Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 5, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 05:54:09

УДК 517.5

А. И. Аптекарев

Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина

Получены формулы сильной асимптотики многочленов Эрмита–Паде для систем функций марковского типа из класса Никишина. В основе доказательства лежат свойства некоторых функций, рациональных на римановой поверхности, ассоциированной с носителями мер, порождающих систему Никишина.

Библиография: 23 названия.

Введение

0.1. Определения, постановка задачи. Пусть

$$\sigma := \{\sigma_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^p \quad (0.1_1)$$

— набор конечных положительных борелевских мер с носителями $\text{supp } \sigma_\alpha$, принадлежащими отрезкам действительной оси $E := \{E_\alpha := [a_\alpha, b_\alpha]\}_{\alpha=1}^p$,

$$\text{supp } \sigma_\alpha \subseteq E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (0.1_2)$$

таким, что

$$E_\alpha \cap E_{\alpha-1} = \emptyset, \quad \alpha = 2, \dots, p. \quad (0.1_3)$$

В работе [1] Е. М. Никишин рассмотрел систему мер $\{\mu_\alpha(x)\}_{\alpha=1}^p$, генерируемую набором (σ, E) по следующему индуктивному правилу:

$$\begin{aligned} d\mu_1(x) &:= d\sigma_1(x), \\ \text{(N)} : \quad d\mu_2(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(x) := \left(\int_{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{x-t} \right) d\sigma_1(x), \\ &\dots\dots\dots \\ d\mu_\alpha(x) &:= d\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\alpha \rangle := d\langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_\alpha \rangle \rangle, \quad \alpha = 2, \dots, p \end{aligned} \quad (0.2)$$

(обозначение $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_\alpha \rangle$ было предложено недавно в [2]).

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-00659, 96-15-96185), фондом INTAS (грант № 93-219-EXT), а также PRAXIS XXI/BBC/16438/98.

Меры, составляющие *систему Никишина* (0.1), (0.2), сосредоточены на одном интервале E_1 . Тем не менее, они обладают некоторым свойством “независимости”, достаточным для существования *единственного* многочлена, определяемого системой соотношений ортогональности

$$\begin{aligned} (*) \quad & \int Q_{\mathbf{n}}(x) x^\nu d\mu_\alpha(x) = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \\ (**) \quad & \deg Q_{\mathbf{n}}(x) \leq |\mathbf{n}| := \sum_{\alpha=1}^p n_\alpha \end{aligned} \quad (0.3)$$

(первое доказательство единственности $Q_{\mathbf{n}}$ для $p = 2$ и $\mathbf{n} = (n, n), (n+1, n)$ см. в [1]; в настоящее время единственность доказана для мультииндексов $\mathbf{n}$: $n_\alpha \leq n_{\alpha-1} + 1, \alpha = 2, 3, \dots, p$, см., например, [2]).

Многочлены $Q_{\mathbf{n}}$, удовлетворяющие (0.3), ассоциированные с *векторным индексом* $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$, называют *совместно* (или “multiple”) *ортогональными полиномами по отношению к системе мер* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$. При $p = 1$ конструкция (0.3) определяет обычные ортогональные многочлены.

Другой известной общей системой мер μ , по отношению к которой совместно ортогональные многочлены определяются единственным образом, является так называемая *система Анжелеско*:

$$(A) : \{ \mu_\alpha(x) \}_{\alpha=1}^p, \quad \text{supp } \mu_\alpha \subseteq E_\alpha, \quad E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, p. \quad (0.4)$$

Многочлены, совместно ортогональные по отношению к системе (0.4), впервые были рассмотрены в [3] (шестьдесят лет спустя они были также переоткрыты Е. М. Никишиным в [4]). Система мер, обобщающая системы Анжелеско и Никишина с помощью понятия графа-“дерева”, недавно была введена А. А. Гончаром с соавторами в [2].

Отметим, что так как ограничения на меры в определении систем Анжелеско и Никишина имеют “общий” характер, затрагивающий лишь “геометрию” носителей, порождающих эти системы мер, то соответствующие многочлены (0.3) принадлежат к так называемым классам *общих многочленов совместной ортогональности* в отличие от многочленов, ортогональных относительно *специальных весов*, обобщающих классические ортогональные полиномы – Якоби, Эрмита и т. п. (см. [5]).

Совместно ортогональные многочлены являются общими знаменателями рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде

$$\pi_{\mathbf{n}}(z) := \left(\frac{P^{(1)}}{Q_{\mathbf{n}}}, \dots, \frac{P^{(p)}}{Q_{\mathbf{n}}} \right) \quad (0.5)$$

для систем марковских функций

$$\hat{\mu}_\alpha(z) := \int \frac{d\mu_\alpha(x)}{z - x}, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (0.6)$$

поэтому их также называют *полиномами Эрмита–Паде*. Действительно, по определению аппроксимаций Эрмита–Паде (см., например, [6]) справедливо

$$Q_n(z)\hat{\mu}_\alpha(z) - P^{(\alpha)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_\alpha+1}}\right), \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad (0.5')$$

что эквивалентно (0.3).

Полиномы совместной ортогональности играют важную роль не только в изучении аппроксимаций аналитических вектор-функций рациональными, но и в таких разделах математики, как теория чисел, спектральный анализ несимметричных операторов и теория специальных функций.

В фундаментальной работе Дж. Наттолла [7] проведено исследование многих *специальных* случаев полиномов Эрмита–Паде, на основе которых сформулированы гипотезы о *сильной* асимптотике *общих* полиномов совместной ортогональности. (Отметим также работу В. А. Калягина [8], в которой были доказаны формулы сильной асимптотики для некоторых специальных совместно ортогональных полиномов.) *Сильной асимптотикой* полиномиальной последовательности $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$, $\deg Q_n = n$, при $n \rightarrow \infty$ называют асимптотику вида

$$Q_n(z) \sim \Phi^n(z)(F(z) + o(1)),$$

где *главный член* $\Phi(z)$ есть некоторая аналитическая функция, имеющая полюс первого порядка в бесконечности (обычно зависящая от геометрии носителей мер ортогональности), а $F(z)$ (называемая *функцией Сегё*) есть некоторая аналитическая в окрестности бесконечности функция (обычно определяется с помощью плотностей мер ортогональности). Первыми результатами о сильной асимптотике общих многочленов, определяемых соотношениями ортогональности, были классические теоремы С. Н. Бернштейна (о сильной асимптотике общих многочленов, ортогональных на отрезке, см. [9]) и Г. Сегё (для многочленов, ортогональных на окружности, см. [10]).

В работе автора [11] доказаны формулы сильной асимптотики для общих многочленов совместной ортогональности класса Анжелеско. (Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде (0.5) для набора марковских функций (0.6), порождаемых системой Анжелеско (0.4), были исследованы в фундаментальной работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [12].)

