Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Юлмухаметов, Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 4, 123–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:02:34

УДК 517.5

Р. С. Юлмухаметов

Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации

Доказывается утверждение о том, что любая финитная гладкая функция вещественной переменной представляется в виде свертки двух таких же функций. Даны обобщения этого утверждения на другие классы функций.

Библиография: 23 названия.

Введение

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда свертка этих двух функций

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int \varphi_1(t) \varphi_2(x - t) dt$$

также является элементом пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В 1960 году в работе [1] Л. Эренпрайс поставил обратную задачу: каждая ли функция φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ является сверткой двух функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$?

Преобразование Фурье–Лапласа позволяет сформулировать эту проблему в терминах целых функций. Если через $\widehat{\varphi}(\lambda)$ обозначим преобразование Фурье–Лапласа функции φ :

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(t) e^{i\langle t, \lambda \rangle} dt, \quad \langle t, \lambda \rangle = \sum_{k=1}^n t_k \lambda_k, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n,$$

то, как известно, множество

$$\widehat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\widehat{\varphi}(\lambda), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

совпадает с пространством целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \ln |f(\lambda)| &\leq \sigma_f |\operatorname{Im} \lambda| + M_f \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^n, \\ \ln |f(x)| &\leq -N \ln |x| + C_N \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-960-011746) и Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете (грант № 01.960.000936).

Кроме того, имеет место равенство

$$\widehat{\varphi_1 * \varphi_2} = \widehat{\varphi_1} \widehat{\varphi_2}.$$

Таким образом, проблема Эренпрайса, сформулированная в терминах целых функций, заключается в возможности или невозможности разложения целой функции f из $\widehat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ на произведение двух функций из того же класса $\widehat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В работах [2]–[4] получено отрицательное решение проблемы Эренпрайса при $n > 1$. В работах [5]–[11] доказана возможность факторизации функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при дополнительных условиях на расположение нулей функции $\widehat{\varphi}(\lambda)$.

В работе [8] Д. Диксон рассмотрел проблему в несколько более общей постановке. В частности, рассмотрен вопрос о факторизации распределений конечного порядка, имеющих компактный носитель. В общей постановке вопрос о факторизации распределений тривиален из-за существования точечных распределений. Но вопрос становится содержательным, если, следуя Диксону, требовать, чтобы носители распределений-множителей были строго меньше носителя исходного распределения.

Мы докажем факторизуемость всех финитных гладких функций и, тем самым, будет получено положительное решение проблемы Л. Эренпрайса. Кроме того, предлагаемая нами общая теорема позволяет доказать нетривиальную факторизуемость финитных распределений конечного порядка. Наконец, мы приведем критерий факторизуемости функций из классов Карлемана.

В действительности мы решаем задачу факторизации в некоторых классах целых функций экспоненциального типа. Задача факторизации или расщепления целых функций одной переменной в связи с различными применениями исследовалась и ранее. Заметим, что расщепление целых функций на произведение двух множителей прежде всего означает разбиение множества ее нулей на два подмножества. И. Ф. Красичковым-Терновским [16] впервые был использован метод, связывающий разбиение множества нулей с разбиением комплексной плоскости на непересекающиеся ячейки. В работах В. С. Азарина [17], [18] и автора [13] этот метод систематически применялся в задачах аппроксимации субгармонических функций. Исходная идея настоящей работы имеет определенную связь с указанным методом. Однако следует отметить два существенных момента.

1) Ранее использовались универсальные разбиения, единые для всех рассматриваемых функций. Мы же жестко связываем разбиение множества нулей с распределением нулей рассматриваемой функции.

2) Ранее было достаточно, чтобы в каждой ячейке оказывалось четное число нулей, одна половина (по количеству) нулей относилась к одной из функций-множителей, другая половина – к другой. В нашей ситуации уже необходимо, чтобы в каждой ячейке оказывались ровно два нуля, причем по достаточно жесткому и сложному алгоритму нужно определить, какой из этих нулей отнесется к первому множителю и какой – ко второму.

Такое радикальное усложнение схемы, очевидно, связано с различиями классов функций, в которых строятся расщепления. Упомянутый выше результат В. С. Азарина – это расщепление целой функции нормального типа при порядке ρ на произведение двух функций, имеющих в два раза меньший тип при том же порядке. Мы

же рассматриваем классы функций, выделяющиеся с помощью существенно более тонких характеристик. В частности, рассматриваемые классы являются частью класса Картрайт, изучавшегося, например, в работах [19]–[22].

Отметим, что мы не используем сколь-либо специфические свойства функций из этих классов. Для применения доказанной здесь основной теоремы достаточно, чтобы рассматриваемый класс выделялся с помощью ограничений на рост вдоль вещественной оси.

В целом результаты работы анонсированы в [12] и [23].

§ 1. Формулировка основной теоремы и предварительные замечания

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть f , F – целые функции, причем F делится на f , $F(0) = 1$ и выполняется оценка

$$\ln |F(\lambda)| \leq H(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где H – некоторая липшицева функция:

$$|H(\lambda_1) - H(\lambda_2)| \leq \sigma |\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Тогда f может быть представлена как произведение двух целых функций f_1 , f_2 так, что для всех λ , $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2$, и p , $p \in [1, |\lambda|/2]$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| &\leq \frac{A}{p} [H(\lambda) - \ln |F(\lambda)|] \\ &+ B \ln^+ |\lambda| + C \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + D + M e^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\rho(\lambda)$ – расстояние от точки λ до множества нулей функции f :

$$\rho(\lambda) = \inf \{ |z - \lambda| : f(z) = 0 \}$$

и A , B , C , D , M – постоянные, не зависящие от λ и p . Кроме того, соотношение

$$|\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| \leq \operatorname{const} \cdot |\lambda|^{4/5} \ln(|\lambda| + e) \quad (3')$$

выполняется для всех $\lambda \notin E$, а исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(z_j, t_j) = \{z : |z - z_j| < t_j\}$ такой, что

$$\sum_{|z_j| \leq R} t_j \leq \operatorname{const} \cdot R^{4/5}.$$

Покажем здесь, как может быть применена эта теорема для решения проблемы Эренпрайса. Возьмем функцию $f \in \widehat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и пусть $H(\lambda) = \sigma_f |\operatorname{Im} \lambda| + M$. Предположим, что $f(0) = 1$. Мы можем применить основную теорему к функции

f , взяв в качестве F саму функцию f . Теорема утверждает о существовании целых функций f_1 и f_2 , удовлетворяющих условию

$$\ln |f_1(\lambda)| + \ln |f_2(\lambda)| = \ln |f(\lambda)|$$

и соотношению (3), которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| &= -\frac{A}{p} \ln |f(\lambda)| + O(\ln |\lambda|), \\ |\lambda| \rightarrow \infty, \quad |\operatorname{Im} \lambda| &\leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \notin \Omega, \quad p \in \left[1, \frac{|\lambda|}{2}\right], \end{aligned}$$

где исключительное множество Ω может быть покрыто кругами со сколь угодно малой общей суммой радиусов. Если положить $p = A/2$, то из этих двух соотношений немедленно получим

$$\ln |f_i(\lambda)| = \frac{1}{4} \ln |f(\lambda)| + O(\ln |\lambda|), \quad \lambda \notin \Omega, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2.$$

Из-за малых размеров множества Ω эта оценка по принципу максимума продолжается на множество Ω . Отсюда уже видно, что если функция f на вещественной оси быстро убывает, то так же убывают функции f_i . Из соотношения (5) таким же образом можно вывести, что тип функций f_i будет в два раза меньше типа функции f .

Если через $n_F(t)$ обозначить число нулей функции F (с учетом их кратности) в круге радиуса t с центром в нуле, то из условия (2) и из формулы Иенсена следует, что выполняется оценка

$$\int_0^r \frac{n_F(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(re^{i\theta}) d\theta \leq \sigma r + H(0).$$

Очевидно, такая же оценка будет верна и для считающей функции $n_f(t)$:

$$\int_0^r \frac{n_f(t)}{t} dt \leq \sigma r + H(0),$$

в частности,

$$n_f(r) \leq \frac{2\sigma r + H(0)}{\ln 2}. \quad (4)$$

Поэтому если λ_k — нули функции f , то произведение

$$\prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

сходится и представляет собой целую функцию. Не ограничивая общности, будем считать, что это произведение сходится к функции f :

$$f(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть нули целой функции f разбиты на пары λ'_k, λ''_k и указаны числа $\varepsilon_k = \pm 1$ так, что выполняются соотношения

$$\left| \sum_k \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right) \right| \leq \frac{A}{p} [H(\lambda) - \ln |F(\lambda)|] + B \ln^+ |\lambda| + C \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + D + Me^p, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$\sum_k \left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right| < \infty. \quad (6)$$

Тогда для функции f выполняется утверждение (3) основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varepsilon_k = -1$, то в паре λ'_k, λ''_k поменяем точки местами. Сохранив для простоты прежние обозначения, будем считать, что $\varepsilon_k = 1$ для всех k . В силу (4) произведения

$$u_1(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right) \exp \left(\frac{\lambda}{\lambda'_k} \right), \quad u_2(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right) \exp \left(\frac{\lambda}{\lambda''_k} \right)$$

сходятся на всей плоскости. Сравнивая произведение

$$v_1(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right) \exp \left(\frac{\lambda}{\lambda''_k} \right)$$

с $u_2(\lambda)$ и учитывая (6), получаем, что v_1 также является целой функцией. Отношение f и $u_1 v_1$ является, очевидно, целой функцией без нулей, т. е.

$$f(\lambda) = u_1(\lambda) v_1(\lambda) e^{g(\lambda)}.$$

Функции

$$f_1(\lambda) = u_1(\lambda) e^{g(\lambda)/2}, \quad f_2(\lambda) = v_1(\lambda) e^{g(\lambda)/2}$$

в силу соотношения (5) удовлетворяют условиям основной теоремы.

Теорема 1 доказана.

Ясно, что аналогичное утверждение верно и для соотношения (3').

Далее, если функция f каким-либо образом представлена в виде произведения целых функций u и v , то функции u и v сами удовлетворяют условиям основной теоремы. Если для каждой из этих функций u и v доказано утверждение основной теоремы с постоянными, например, A_u и A_v , то тем самым утверждение будет доказано и для функции f с постоянной $A_f = A_u + A_v$. Это обстоятельство будет для нас весьма существенным. Здесь приведем два самых простых применения.

а) Можно считать, что в квадрате $|\operatorname{Re} \lambda| \leq 1, |\operatorname{Im} \lambda| \leq 1$ нет нулей функции f . В самом деле, представим функцию f в виде произведения функций u и v , где u — многочлен четной степени, множество нулей которого включает в себя все нули

функции f в указанном квадрате. Для многочленов четной степени утверждение теоремы выполняется тривиальным образом.

б) Можно считать, что все нули функции f – простые.

