Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шмелькин, О факторногообразиях с изолированной особенностью, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 115–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:33:43

УДК 512.74

Д. А. Шмелькин

О факторногообразиях с изолированной особенностью

Получено описание всех простых линейных групп $H \subseteq \mathrm{GL}(V)$ таких, что факторногообразие $V//H$ имеет изолированную особенность.

Библиография: 10 названий.

Введение

Пусть G – редуктивная линейная группа, определенная над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики нуль. Линейное представление $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ (а также его образ, который мы обозначаем через (G, V)) называется *корегулярным*, если алгебра инвариантов $\mathbf{k}[V]^G$ регуляльна, т.е. порождена набором алгебраически независимых образующих. Обозначим через $\pi_V: V \rightarrow V//G$ морфизм факторизации, индуцированный вложением $\mathbf{k}[V//G] = \mathbf{k}[V]^G \subseteq \mathbf{k}[V]$. Пусть $v \in V$ – точка замкнутой G -орбиты. *Слайс-представлением* точки v называется естественное представление σ_v стабилизатора G_v в пространстве $T_v(V)/T_v(Gv)$, где через $T_x(X)$ обозначается касательное пространство в точке x к алгебраическому многообразию X . Известно [1], что представление σ_v корегулярно тогда и только тогда, когда точка $\pi_V(v)$ неособа на $V//G$. Кроме того, если представление ρ корегулярно, то для каждого G -инвариантного подпространства $U \subseteq V$ группа (G, U) также корегулярна [2]. Однако имеются некорегулярные группы (G, V) такие, что группы (G_v, σ_v) и (G, U) корегулярны для собственных $G_v \subseteq G$, $U \subseteq V$. Такие группы названы в [3] *минимально-некорегулярными* и классифицированы в случае, когда группа G связна и проста. Рассмотрим более широкий класс групп, некорегулярных и таких, что группа (G_v, σ_v) корегулярна при $v \neq 0$. Согласно вышесказанному данное свойство равносильно тому, что фактор $V//G$ имеет *изолированную особенность* (в точке $\pi_V(0)$). В настоящей работе получено описание всех простых (но не обязательно связных) групп G таких, что фактор $V//G$ имеет изолированную особенность (§2). Далее, оказывается, что проективное многообразие $\mathrm{Proj}(\mathbf{k}[V]^G)$, соответствующее некоторой естественной $\mathbb{Z}_+$ -градуировке алгебры $\mathbf{k}[V]^G$, является гладким и рациональным (§3).

§1. Группы, порожденные стабилизаторами

Свойство иметь изолированную особенность зависит лишь от стабилизаторов точек замкнутых орбит. Например, всякая конечная группа G , действующая свободно в $V \setminus \{0\}$, обладает этим свойством. В этой связи естественно возникает следующее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00783а) и гранта CRDF RM1-206.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Обозначим через $G^\perp$ подгруппу в G , порожденную единицей и стабилизаторами ненулевых точек замкнутых орбит. Группа G называется *группой, порожденной стабилизаторами*, если выполнено: $G = G^\perp$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Подгруппа $G^\perp \subseteq G$ является нормальной алгебраической (и, следовательно, редуктивной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. 1. Пусть алгебраическая группа G действует на алгебраическом многообразии X , орбита Gx замкнута в X в топологии Зарисского. Если подгруппа H нормальна в G , то и орбита Hx замкнута.

2. $(G^\perp)^\perp = G^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что второе утверждение следует из первого и из предложения 1.2. Докажем первое утверждение. Предположим, что орбита Hx незамкнута. Тогда ее замыкание $\overline{Hx}$ содержит орбиту Hu меньшей размерности. Поскольку $\overline{Hx}$ содержится в Gx , имеем: $u = gx$, $g \in G$, и $Hu = Hgx = gHx$ имеет ту же размерность, что и Hx . Противоречие.