В настоящей работе доказана теорема о сильной асимптотике общих многочленов совместной ортогональности класса Никишина. Отметим, что вопросы единственности и сходимости, а также свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде марковских функций для системы Никишина ранее интенсивно исследовались рядом авторов (см. [1], [2], [13]–[18]).

В следующих пунктах введения мы рассмотрим систему многочленов, ортогональных относительно “*переменных*” (зависящих от самих многочленов из этой системы) весов. Эти многочлены играют ключевую роль в решении рассматриваемой задачи. Для них мы приведем формулировку доказываемой в настоящей

работе теоремы о сильной асимптотике (теорема 1), следствием которой являются формулы сильной асимптотики многочленов совместной ортогональности для систем Никишина (теорема 1'). В заключение введения мы вкратце отметим основные моменты доказательства, изложенного в последующих параграфах.

Автор хотел бы выразить благодарность Д. Н. Тулякову и Г. Шталю за полезные обсуждения во время написания этой статьи.

0.2. Система полиномов, ортогональных относительно переменных весов. Ключевую роль при исследовании общих полиномов совместной ортогональности играет связанная с ними система полиномов $\mathbf{q} := \{q_{\alpha, \mathbf{n}}\}_{\alpha=1}^p$, удовлетворяющая обычным соотношениям ортогональности, но по отношению к переменным весам, зависящим от самих полиномов из этой системы:

$$\int_{E_\alpha} q_{\alpha, \mathbf{n}}(x) x^\nu H_\alpha(\mathbf{q}; x) d\sigma_\alpha(x) = 0, \quad \nu = 0, \dots, \deg q_{\alpha, \mathbf{n}} - 1, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (0.7)$$

Для систем Анжелеско такая система формируется очень просто. В этом случае $q_{\alpha, \mathbf{n}}$ есть многочлен, нули которого совпадают с нулями многочлена $Q_{\mathbf{n}}$, расположенными на E_α :

$$Q_{\mathbf{n}}(x) =: \prod_{\alpha=1}^p q_{\alpha, \mathbf{n}}(x), \quad \deg q_{\alpha, \mathbf{n}} = n_\alpha, \quad \text{Zer}[q_{\alpha, \mathbf{n}}] \subset E_\alpha. \quad (0.8)$$

Для полиномов $q_{\alpha, \mathbf{n}}$ в случае (0.8) из совместных соотношений ортогональности (0.3), (0.4) следует система обычных соотношений ортогональности (0.7) относительно “переменных” весов

$$H_\alpha(\mathbf{q}; x) d\sigma_\alpha(x) := \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p q_{\beta, \mathbf{n}}(x) d\mu_\alpha(x).$$

Для систем Никишина аналогичная система многочленов $q_{\alpha, \mathbf{n}}$, $\alpha = 1, \dots, p$, строится гораздо более сложным образом. Приведем эту конструкцию. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ (см., например, [2], [13]). *Для векторных индексов*

$$\mathbf{n}: \quad n_\alpha \leq n_{\alpha-1} + 1, \quad \alpha = 2, \dots, p,$$

и борелевских мер (0.1) существует единственная система многочленов

$$\mathbf{q} := (q_{1, \mathbf{n}}(x), \dots, q_{p, \mathbf{n}}(x)), \quad \deg q_{\alpha, \mathbf{n}} = \sum_{\beta=\alpha}^p n_\beta,$$

удовлетворяющая системе соотношений ортогональности (0.7), где знак-
постоянный на E_α “переменный” вес есть

$$H_\alpha(\mathbf{q}; x) := \frac{h_{\alpha, \mathbf{n}}(x)}{q_{\alpha-1, \mathbf{n}}(x) q_{\alpha+1, \mathbf{n}}(x)}, \quad q_{0, \mathbf{n}} \equiv q_{p+1, \mathbf{n}} \equiv 1, \quad (0.9)$$

и функции $h_{\alpha, \mathbf{n}}$ определяются индуктивно

$$h_1(x) = 1, \quad h_{\alpha, \mathbf{n}}(x) := \int_{E_{\alpha-1}} \frac{q_{\alpha-1, \mathbf{n}}^2(t)}{x-t} \frac{h_{\alpha-1, \mathbf{n}}(t) d\sigma_{\alpha-1}(x)}{q_{\alpha-2, \mathbf{n}}(t) q_{\alpha, \mathbf{n}}(t)}, \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

Многочлен $Q_{\mathbf{n}}(x)$, совместно ортогональный по отношению к системе Ни-
кишина (0.1), (0.2), связан с многочленами $\{q_{\alpha, \mathbf{n}}\}$ следующим образом:

$$Q_{\mathbf{n}}(x) = q_{1, \mathbf{n}}(x). \quad (0.10)$$

Именно асимптотика многочленов $\{q_{\alpha, \mathbf{n}}(x)\}$ и будет изучаться в настоящей ра-
боте. Мы ограничимся рассмотрением *диагональных* последовательностей век-
торных индексов

$$\mathbf{n} = (n, n, \dots, n),$$

поэтому в дальнейшем вектор-индекс $\mathbf{n}$ будем обозначать через n .

Остановимся на нормировке многочленов $\{q_{\alpha, n}\}_{\alpha=1}^p$. Наряду с многочленами
со старшим коэффициентом равным единице

$$q_{\alpha, n} := z^{n(p-\alpha+1)} + \dots, \quad m_{\alpha, n} := \int_{E_\alpha} q_{\alpha, n}^2(x) \left| \frac{h_{\alpha, n}(x)}{q_{\alpha+1, n}(x) q_{\alpha-1, n}(x)} \right| d\sigma_\alpha(x),$$

мы также будем рассматривать многочлены

$$\tilde{q}_{\alpha, n} := k_{\alpha, n} q_{\alpha, n},$$

нормированные следующим образом:

$$1 = \int_{E_\alpha} \tilde{q}_{\alpha, n}^2(x) \left| \frac{\tilde{h}_{\alpha, n}(x)}{q_{\alpha-1, n}(x) q_{\alpha+1, n}(x)} \right| d\sigma_\alpha(x), \quad (0.11)$$

где интегральная составляющая переменного веса нормирована так:

$$\tilde{h}_{\alpha, n} = l_{\alpha, n} h_{\alpha, n}, \quad \tilde{h}_{1, n} := 1, \quad \tilde{h}_{\alpha, n}(x) := \int_{E_{\alpha-1}} \frac{\tilde{q}_{\alpha-1}^2(t)}{x-t} \frac{\tilde{h}_{\alpha-1, n}(t)}{q_{\alpha-1, n}(t) q_{\alpha, n}(t)} d\sigma_{\alpha-1}(t), \quad (0.12)$$

$\alpha = 2, \dots, m$. Нетрудно увидеть, что в этом случае

$$l_{1,n} \equiv 1, \quad l_{\alpha,n} = \prod_{\nu=1}^{\alpha-1} k_{\nu,n}^2, \\ k_{1,n} = \frac{1}{m_{1,n}}, \quad k_{\alpha,n} = \frac{m_{\alpha-1,n}}{m_{\alpha,n}}.$$