Рассмотрим квадраты

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \{z : |\operatorname{Im} z| < 1, 2k - 1 \leq \operatorname{Re} z < 2k + 1\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ P_k &= \{z : 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2^k + 1, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2^k\}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Разность $P_k \setminus P_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, состоит из трех квадратов, конгруэнтных P_{k-1} . Эти три квадрата и квадраты, симметричные им относительно двух осей и начала координат, обозначим через P_k^m , $m = 1, \dots, 12$. Соответствующим образом определив принадлежность граничных отрезков и вершин, можно считать, что квадраты Π_k , P_k^m , $k \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются и покрывают всю плоскость.

Функцию f можно представить как произведение двух целых функций u и v так, что функция u в каждом из построенных квадратов имеет четное число нулей, а функция v в каждом из этих квадратов имеет не более одного нуля.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим функции с множеством нулей, как у функции v .

ТЕОРЕМА 2 [10; теорема 6]. Пусть z_k , $k \in \mathbb{Z}$, – нули целой функции v , пронумерованные в порядке возрастания $\operatorname{Re} z_k$, причем

$$\operatorname{Re} z_0 = \min_k \{\operatorname{Re} z_k, \operatorname{Re} z_k \geq 0\}.$$

Если все точки z_k лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$, причем $|\operatorname{Re} z_k| > 1$ и в каждом квадрате

$$\Pi_k = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1, 2k - 1 \leq \operatorname{Re} z < 2k + 1\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

находится не более одной точки z_k , то функция v представима в виде произведения целых функций v_1 , v_2 так, что

$$|\ln |v_1(\lambda)| - \ln |v_2(\lambda)|| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3,$$

где $\rho(\lambda)$ – расстояние от точки λ до множества нулей функции v , а C_i – абсолютные постоянные (не зависящие от функции v).

ТЕОРЕМА 3. Пусть z_k , $k = 0, 1, \dots$, – нули целой функции v , пронумерованные в порядке возрастания $|z_k|$. Предположим, что $|\operatorname{Im} z_k| > 1$ и в каждом квадрате P_k^m лежит не более одного нуля функции v . Тогда функция v представляется в виде произведения целых функций v_1 , v_2 так, что выполняется соотношение

$$|\ln |v_1(\lambda)| - \ln |v_2(\lambda)|| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3,$$

где C_i – абсолютные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n_1(t)$ – число точек z_{2k+1} , $k = 0, 1, \dots$, лежащих в круге радиуса t с центром в нуле. Соответственно $n_2(t)$ – число точек с четными индексами. По условию теоремы и по построению квадратов P_k^m выполняются оценки

$$n_i(t) \leq C' \ln t + C, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{a})$$

$$|n_1(t) - n_2(t)| \leq 1, \quad (\text{b})$$

$$n_i(2t) - n_i(t) \leq C'', \quad t > 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{c})$$

Если $k_1 = \max\{k : |z_{2k}| < |\lambda|/2\}$, $k_2 = \max\{k : |z_{2k}| < 2|\lambda|\}$, то $k_2 - k_1 \leq 2C''$ в силу оценки (c) и

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_k} \right| \right| \leq C'_1 \ln^+ |\lambda| + C'_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C'_3$$

для $k \in [2k_1, 2k_2 + 1]$, поэтому

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k+1}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k}} \right| \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3. \quad (8)$$

Если же $k < k_1 - 1$, то

$$c \leq \frac{|\lambda - z_{2k+1}|}{|\lambda - z_{2k}|} \leq C.$$

С другой стороны, $2k_1 \leq C \ln |\lambda| + C'$ в силу оценки (a), поэтому

$$\sum_{k=0}^{k_1-1} |\ln |\lambda - z_{2k+1}|| - \ln |\lambda - z_{2k}|| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2. \quad (9)$$

Далее, по оценке (b) имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{k_1-1} (\ln |z_{2k+1}| - \ln |z_{2k}|) \right| \\ &= \left| \int_1^{|\lambda|/2} \ln t d(n_1(t) - n_2(t)) \right| \\ &= \left| \left(n_1 \left(\frac{|\lambda|}{2} \right) - n_2 \left(\frac{|\lambda|}{2} \right) \right) \ln \frac{|\lambda|}{2} + \int_1^{|\lambda|/2} \frac{n_2(t) - n_1(t)}{t} dt \right| \\ &\leq 2 \left| \ln \frac{|\lambda|}{2} \right|, \end{aligned}$$

которое вместе с (9) означает, что

$$\left| \sum_{k=0}^{k_1-1} \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k+1}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k}} \right| \right) \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2. \quad (10)$$

Рассмотрим $k > 2k_2 + 1$. Тогда $|z_k| \geq |z_{2k_2+2}| > 2|\lambda|$, поэтому

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_k} \right| \right| \leq C \frac{|\lambda|}{|z_k|}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=2k_2+2}^{\infty} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_j} \right| \right| \leq C|\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{dn(t)}{t} \leq C|\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt,$$

где $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$. Учитывая оценку (а), имеем

$$\sum_{j=2k_2+2}^{\infty} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_j} \right| \right| \leq C|\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{\ln t + C_1}{t^2} dt \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2.$$

Это неравенство вместе с (8) и (10) дает соотношение

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k+1}} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{z_{2k}} \right| \right) \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3.$$

Поэтому целые функции

$$v_1(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{z_{2k}} \right), \quad v_2(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{z_{2k+1}} \right)$$

удовлетворяют утверждению теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

§ 2. Целые функции с парным расположением нулей

По результатам первого параграфа далее мы можем считать, что функция f из основной теоремы в каждом из квадратов Π_k и P_k^m имеет четное количество нулей. Воспользуемся следующей теоремой из работы [13].

ТЕОРЕМА А. Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на плоскости с носителем, лежащим в квадрате Q . Предположим, что $\mu(\{z\}) < 1$ для любого $z \in \mathbb{C}$ и $\mu(\mathbb{C}) = N \in \mathbb{N}$. Тогда существуют меры μ_k и прямоугольники $Q_k \subset Q$, $k = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие условиям

$$\mu_k(\mathbb{C}) = 1, \quad \sum_{k=1}^N \mu_k = \mu,$$

носитель меры μ_k лежит в прямоугольнике Q_k и

- Q1. каждая точка плоскости попадает во внутренность не более чем четырех прямоугольников Q_k ,
- Q2. стороны прямоугольников Q_k параллельны сторонам квадрата Q , и отношение длин сторон каждого из прямоугольников Q_k лежит в интервале $[1/3, 3]$.

(В работе [13] эта теорема доказана в предположении непрерывности меры μ . Здесь это условие заменено на условие $\mu(\{z\}) < 1$. При этом доказательство по существу не меняется.)

Применим эту теорему отдельно к каждой из следующих мер

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in P_n^m} \delta(\lambda_k), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 12,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in \Pi_n} \delta(\lambda_k), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где λ_k — нули функции f , $\delta(z)$ обозначает единичную меру, сосредоточенную в точке z . В результате получим, что совокупность нулей функции f , лежащих в любом из квадратов Π_k или P_k^m , может быть разбита на пары λ'_k, λ''_k так, что каждая пара покрыта прямоугольником Q_k и набор прямоугольников Q_k удовлетворяет условиям Q1, Q2. Сейчас мы рассмотрим те пары нулей λ'_k, λ''_k , для которых длины сторон соответствующего прямоугольника покрытия Q_k меньше 24. В частности, таковыми являются все пары нулей, лежащие в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1$. Это следует из того, что для таких пар прямоугольник покрытия лежит в одном из квадратов Π_k .

ТЕОРЕМА 4 [11; теорема 1]. Пусть f — целая функция, удовлетворяющая условиям основной теоремы, и $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — нули функции f , причем $|\lambda_k| \geq 1$.

Предположим, что нули функции f разбиты на пары $\lambda'_k, \lambda''_k, k \in \mathbb{N}$, так, что существует система прямоугольников Q_n , обладающих свойствами:

- Q0. точки λ'_k, λ''_k лежат в прямоугольнике $Q_k, k \in \mathbb{N}$;
- Q1. каждая точка плоскости попадает во внутренность не более чем четырех прямоугольников Q_n ;
- Q2. стороны прямоугольников Q_n параллельны осям координат, и отношение длины большей стороны к длине меньшей стороны Q_n не превосходит трех;
- Q3'. длины сторон прямоугольника Q_n не превосходят 24 и $0 \notin \bigcup Q_n$.

Тогда функция f представляется в виде произведения целых функций f_1, f_2 так, что для любого λ и $p, p \in [1, |\lambda|/2]$, выполняется соотношение

$$|\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| \leq \frac{A}{p} [H(\lambda) - \ln |F(\lambda)|] + B \ln^+ |\lambda| + C \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + D + Me^p.$$

Постоянные A, B, C, D, M не зависят от p .

§ 3. Переход к суммам производных функций

В силу результатов первых двух параграфов можно далее доказывать основную теорему при следующих дополнительных предположениях на функцию f . Будем считать, что нули функции f лежат вне полосы $|\operatorname{Im} z| \leq 1$ и разбиты на пары

λ'_k, λ''_k . При этом существует система прямоугольников Q_k , удовлетворяющая условиям:

Q0, Q1, Q2 (см. формулировку теоремы 4);

Q3. длина большей стороны каждого из этих прямоугольников больше 24.

Кроме того, каждый из этих прямоугольников Q_k целиком лежит в одном из квадратов P_n^m (см. (7)), поэтому, в частности,

Q4. для любого k верна оценка $\text{diam } Q_k \leq \sqrt{2} \text{dist}(Q_k, 0)$.

Нам нужно показать, что выполняются соотношения (5) и (6). В этом параграфе мы рассмотрим соотношение (6) и сведем оценку сумм вида

$$\sum \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right)$$

к оценке сумм “производных” функций:

$$\sum \varepsilon_k \text{Re} \frac{\lambda(\lambda'_k - \lambda''_k)}{\lambda_k^*(\lambda_k^* - \lambda)},$$

где λ_k^* — специально выбранные точки.