Обозначим через G^0 связную компоненту единицы группы G , а через $N_K(L)$ — нормализатор подгруппы L в группе K . Рассмотрим действие группы $N_{\mathrm{GL}(V)}(G^0) \supseteq G$ на факторе $V//G^0$. Элемент $\gamma \in N_{\mathrm{GL}(V)}(G^0)$ будем называть $V//G^0$ -отражением [4], если $\mathrm{codim}_{V//G^0}(V//G^0)^\gamma = 1$. В [5] доказано, что если группа G^0 полупроста, то γ является $V//G^0$ -отражением тогда и только тогда, когда действует как отражение в линейном пространстве $T_{\pi_V(0)}(V//G^0)$.

ЛЕММА 1.4. Если $G = G^\perp$ и фактор $V//G$ имеет изолированную особенность, то группа G порождена элементами, действующими на $V//G^0$ тривиально, и $V//G^0$ -отражениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для любого элемента $g \in G$ имеется разложение:

$$g = g_1 g_2 \cdots g_k, \quad g_i \in G_{v_i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $v_1, \dots, v_k$ суть точки из замкнутых G -орбит, отличных от нуля. Достаточно доказать, что, например, g_1 содержится в подгруппе, порожденной элементами указанного вида. Положим: $H = G_{v_1}$, $H_0 = (G^0)_{v_1} \triangleleft H$. Выберем H -инвариантное подпространство N , дополнительное к $T_{v_1}(Gv_1)$ в V ; по предположению леммы слайс-представление σ_{v_1} группы H в пространстве N корегулярно. Ввиду [2; предложение 8.4] конечная группа H/H_0 порождена элементами, действующими на $N//H_0$ тривиально или с дивизором неподвижных точек. Следовательно, существует разложение $g_1 = h_1 h_2 \cdots h_l$, $h_i \in H$, где h_i действует на $N//H_0$ указанным выше образом, $i = 1, \dots, l$. По теореме о слайсе [6] имеется такое непустое открытое H -инвариантное подмножество $U \subseteq N$, содержащее 0, что естественный морфизм $\varphi: (U + v_1)//H_0 \rightarrow V//G^0$ этален. Кроме того, H действует естественным образом на обоих многообразиях, так что морфизм φ H -эквивариантен. Отсюда следует, что элемент h_i действует на $V//G^0$ тривиально или с дивизором неподвижных точек, $i = 1, \dots, l$.

§ 2. Классификация для простых групп

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть (G, V) – простая группа такая, что V не содержит открытой G^0 -орбиты и $(G^0, V) \neq (\mathrm{SL}_n, m\mathbf{k}^n)$, тогда:

1. группа $G^\perp$ содержит G^0 ;
2. если $V//G$ имеет изолированную особенность, то фактор $V//G^\perp$ гладкий вне $\pi_V(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что группа G^0 не содержится в $G^\perp$. Тогда ввиду предложения 1.2 группа $(G^0)^\perp$ тривиальна, т.е. для каждой замкнутой орбиты $G^0 v$, $v \neq 0$, группа изотропии $(G^0)_v$ совпадает с ядром действия $G^0 : V$. Следовательно, каждая G^0 -инвариантная неприводимая компонента $V_1 \subseteq V$ содержит открытую орбиту. Действительно, иначе стабилизатор точки замкнутой орбиты общего положения в V_1 тривиален, а для всех таких неприводимых групп в [1] доказано существование замкнутой орбиты с нетривиальным стабилизатором. Все неприводимые простые группы, действующие с открытой орбитой, суть группы: $(\mathrm{SL}_n, \mathbf{k}^n)$, $(\mathrm{SL}_{2m+1}, \bigwedge^2 \mathbf{k}^{2m+1})$, $(\mathrm{Sp}_n, \mathbf{k}^n)$, Spin_{10} (см., например, [2; §6.7]). Следовательно, все неприводимые компоненты пространства V имеют такой вид. Перевзвешивая немногочисленные возможности, получим, что либо V содержит открытую орбиту, либо $(G^0, V) = (\mathrm{SL}_n, m\mathbf{k}^n)$.

2. Для любой точки $v \in V$, $v \neq 0$, имеем: если $\overline{G^\perp} v = G^\perp v$, то по доказанному выше $\overline{G} v = G v$. Следовательно, $(G^\perp)_v = G_v$ и слайс-представление точки v для группы $G^\perp$ корегулярно, поскольку совпадает с (G_v, σ_v) .