Обратим внимание, что для подынтегрального выражения в (0.11) известна слабая асимптотика. Это обстоятельство позволяет существенно упростить постановку задачи. Как доказал Г. Лопес-Лагомасино (см. [19; теорема 9], а также [20]), для полиномов $\{t_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормированных на отрезке $E = [a, b]$ относительно “переменного” веса

$$\frac{d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|},$$

где мера $d\sigma(x)$ удовлетворяет условию

$$\sigma'(x) > 0 \quad \text{п.в. на } E,$$

а $\{T_{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность полиномов таких, что

$$T_{2n}(x) := \prod_{\nu=1}^k (x - x_{\nu,2n}), \quad k \leq 2n, \quad \{x_{\nu,2n}\} \subset \tilde{E} \subset \mathbb{R},$$

$\tilde{E}$ — компакт, $E \cap \tilde{E} = \emptyset$, справедливо

$$\frac{t_n^2(x) d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =: d\lambda_{0,E}. \quad (0.13)$$

(Мы привели формулировку теоремы 9 из [19] в ослабленном, достаточном для приложения к системам Никишина варианте). Отметим также, что повторением доказательства асимптотики (0.13) из [19] можно показать, что если к переменному весу добавляется непрерывный множитель $h_n(x) > 0$, $x \in [a, b]$, такой, что

$$h_n(x) \rightrightarrows h(x) \in C[a, b], \quad n \rightarrow \infty,$$

то для полиномов $\{\tilde{t}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормированных относительно

$$\frac{h_n(x) d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|},$$

также справедливо

$$\frac{\tilde{t}_n^2(x) h_n(x) d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} d\lambda_{0,E}(x). \quad (0.13')$$

Теперь слабая асимптотика подынтегрального выражения в (0.11) и как следствие равномерная асимптотика нормированной интегральной составляющей (0.12) “переменного” веса для полиномов $\{q_{\alpha,n}\}$ последовательно вытекают из (0.13’):

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\alpha,n}^2(x) \left| \frac{\tilde{h}_{\alpha,n}(x)}{q_{\alpha-1,n}(x) q_{\alpha+1,n}(x)} \right| d\sigma_{\alpha}(x) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} d\lambda_{0,E_{\alpha}}(x), \quad \alpha = 1, \dots, p, \\ \tilde{h}_{\alpha,n}(z) &\Rightarrow \hat{\lambda}_{0,E_{\alpha-1}}(z) := \int_{E_{\alpha-1}} \frac{d\lambda_{0,E_{\alpha-1}}(x)}{z-x}, \quad \alpha = 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (0.14)$$

где последний предел выполняется равномерно на компактах $K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E_{\alpha-1}$.¹

0.3. Формулировка основного результата. Итак, ввиду соотношения (0.10), связывающего многочлены совместной ортогональности Q_n для системы Никишина с набором многочленов $\{q_{\alpha,n}\}$, ортогональных относительно переменных весов (0.9), а также с учетом известной асимптотики интегральной составляющей переменного веса (0.14) задача о сильной асимптотике полиномов Q_n свелась к задаче об асимптотике многочленов $\{q_{\alpha,n}\}_{\alpha=1}^p$, удовлетворяющих системе соотношений ортогональности:

$$\begin{aligned} q_{\alpha,n}(x) &= x^{n(p-\alpha+1)} + \dots, \\ \int_{E_{\alpha}} q_{\alpha,n}(x) x^{\nu} \frac{\tilde{h}_{\alpha,n}(x) d\sigma_{\alpha}(x)}{q_{\alpha-1,n}(x) q_{\alpha+1,n}(x)} &= 0, \\ \nu = 0, \dots, n(p-\alpha+1)-1, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad q_{0,n} &\equiv q_{p+1,n} \equiv 1, \end{aligned} \quad (0.15)$$

где $\tilde{h}_{\alpha,n}$ есть произвольные положительные непрерывные на отрезках E_{α} функции такие, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{h}_{\alpha,n}(x) \Rightarrow h_{\alpha}(x) > 0, \quad x \in E_{\alpha}. \quad (0.16)$$

Кроме условий (0.1₁)–(0.1₃) на меры $\{d\sigma_{\alpha}(x)\}$ мы также накладываем естественное в задачах о сильной асимптотике условие Сегё, т.е. считаем их абсолютно непрерывными

$$d\sigma_{\alpha}(x) = \rho_{\alpha}(x) dx, \quad x \in E_{\alpha}, \quad (0.17)$$

и такими, что

$$\int_{E_{\alpha}} \ln \rho_{\alpha}(x) d\lambda_{0,E_{\alpha}}(x) > -\infty, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (0.18)$$

Введем некоторые стандартные функции, необходимые для описания сильной асимптотики полиномов $\{q_{\alpha,n}\}$.

¹В недавно опубликованной работе [21] можно найти детали доказательства асимптотик (0.13’) и (0.14).

Пусть

$$\mathcal{R}(E) = \overline{\bigcup_{\alpha=0}^p \mathcal{R}_\alpha} \quad (0.19)$$

есть $(p+1)$ -листная риманова поверхность с квадратичными точками ветвления в концах отрезков $E_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$, $\alpha = 1, \dots, p$, и матрицами монодромии

$$M_{a_\alpha} = M_{b_\alpha} := \mathcal{E}_{\alpha-1, \alpha}, \quad (0.20)$$

где $\mathcal{E}_{i,j}$ есть матрица, переставляющая i -ю и j -ю координаты вектора. То есть $\mathcal{R}$ состоит из “склеенных” последовательно листов

$$\mathcal{R}_0 := \overline{\mathbb{C}} \setminus E_1, \quad \mathcal{R}_\alpha := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{E_\alpha \cup E_{\alpha+1}\}, \quad \alpha = 1, \dots, p-1, \quad \mathcal{R}_p = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_p$$

с отождествлением верхнего и нижнего “берегов” разрезов у соседних листов. Очевидно, что построенная риманова поверхность имеет род 0 (проверить можно по формуле Римана–Гурвица), поэтому заданием произвольного дивизора (множества нулей и полюсов) на $\mathcal{R}$ можно определить однозначную рациональную функцию с точностью до мультипликативной константы.

Определим рациональную на $\mathcal{R}$ функцию $\Psi(z)$ как функцию, имеющую нуль порядка p в точке $\infty^{(0)} \in \mathcal{R}_0$, полюсы первого порядка в точках $\infty^{(\alpha)} \in \mathcal{R}_\alpha$ и регулярную (в локальных переменных) в остальных точках $\mathcal{R}$:

$$\Psi(z) := \begin{cases} \Psi(\infty^{(0)}) := \Psi_0(\infty) = \frac{1}{C_0 z^p} + \dots, \\ \Psi(\infty^{(\alpha)}) := \Psi_\alpha(\infty) = \frac{z}{C_\alpha} + \dots, \end{cases} \quad z \in \mathcal{R}. \quad (0.21)$$

Выбор мультипликативной константы осуществим наложением условий

$$\prod_{\alpha=1}^p C_\alpha = 1, \quad C_1 > 0. \quad (0.22)$$

Определенная таким образом функция Ψ зависит от длин и расположения отрезков $\{E_\alpha\}$, с помощью нее описывается главный член асимптотики полиномов $\{q_{\alpha,n}\}$.