ЛЕММА 1. В указанных выше условиях ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right|$$

сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \subset \mathbb{N}$ — множество индексов, для которых

$$\text{diam } Q_k \geq (\max\{|\lambda|, \lambda \in Q_k\})^{3/4} = M_k^{3/4}.$$

В силу условия Q2 площадь $|Q_k|$ прямоугольника Q_k для $k \in I$ может быть оценена снизу:

$$|Q_k| \geq \frac{1}{10} (\text{diam } Q_k)^2 \geq \frac{1}{10} M_k^{3/2}, \quad k \in I.$$

Если прямоугольник $Q_k, k \in I$, пересекается с кольцом $S(t) = \{\lambda : t/2 \leq |\lambda| \leq t\}$, то по условию Q4 этот прямоугольник целиком лежит в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq (1 + \sqrt{2})t\}$, с одной стороны, и его площадь не меньше чем $\frac{1}{10}(t/2)^{3/2}$, с другой стороны. Сравнивая площади и учитывая условие Q1, находим, что общее количество прямоугольников $Q_k, k \in I$, не превосходит $40(1 + \sqrt{2})^2(8t)^{1/2}$. Следовательно, количество прямоугольников $Q_k, k \in I$, пересекающихся с кругом $\{\lambda : |\lambda| \leq t\}$, не превосходит $\text{const} \cdot \sqrt{t}, t \geq 2$. Таким образом, если $n_1(t)$ — число точек $\lambda'_k, k \in I$, лежащих в круге $\{\lambda : |\lambda| \leq t\}$, то

$$n_1(t) \leq C\sqrt{t},$$

поэтому

$$\sum_{k \in I} \frac{1}{|\lambda'_k|} = \int_1^\infty \frac{dn_1(t)}{t} = \int_1^\infty \frac{n_1(t)}{t^2} dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}} dt < \infty.$$

Аналогично показывается сходимость ряда

$$\sum_{k \in I} \frac{1}{|\lambda''_k|}.$$

Если же $k \notin I$, то, очевидно, имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right| \leq \frac{C}{|\lambda'_k|^2} |\lambda'_k - \lambda''_k| \leq C |\lambda'_k|^{-5/4}.$$

Поэтому и в силу соотношения (4)

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin I} \left| \frac{1}{\lambda'_k} - \frac{1}{\lambda''_k} \right| &\leq C \int_1^\infty t^{-5/4} dn_1(t) \\ &\leq C \int_1^\infty n_1(t) t^{-9/4} dt \leq C \int_1^\infty t^{-5/4} dt < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 5 [10; теорема 2]. Пусть в квадрате

$$Q = \{z = x + iy : a \leq x \leq a + 2^n, b \leq y \leq b + 2^n\},$$

где $a, b \geq 1$, находится четное число точек, разбитых на пары λ'_k, λ''_k таким образом, что каждая пара λ'_k, λ''_k содержится в некотором прямоугольнике $Q_k \subset Q$, а система всех прямоугольников $\{Q_k\}$ удовлетворяет условиям Q1–Q4 (см. начало §3). В верхней половине каждого прямоугольника Q_k выберем по произвольной точке z_k . Тогда существуют постоянные C_1, C_2 , не зависящие от выбора точек z_k и квадрата Q , такие, что для любого λ , $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2$, выполняется оценка

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{\lambda(\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k(z_k - \lambda)} \right| \\ \leq C_1 \int_Q \left| \frac{(2w - \lambda)\lambda}{w^2(w - \lambda)^2} \right| dv(w) + C_2 \delta(Q, \lambda) \left[\ln \left(1 + \frac{\operatorname{diam} Q}{\operatorname{dist}(Q, \lambda)} \right) + \int_Q \frac{dv(w)}{|w|^2} \right], \end{aligned}$$

где $\delta(Q, \lambda)$ обозначает число, равное единице, если $\operatorname{diam} Q > \operatorname{dist}(Q, \lambda)/2$, и нулю в противном случае.

Как отмечалось в начале §3, мы можем считать, что множество нулей функции f из основной теоремы, лежащих в каждом из квадратов P_n^m , удовлетворяет условиям теоремы 5. Нужно лишь заметить, что для квадратов P_n^m , лежащих не в первом квадранте, точки z_k следует выбирать в половине прямоугольника Q_k , более удаленной от вещественной оси.

ТЕОРЕМА 6. Пусть f – целая функция, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Причем в каждом квадрате P_n^m (см. (7)) содержится четное количество нулей. Тогда нули функции f могут быть разбиты на пары λ'_k, λ''_k таким образом, что существуют прямоугольники Q_k , содержащие λ'_k, λ''_k и удовлетворяющие условиям Q1–Q4. Если точки z_k выбрать произвольным образом в половине Q_k , более удаленной от вещественной оси, то

$$\sum_k \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| - \operatorname{Re} \frac{\lambda(\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k(z_k - \lambda)} \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К каждому квадрату P_n^m и множеству нулей f , лежащих в этом квадрате и разбитых на пары по теореме А, применим теорему 5. Полученные неравенства просуммируем по индексам n, m . Если учесть, что $\bigcup P_n^m \subset \{z : |\operatorname{Im} z| > 1\}$ и $\delta(P_n^m, \lambda) \neq 0$ лишь для шести ближайших к λ квадратов P_n^m , то в результате получим утверждение теоремы 6.

В заключение параграфа проведем некоторую унификацию покрытия $\{Q_k\}$. Пусть

$$Q = \{z = x + iy : a \leq x \leq a + 2^n, b \leq y \leq b + 2^n\}$$

– один из квадратов P_n^m и $\{Q_k\}$ – прямоугольники покрытия в этом квадрате. Для $j = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим квадраты

$$Q_{s,l}^j = \{a + s2^j \leq x \leq a + (s+1)2^j, b + l2^j \leq y \leq b + (l+1)2^j\}, \quad (11)$$

$$s = 0, 1, \dots, 2^{n-j} - 1, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{n-j} - 1.$$

В силу условия Q3 длины сторон каждого прямоугольника Q_k не меньше чем 8. Поэтому в верхней половине (в половине, более удаленной от вещественной оси) каждого прямоугольника Q_k содержится по меньшей мере один квадрат $Q_{s,l}^j$ с длиной стороны не меньшей чем $\operatorname{diam} Q_k / 16$. Для каждого прямоугольника Q_k выберем по одному такому квадрату. Каждый из квадратов $Q_{s,l}^j$ в силу условия Q1 может быть выбран не более четырех раз. Если квадрат $Q_{s,l}^j$ выбран для прямоугольников Q_{k_i} , $0 \leq i \leq 4$, то через $h_{s,l}^{(j)}$ обозначим сумму разностей $\lambda'_{k_i} - \lambda''_{k_i}$. Если же этот квадрат не выбран ни для одного прямоугольника, то $h_{s,l}^{(j)}$ положим равным нулю. Заметим, что всегда выполняется оценка

$$|h_{s,l}^{(j)}| \leq 32 \operatorname{diam} Q_{s,l}^j.$$

Теорема 6 сводит оценку сумм вида

$$\sum_k \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right)$$

к оценке сумм вида

$$\sum_k \varepsilon_k \operatorname{Re} \frac{\lambda(\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k(z_k - \lambda)},$$

где z_k — точки в прямоугольниках покрытия Q_k . Если для прямоугольника Q_k по вышеизложенной конструкции выбран квадрат $Q_{s,l}^j$, то за точку z_k возьмем геометрический центр $z_{s,l}^{(j)}$ квадрата $Q_{s,l}^j$. Таким образом, нашей задачей становится оценка сумм вида

$$\sum_{s,l,j} \varepsilon_{s,l}^{(j)} \operatorname{Re} \frac{\lambda h_{(s,l)}^{(j)}}{z_{s,l}^{(j)}(z_{s,l}^{(j)} - \lambda)}, \quad \varepsilon_{s,l}^{(j)} = \pm 1.$$

Для того чтобы окончательно освободиться от покрытий $\{Q_k\}$, выясним, что означает условие Q1 в новых терминах.

ЛЕММА 2. Множество чисел $h_{s,l}^{(j)}$, отличных от нуля, обозначим через $\tilde{H}$, а через H — множество всех $h_{s,l}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $s, l = 0, 1, \dots, 2^{n-j} - 1$. Тогда множество $\tilde{H}$ может быть разложено на 4 непересекающиеся части $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{H}_4$ так, что каждый из соответствующих полных наборов H_1, H_2, H_3, H_4 , получающихся соответственно из $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{H}_4$ добавлением нулей, удовлетворяет условию

$$\text{если } h_{s,l}^{(m)} \in H_i, h_{s,l}^{(m)} \neq 0 \text{ и } Q_{s,l}^m \subset Q_{p,q}^t, \text{ то } h_{p,q}^{(t)} = 0. \quad (\text{R})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\tilde{H}_1$ обозначим множество чисел $h_{s,l}^{(m)} \in \tilde{H}$, для которых $h_{i,j}^{(k)} = 0$ всякий раз, когда $Q_{s,l}^m \subset Q_{i,j}^k$. Через $\tilde{H}_2$ обозначим числа $h_{s,l}^{(m)} \in \tilde{H} \setminus \tilde{H}_1$, для которых все $h_{i,j}^{(k)} \in H \setminus H_1$ равны нулю, если $Q_{s,l}^m \subset Q_{i,j}^k$. Аналогично определим $\tilde{H}_3 \subset \tilde{H} \setminus (\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2)$. Очевидно, соответствующие полные наборы H_1, H_2, H_3 удовлетворяют условию (R). Докажем, что если $\tilde{H}_4 = \tilde{H} \setminus (\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2 \cup \tilde{H}_3)$, то H_4 также удовлетворяет условию (R). Действительно, если $h_{s,l}^{(m)} \neq 0$, $h_{s,l}^{(m)} \in H_4$ и найдется $h_{i,j}^{(k)} \in H_4$, $h_{i,j}^{(k)} \neq 0$, причем $Q_{s,l}^m \subset Q_{i,j}^k$, то $h_{i,j}^{(k)} \notin \tilde{H}_3, \tilde{H}_2, \tilde{H}_1$. По построению $\tilde{H}_3$ это означает, что найдется $h_{m,r}^{(t)} \neq 0$ и $Q_{i,j}^k \subset Q_{m,r}^t$, причем $h_{m,r}^{(t)} \in H_3 \setminus (H_2 \cup H_1)$. В частности, $h_{m,r}^{(t)} \notin H_2$. Отсюда следует существование $h_{u,v}^{(p)} \in H_2 \setminus H_1$, $h_{u,v}^{(p)} \neq 0$, и $Q_{m,r}^t \subset Q_{u,v}^p$. Наконец, поскольку $h_{u,v}^{(p)} \notin H_1$, то существует $h_{x,y}^{(z)} \neq 0$, причем $Q_{u,v}^p \subset Q_{x,y}^z$. В результате получаем последовательность квадратов

$$Q_{s,l}^m \subset Q_{i,j}^k \subset Q_{m,r}^t \subset Q_{u,v}^p \subset Q_{x,y}^z$$

и

$$h_{x,y}^{(z)}, h_{u,v}^{(p)}, h_{m,r}^{(t)}, h_{i,j}^{(k)}, h_{s,l}^{(m)} \neq 0.$$

Последнее означает, что все эти квадраты были выбраны для некоторых прямоугольников Q_k . Следовательно, квадрат $Q_{s,l}^m$ лежит не менее чем в пяти прямоугольниках покрытия. Это противоречит условию Q1.

Лемма 2 доказана.

§4. Ориентирование пар точек

В этом параграфе мы закончим доказательство основной теоремы.

Как отмечалось во введении, для доказательства основной теоремы нам достаточно разбить множество нулей функции f на пары λ'_k, λ''_k так, чтобы выполнялись соотношения (5) и (6). Такое разбиение, по существу, было проведено в начале §2. В лемме 1 мы доказали, что для нашего разбиения соотношение (6) выполняется. В лемме 1, как и во всех остальных, точки λ'_k, λ''_k выступали равноправно. Другими словами, мы предполагали лишь, что в каждой паре одна из точек будет считаться нулем функции f_1 , а другая – функции f_2 . Теперь мы в уже имеющемся разбиении на пары проведем ориентацию пар, т.е. опишем процедуру отнесения точек в каждой паре в качестве нулей к функциям-множителям. Технически эта процедура будет представлена как определение для каждой пары λ'_k, λ''_k чисел $\varepsilon_k = \pm 1$. А именно, если $\varepsilon_k = 1$, то λ'_k будет считаться нулем функции f_1 , а λ''_k соответственно нулем функции f_2 . Если же $\varepsilon_k = -1$, то, наоборот, точка λ'_k окажется нулем функции f_2 .