Таким образом, предложения 1.3 и 2.1 сводят классификацию простых групп, имеющих фактор с изолированной особенностью, к случаю групп, порожденных стабилизаторами. Положим: $\widetilde{\mathrm{SL}}_n = \{g \in \mathrm{GL}_n : \det g = \pm 1\}$.

КЛАССИФИКАЦИЯ 2.2. Представим полный список всех групп (G, V) таких, что фактор $V//G$ имеет изолированную особенность.

1. В случае, если группа (G, V) связна и проста (ср. [3; классификация II]):

$$\begin{aligned} &(\mathrm{SL}_n, m\mathbf{k}^n), \quad n \geq 2, \quad m \geq n+2, \quad (\mathrm{SL}_n, (n+1)\mathbf{k}^n \oplus \bigwedge^{n-1} \mathbf{k}^n), \quad n \geq 3; \\ &(\mathrm{SL}_n, \bigwedge^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad n \geq 4, \quad m = 4, \dots, n+1; \\ &(\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad n \geq 3, \quad m = 2, \dots, n-1, \quad (\mathrm{SL}_5, 2\bigwedge^2 \mathbf{k}^5 \oplus 3\bigwedge^4 \mathbf{k}^5). \end{aligned} \quad (1)$$

2. В случае, если группа (G, V) несвязна, проста и порождена стабилизаторами:

$$(\widetilde{\mathrm{SL}}_2, S^3 \mathbf{k}^2 \oplus \mathbf{k}^2), \quad (\widetilde{\mathrm{SL}}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad n \geq 2, \quad m = 2, \dots, n. \quad (2)$$

Для доказательства нам понадобятся следующие утверждения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Каждая из групп

$$(\mathrm{SL}_n, \bigwedge^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad (\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad (\widetilde{\mathrm{SL}}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n), \quad m > 0,$$

обладает единственным, с точностью до сопряжения, максимальным собственным стабилизатором H точки из замкнутой орбиты, причем H есть $\mathrm{Sp}_{2[n/2]}$, SO_n и O_n соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, группу $(\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m \mathbf{k}^n)$. Пусть точка $v = (q, v_1, \dots, v_m) \in V$ имеет замкнутую орбиту и стабилизатор K . Нам надо показать, что K сохраняет некую невырожденную квадратичную коформу. Можно считать, что q совпадает с $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_r^2$, причем $e_1, \dots, e_r \in \mathbf{k}^n$ линейно независимы. Векторы $e_1, \dots, e_r, v_1, \dots, v_m$ порождают $\mathbf{k}^n$, в противном случае предъявляется одномерный тор S со свойством $\overline{S}v \ni 0$. Следовательно, с точностью до перестановки векторов $e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_r^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-r}^2$ является невырожденной K -инвариантной коформой. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

ЛЕММА 2.4. Пусть пространство V представления ρ группы SL_2 есть сумма неприводимых компонент V_j , $\dim V_j = n_j$, $j = 1, \dots, l$, таких, что

$$\sum_{j=1}^l \left[\frac{n_j - 1}{2} \right] > 3.$$

Тогда $N_{\mathrm{GL}(V)}(\rho(\mathrm{SL}_2))$ не содержит $V // \mathrm{SL}_2$ -отражений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\gamma \in N_{\mathrm{GL}(V)}(\rho(\mathrm{SL}_2))$ является $V // \mathrm{SL}_2$ -отражением. Поскольку группа SL_2 не имеет внешних автоморфизмов, можно считать, что γ коммутирует с $\rho(\mathrm{SL}_2)$ и при подходящем выборе пространств V_j действует на V_j умножением на $c_j \in \mathbf{k}^*$, $j = 1, \dots, l$. Кроме того, можно считать, что γ имеет конечный порядок. Рассмотрим группу $H = \rho(\mathrm{SL}_2) \langle \gamma \rangle$. Стабилизатор в H точки общего положения в V тривиален [7], [8]. Предположение относительно γ означает ввиду [4; предложение 1.15], что существует элемент $r = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \in \mathrm{SL}_2$ и замкнутая орбита $Hv \subseteq V$ со свойствами: $Hv = \langle \tilde{r} \rangle$, $\tilde{r} = \rho(r)\gamma$, причем линейный оператор $\sigma_v(\tilde{r})$ является отражением. По определению слайс-представления имеем для спектров линейных операторов:

$$\mathrm{Spec}(\tilde{r}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Ad}(r)) \sqcup \mathrm{Spec}(\sigma_v(\tilde{r})),$$