Функции $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^p$, описывающие следующий член асимптотики (аналог функций Сегё), определяются как решение системы граничных задач:

$$\begin{aligned} 1) \quad & f_\alpha, \frac{1}{f_\alpha} \in H_{2, \rho_\alpha}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_\alpha), \quad f_\alpha(\infty) > 0, \quad \alpha = 1, \dots, p, \\ 2) \quad & |f_\alpha(x)|^2 \frac{h_\alpha(x) \rho_\alpha(x)}{|(f_{\alpha+1} f_{\alpha-1})(x)|} = \lambda'_{0, E_\alpha}, \quad x \in E_\alpha, \quad f_0 \equiv f_{p+1} \equiv 1. \end{aligned} \quad (0.23)$$

Ниже мы покажем, что при выполнении условия Сегё (0.18) решение задачи (0.23) существует и единственно.

В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА 1. Существует последовательность многочленов $\{q_{\alpha,n}\}_{\alpha=1}^p$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая системе соотношений ортогональности (0.15) с весовыми функциями, соответствующими условиям (0.16)–(0.18), такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$1) \left\| \frac{q_{\alpha,n}(x)}{|c_\alpha \Phi_\alpha(x)|^n} - \left\{ \left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n F_\alpha(x) + \overline{\left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n F_\alpha(x)} \right\} \right\|_{L^2_{\rho_\alpha}(E_\alpha)} = o(1), \quad (0.24_1)$$

где c_α и $\Phi_\alpha(z)$ определяются с помощью функции $\Psi(z)$ (см. (0.21)):

$$\Phi_\alpha(z) = \prod_{j=\alpha}^p \Psi(z^{(j)}), \quad c_\alpha = \prod_{j=\alpha}^p C_j, \quad (0.25)$$

а функция F_α есть решение граничной задачи (0.23):

$$F_\alpha(z) = \frac{f_\alpha(z)}{f_\alpha(\infty)}, \quad \alpha = 1, \dots, p; \quad (0.26)$$

$$2) \frac{q_{\alpha,n}(z)}{(c_\alpha \Phi_\alpha(z))^n} \rightrightarrows F_\alpha(z), \quad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E_\alpha, \quad (0.24_2)$$

равномерно на компактах K , принадлежащих $\overline{\mathbb{C}} \setminus E_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для нормированных полиномов $\tilde{q}_{\alpha,n}$ (см. (0.11)) теорема устанавливает соотношение

$$\frac{q_{\alpha,n}}{\tilde{q}_{\alpha,n}} = \frac{c_\alpha^n}{f_\alpha(\infty)} (1 + o(1)), \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При наложении дополнительных ограничительных условий положительности и гладкости на весовые функции, например $h_{\alpha,\rho_\alpha} \in C^{1+}(E_\alpha)$, стандартным методом (см. [22] и др.) может быть показано, что асимптотическая формула (0.24₁) справедлива и в равномерной норме $C(E_\alpha)$. Отметим также, что при $p = 1$ ($h_{1,n} \equiv \text{const}$) теорема превращается в классическую теорему Бернштейна–Сегё о сильной асимптотике многочленов, ортогональных с весом $\rho_1(x)$ на отрезке E_1 .

0.4. Единственность q . Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина. В связи с утверждением теоремы 1 остановимся на проблеме единственности многочленов $\{q_{\alpha,n}\}_{\alpha=1}^p$, определяемых системой соотношений ортогональности (0.15):

$$\begin{aligned} q_{\alpha,\mathbf{n}}(x) &= x^{n_\alpha} + \dots, \\ \int_{E_\alpha} q_{\alpha,\mathbf{n}}(x) x^\nu \frac{h_{\alpha,\mathbf{n}}(x) d\sigma_\alpha(x)}{(q_{\alpha-1,\mathbf{n}} q_{\alpha+1,\mathbf{n}})(x)} &= 0, \\ \nu &= 0, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad q_{0,\mathbf{n}} \equiv q_{p+1,\mathbf{n}} \equiv 1, \end{aligned}$$

при фиксированном $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_p)$ и произвольной фиксированной мере $h_{\alpha, \mathbf{n}} d\sigma_{\alpha}$.

Дело в том, что теорема 1 утверждает (при выполнении предельных условий на $h_{\alpha, n}$) существование сильной асимптотики у *некоторой* последовательности решений нелинейной системы (0.15). (Факт существования $\{q_{\alpha, \mathbf{n}}\}_{\alpha=1}^p$, удовлетворяющих (0.15), следует из теоремы Брауэра о неподвижной точке.) Поэтому информация о единственности $\{q_{\alpha, \mathbf{n}}\}_{\alpha=1}^p$ придавала бы теореме 1 более определенный характер.

При $p = 2$ нетрудно показать, что система (0.15) имеет единственное решение для любых $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Действительно, наличие двух решений (q_1, q_2) и $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ выводило бы из соотношений ортогональности (0.15), что рациональная функция $\frac{q_1}{q_2} - \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_2}$ имеет по крайней мере n_1 перемен знака на E_1 , а функция $\frac{q_2}{q_1} - \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1}$ — по крайней мере n_2 перемен знака на E_2 . Тем самым полином $q_1\bar{q}_2 - q_2\bar{q}_1$ степени $n_1 + n_2 - 1$ имел бы по крайней мере n_1 нулей на отрезке E_1 и n_2 нулей на отрезке E_2 , что приводило бы к противоречию.

Однако при $p \geq 3$ проблема единственности $\mathbf{q}$ становится гораздо сложнее и, как показал Д. Н. Туляков, возможно существование нескольких решений системы (0.15).

ПРИМЕР (Д. Н. Туляков). Пусть $d\sigma_{\alpha}(x) = dx$ на отрезках $E_1 \equiv E_3 \equiv [-150, -1]$, $E_2 = [0, 120]$, и пусть

$$h_1 := h_3(x) := \begin{cases} 1, & x \in E_1^* = [-150, -149.990] \cup [-1.0220, -1], \\ 0, & x \in E_1 \setminus E_1^*, \end{cases}$$

$$h_2(x) := \begin{cases} 1, & x \in E_2^* = [0, 0.01333\dots] \cup [119.333\dots, 120], \\ 0, & x \in E_2 \setminus E_2^*. \end{cases}$$

Тогда для $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ существует три набора полиномов $\mathbf{q}^{(\beta)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(1)} &= \{(x + 16.833\dots); (x - 51.7158\dots); (x + 16.833\dots)\}, \\ \mathbf{q}^{(2)} &= \{(x + 4.163\dots); (x - 6.4270\dots); (x + 4.163\dots)\}, \\ \mathbf{q}^{(3)} &= \{(x + 2.757\dots); (x - 2.98\dots); (x + 2.757\dots)\}, \end{aligned}$$

удовлетворяющих системе соотношений ортогональности (0.15).