Поскольку далее мы будем работать с унифицированными покрытиями, то определение ε_k сводится к определению чисел $\varepsilon_{s,l}^{(m)} = \pm 1$. Кроме того, эти знаки будут определяться отдельно для каждой совокупности пар, лежащих в одном квадрате P_n^m .

Для упрощения записи введем обозначения

$$\begin{aligned} L(w, \lambda) &= \frac{\lambda}{w(w - \lambda)}, \\ L'(w, \lambda) &= \frac{\lambda(2w - \lambda)}{w^2(w - \lambda)^2}, \\ L''(w, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\lambda(2w - \lambda)}{w^2(w - \lambda)^2} \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. В квадрате

$$Q = \{z = x + iy : a \leq x \leq a + 2^n, b \leq y \leq b + 2^n\},$$

$a, b \geq 1$, рассмотрим систему квадратов (см. (11))

$$\begin{aligned} Q_{s,l}^j &= \{z = x + iy : a + s2^j \leq x \leq a + (s+1)2^j, b + l2^j \leq y \leq b + (l+1)2^j\}, \\ s, l &= 0, 1, \dots, 2^{n-j} - 1, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Предположим, что задан набор чисел $h_{s,l}^{(j)}$, удовлетворяющий условию (R) (см. лемму 2), и

$$|h_{s,l}^{(j)}| \leq 2^j. \quad (12)$$

Тогда существуют числа $\varepsilon_{s,l}^{(j)} = \pm 1$, h_0 , $|h_0| \leq 2^n$, u_0 , $|u_0| \leq 2^{2n+1}$, такие, что для любого λ , $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2$, выполняется соотношение

$$\left| \sum_{s,l,j} \operatorname{Re} \frac{\lambda \varepsilon_{s,l}^{(j)} h_{s,l}^{(j)}}{z_{s,l}^{(j)} (z_{s,l}^{(j)} - \lambda)} \right| \leq \frac{|\lambda h_0|}{|z_0(z_0 - \lambda)|} + \frac{|\lambda(2z_0 - \lambda)u_0|}{|z_0(z_0 - \lambda)|^2} + \frac{18A_0}{\pi} \sum_{j=0}^n 2^j \int_{\tilde{Q}^j} |L''(z, \lambda)| dv(z),$$

где

$$\tilde{Q}^j = \{a \leq x \leq a + 2^n, b + 2^{j-2} \leq y \leq b + 2^n\}.$$

Для доказательства теоремы 7 нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 3. Пусть заданы комплексные числа z_j , $j = 1, \dots, n$. Тогда существуют числа $\varepsilon_j = \pm 1$ такие, что

$$\left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j z_j \right| \leq \sqrt{2} \max_{j=1, \dots, n} |z_j|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3 проведем по индукции по n . При $n = 2$ утверждение вытекает из равенства

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Если $n > 2$ и $z_j \neq 0$ для всех j , то $2n$ точек $\pm z_j$ разбивают плоскость на $2n \geq 6$ углов. Следовательно, один из этих углов меньше чем $\pi/3$. Пусть угол между z_1 и z_2 меньше чем $\pi/3$. Тогда

$$|z_1 - z_2| \leq \max(|z_1|, |z_2|).$$

По предположению индукции существуют $\delta', \delta_3, \dots, \delta_n = \pm 1$ такие, что

$$|\delta'(z_1 - z_2) + \delta_3 z_3 + \dots + \delta_n z_n| \leq \sqrt{2} \max(|z_1 - z_2|, |z_j|) \leq \sqrt{2} \max |z_j|.$$

Лемма 3 доказана.

В наших обозначениях каждый квадрат $Q_{s,l}^j$, $j > 0$, является объединением четырех квадратов $Q_{p,q}^{j-1}$, $p = 2s, 2s + 1$, $q = 2l, 2l + 1$. Применим к четырем числам $h_{p,q}^{(0)}$, $p = 2s, 2s + 1$, $q = 2l, 2l + 1$, лемму 3: существуют четыре числа $\delta_{p,q}^{(0)} = \pm 1$ такие, что

$$\left| \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(0)} h_{p,q}^{(0)} \right| \leq \sqrt{2} \max_{p,q} |h_{p,q}^{(0)}| \leq \sqrt{2}. \quad (13)$$

Положим

$$\tilde{h}_{s,l}^{(1)} = \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(0)} h_{p,q}^{(0)}, \quad u_{s,l}^{(1)} = \sum_{p,q} (z_{p,q}^{(0)} - z_{s,l}^{(1)}) h_{p,q}^{(0)} \delta_{p,q}^{(0)}.$$

Для каждой из четырех пар (p, q) , $p = 2s, 2s+1, q = 2l, 2l+1$, выполняется оценка

$$\begin{aligned} |L(z_{p,q}^{(0)}, \lambda) - L(z_{s,l}^{(1)}, \lambda) - L'(z_{s,l}^{(1)}, \lambda)(z_{p,q}^{(0)} - z_{s,l}^{(1)})| \\ \leq \frac{1}{8} \max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(1)}\} |\text{diam } Q_{s,l}^1|^2, \end{aligned}$$

где $\tilde{Q}_{s,l}^{(1)}$ – квадрат с вершинами в точках $z_{p,q}^{(0)}$. Умножая эти неравенства на числа $\delta_{p,q}^{(0)} h_{p,q}^{(0)}$ и затем складывая эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p,q} L(z_{p,q}^{(0)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(0)} h_{p,q}^{(0)} - L(z_{s,l}^{(1)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(1)} - L'(z_{s,l}^{(1)}, \lambda) u_{s,l}^{(1)} \right| \\ \leq \frac{1}{4} \max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(1)}\} |\text{diam } Q_{s,l}^1|^3. \quad (14) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$|u_{s,l}^{(1)}| \leq 2\sqrt{2} < 2^3. \quad (15)$$

Ясно, что при $|\text{Im } \lambda| \leq 1/2$

$$\text{dist}(\tilde{Q}_{s,l}^{(1)}, \lambda) \geq 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diam } \tilde{Q}_{s,l}^{(1)}.$$

Поэтому

$$\max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(1)}\} \leq A_0 |L''(z_{s,l}^{(1)}, \lambda)|,$$

где A_0 – абсолютная постоянная. Так как функция $|L''(z, \lambda)|$ субгармонична по z , то

$$\max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(1)}\} \leq \frac{A_0}{\pi c^2} \int_{\tilde{Q}_{s,l}^{(1)}} |L''(z, \lambda)| dv(z),$$

где c – половина длины стороны $\tilde{Q}_{s,l}^{(1)}$, т.е. $c = 1/2$. Подставим эту оценку в неравенство (14) и просуммируем по всем s, l . Получим соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{s,l=0}^{2^{n-1}-1} \left| \sum_{p=2s}^{2s+1} \sum_{q=2l}^{2l+1} L(z_{p,q}^{(0)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(0)} h_{p,q}^{(0)} - L(z_{s,l}^{(1)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(1)} - L'(z_{s,l}^{(1)}, \lambda) u_{s,l}^{(1)} \right| \\ \leq \frac{4A_0}{\pi} \int_{\tilde{Q}^1} |L''(z, \lambda)| dv(z) \cdot \text{diam } Q_{s,l}^1, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q}^1 = \left\{ z = x + iy : a \leq x \leq a + 2^n, b + \frac{1}{2} \leq y \leq b + 2^n \right\}.$$

Переопределим набор $h_{s,l}^{(1)}$, положив

$$h_{s,l}^{(1)} := \tilde{h}_{s,l}^{(1)} + h_{s,l}^{(1)}.$$

В силу условия (R) из двух слагаемых в правой части одно всегда равно нулю. Поэтому переопределение сводится к тому, что вместо некоторых $h_{s,l}^{(1)}$, равных нулю, мы теперь берем $\tilde{h}_{s,l}^{(1)}$. В силу (13) имеем оценки

$$|h_{s,l}^{(1)}| \leq 2,$$

т.е. для нового набора $h_{s,l}^{(1)}$ условие (12) сохраняется. Сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Пусть заданы два набора комплексных чисел $z_j, w_j, j = 1, 2, 3, 4$. Тогда существуют $\varepsilon_j = \pm 1$ такие, что*

$$\left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j z_j \right| \leq 2 \max_{j=1, \dots, 4} |z_j|, \quad \left| \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j w_j \right| \leq 2\sqrt{2} \max_{j=1, \dots, 4} |w_j|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 основывается на одном геометрическом утверждении.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. *Произвольные четыре комплексных числа, по модулю не превосходящих единицы, можно разбить на две пары $(a_1, a_2), (a_3, a_4)$, затем найти такие числа $\varepsilon_j = \pm 1$, что*

$$|\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2| + |\varepsilon_3 a_3 + \varepsilon_4 a_4| \leq 2.$$

К сожалению, нам не удалось найти в достаточной мере короткое доказательство этого утверждения. Имеющееся у нас доказательство будет изложено в конце этого параграфа.

Покажем, как из этого утверждения следует лемма 4. К числам

$$\frac{z_j}{\max |z_i|}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

применим геометрическое утверждение. Не ограничивая общности, предположим, что

$$|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \leq 2 \max |z_j|.$$

К паре чисел $w_1 - w_2, w_3 - w_4$ применим лемму 3 и найдем числа $\delta_1, \delta_2 = \pm 1$ такие, что

$$|\delta_1(w_1 - w_2) + \delta_2(w_3 - w_4)| \leq \sqrt{2} \max(|w_1 - w_2|, |w_3 - w_4|) \leq 2\sqrt{2} \max |w_j|.$$

Тогда числа $\varepsilon_1 = \delta_1, \varepsilon_2 = -\delta_1, \varepsilon_3 = \delta_2, \varepsilon_4 = -\delta_2$ удовлетворяют утверждению леммы 4.

Лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Зафиксируем два индекса $s, l = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. К наборам

$$h_{p,q}^{(1)}, \quad u_{p,q}^{(1)} + (z_{p,q}^{(1)} - z_{s,l}^{(2)})h_{p,q}^{(1)}, \quad p = 2s, 2s+1, \quad q = 2l, 2l+1,$$

применим лемму 4 и найдем числа $\delta_{p,q}^{(1)} = \pm 1$ такие, что

$$\left| \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} h_{p,q}^{(1)} \right| \leq 4,$$

$$\left| \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} (u_{p,q}^{(1)} + (z_{p,q}^{(1)} - z_{s,l}^{(2)})h_{p,q}^{(1)}) \right| \leq 2\sqrt{2}(8 + 2\sqrt{2}) < 32$$

(см. (15)). Положим

$$\tilde{h}_{s,l}^{(2)} = \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} h_{p,q}^{(1)},$$

$$u_{s,l}^{(2)} = \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} (u_{p,q}^{(1)} + (z_{p,q}^{(1)} - z_{s,l}^{(2)})h_{p,q}^{(1)}).$$

Тогда, очевидно,

$$|\tilde{h}_{s,l}^{(2)}| \leq 2^2, \quad |u_{s,l}^{(2)}| \leq 2^5.$$

Так же как неравенство (14), получим оценку

$$\left| \sum_{p,q} L(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} h_{p,q}^{(1)} - L(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(2)} - L'(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} (z_{p,q}^{(1)} - z_{s,l}^{(2)}) h_{p,q}^{(1)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{4} \max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(2)}\} |\text{diam } Q_{s,l}^2|^3,$$

где $\tilde{Q}_{s,l}^{(2)}$ — квадрат с вершинами в точках $z_{p,q}^{(1)}$ и суммирование ведется по $p = 2s, 2s+1, q = 2l, 2l+1$.

Аналогично получим соотношение

$$\left| \sum_{p,q} L'(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} u_{p,q}^{(1)} - L'(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(1)} u_{p,q}^{(1)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(2)}\} |\text{diam } Q_{s,l}^2|^3.$$

Из последних двух неравенств следует

$$\left| \sum_{p,q} [L(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} h_{p,q}^{(1)} + L'(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} u_{p,q}^{(1)}] - L(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(2)} - L'(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) u_{s,l}^{(2)} \right|$$

$$\leq \frac{3}{4} \max\{|L''(w, \lambda)|, w \in \tilde{Q}_{s,l}^{(2)}\} |\text{diam } Q_{s,l}^2|^3.$$

Оценивая правую часть с учетом субгармоничности функции $|L''|$ и суммируя по всем $s, l = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s,l=0}^{2^{n-2}-1} & \left| \sum_{p,q} [L(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} h_{p,q}^{(1)} + L'(z_{p,q}^{(1)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(1)} u_{p,q}^{(1)}] \right. \\ & \quad \left. - L(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(2)} - L'(z_{s,l}^{(2)}, \lambda) u_{s,l}^{(2)} \right| \\ & \leq \frac{8A_0}{\pi} \int_{\tilde{Q}^2} |L''(z, \lambda)| dv(z) \cdot \text{diam } Q_{s,l}^2, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q}^2 = \{z = x + iy : a \leq x \leq a + 2^n, b + 1 \leq y \leq b + 2^n\}.$$

Теперь переопределим числа $h_{s,l}^{(2)}$, полагая

$$h_{s,l}^{(2)} := \tilde{h}_{s,l}^{(2)} + h_{s,l}^{(2)}.$$

Снова из условия (R) следует, что мы всего лишь в качестве некоторых $h_{s,l}^{(2)}$, равных нулю в исходном наборе, берем $\tilde{h}_{s,l}^{(2)}$. Продолжая этот процесс, после j -го шага мы построим числа $h_{s,l}^{(j)}$ и $u_{s,l}^{(j)}$ такие, что

$$|h_{s,l}^{(j)}| \leq 2^j, \quad |u_{s,l}^{(j)}| \leq 2^{2j+1}.$$

Зафиксируем $s, l = 0, 1, \dots, 2^{n-j-1} - 1$, и пусть $p = 2s, 2s + 1, q = 2l, 2l + 1$. К наборам чисел

$$h_{p,q}^{(j)}, \quad u_{p,q}^{(j)} + (z_{p,q}^{(j)} - z_{s,l}^{(j+1)})h_{p,q}^{(j)}$$

применим лемму 4 и найдем числа $\delta_{p,q}^{(j)} = \pm 1$ такие, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(j)} h_{p,q}^{(j)} \right| & \leq 2^{j+1}, \\ \left| \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(j)} (u_{p,q}^{(j)} + (z_{p,q}^{(j)} - z_{s,l}^{(j+1)})h_{p,q}^{(j)}) \right| & \leq 2^{2(j+1)+1}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{s,l}^{(j+1)} & = \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(j)} h_{p,q}^{(j)}, \\ u_{s,l}^{(j+1)} & = \sum_{p,q} \delta_{p,q}^{(j)} (u_{p,q}^{(j)} + (z_{p,q}^{(j)} - z_{s,l}^{(j+1)})h_{p,q}^{(j)}). \end{aligned}$$

Так же как и на втором шаге, доказывается соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{s,l=0}^{2^{n-j-1}-1} \left| \sum_{p,q} [L(z_{p,q}^{(j)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(j)} h_{p,q}^{(j)} + L'(z_{p,q}^{(j)}, \lambda) \delta_{p,q}^{(j)} u_{p,q}^{(j)}] \right. \\ & \quad \left. - L(z_{s,l}^{(j+1)}, \lambda) \tilde{h}_{s,l}^{(j+1)} - L'(z_{s,l}^{(j+1)}, \lambda) u_{s,l}^{(j+1)} \right| \\ & \leq \frac{8A_0}{\pi} \int_{\tilde{Q}^{j+1}} |L''(z, \lambda)| dv(z) \cdot \text{diam } Q_{s,l}^{j+1}. \quad (17) \end{aligned}$$

На последнем n -м шаге построим пару чисел $h_{0,0}^{(n)} = h_0$ и $u_{0,0}^{(n)} = u_0$. Определим теперь искомые числа $\varepsilon_{s,l}^{(m)}$. Квадрат $Q_{s,l}^m$ для каждого $j > m$ содержится ровно в одном квадрате вида $Q_{p,q}^j$. То есть при каждом $j > m$ существует единственная пара индексов $s_j = s_j(s, l, m)$ и $l_j = l_j(s, l, m)$ таких, что $Q_{s,l}^m \subset Q_{s_j,l_j}^j$. Положим

$$\varepsilon_{s,l}^{(m)} = \delta_{s,l}^{(m)} \delta_{s_{m+1},l_{m+1}}^{(m+1)} \cdots \delta_{s_{n-1},l_{n-1}}^{(n-1)}.$$

Тогда неравенства (16) и (17), $j = 1, 2, \dots, n$, дают утверждение теоремы 7.

ТЕОРЕМА 8. Пусть f — целая функция, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Предположим, что все ее нули лежат вне полосы $|\text{Im } \lambda| \leq 1/2$ и в каждом квадрате P_n^m (см. (7)) находится четное количество нулей. Тогда множество нулей функции f может быть разбито на пары λ'_k, λ''_k так, что при некоторых $\varepsilon_k = \pm 1$ выполняется соотношение

$$\left| \sum_k \varepsilon_k \left(\ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right) \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое разбиение на пары при этих условиях мы уже провели на основе теоремы А в начале § 2. Возьмем произвольный квадрат P_n^m и множество пар λ'_k, λ''_k , лежащих в этом квадрате. Проведем унификацию покрытия, как это описано в конце § 3. В результате получим набор комплексных чисел $h_{s,l}^{(j)}$, каждое из которых является суммой не более чем четырех разностей вида $\lambda'_k - \lambda''_k$. Причем каждая такая разность входит в качестве слагаемого ровно в одно число $h_{s,l}^{(j)}$. Поскольку

$$|h_{s,l}^{(j)}| \leq \text{const} \cdot 2^j$$

и константа не зависит от квадрата P_n^m , то, нормируя (т.е. поделив на подходящую величину) числа $h_{s,l}^{(j)}$ и учитывая лемму 2, можем считать, что выполнены условия теоремы 7. Применим эту теорему и найдем числа $\varepsilon_{s,l}^{(j)}$. Если $\lambda'_k - \lambda''_k$ входит как

слагаемое в число $h_{s,l}^{(j)}$, то положим $\varepsilon_k = \varepsilon_{s,l}^{(j)}$. Тогда утверждение теоремы 7 означает, что выполняется соотношение

$$\left| \sum_{\lambda_k \in P_n^m} \frac{\lambda \varepsilon_k (\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k (z_k - \lambda)} \right| \leq C \frac{|\lambda h_n^{(m)}|}{|z_n^{(m)} (z_n^{(m)} - \lambda)|} + C_1 \frac{|\lambda (2z_n^{(m)} - \lambda) u_n^{(m)}|}{|z_n^{(m)} (z_n^{(m)} - \lambda)|^2} + C_2 \sum_{j=0}^n 2^j \int_{P_n^m \setminus \{|\operatorname{Im} z| < 2^{j-1} + 1\}} |L''(z, \lambda)| dv(z), \quad (18)$$

где $z_n^{(m)}$ — геометрический центр квадрата P_n^m , z_k — точки в половине элемента покрытия Q_k , более удаленной от вещественной оси. Наконец, $h_n^{(m)}$, $u_n^{(m)}$ — некоторые комплексные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$|h_n^{(m)}| \leq C 2^n, \quad |u_n^{(m)}| \leq C 2^{2n+1}. \quad (19)$$

Пусть $|\operatorname{Im} \lambda| \leq 1/2$ и $2^k \leq |\lambda| < 2^{k+1}$. Если $n = k - 1, k, k + 1$ и $z \in P_n^m$, то

$$|L''(z, \lambda)| \leq C \frac{1}{|z - \lambda|^3},$$

поэтому для таких n

$$\sum_{j=0}^n 2^j \int_{P_n^m \setminus \{|\operatorname{Im} z| < 2^{j-1} + 1\}} |L''(z, \lambda)| dv(z) \leq \operatorname{const} \cdot \sum_{j=0}^n 2^j \int_{2^{j-2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = C_0 n.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k-1}^{k+1} \sum_m \sum_{j=0}^n \int_{P_n^m \setminus \{|\operatorname{Im} z| < 2^{j-1} + 1\}} |L''(z, \lambda)| dv(z) \leq C \ln^+ |\lambda| + C_1. \quad (20)$$

Если же $n < k - 1$ и $z \in P_n^m$, то

$$|L''(z, \lambda)| \leq \frac{\operatorname{const}}{|z|^3}$$

и $2^n \leq |z|$, поэтому

$$\sum_{n < k-1} \sum_m \sum_{j=0}^n 2^j \int_{P_n^m} |L''(z, \lambda)| dv(z) \leq C \int_{|z| \leq |\lambda|} \frac{1}{|z|^2} dv(z) = C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2.$$

Для $n > k + 1$, $z \in P_n^m$ воспользуемся оценками

$$|L''(z, \lambda)| \leq \frac{\operatorname{const} \cdot |\lambda|}{|z|^4}$$

и $2^n \leq |z|$. Тогда

$$\sum_{n>k+1} \sum_m \sum_{j=0}^n 2^j \int_{P_n^m} |L''(z, \lambda)| dv(z) \leq C \int_{|z| \geq |\lambda|} \frac{|\lambda|}{|z|^3} dv(z) = C_1.$$

Подставив последние три оценки в соотношение (18), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m} \left| \sum_{\lambda'_k \in P_n^m} \frac{\lambda \varepsilon_k (\lambda'_k - \lambda''_k)}{z_k (z_k - \lambda)} \right| \\ & \leq C \sum_{n,m} 2^n \left(\frac{|\lambda|}{|z_n^{(m)} (z_n^{(m)} - \lambda)|} + \frac{|\lambda (2z_n^{(m)} - \lambda)| 2^{n+1}}{|z_n^{(m)} (z_n^{(m)} - \lambda)|^2} \right) + C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 6 следует утверждение теоремы 8.

