamma}}}{d} - s \right]_+^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \quad \forall \tau \in (0, \infty).$$

Найдем огибающую семейства кривых $y - M_\tau(s) = 0$. Для этого, как хорошо известно, нужно исключить параметр τ из системы:

$$y - M_\tau(s) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} M_\tau(s) = 0.$$

В результате после несложных вычислений получим искомую огибающую:

$$y(s) = \frac{r^{\frac{1}{\mu}} \mu^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} (1-\mu)^{\frac{(1+\gamma)(1-\mu)}{\gamma\mu}}}{d^{\frac{(\gamma+1)(1-\mu)}{\gamma\mu}}} s - \frac{(1+\gamma)(1-\mu)}{\gamma\mu} \quad \forall s > 0.$$

Покажем теперь, что

$$y(s) \geq M_\tau(s) \quad \forall \tau > 0, \quad \forall s > 0. \quad (6.35)$$

Так как $y(s) > 0$, $M_\tau(s) \geq 0$, то для справедливости (6.35) достаточно показать, что

$$\varphi(s) \equiv y(s)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} - M_\tau(s)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \geq 0 \quad \forall \tau > 0, \quad \forall s > 0. \quad (6.36)$$

Элементарный анализ показывает, что функция $\varphi(s)$ имеет одну экстремальную точку

$$s_c = d^{-1} \tau^{\frac{\gamma\mu}{1+\gamma}} (1-\mu) r^{\frac{\gamma}{1+\gamma}},$$

т.е. точку, в которой $\varphi'(s_c) = 0$ для любого значения параметра τ . Просто проверяем, что $\varphi(s_c) = 0 \quad \forall \tau > 0$, что, очевидно, доказывает неравенство (6.35). Из неравенства (6.35) следует также и требуемая оценка

$$M_i(s) \leq cs^{\frac{-(1-\mu)(1+\gamma)}{\mu\gamma}} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall s > 0$$

с постоянной

$$c = \frac{r^{\frac{1}{\mu}} \mu^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} (1-\mu)^{\frac{(1+\gamma)(1-\mu)}{\gamma\mu}} (1+\gamma)^{\frac{(\gamma+1)(1-\mu)}{\gamma\mu}}}{\gamma^{\frac{(\gamma+1)(1-\mu)}{\gamma\mu}} (1-\lambda)^{\frac{(1-\mu)}{\gamma\mu}}}.$$

Лемма 6.3 доказана.

Список литературы

1. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юйлин. Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 8. С. 667–704.
2. Aronson D. G. Regularity properties of flows through porous media // SIAM J. Appl. Math. 1969. V. 17. P. 461–467.
3. Gilding B. H. Continuity of generalized solutions of the Cauchy problem for the porous medium equation // J. London Math. Soc. (2). 1976. V. 13. P. 103–106.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикладная матем. и мех. 1952. Т. 16. № 2. С. 67–78.
5. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная матем. и мех. 1956. Т. 20. № 3. С. 411–417.
6. Лизт М. К. О распространении возмущений в задачах, связанных с вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 7. С. 953–957.
7. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб. посвящ. 70-летию А.Ф. Иоффе. М.: Наука, 1950. С. 61–72.
8. Caffarelli L. A., Friedman A. Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium // Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 1193–1218.
9. Gilding B. H., Herrero M. A. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction // Math. Ann. 1988. V. 282. P. 223–242.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
11. Галактионов В. А., Самарский А. А. Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 3. С. 291–322.
12. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 7. С. 1196–1204.
13. Cortazar C., Elgueta M. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation // Nonlinear Anal. 1989. V. 13. № 1. P. 33–41.
14. Антонцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 6. С. 1289–1293.
15. Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. № 2. P. 787–814.
16. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Аналоги принципа Сен-Венана и единственность решений параболических граничных задач в неограниченных областях // УМН. 1976. Т. 31. № 6. С. 142–166.
17. Акулов В. Ф., Шишков А. Е. Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 8. С. 1200–1210.
18. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. V. 183. P. 311–341.
19. Benilan Ph., Wittbold P. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems // Adv. Differential Equations. 1996. V. 1. № 6. P. 1053–1073.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк;
Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
31.03.1998