Остается открытым вопрос о единственности решения системы (0.15) при больших n или о единых формулах сильной асимптотики для всех решений (при выполнении предельных условий (0.16) на $h_{\alpha, n}$).

Тем не менее, если не рассматривать веса $h_{\alpha, n}$ как произвольные, удовлетворяющие лишь (0.16), а учитывать их специфику для фиксированных $\mathbf{n}$, которая в случае систем Никишина задается соотношением (0.12), тогда мы имеем единственность набора полиномов, удовлетворяющих (0.15), (0.12), как следствие единственности полинома совместной ортогональности $Q_{\mathbf{n}}$ для системы Никишина. Тем самым из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 1'. Пусть Q_n есть диагональная $\mathbf{n} = (n, \dots, n)$ последовательность многочленов совместной ортогональности (0.3) для системы Никишина (0.2), порожденной абсолютно непрерывными мерами (0.17) из класса Сегё (0.18). Тогда для Q_n справедливы формулы сильной асимптотики при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\| \frac{Q_n(x)}{|C_1 \Phi_1(x)|^n} - \left\{ \left(\frac{\Phi_1(x)}{|\Phi_1(x)|} \right)^n F_1(x) + \overline{\left(\frac{\Phi_1(x)}{|\Phi_1(x)|} \right)^n F_1(x)} \right\} \right\|_{L^2_{\rho_1}(E_1)} = o(1), \\ 2) \quad & \left\| \frac{Q_n(z)}{(C_1 \Phi_1(z))^n} - F_1(z) \right\|_{C(K)} = o(1) \quad \forall K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_1, \end{aligned}$$

где функции Φ_1 и F_1 определены соотношениями (0.25), (0.26).

0.5. Схема доказательства теоремы 1. Структура статьи. Следующие два параграфа посвящены доказательству теоремы 1. Схема доказательства в общих чертах повторяет схему доказательства сильной асимптотики для случая Анжелеско, предложенную в [11].

Существование последовательности полиномов $\mathbf{q}$, удовлетворяющей системе соотношений ортогональности (0.15) и обладающей сильной асимптотикой (0.24₁), (0.24₂), будет выведено из существования некоторой последовательности полиномов $\mathbf{P}_n$, обладающей сильной асимптотикой (0.24₁), (0.24₂) (но не обязательно удовлетворяющей соотношениям ортогональности). То есть теорема 1 будет получена из более слабого утверждения:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{F_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^p$ есть решение граничной задачи (0.23), (0.26), $\{\Phi_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^n$ — алгебраические функции и $\{C_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ — константы, определяемые (0.21), (0.22), (0.25). Тогда существует последовательность полиномов $\mathbf{P}_n = \{P_\alpha\}_{\alpha=1}^p$, $P_\alpha(x) = x^{n_\alpha} + \dots$, $n_\alpha = n(p - \alpha + 1)$, такая, что

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\| \frac{P_\alpha(x)}{|C_\alpha \Phi_\alpha(x)|^n} - \left\{ \left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n F_\alpha(x) + \overline{\left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n F_\alpha(x)} \right\} \right\|_{L^2_{\rho_\alpha}(E_\alpha)} = o(1), \\ 2) \quad & \left\| \frac{P_\alpha(z)}{(C_\alpha \Phi_\alpha(z))^n} - F_\alpha(z) \right\|_{C(K)} = o(1) \quad \forall K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_1. \end{aligned}$$

Редукции теоремы 1 из теоремы 2 посвящен §1. В нем решения систем граничных задач (0.23) для аналитических функций и систем соотношений ортогональности (0.15) для полиномов рассматриваются как неподвижные точки некоторых нелинейных отображений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$. Для установления справедливости теоремы 1 мы докажем, что в окрестности неподвижной точки отображения $\mathbf{T}$ лежат неподвижные точки отображений $\mathbf{T}_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Параграф 2 посвящен изучению свойств некоторых рациональных функций на римановой поверхности $\mathcal{R}$ (см. (0.19)), с помощью которых конструируется последовательность полиномов, обеспечивающая справедливость теоремы 2.

В заключение работы мы приводим дополнение, посвященное одному экстремальному свойству ортогональных многочленов, полезному для редукций типа перехода от теоремы 2 к теореме 1.

**§ 1. Свойства неподвижных точек преобразований T и T_n .
Доказательство теоремы 1**

1.1. Определение отображения T . Сперва мы опишем пространства, необходимые для задания отображений T и T_n . Будем обозначать через $H_{2,\rho}$ гильбертово пространство векторнозначных аналитических функций, координаты которых принадлежат пространству Харди H_{2,ρ_α} :

$$H_{2,\rho}(\Omega) \ni \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : f_\alpha \in H_{2,\rho_\alpha}(\Omega_\alpha), \Omega_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_\alpha, \alpha = 1, \dots, p,$$

с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{H_{2,\rho}}^2 := \max_{\alpha=1,\dots,p} \|f_\alpha\|_{L_{\rho_\alpha}^2(\Gamma(\Omega_\alpha))}^2 := \max_{\alpha} \oint_{\Gamma(\Omega_\alpha)} |f_\alpha(\xi)|^2 \rho_\alpha(\xi) |d\xi|.$$

Далее, через $H(\Omega)$ обозначаем локально выпуклое пространство векторнозначных аналитических функций

$$H(\Omega) \ni \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : f_\alpha \in H(\Omega_\alpha), \alpha = 1, \dots, p,$$

с семейством норм

$$\|\mathbf{f}\|_{H(\Omega)} := \{\|\mathbf{f}\|_{H(\Omega)}^{(K)}\}_K : \|\mathbf{f}\|_{H(\Omega)}^{(K)} = \max_{\alpha=1,\dots,p} \left\{ \max_{z \in K_\alpha} |f_\alpha(z)| \right\} \quad \forall K = \{K_\alpha\} \Subset \Omega,$$

где K_α — произвольные компакты Ω_α , $\alpha = 1, \dots, p$. Зафиксировав одну из норм $H(\Omega)$, мы получаем нормированное (не полное) пространство, которое будем обозначать $H_K(\Omega)$. Выбрав компакт K с внутренними точками $\overset{\circ}{K} : K = \overset{\circ}{K} \cup \Gamma(\overset{\circ}{K})$, такой, что

$$K = \{K_\alpha\}, \quad K_\alpha : E_{\alpha-1} \cup E_{\alpha+1} \subset \overset{\circ}{K}_\alpha \subset K_\alpha \Subset \Omega_\alpha, \\ \alpha = 1, \dots, p, \quad E_{-1} = E_{p+1} = \emptyset,$$