По теореме 1 функция f может быть представлена как произведение целых функций f_1, f_2 , для которых выполняется соотношение (3).

ТЕОРЕМА 9. *Построенные функции f_1, f_2 удовлетворяют соотношению (3').*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в силу теорем 2, 3, 4 можно проводить в дополнительных предположениях относительно функции f , описанных в начале §3. Зафиксируем точку $\lambda \in \mathbb{C}$ и разобьем множество индексов k на 5 непересекающихся частей.

Через $I'(\lambda)$ обозначим множество тех $k \in \mathbb{N}$, для которых выполняется соотношение

$$\text{diam } Q_k \geq \max\{|\lambda|, \lambda \in Q_k\}^{3/5}.$$

Через $I_0(\lambda)$ обозначим множество тех из оставшихся индексов, для которых

$$\text{diam } Q_k \geq \text{dist}(Q_k, \lambda).$$

Далее положим

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \{k \notin I'(\lambda), I_0(\lambda), |\lambda'_k| \geq 2|\lambda|\}, \\ I_2(\lambda) &= \{k \notin I'(\lambda), I_0(\lambda), I_1(\lambda), |\lambda'_k - \lambda| \geq |\lambda|/2\}. \end{aligned}$$

Множество всех оставшихся индексов обозначим через $I_3(\lambda)$.

Пусть $n_1(t)$ — число точек λ'_k , $k \in I'(\lambda)$, лежащих в круге радиуса t с центром в нуле. Сравнивая площади, как это делалось в ходе доказательства леммы 1, можно показать, что выполняется оценка

$$n_1(t) \leq C t^{4/5}, \quad t > 0.$$

Отсюда и из оценки

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} \right| \right| \leq C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3$$

($|\lambda_j| > 1$) получим

$$\sum_{\substack{k \in I' \\ |\lambda'_k| \leq 2|\lambda|}} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| \right| \leq |\lambda|^{4/5} \left(C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3 \right).$$

Если же $|\lambda_j| > 2|\lambda|$, то

$$\left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| \right| \leq C' \frac{|\lambda|}{|\lambda'_k|}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{k \in I' \\ |\lambda'_k| > 2|\lambda|}} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| \right| \leq C' |\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{dn_1(t)}{t} \leq C' |\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{t^{4/5}}{t^2} dt \leq C |\lambda|^{4/5}.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\sum_{k \in I'} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \leq |\lambda|^{4/5} \left(C_1 \ln^+ |\lambda| + C_2 \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C_3 \right). \quad (21)$$

ЛЕММА 5 [11; лемма 1]. *Выполняется неравенство*

$$\sum_{k \in I_0} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \leq \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + C.$$

Оценку сумм по $k \in I_1(\lambda)$ проведем по аналогии с доказательством леммы 2 из работы [11]. Учитывая, что при $k \notin I'$, $k \notin I_0$

$$|\lambda'_k - \lambda''_k| \leq \text{diam } Q_k < \max\{|\lambda|, \lambda \in Q_k\}^{3/5} \leq C_1 |\lambda'_k|^{3/5},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I_1} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \\ & \leq C_1 B |\lambda| \sum_{k \in I_1} \frac{1}{|\lambda'_k|^{6/5}} \leq C_1 B |\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{dn_f(t)}{t^{6/5}} \\ & \leq C B |\lambda| \int_{2|\lambda|}^{\infty} \frac{dt}{t^{6/5}} \leq C' |\lambda|^{4/5}. \end{aligned} \quad (22)$$

Так же как лемма 3 в работе [11], доказывается соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I_2} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \\ & \leq C \sum_{k \in I_2} \frac{1}{|\lambda'_k|^{2/5}} = C \int_1^{2|\lambda|} \frac{dn_f(t)}{t^{2/5}} \leq C |\lambda|^{3/5} + C_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Если $k \in I_3(\lambda)$, то имеем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I_3} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \\ & \leq C \sum_{k \in I_3} \frac{|\lambda|^{3/5}}{|\lambda - \lambda'_k|} \leq C |\lambda|^{3/5} \int_0^{|\lambda|^{1/2}} \frac{dn_f(\lambda, t)}{t}. \end{aligned}$$

Через E обозначим множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых при некотором $t = t(z) \in [0, |\lambda|/2]$ выполняется неравенство

$$n_f(z, t) > |z|^{1/5} t.$$

Таким образом, если точка λ не принадлежит множеству E , то

$$\sum_{k \in I_3} \left| \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda''_k} \right| \right| \leq C |\lambda|^{4/5} \ln^+ \frac{|\lambda|}{\rho(\lambda)}, \quad \lambda \notin E. \quad (24)$$

Оценим множество E .

По лемме Хеймана (см. [14]) существует последовательность $z_j \in E$ такая, что круги $B(z_j, t_j) = \{z : |z - z_j| < t_j = t(z_j)\}$ покрывают множество E , причем каждая точка плоскости попадает не более чем в 6 кругов $B(z_j, t_j)$. Тогда в силу соотношения (4) имеем

$$\sum_{|z_j| \leq R} |z_j|^{1/5} t_j \leq \sum_{|z_j| \leq R} n_f(z_j, t_j) \leq 6 n_f(0, 2R) \leq \text{const} \cdot R.$$

Поэтому

$$\sum_{R/2 \leq |z_j| \leq R} t_j \leq \text{const} \cdot R^{4/5}.$$

Если $\lambda \notin E$, то, как нетрудно убедиться,

$$\frac{1}{\rho(\lambda)} \leq |\lambda|^{1/5}.$$

Теперь из соотношений (21)–(24) и из утверждения леммы 5 следует теорема 9.

Основная теорема доказана.

Этот параграф закончим доказательством геометрического утверждения.

Доказательство геометрического утверждения.

ТЕОРЕМА. *Если заданы четыре комплексных числа, по модулю не превосходящих единицы, то их можно перенумеровать так, что хотя бы одно из четырех чисел*

$$|z_1 \pm z_2| + |z_3 \pm z_4|$$

не превосходит 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Можно считать, что данные числа лежат в верхней полуплоскости. Временно перенумеруем их в порядке возрастания аргументов:

$$0 = \arg z_1 \leq \arg z_2 \leq \arg z_3 \leq \arg z_4 \leq \pi.$$

Рассмотрим восемь углов, считая их против часовой стрелки, — угол от z_1 до z_4 , угол от z_2 до $-z_1$, от z_3 до $-z_2$ и т. д., угол от $-z_4$ до z_3 . Объединение этих углов трехкратно покрывает плоскость, т. е. сумма их величин равна 6π . Следовательно, наименьший из этих углов не превосходит $3\pi/4$. Не ограничивая общности, будем считать, что наименьший угол — это угол от z_1 до z_4 . Тем самым, $\arg z_4 \leq 3\pi/4$. Заметим, что $\pi - \arg z_4 \geq \arg z_2 - \arg z_1$, поскольку в противном случае угол между z_2 и $-z_1$ был бы меньше угла от z_1 до z_4 , что противоречило бы минимальности последнего угла. Аналогично, $\pi - \arg z_4 \geq \arg z_3 - \arg z_2$. В противном случае мы бы перешли к углу от $-z_4$ до z_3 . Отсюда следует, что если $\pi - \arg z_4 \leq \pi/3$, то $\arg z_2 - \arg z_1$ и $\arg z_3 - \arg z_2$ меньше $\pi/3$ и

$$|z_1 - z_2| \leq 1, \quad |z_2 - z_3| \leq 1.$$

Тем самым в этом случае теорема доказана. Далее будем считать, что $\arg z_4 \leq 2\pi/3$, т. е. утверждение теоремы будем доказывать для четырех точек, лежащих в секторе

$$S = \{z : |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq 2\pi/3\}.$$

Через A обозначим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти точки. Множество A может быть треугольником, четырехугольником, отрезком или точкой. Утверждение теоремы для последних трех случаев вытекает из следующего факта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Периметр выпуклого четырехугольника, лежащего в секторе S , не превосходит четырех.*

В самом деле, если z_1, z_2, z_3, z_4 — вершины четырехугольника A , пронумерованные против часовой стрелки, то периметр P этого четырехугольника равен

$$P = (|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|) + (|z_2 - z_3| + |z_4 - z_1|).$$

Если $P \leq 4$, то хотя бы одна скобка в правой части меньше 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Функция $|z|$ как максимум линейных функций $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})$, $\varphi \in [0, \pi]$, является выпуклой функцией на плоскости. Возьмем полуплоскости, содержащие точку z_4 и ограниченные прямыми, проходящими через пары точек (z_1, z_2) , (z_2, z_3) , (z_1, z_3) . Пересечение этих полуплоскостей и сектора S обозначим через S' . Выпуклая функция

$$a(z) = |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z| + |z - z_1|$$

своего максимума на выпуклом множестве S' достигает на границе S' . Поскольку $a(z_1), a(z_3) < a(z_4)$, то этот максимум достигается в некоторой точке $z' \in \partial S' \cap \partial S$.

Периметр выпуклого четырехугольника A' с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, z' не меньше периметра A . Применяя эти рассуждения к точкам z_1, z_2, z_3 , мы приходим к выводу, что утверждение 2 достаточно доказать для выпуклого четырехугольника A с вершинами на границе S .

Если некоторая вершина четырехугольника лежит на граничном отрезке S , то, рассматривая периметр четырехугольника как функцию от этой вершины и учитывая выпуклость полученной функции, можем считать, что эта вершина совпадает с одним из концов отрезка. Таким образом, далее рассматриваем четырехугольник с вершинами на граничной дуге и, возможно, с одной вершиной в точке 0. Если в начале координат находится одна вершина и остальные вершины находятся в точках $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq 2\pi/3$, то периметр четырехугольника P равен

$$\begin{aligned} P &= 2 + \sqrt{2(1 - \cos(\varphi_3 - \varphi_2))} + \sqrt{2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))} \\ &= 2 + 4 \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}{4} \end{aligned}$$

и, тем самым, периметр меньше четырех.

Если же все вершины находятся на граничной дуге, то весь четырехугольник лежит в сегменте круга, отсекаемого прямой, проходящей через точки $e^{2\pi i/3}$ и 1. В этом случае периметр не превосходит периметра этого сегмента, т.е.

$$P \leq \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} < 4.$$

Утверждение 1 доказано.

Пусть теперь наименьший выпуклый многоугольник A , содержащий данные четыре точки, — треугольник. В этом случае доказательство теоремы вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В треугольнике A , лежащем в секторе S , либо

а) сумма длин некоторых двух сторон не больше двух;

либо

б) сумма периметра и длин любых двух сторон не больше шести.