где через Ad обозначено присоединенное представление группы SL_2 . Следовательно, $\mathrm{Spec}(\tilde{r})$ содержит не более трех отличных от единицы чисел, а оставшиеся три должны быть равны $\varepsilon^2, \varepsilon^{-2}, \mu, \mu \neq 1$. С другой стороны, очевидно:

$$\mathrm{Spec}(\tilde{r}|_{V_j}) = \{c_j \varepsilon^{n_j-1}, c_j \varepsilon^{n_j-3}, \dots, c_j \varepsilon^{1-n_j}\}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Проверяется, что при имеющемся ограничении на $n_1, \dots, n_l$ полученное выше свойство спектра $\tilde{r}$ невозможно ни при каких $\varepsilon, c_1, \dots, c_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КЛАССИФИКАЦИИ.

1. Пусть (K, W) – связная минимально-некорегулярная простая группа. В работе [3] доказано, что (K, W) является группой из (1) при параметре m , принимающем свое минимальное значение. Нам достаточно найти среди всех групп вида $(K, W \oplus U)$ такие, что слайс-представления всех ненулевых точек корегулярны (в частности, $U^K = \{0\}$).

Пятая и вторая группы в (1) имеют слайс-представления $(\mathrm{SL}_2, 3\mathbf{k}^2 \oplus \theta_8)$ и $(\mathrm{SL}_{n-1}, n\mathbf{k}^{n-1} \oplus \theta_1)$ соответственно, где через θ_m обозначается тривиальное представление размерности m . Данные слайс-представления являются максимальными корегулярными представлениями [3], [9]. Следовательно, нетривиальных U не существует.

Нетрудно показать, что все возможные (K, U) в первом, третьем и четвертом случаях из (1) изоморфны $(\mathrm{SL}_n, p\mathbf{k}^n)$, причем в третьем и четвертом случаях корегулярность слайс-представления группы H из предложения 2.3 равносильна неравенству $p \leq n - 3$.

Таким образом, остается показать, что все группы (G, V) из (1) обладают нужным свойством. Для первой серии групп это очевидно. Для второй и пятой это доказано в [3]. Для третьей и четвертой применяем предложение 2.3. Поскольку слайс-представление σ группы H корегулярно, каждое слайс-представление группы (H, σ) корегулярно. Так как любой собственный стабилизатор точки замкнутой орбиты сопряжен подгруппе в H , то каждое слайс-представление группы (G, V) корегулярно ввиду [4; предложение 1.2],

2. Через V^+ обозначим G^0 -инвариантное прямое дополнение к V^{G^0} в V . Пространства V^{G^0} и V^+ G -инвариантны, и в силу леммы 1.4 и [10; доказательство теоремы 2.3]

$$V//G \cong (V//G^0)/(G/G^0) \cong (V^{G^0} // (G/G^0)) \times (V^+ // G).$$

Из первого изоморфизма следует, что группа (G^0, V) некорегулярна (в частности, бесконечна), в противном случае фактор $V//G$ был бы изоморфен (ввиду леммы 1.4 и по теореме Шевалле–Шепарда–Тодда) аффинному пространству. Из второго изоморфизма следует: $V^{G^0} = \{0\}$.

Группа $K \subseteq \mathrm{GL}(U)$ называется *квазикорегулярной* [10], если она допускает конечное корегулярное расширение: $K \subseteq L \subseteq \mathrm{GL}(U)$. Все группы (G, V) , удовлетворяющие лемме 1.4 и такие, что группа (G^0, V) квазикорегулярна, рассмотрены в [10]. Те из них, которые не корегулярны, суть группы из (2) при $m = 2$, и фактор для них действительно имеет изолированную особенность. Что касается второй группы из (2) при $m > 2$, то для нее интересующее нас свойство следует из предложения 2.3, как и выше.