получаем частный случай пространства $H_K(\Omega)$, который мы будем обозначать

$$H_{\mathbf{E}} \ni \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p); \quad \|\mathbf{f}\|_{H_{\mathbf{E}}} = \max_{\alpha=1,\dots,p} \left\{ \max_{z \in K_\alpha} |f_\alpha(z)| \right\}.$$

Наконец, введем банахово пространство непрерывных векторнозначных функций

$$C_{\mathbf{E}} \ni \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p) : f_\alpha \in C(E_{\alpha-1} \cup E_{\alpha+1}), \alpha = 1, \dots, p, \quad E_{-1} = E_{p+1} = \emptyset,$$

с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{C_{\mathbf{E}}} := \max_{\alpha=1,\dots,p} \left\{ \|f_\alpha\|_{C(E_{\alpha-1} \cup E_{\alpha+1})} \right\}. \quad (1.1)$$

Отметим цепочку включений введенных пространств (как множеств функций):

$$H_{2,\rho} \subset H_{\mathbf{E}} \subset C_{\mathbf{E}}.$$

Конусы введенных пространств, координаты элементов которых есть вещественно симметричные в $\mathbb{C}$, неотрицательные на $\mathbb{R}$ (в областях определения) функции, мы будем обозначать

$$\hat{H}_{2,\rho}, \quad \hat{H}_{\mathbf{E}}, \quad \hat{C}_{\mathbf{E}};$$

соответственно конусы, координаты элементов которых есть вещественно симметричные, не обращающиеся в нуль (положительные на $\mathbb{R}$) функции, мы будем обозначать

$$\hat{H}_{2,\rho}^+, \quad \hat{H}_{\mathbf{E}}^+, \quad \hat{C}_{\mathbf{E}}^+.$$

На конусе $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$ вместе с нормой (1.1) мы также будем рассматривать метрику

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) := \max_{\alpha=1, \dots, p} \{d_{C(E_{\alpha-1} \cup E_{\alpha+1})}(f_{\alpha}, g_{\alpha})\}, \quad (1.2)$$

где

$$d_{C(X)}(f, g) = \max_{x \in X} \left| \ln \frac{f(x)}{g(x)} \right|, \quad f(x), g(x) > 0, \quad x \in X.$$

Кроме того, для координат рассматриваемых вектор-функций, принадлежащих классу Сегё (1.18), мы будем использовать метрику

$$d_{L(X)}(f, g) = \int_X \left| \ln \frac{f(x)}{g(x)} \right| dx.$$

Отметим два обстоятельства, касающиеся введенных норм и метрики на конусе $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$ — открытое множество в топологии нормы, в то же время конус $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$ является полным в метрике d . Действительно, логарифмирование функций из конуса переводит $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$ в C взаимнооднозначно и индуцированная метрика совпадает с метрикой, порожденной нормой C .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Топологии $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$, задаваемые нормой и метрикой, локально согласованы. То есть если $\mathbf{g}$ принадлежит r -окрестности $\mathbf{f} \in \hat{C}_{\mathbf{E}}$ такой, что

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C_{\mathbf{E}}} \leq \theta r, \quad \theta < 1, \quad r(\mathbf{f}) := \left\| \left(\frac{1}{f_1}, \dots, \frac{1}{f_2} \right) \right\|_{C_{\mathbf{E}}}^{-1}, \quad (1.3)$$

то

$$\ln \left(1 + \frac{\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|}{\|\mathbf{f}\|} \right) \leq d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \leq \ln \left(1 + \frac{\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|}{r - \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|} \right).$$

Определим отображение

$$\mathbf{T}: \hat{C}_{\mathbf{E}}^+ \rightarrow \hat{H}_{2,\mathbf{w}}^+,$$

которое каждой функции $\mathbf{f} \in \widehat{H}_{\mathbf{E}}^+$ ставит в соответствие вектор-функцию $\mathbf{Tf} = (Tf_1, \dots, Tf_p)$ из $\widehat{H}_{2, \mathbf{w}}^+$, причем ее координаты удовлетворяют следующей граничной задаче:

$$Tf_\alpha \in \widehat{H}_{2, w_\alpha}^+(\Omega_\alpha), \quad |Tf_\alpha(x)|^2 = \frac{f_{\alpha-1}(x)f_{\alpha+1}(x)}{w_\alpha(x)}, \quad (1.4)$$

$$x \in E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad f_0 \equiv f_{p+1} \equiv 1,$$

где $w_\alpha(x)$ есть некоторая фиксированная интегрируемая на E_α функция, удовлетворяющая условию Сегё (0.18).

1.2. Свойства отображения $\mathbf{T}$. Существование и единственность решения системы граничных задач для аналитических функций. Отображение $\mathbf{T}$ является однозначным в конусе $\widehat{H}^+(\Omega)$, его значения определяются решением задачи Дирихле для гармонической в Ω_α функции $\ln |Tf_\alpha|$ с интегрируемыми на $\Gamma(\Omega_\alpha)$ граничными значениями, равными $\frac{1}{2} \ln(f_{\alpha+1}f_{\alpha-1}/w)$, и последующим решением задачи Коши–Римана нахождения гармонически-сопряженной функции $\ln \widetilde{|Tf_\alpha|}$:

$$Tf_\alpha = \exp\{\ln |Tf_\alpha| + i \ln \widetilde{|Tf_\alpha|}\}.$$

Из свойств решения задачи Дирихле следует (с учетом замечания 1.2), что $\mathbf{T}$ непрерывно, т.е.

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}\|_{C_{\mathbf{E}}} = o(1) \Rightarrow \|\mathbf{Tf}^{(n)} - \mathbf{Tf}\|_{H_{2, \rho}} = o(1) \Rightarrow \|\mathbf{Tf}^{(n)} - \mathbf{Tf}\|_{C_{\mathbf{E}}} = o(1). \quad (1.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Отображение $\mathbf{T}$ является сжатием в метрике d , т.е.*

$$d(\mathbf{Tf}^{(1)}, \mathbf{Tf}^{(2)}) \leq \gamma d(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}), \quad (1.6)$$

где константа $\gamma < 1$ зависит только от расположения отрезков E_α , $\alpha = 1, \dots, p$, удовлетворяющих (0.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для $\mathbf{f} \in \widehat{H}_{2, \rho}^+$

$$\psi := (\psi_1, \dots, \psi_p) := (\ln |f_1|, \dots, \ln |f_p|) \in \mathbf{h}(\Omega) := \bigotimes_{\alpha=1}^p \{\text{Harm}(\Omega_\alpha) \cup L(E_\alpha)\},$$

где компоненты ψ есть гармонические в Ω функции с интегрируемыми граничными значениями.