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, покажем, как из него вытекает утверждение теоремы.

Пусть точка z_4 лежит в треугольнике с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 и для этого треугольника выполняется п. а) утверждения 2. Например,

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \leq 2.$$

Выпуклая функция

$$a(z) = (|z_1 - z| + |z_2 - z_3|) + (|z - z_3| + |z_1 - z_2|)$$

своего максимального значения по z в треугольнике может достигать лишь на его вершинах. По утверждению 1 имеем

$$a(z_1) = a(z_3) = |z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| + |z_1 - z_2| \leq 4$$

и по предположению

$$a(z_2) = 2(|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|) \leq 4.$$

Следовательно,

$$a(z_4) = (|z_1 - z_4| + |z_2 - z_3|) + (|z_4 - z_3| + |z_1 - z_2|) \leq 4$$

и хотя бы одна из скобок меньше двух. В этом случае теорема доказана. Если же для данного треугольника реализуется п. б) утверждения 2, то, рассматривая выпуклую функцию

$$b(z) = (|z_1 - z| + |z_2 - z_3|) + (|z_2 - z| + |z_1 - z_3|) + (|z_3 - z| + |z_1 - z_2|),$$

убеждаемся в том, что для z , лежащих в треугольнике, $b(z) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Так же как в доказательстве утверждения 1, можно показать, что, увеличивая длины всех сторон треугольника, можно перейти к треугольнику с вершинами на границе S .

Рассмотрим варианты.

1) Две вершины лежат на одном граничном отрезке. В этом случае выполняется п. а) утверждения 2.

2) Пусть вершины лежат в точках $t \in [0, 1]$, $\tau e^{2\pi i/3}$, $\tau \in [0, 1]$, и $z = e^{i\varphi}$.

2а) Если выполняются неравенства

$$t \geq 2 \cos \varphi - 1, \quad \tau \geq 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) - 1, \quad (*)$$

то

$$|z - t| \leq |z - 1|, \quad |z - \tau e^{2\pi i/3}| \leq |z - e^{2\pi i/3}|,$$

поэтому

$$|z - t| + |z - \tau e^{2\pi i/3}| \leq 4 \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2} \right) \leq 2$$

и выполняется п. а) утверждения 2.

2б) Если оба неравенства в (*) одновременно не выполняются, то $|z - t| \leq 1$, $|z - \tau e^{2\pi i/3}| \leq 1$ и снова имеет место п. а).

2в) Пусть $0 \leq t < 2 \cos \varphi - 1$ и $2 \cos(2\pi/3 - \varphi) - 1 \leq \tau < 1$. (Симметричный случай $\tau \leq 2 \cos(2\pi/3 - \varphi) - 1$, $t \geq 2 \cos \varphi - 1$ рассматривается аналогично.) Длины сторон данного треугольника не превосходят длин сторон треугольника с вершинами в точках t , $e^{2\pi i/3}$, z , поэтому доказательство проведем для этого треугольника. Заметим, что поскольку $2 \cos \varphi - 1 \geq t \geq 0$, то $\varphi \leq \pi/3$.

Для $\varphi \in [0, \pi/3]$ определим $t_0 = t_0(\varphi)$ из уравнения

$$|e^{2\pi i/3} - t_0| = |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}|.$$

Очевидно, $t_0(\varphi)$ возрастает при убывании φ . Если для данного φ

$$|e^{i\varphi} - t_0(\varphi)| + |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| \leq 2, \quad (**)$$

то в силу выпуклости

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| + |t - e^{i\varphi}| &\leq 2 \quad \text{при } t \in [t_0(\varphi), 1], \\ |e^{2\pi i/3} - t| + |t - e^{i\varphi}| &\leq 2 \quad \text{при } t \in [0, t_0(\varphi)]. \end{aligned}$$

Таким образом, если для φ выполнено условие (**), то при любом t для треугольника с вершинами $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi}$, t выполнен п. а) утверждения 2.

Определим число φ_0 из условия

$$|e^{i\varphi_0} - e^{2\pi i/3}| = \frac{4}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi_0}{2}\right) &= \frac{2}{3}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{\sqrt{241 - 8\sqrt{15}}}{18}, \\ t_0 = t_0(\varphi_0) &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{37}{36}} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$|e^{i\varphi_0} - t_0(\varphi_0)| = \sqrt{t_0^2 - 2 \cos \varphi_0 t_0 + 1} \leq \frac{2}{3}.$$

Поэтому для $\varphi = \varphi_0$ выполнено условие (**). Покажем, что это же условие выполнено для всех $\varphi \in [0, \varphi_0]$. В противном случае, поскольку для $\varphi = 0$ условие (**) выполнено, в силу непрерывности существовала бы точка $\varphi \in [0, \varphi_0]$, в которой

$$|e^{i\varphi} - t_0(\varphi)| + |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| = 2.$$

Выразив φ и $t_0(\varphi)$ через переменную $a = |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}|$, придем к уравнению

$$a \left(\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{a}{2} + \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \right) = 4(a - 1), \quad a \in \left[\frac{4}{3}, \sqrt{3} \right].$$

После обычных преобразований и сокращения на $(a - 1)(a + 1)^2$ получим алгебраическое уравнение

$$a^9 + 3a^8 - 2a^7 - 18a^6 - 3a^5 + 27a^4 - 48a^3 + 16a^2 + 256a - 256 = 0.$$

По теореме Штурма это уравнение не имеет корней в интервале $[\frac{4}{3}, \sqrt{3}]$. Таким образом, для $\varphi \in [0, \varphi_0]$ выполняется условие (**), и как следствие для любого треугольника с вершинами в точках $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$, и $t, t \in [0, 1]$, выполнен п. а) утверждения 2.

Для $\varphi \in [0, \pi/3]$ определим $t_1 = t_1(\varphi)$ из уравнения

$$|e^{i\varphi} - t_1(\varphi)| + |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| = 2.$$

Очевидно, $t_1(\varphi)$ возрастает при убывании φ . Кроме того, если $t \in [t_1, 1]$, то в силу выпуклости по t имеем

$$|e^{i\varphi} - t| + |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| \leq 2,$$

т.е. для треугольника с вершинами в точках $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi}$, $t, t \in [0, 1]$, выполнен п. а). Поскольку для φ_0 выполняется соотношение (**), то $t_1(\varphi_0) \leq t_0(\varphi_0)$ и

$$|e^{2\pi i/3} - t_1(\varphi_0)| \leq |e^{2\pi i/3} - t_0(\varphi)| = |e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi_0}| = \frac{4}{3}.$$

В силу монотонности функции $t_1(\varphi)$ для любого $\varphi \in [\varphi_0, \pi/3]$ имеем $t_1(\varphi) \leq t_1(\varphi_0) \leq t_0(\varphi_0)$ и

$$|e^{2\pi i/3} - t_1(\varphi)| \leq \frac{4}{3}.$$

Возьмем треугольник с вершинами в точках $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi}$, t , причем $\varphi \in [\varphi_0, \pi/3]$ и $t \in [0, t_1(\varphi)]$. Сумму периметра и некоторых двух сторон этого треугольника рассмотрим как функцию P_1 от $t \in [0, t_1(\varphi)]$. Тогда $P_1(t)$ – выпуклая функция и своего максимума достигает либо при $t = 0$, либо при $t = t_1(\varphi)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} P_1(t_1(\varphi)) &\leq 2(|e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi}| + |e^{2\pi i/3} - t_1(\varphi)|) + |e^{i\varphi} - t_1(\varphi)| \\ &\leq 2|e^{2\pi i/3} - e^{i\varphi_0}| + |e^{2\pi i/3} - t_1(\varphi_0)| + 2 = 6 \end{aligned}$$

и $P_1(0) = 5$. Таким образом, для этих треугольников выполняется п. б) утверждения 2.

Для завершения доказательства утверждения 2 остается рассмотреть следующие случаи.

3) Две вершины лежат на граничной дуге, а третья вершина – внутри граничного отрезка.

4) Все три вершины лежат на граничной дуге.

В последнем случае очевидным образом выполняется п. а).

Рассмотрим случай 3). Можно считать, что две вершины лежат в точках $e^{i\varphi_1}$, $e^{i\varphi_2}$, $\varphi_2 \geq \varphi_1$, третья вершина t лежит на отрезке $[0, 1]$.

3а) Пусть $t \geq \cos \varphi_1 \geq \cos \varphi_2$. Тогда

$$|e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}| + |e^{i\varphi_1} - t| \leq |e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1}| + |e^{i\varphi_1} - 1| \leq 2$$

и выполняется п. а).

3б) Пусть $t \leq \cos \varphi_2 \leq \cos \varphi_1$. В этом случае $|e^{i\varphi_1} - t| \leq 1$, $|e^{i\varphi_2} - 1| \leq 1$ и снова выполняется п. а).

3в) Пусть $\cos \varphi_2 \leq t \leq \cos \varphi_1$. Длины сторон треугольника с вершинами в точках $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi_1}$, t больше длин соответствующих сторон треугольника с вершинами в точках $e^{i\varphi_1}$, $e^{i\varphi_2}$, t . Поскольку для треугольника с вершинами в точках $e^{2\pi i/3}$, $e^{i\varphi_1}$, t утверждение 2 выполняется в силу уже рассмотренного случая 2б), то утверждение 2 полностью доказано.

§ 5. Применение основной теоремы к решению проблемы Л. Эренпрайса

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — финитная гладкая функция с носителем в $[-2N, 2N]$. Тогда существуют $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителями в $[-N, N]$ такие, что

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\widehat{\varphi}$ обозначим преобразование Фурье–Лапласа функции φ :

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \int \varphi(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Тогда $\widehat{\varphi}$ — целая функция экспоненциального типа $2N$, удовлетворяющая оценке

$$|\widehat{\varphi}(\lambda)| \leq C_\varphi e^{2N|\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Положим

$$M_n = \max_x |\varphi^{(n)}(x)|, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда, очевидно,

$$|\widehat{\varphi}(\lambda)| \leq \frac{2NM_n}{|\lambda|^n} e^{N|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$\ln |\widehat{\varphi}(\lambda)| \leq 2N + N|\operatorname{Im} \lambda| - \ln T(|\lambda|), \quad (25)$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности (M_n) .

ЛЕММА 6. Функция $\ln T(r)$ — липшицева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. По теореме Карлемана о квазианалитических классах (см. [15]) функция $\ln T(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr < \infty. \quad (26)$$

Для выпуклой функции $g(e^x) = \ln T(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, производная $\frac{d}{dx}g(e^x)$ существует всюду, за исключением, возможно, счетного множества точек, и является неубывающей функцией. Поэтому для $t \in [p, +\infty)$ имеем оценку

$$g(t) = \int_p^t g'(\tau) d\tau + g(p) \geq g'(p)p \ln \frac{t}{p} + g(p).$$

Если предположим, что $g'(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} \int_p^\infty \frac{g(t) dt}{t^2} &\geq g'(p)p \int_p^\infty \frac{\ln(t/p) dt}{t^2} + \frac{g(p)}{p} \\ &= g'(p) \int_1^\infty \frac{\ln t dt}{t^2} + \frac{g(p)}{p} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

что противоречит условию (26). Таким образом, производная функции $g(x)$ ограничена. Лемма 6 доказана.