Таким образом, нам остается проверить, что каждая не содержащаяся в (2) несвязная простая группа (K, W) , порожденная стабилизаторами и такая, что группа (K^0, W) не квазикорегулярна и пространство W^{K^0} тривиально, имеет некорегулярное слайс-представление.

Предположим обратное. Тогда все неприводимые компоненты K^0 -пространства W квазикорегулярны. Действительно, фактически в [1] доказано, что каждая неквазикорегулярная неприводимая связная простая группа имеет неквазикорегулярное слайс-представление, кроме представления группы SL_4 со старшим весом, имеющим отметки $(1, 1, 0)$. Для последнего в [10; §5] приведено слайс-представление σ конечной группы изотропии Γ . Нетрудно проверить, что $\sigma(\Gamma)$ не вкладывается в качестве нормального делителя в группу, порожденную отражениями.

Случай $K^0 = \mathrm{SL}_2$ полностью следует из лемм 1.4, 2.4, так как ограничение на числа $n_1, \dots, n_l$ из леммы 2.4 равносильно тому, что группа (SL_2, V) неквазикорегулярна (см. [10]). Наконец, если все неприводимые компоненты пространства

W квазикорегулярны, $\mathrm{rk} K \geq 2$, то в [10; § 7] проверена некорегулярность группы (K, W_1) для некоторого K -подпространства $W_1 \subseteq W$. Сначала предположим, что (K^0, W_1) не совпадает с $(\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus 3\mathbf{k}^n)$. Если некорегулярность доказана первым или вторым “типовым” способом (т.е. дело сводится к таблицам серии А или Б, см. [10]), то, значит, предъявлено неквазикорегулярное слайс-представление для (K, W_1) , а следовательно, и для (K, W) . То же относится к специальным случаям 1–3, 7 (при $n \geq 6$), 8 (при $n \geq 7$), 9–14, см. там же.

С другой стороны, благодаря лемме 1.4 нам достаточно показать, что множество $N_{\mathrm{GL}(W_1)}(K^0) \setminus K^0$ не содержит $W_1 // K^0$ -отражений, а также (в случае, если (K^0, W_1) содержится в списке (1)) элементов, действующих на $W_1 // K^0$ тривиально. Это собственно и делается в [10; § 7] для специальных случаев 4, 5, 7, 8, а для первой и второй групп случая 6 и групп таблицы В, кроме номера 5, это выводится из информации, полученной для них.

Обозначим через G_n группу номер 5 таблицы В: $G_n = (\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus n \bigwedge^{n-1} \mathbf{k}^n)$. Проверяется, что G_n имеет неквазикорегулярную группу G_{n-1} в качестве образа некоторого слайс-представления.

Остается лишь случай $(K^0, W_1) = (\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus 3\mathbf{k}^n)$ [10; § 7, случай 6]. Если (K^0, W) не совпадает с $(\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n)$, то мы имеем дело с одним из разобранных выше случаев. В противном случае, учитывая слайс-представление группы H из предложения 2.3, получаем $m \leq n$. Кроме того, из леммы 1.4 следует: $(K, W) = (\widetilde{\mathrm{SL}}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus m\mathbf{k}^n)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Каждая порожденная стабилизаторами несвязная минимально-некорегулярная простая группа изоморфна одной из групп:*

$$(\widetilde{\mathrm{SL}}_2, S^3 \mathbf{k}^2 \oplus \mathbf{k}^2), \quad (\widetilde{\mathrm{SL}}_n, S^2 \mathbf{k}^n \oplus 2\mathbf{k}^n), \quad n \geq 2.$$

§ 3. Проективные “факторы”

Пусть (G, V) – группа из классификации 2.2. Поскольку фактор $V // G$ является гладким вне $\pi_V(0)$, естественно спросить, нельзя ли связать с ним гладкое проективное многообразие? Оказывается, это можно сделать, причем, в некотором смысле, естественно.