Отображение $\mathbf{T}: \widehat{H}_{2, \rho}^+ \rightarrow \widehat{H}_{2, \rho}^+$ индуцирует отображение

$$t: \mathbf{h}(\Omega) \rightarrow \mathbf{h}(\Omega),$$

так что

$$t\psi := (\ln |Tf_1|, \dots, \ln |Tf_p|),$$

причем из определения **T** (1.4) имеем

$$t\psi := \frac{1}{2}P\psi + \beta,$$

где через β обозначен вектор гармонических функций:

$$\beta_\alpha(z) \in \text{Harm}(\Omega_\alpha), \quad \beta_\alpha(x) = \ln w_\alpha(x) \text{ п.в. на } E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

а P есть линейный оператор

$$P := \begin{pmatrix} 0 & P_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ P_{2,1} & 0 & P_{2,3} & \dots & \dots \\ 0 & P_{3,2} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & P_{p-1,p} & \dots \\ 0 & \dots & P_{p,p-1} & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

такой, что

$$P_{i,j}: \text{Harm}(\Omega_j) \rightarrow \text{Harm}(\Omega_i)$$

по следующему закону:

$$P_{ij}\psi_j \in \text{Harm}(\Omega_i), \quad P_{ij}\psi_j(x) = \psi_j(x) \text{ п.в. на } E_i,$$

(т.е. оператор P_{ij} по значениям на отрезке $E_i \subset \Omega_j$ гармонической в Ω_j функции ψ_j строит гармоническую в $\Omega_i = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_i$ функцию $P_{ij}\psi_j$).

Из определения отображения t следует, что так же как и **T**, его можно рассматривать на более широком пространстве, а именно

$$t: C_{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{h}(\Omega).$$

Также отметим, что d -метрика (1.2) конуса $\widehat{C}_{\mathbf{E}}^+$ переходит в метрику, задаваемую нормой (1.1) в $C_{\mathbf{E}}$:

$$d(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) = \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{C_{\mathbf{E}}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d(\mathbf{Tf}^{(1)}, \mathbf{Tf}^{(2)}) &= \|t\psi^{(1)} - t\psi^{(2)}\|_{C_{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \|P(\psi^{(1)} - \psi^{(2)})\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|P\| \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| = \frac{\|P\|}{2} d(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что из определения (1.1) нормы $\|\cdot\|_{C_{\mathbf{E}}}$ и принципа максимума для гармонических функций следует

$$\begin{aligned} \|P\psi\| &= \max\{\|P_{1,2}\psi_2\|_{C(E_2)}; \|P_{2,1}\psi_1 + P_{2,3}\psi_3\|_{C(E_1 \cup E_3)}; \dots; \|P_{p,p-1}\psi_{p-1}\|_{C(E_{p-1})}\} \\ &< \max\{\|\psi_2\|_{C(E_1)}; 2 \max\{\|\psi_1\|_{C(E_2)}, \|\psi_3\|_{C(E_2)}\}; \dots; \|\psi_{p-1}\|_{C(E_p)}\} \leq 2\|\psi\|. \end{aligned}$$

Таким образом, существует константа $\delta > 0$, зависящая только от геометрии множества $E = \{E_\alpha\}_{\alpha=1}^p$, такая, что

$$\|P\| \leq 2 - \delta.$$

Полагая $\gamma = 1 - \delta/2$, получаем справедливость предложения 1.1.

Так как конус $\widehat{C}_{\mathbf{E}}^+$ полон в метрике d (см. замечание 1.1), то из предложения 1.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Отображение $\mathbf{T}$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{f}^{(\infty)} \in \hat{H}_{2,\rho}^+$:*

$$\mathbf{f}^{(\infty)} = \mathbf{T}\mathbf{f}^{(\infty)},$$

причем неподвижная точка отображения $\mathbf{T}$ с

$$w_\alpha = \frac{h_\alpha \rho_\alpha}{\lambda_{0,E_\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, p \quad (1.7)$$

(см. (1.4)), является единственным решением системы граничных задач (0.23).

Сделаем два замечания, которые могут оказаться полезными в дальнейшем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Уточним область значений отображения $\mathbf{T}$. На самом деле, эта область не совпадает со всем $\hat{H}_{2,\rho}^+$, а является подмножеством *внешних* функций $\hat{H}_{2,\rho}^+$ (т.е. функций, которые восстанавливаются по граничным значениям своего модуля с помощью решения задачи Дирихле). Таким образом, для любой $\mathbf{w}$ с интегрируемыми и удовлетворяющими условию Сегё координатами неподвижная точка $\mathbf{T}$ лежит в этом подмножестве $\hat{H}_{2,\rho}^+$. Причем, очевидно, верно и обратное: *любая внешняя функция из $\hat{H}_{2,\rho}^+$ может быть представлена как решение системы граничных задач (0.23) с некоторыми интегрируемыми, удовлетворяющими условию Сегё функциями h_α* . Впрочем, данное уточнение не является существенным ввиду того, что внешние функции плотны в $\hat{H}_{2,\rho}^+$. Последнее высказывание легко проверяется в скалярном $\hat{H}_{2,\rho}^+(D)$, где D – единичный круг. В этом случае любая $f(z) \in \hat{H}_{2,\rho}^+(D)$ приближается внешними функциями $f_r(z) = f(rz)$, $r < 1$ при $r \rightarrow 1$. Действительно,

$$\|f - f_r\|^2 = \|f_r\|^2 - \|f\|^2 + 2\langle f, f - f_r \rangle \rightarrow 0,$$

где разность первых двух членов в правой части стремится к нулю по определению пространства $H_{2,\rho}(D)$, а последний член стремится к нулю по теореме Фату (о существовании п.в. предельных некасательных значений). Проверка в $\hat{H}_{2,\rho}^+(\Omega)$ производится так же.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Отметим следующую возможность аппроксимации решения системы граничных задач (0.23). Если $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}^{(m)}$ имеют интегрируемые, удовлетворяющие условию Сегё координаты, то из

$$\|w_\alpha - w_\alpha^{(m)}\|_{L(E_\alpha)} = o(1), \quad d_{L(E_\alpha)}(w_\alpha, w_\alpha^{(m)}) = o(1), \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

следует

$$\|\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}\|_{H_2, \mathbf{w}} = o(1).$$

(В скалярном случае см. [10], [22], доказательство в векторном случае повторяет рассуждения из [11].)

1.3. Определение и свойства отображения $\mathbf{T}_n$. Пусть $H^n(\Omega)$ обозначают n -мерные подпространства $H_{2,\rho}(\Omega)$, элементы которых есть векторы

$$H^n \ni \left(\frac{P_{1,n}(z)}{\Phi_1(z)^n}, \dots, \frac{P_{p,n}(z)}{\Phi_p(z)^n} \right), \quad (1.8)$$

где $P_{\alpha,n} \in \mathcal{P}_{n(p-\alpha+1)}$ — полиномы, $\deg P_{\alpha,n} \leq n_\alpha = n(p-\alpha+1)$, а функции $\Phi_\alpha(z)$ определены в (0.25), $\alpha = 1, \dots, p$.