Если точка $\lambda = 0$ является нулем кратности $n \geq 0$ функции $\widehat{\varphi}(\lambda)$, то положим

$$f(\lambda) = \frac{\widehat{\varphi}(\lambda) \lambda^{-n}}{\widehat{\varphi}^{(n)}(0)}.$$

Тогда функции $f(\lambda)$, $F(\lambda) = f(\lambda)$ и $H(\lambda) = 2N + N|\operatorname{Im} \lambda| - \ln T(|\lambda|)$ удовлетворяют условиям основной теоремы. По этой теореме существуют целые функции f_1, f_2 такие, что

$$\ln |f_1(\lambda)| + \ln |f_2(\lambda)| = \ln |f(\lambda)|$$

и

$$\begin{aligned} |\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| &\leq \frac{A}{p} (H(\lambda) - \ln |F(\lambda)|) + B \ln^+ |\lambda| \\ &\quad + C \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + D + Ee^p, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Возьмем здесь $p > A$. Тогда, складывая последние два соотношения, получим

$$\begin{aligned} \ln |f_1(\lambda)| &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A}{p} \right) \ln |f(\lambda)| + \frac{A}{p} H(\lambda) + \frac{B}{2} \ln^+ |\lambda| \\ &\quad + \frac{C}{2} \ln^+ \frac{1}{\rho(\lambda)} + \frac{D}{2} + \frac{E}{2} e^p, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Введем множество

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ z : |z - z_j| \leq \frac{a}{(|z_j| + 1)^2} \right\},$$

где z_j — нули функции f , перенумерованные в порядке возрастания модулей. Тогда для $\lambda \notin \Omega$, как нетрудно проверить, выполняется оценка

$$\frac{1}{\rho(\lambda)} \leq \frac{4(|\lambda| + 1)^2}{a}.$$

Отсюда, учитывая оценку (25), получим

$$\ln |f_1(\lambda)| \leq \frac{1}{2}H(\lambda) + C_1 \ln(|\lambda| + e), \quad \lambda \notin \Omega, \quad (27)$$

где C_1 — постоянная, зависящая лишь от кратности n и от выбора числа p . В силу соотношения (4) имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{(|z_j| + 1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{dn_f(t)}{(t+1)^2} \leq ad_0 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = ad_0,$$

где d_0 — некоторая постоянная. Следовательно, для любой точки $x \in \mathbb{R}$ найдется окружность $\{z : |z - x| = r\}$ радиуса $r < 2ad_0$, целиком лежащая вне Ω . Если выберем $a < 1/(4d_0)$, то на этой окружности выполняется оценка (27). По принципу максимума модуля для субгармонических функций с учетом липшицевости функции $H(\lambda)$ эта оценка продолжается и на точку x :

$$\ln |f_1(x)| \leq \frac{1}{2}H(x) + C_1 \ln(|x| + e), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Такая же оценка будет верна и для функции $f_2(\lambda) \lambda^n$:

$$\ln |f_2(x)x^n| \leq \frac{1}{2}H(x) + C_2 \ln(|x| + e), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

С другой стороны, в силу соотношения (3') имеем

$$|\ln |f_1(\lambda)| - \ln |f_2(\lambda)|| \leq \text{const} \cdot |\lambda|^{4/5} \ln(|\lambda| + e), \quad \lambda \notin E.$$

Так как

$$\ln |f_1(\lambda)| + \ln |f_2(\lambda)| = \ln |f(\lambda)| \leq H(\lambda) + n \ln(|\lambda| + e) + \ln |\hat{\varphi}^{(n)}(0)|,$$

то

$$\ln |f_j(\lambda)| \leq \frac{1}{2}H(\lambda) + \text{const} \cdot |\lambda|^{4/5} \ln(|\lambda| + e), \quad \lambda \notin E, \quad j = 1, 2.$$

Из оценки исключительного множества E следует, что для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется окружность $\{z : |z - \lambda| = d_1 |\lambda|^{4/5}\}$, целиком лежащая вне E . Здесь $d_1 > 0$

— число из некоторого интервала $[a, b]$, не зависящего от λ . Снова по принципу максимума для субгармонических функций и в силу липшицевости функции $H(\lambda)$ находим

$$\ln |f_j(\lambda)| \leq \frac{1}{2}H(\lambda) + \text{const} \cdot |\lambda|^{4/5} \ln(|\lambda| + e), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2.$$

Из этого соотношения следует, что функции f_j имеют экспоненциальный тип меньше N . Из соотношений (27), (28) вытекает, что функции

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda)\lambda^{(n)}\widehat{\varphi}^{(n)}(0)$$

являются преобразованием Фурье–Лапласа некоторых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем носители φ_1, φ_2 лежат в интервале $[-N, N]$. Наконец, поскольку

$$f_1(\lambda)f_2(\lambda)\lambda^{(n)}\widehat{\varphi}^{(n)}(0) = \widehat{\varphi}^{(n)}(\lambda),$$

то $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi$. Теорема 10 доказана.

ТЕОРЕМА 11. Пусть M_n , $n = 0, 1, \dots$, — выпуклая последовательность положительных чисел. Функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем в $[-2N, 2N]$ удовлетворяет условиям

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq C_f M_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда существуют число m , зависящее лишь от последовательности M_n , и функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителями в $[-N, N]$, удовлетворяющие оценкам

$$|\varphi_j^{(n)}(x)| \leq C_j \sqrt{M_{2n+m}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2,$$

и соотношению

$$\varphi = \varphi_1 * \varphi_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как в доказательстве теоремы 10, найдем функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с носителем в $[-N, N]$, удовлетворяющие условиям

$$\ln |\widehat{\varphi}_j(x)| \leq \frac{1}{2}H(x) + C \ln(|x| + e), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$H(x) = 2N - \ln T(|x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$T(x) = \sup_n \frac{x^n}{M_n}, \quad x > 0.$$

Поскольку

$$\varphi_j^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{\varphi}_j(t) e^{-itx} (-it)^n dt,$$

то

$$\begin{aligned} |\varphi_j^{(n)}(x)| &\leq \int \frac{e^N |t|^n (|t| + e)^C}{\sqrt{T(t)}} dt \\ &= e^N \int \frac{(|t| + e)^{n+k+2}}{\sqrt{T(|t| + e)}} \sqrt{\frac{T(|t| + e)}{T(|t|)}} \frac{dt}{(|t| + e)^{k+2-C}}, \end{aligned}$$

где k — целая часть C . В силу липшицевости функции $\ln T(|x|)$ отсюда получим

$$\begin{aligned} \max_m |\varphi^{(n)}(x)| &\leq C \sup_{y \geq 1} \frac{y^{n+k+2}}{\sqrt{T(y)}} \\ &= C \exp \left(\frac{1}{2} \sup_{y \geq 1} [2(n+k+2) \ln y - \ln T(y)] \right) \\ &= C \sqrt{M_{2n+m}}, \end{aligned}$$

где $m = 2k + 4$. Теорема 11 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $\varphi \in G_\alpha$, где G_α — класс Жевре, т.е. множество функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq C_f Q_f^n n^{\alpha n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда существуют функции $\varphi_1, \varphi_2 \in G_\alpha$ такие, что $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi$.

В самом деле, в этом случае $M_n = Q^n n^{\alpha n}$, поэтому

$$|\varphi_j^{(n)}(x)| \leq (C_f Q_j^{m/2}) Q^n (2n + m)^{\alpha(n+m/2)} \leq C'_j Q_1^n n^{\alpha n},$$

где

$$Q_1 \geq Q \sup_n Q \left(2 + \frac{m}{n} \right)^{\alpha(1+m/2n)} n^{\alpha m/2n}.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть μ — распределение конечного порядка n с носителем в $[-2N, 2N]$. Тогда существуют распределения конечного порядка μ_1, μ_2 с носителями в $[-N, N]$ такие, что $\mu_1 * \mu_2 = \mu$.

Доказательство теоремы 12 проводится точно так же, как и доказательство теоремы 10.

Список литературы

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division. IV // *Amer. J. Math.* 1960. V. 82. P. 522–588.
2. *Demailly J. P.* Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donne dans $\mathbb{C}^n$ // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1980. V. 30. № 3. P. 219–236.
3. *Malliavin P., Dixmier J.* Factorization de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables // *Bull. Sci. Math. (2)*. 1978. V. 102. № 4. P. 307–330.
4. *Rubel L. A., Squires W. A., Taylor B. A.* Irreducibility of certain entire functions with applications to harmonic analysis // *Ann. of Math. (2)*. 1978. V. 108. P. 553–567.
5. *Dicson D. G.* Factoring rapidly decreasing entire functions // *Bull. Sci. Math. (2)*. 1986. V. 110. № 4. P. 335–345.
6. *Dicson D. G.* Factoring Fourier transforms // *Proc. of the International Conference on Complex Analysis and its Applications*. Varna, 1987.
7. *Dicson D. G.* Factoring functions of exponential type with restriction on a line // *Bull. Sci. Math. (2)*. 1988. V. 112. № 2. P. 77–100.
8. *Dicson D. G.* Factoring Fourier transforms with zeros in a strip // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1989. V. 106. P. 407–414.
9. *Юлмухаметов Р. С.* Расщепление целых функций с нулями в полосе // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 7. С. 147–160.
10. *Юлмухаметов Р. С.* Разложение целых функций на произведение двух функций эквивалентного роста // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. № 7. С. 139–160.
11. *Юлмухаметов Р. С.* Разложение целых функций на произведение двух “почти равных” функций // *Сиб. матем. журн.* 1997. Т. 38. № 2. С. 463–473.
12. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л. Эйренпрайса // *Вестн. БГУ.* 1996. № 1. С. 7–11.
13. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // *Anal. Math.* 1985. V. 11. P. 257–282.
14. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
15. *Мандельброт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение. М.: ИЛ, 1955.
16. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // *Матем. сб.* 1972. Т. 87. № 4. С. 459–480.
17. *Азарин В. С.* О лучах вполне регулярного роста целой функции // *Матем. сб.* 1969. Т. 79 (121). С. 463–476.
18. *Азарин В. С.* О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост // *Матем. сб.* 1973. Т. 90 (132). № 2. С. 229–230.
19. *Левин Б. Я.* Целые функции. М.: Наука, 1971.
20. *Beurling A., Malliavin P.* On Fourier transforms of measures with compact support // *Acta Math.* 1962. V. 107. № 3, 4. P. 291–309.
21. *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions // *Acta Math.* 1967. V. 118. № 1–4. P. 79–93.
22. *Красичков-Терновский И. Ф.* Интерпретация теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты // *Матем. сб.* 1989. Т. 180. № 3. С. 397–423.
23. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л. Эйренпрайса // *Докл. АН.* 1998. Т. 360. № 1. С. 26–27.