Заметим, что группа G есть или SL_n , или $\widetilde{\mathrm{SL}}_n$, причем действие G на V естественно продолжается до действия группы GL_n . Следовательно, возникает действие $T = \mathrm{GL}_n / G : V // G$, причем замыкание любой T -орбиты содержит $\pi_V(0)$. Это означает, что индуцированная таким действием $\mathbb{Z}$ -градуировка алгебры $\mathbf{k}[V]^G$ обладает свойствами: $\mathbf{k}[V]^G_l = 0$ при $l < 0$, $\mathbf{k}[V]^G_0 = \mathbf{k}$. Относительно этой градуировки положим:

$$X = \mathrm{Proj}(\mathbf{k}[V]^G).$$

Известно, что проективное многообразие X параметризует орбиты действия $T : (V // G \setminus \pi_V(0))$. Поскольку группа G^0 проста, из [2; теорема 3.3] следует: $\mathbf{k}(V // G) = \mathbf{k}(V)^G$. Значит, по теореме Розенлихта [2; теорема 2.3] X является рациональным фактором для действия $\mathrm{GL}_n : V$, т.е. $\mathbf{k}(X) \cong \mathbf{k}(V)^{\mathrm{GL}_n}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *X – гладкое рациональное проективное многообразие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Случай 1. $(G, V) \neq (\widetilde{\mathrm{SL}}_2, S^3 \mathbf{k}^2 \oplus \mathbf{k}^2), (\mathrm{SL}_5, 2 \wedge^2 \mathbf{k}^5 \oplus 3 \wedge^4 \mathbf{k}^5)$. В этом случае все образующие алгебры $\mathbf{k}[V]^G$ получены в [9; гл. 2] или могут быть легко выведены оттуда. Степени всех образующих относительно определяемой действием T градуировки оказываются одинаковы, т.е. $V//G$ является конусом, гладким вне вершины. Следовательно, многообразие X гладко.

Так как X является рациональным фактором по действию группы GL_n , рациональность X равносильна рациональности поля $\mathbf{k}(V)^{\mathrm{GL}_n}$, которая устанавливается следующим образом. Имеется разложение $V = V_1 \oplus V_2$ пространства V в сумму GL_n -инвариантных, причем V_1 содержит открытую плотную орбиту $\mathrm{GL}_n u$. Отсюда следует, что орбита общего положения в пространстве V пересекает линейное многообразие $u + V_2$, причем пересечение есть одна орбита группы $H = (\mathrm{GL}_n)_u$ и имеют место изоморфизмы:

$$\mathbf{k}(V)^{\mathrm{GL}_n} \cong \mathbf{k}(u + V_2)^H \cong \mathbf{k}(V_2)^H.$$

Линейная группа (H, V_2) оказывается во всех случаях простой и корегулярной, следовательно, поля $\mathbf{k}(V_2)^H = Q\mathbf{k}[V_2]^H$ и $\mathbf{k}(V)^{\mathrm{GL}_n}$ рациональны.

В нижеследующей таблице мы приводим для каждой группы $(G, V = V_1 \oplus V_2)$ из рассмотренных выше степень всех образующих алгебры $\mathbf{k}[V]^G$ и информацию о V_2 как о H -модуле.

(G, V_1, V_2)	deg	(H, V_2)
$(\mathrm{SL}_n, n\mathbf{k}^n, (m-n)\mathbf{k}^n), n \geq 2, m \geq n+2$	n	$(1, \mathbf{k}^{mn-n^2})$
$(\mathrm{SL}_n, n\mathbf{k}^n, \mathbf{k}^n \oplus \wedge^{n-1} \mathbf{k}^n), n \geq 3$	n	$(1, \mathbf{k}^{2n})$
$(\mathrm{SL}_n, \wedge^2 \mathbf{k}^n, m\mathbf{k}^n), n = 2l \geq 4,$ $m = 4, \dots, n+1$	n	$(\mathrm{Sp}_n, m\mathbf{k}^n)$
$(\mathrm{SL}_n, \wedge^2 \mathbf{k}^n \oplus \mathbf{k}^n, m\mathbf{k}^n),$ $n = 2l+1 \geq 5, m = 3, \dots, n$	n	$(\mathrm{Sp}_{n-1}, m\mathbf{k}^{n-1} + \theta_m)$
$(\mathrm{SL}_n, S^2 \mathbf{k}^n, m\mathbf{k}^n), n \geq 3, m = 2, \dots, n-1$	$2n$	$(\mathrm{O}_n, m\mathbf{k}^n)$
$(\widetilde{\mathrm{SL}}_n, S^2 \mathbf{k}^n, m\mathbf{k}^n), m = 2, \dots, n, n \geq 2$	$2n$	$(\mathrm{O}_n, m\mathbf{k}^n)$

Случай 2. $(G, V) = (\mathrm{SL}_5, 2 \wedge^2 \mathbf{k}^5 \oplus 3 \wedge^4 \mathbf{k}^5)$. Здесь все образующие алгебры $\mathbf{k}[V]^G$ получены в [3; таблица a'] и степень каждого из них равна 10. Значит, X гладко. Далее, стабилизатор в GL_5 точки общего положения в $V_1 = 2 \wedge^2 \mathbf{k}^5 \oplus 2 \wedge^4 \mathbf{k}^5$ тривиален [7], [8]. Группа (G, V_1) корегулярна [3], [9], следовательно, поле $\mathbf{k}(V_1)^{\mathrm{GL}_5} = (\mathbf{k}(V_1)^G)^T = (Q\mathbf{k}[V_1]^G)^T$ рационально. Отсюда по так называемой “Нопате-лемме” (см., например, [2; теорема 2.13]) имеем искомое.

Случай 3. $(G, V) = (\widetilde{\mathrm{SL}}_2, S^3 \mathbf{k}^2 \oplus \mathbf{k}^2)$. Используя информацию из [10; таблица 1], получаем:

$$\mathbf{k}[V]^G = \mathbf{k}[G, H, D, F]/(G^2 + H^3 - DF),$$

причем степень образующих G, D, F равна 12, а степень H равна 8. Отсюда получаем, что поле $\mathbf{k}(V)^{\mathrm{GL}_2} = \mathbf{k}(GD^{-1}, G^2H^{-3})$ рационально.

Проверяя гладкость X , покрываем X четырьмя аффинными картами: $X_1 : G \neq 0$, $X_2 : D \neq 0$, $X_3 : F \neq 0$, $X_4 : H \neq 0$, и доказываем гладкость последних. Из определения X следует, что карта X_1 изоморфна фактору аффинного многообразия $\tilde{X}_1 : 1 + H^3 = DF$ по действию группы $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ порядка 3 такому, что $\gamma(D) = D$, $\gamma(F) = F$, $\gamma(H) = \alpha H$, $\alpha^3 = 1$. Нетрудно проверить, что фактор изоморфен $\mathbb{A}^2$. То же верно и для X_2 и X_3 , а карта X_4 изоморфна фактору гладкого многообразия $\tilde{X}_4 : G^2 + 1 = DF$ по свободному действию группы порядка 2 и является гладкой по теореме о слайсе [6].

Список литературы

1. Кас В. Г., Попов В. Л., Винберг Е. В. Sur les groupes algébriques dont l'algèbre des invariants est libre // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1976. V. 283. P. 875–878.
2. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314.
3. Schwarz G. W. Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants // Invent. Math. 1978. V. 49. P. 167–191.
4. Shmel'kin D. A. Non-connected groups with regular algebra of invariants and codimension 1 Luna strata // Geom. Dedicata. 1998. V. 72. №2. P. 189–216.
5. Панюшев Д. И. О полупростых группах, допускающих конечное корегулярное расширение // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. №3. С. 82–84.
6. Luna D. Slices étales // Bull. Soc. Math. France. 1973. V. 33. P. 81–105.
7. Элашвили А. Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. №1. С. 51–62.
8. Попов А. М. Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли // Труды ММО. 1987. Т. 50. С. 209–248.
9. Адамович О. М., Головина Е. О. Простые линейные группы, имеющие свободную алгебру инвариантов // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1979. С. 3–41.
10. Шмелькин Д. А. О несвязных простых линейных группах со свободной алгеброй инвариантов // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №4. С. 159–204.

Независимый московский университет
E-mail: mitia@shmelkin.mcsme.ru

Поступила в редакцию
18.12.1997