Соответственно $\hat{H}^{+n}(\Omega)$ есть конус

$$\hat{H}^{+n} \subset H^n,$$

у которого α -я координата элемента может обращаться в нуль только на E_α , $\alpha = 1, \dots, p$. Отметим, что

$$\hat{H}^{+n} \subset \hat{H}_{2,\rho}^+ \subset \hat{H}_{\mathbf{E}}^+ \subset \hat{C}_{\mathbf{E}}^+.$$

С учетом замечания 1.3 сформулированная в п. 0.5 теорема 2 (о существовании последовательности полиномов с заданной асимптотикой) может быть переформулирована так:

ТЕОРЕМА 2'. Семейство конусов $\{\hat{H}^{+n}\}_{n=0}^\infty$ плотно в $\hat{H}_{2,\rho}^+$ в нормах $H(\Omega)$. То есть $\forall \mathbf{f} \in \hat{H}_{2,\rho}^+ \quad \exists \mathbf{f}^{(n)} \in \hat{H}^{+n}$;

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}\|_{H(\Omega)} = o(1)$$

и также справедливо

$$\left\| \frac{\Phi_\alpha^n}{|\Phi_\alpha|^n} f_\alpha^{(n)} - \left\{ \frac{\Phi_\alpha^n}{|\Phi_\alpha|^n} f_\alpha + \frac{\overline{\Phi_\alpha^n}}{|\Phi_\alpha|^n} f_\alpha \right\} \right\|_{L_{2,\rho_\alpha}(E_\alpha)} = o(1), \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Определим отображение

$$\mathbf{T}_n: \hat{C}_{\mathbf{E}}^+ \rightarrow \hat{H}^{+n},$$

которое каждой функции $\mathbf{f} \in \hat{C}_{\mathbf{E}}^+$ ставит в соответствие вектор-функцию $\mathbf{T}_n \mathbf{f} = (T_n f_1, \dots, T_n f_p)$ из $\hat{H}^{+n}$, причем ее координаты удовлетворяют следующей системе соотношений ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} (T_n f_\alpha)(x) \frac{x^\nu}{\Phi_\alpha^n(x)} \frac{\tilde{h}_{\alpha,n}(x) \rho_\alpha(x) dx}{(f_{\alpha-1} f_{\alpha+1})(x)} &= 0, \\ \nu &= 0, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad f_0 \equiv f_{p+1} \equiv 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если рассмотреть сужение этого отображения на $\mathbf{f} = \left\{ \frac{P_{\alpha,n}}{\Phi_\alpha^n} \right\}_{\alpha=1}^p \in \hat{H}^{+n}$,

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{T}_n \mathbf{f} = \left\{ \frac{\tilde{T}_n P_{\alpha,n}}{\Phi_\alpha^n} \right\}_{\alpha=1}^p \in \hat{H}^{+n},$$

и воспользоваться свойством функций $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha=1}^p$:

$$\frac{|\Phi_\alpha(x)|^2}{(\Phi_{\alpha-1}\Phi_{\alpha+1})(x)} = 1, \quad x \in E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad \Phi_0 \equiv \Phi_{p+1} \equiv 1, \quad (1.10)$$

вытекающим из ее определения (0.25) (подробнее см. в §2), то для отображения $\tilde{\mathbf{T}}_n$, индуцированного на конусе $\hat{\mathcal{P}}_n^+$ полиномов $\{P_{\alpha,n}\}_{\alpha=1}^p$, получается представление

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}_n: \hat{\mathcal{P}}_n^+ &\rightarrow \hat{\mathcal{P}}_n^+, \\ \int_{E_\alpha} (\tilde{T}_n P_{\alpha,n})(x) x^\nu \frac{(\tilde{h}_{\alpha,n} \rho_\alpha)(x) dx}{(P_{\alpha-1,n} P_{\alpha+1,n})(x)} &= 0, \\ \nu = 0, \dots, n_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad P_{0,n} &\equiv P_{p+1,n} \equiv 1. \end{aligned} \quad (1.9')$$

При фиксированном n отображения $\tilde{\mathbf{T}}_n$ и соответственно $\mathbf{T}_n$ непрерывны (это следует из непрерывной зависимости коэффициентов ортогонального многочлена от моментов меры ортогональности).

Если рассмотреть сужение $\tilde{\mathbf{T}}_n$ на $\tilde{\mathcal{P}}_n$:

$$\tilde{\mathbf{T}}_n[\hat{\mathcal{P}}_n^+] \subset \tilde{\mathcal{P}}_n \subset \hat{\mathcal{P}}_n^+,$$

элементы $\tilde{\mathcal{P}}_n$ представить как $x = \{x_j^{(\alpha)}\}_{j=1}^{n_\alpha} \in \tilde{\mathcal{P}}_n$,

$$\{x_j^{(\alpha)}\}_{j=1}^{n_\alpha} \subset E_\alpha, \quad x_1^{(\alpha)} < x_2^{(\alpha)} < \dots < x_{n_\alpha}^{(\alpha)} \quad \forall \alpha = 1, \dots, p,$$

где $\{x_j^{(\alpha)}\}$ есть нули полинома $P_{\alpha,n}$, и ввести на $\mathbb{R}^{\sum_{\alpha=1}^p n_\alpha}$ координаты, в которых

$$x + y = \left\{ \frac{1}{2}(x_j^{(\alpha)} + y_j^{(\alpha)}) \right\}_{j=1}^{n_\alpha},$$

то $\tilde{\mathcal{P}}_n$ будет выпуклым, замкнутым, ограниченным подмножеством конечномерного пространства, переходящим в себя под действием непрерывного отображения $\tilde{\mathbf{T}}_n$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{T}}_n$ и соответственно $\mathbf{T}_n$ по теореме Брауэра имеют неподвижную точку для любого n . *Неподвижная точка $\tilde{\mathbf{T}}_n$ является вектором полиномов $\mathbf{q}$, удовлетворяющих системе соотношений ортогональности (1.9'), (ср. (0.15)).*

Близость неподвижных точек отображений $\mathbf{T}$ и $\tilde{\mathbf{T}}_n$ при $n \rightarrow \infty$ и является предметом нашего исследования.

При выполнении условия

$$\|\tilde{h}_{\alpha,n} - h_\alpha\|_{C(E_\alpha)} = o(1), \quad (1.11)$$

где $\tilde{h}_{\alpha,n}$ из (1.9), h_α из (1.4), (1.7), плотность семейства конусов $\{\hat{H}^{+n}\}$ в $\hat{H}_{2,\rho}^+$ (теорема 2') обеспечивает следующие свойства близости отображений $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{T}$ при $n \rightarrow \infty$. Первое из этих свойств также может быть названо “асимптотика многочленов, ортогональных с заданным переменным весом” или локальная (“поточечная”) близость $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{T}$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть для отображений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$ выполняется (1.11). Тогда из

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}\|_{C(\mathbf{E})} = o(1) \quad (1.12)$$

следует

$$\|\mathbf{T}_n \mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{H(\Omega)} = o(1) \quad (1.13)$$

и также справедливо

$$\left\| \frac{\Phi_\alpha^n}{|\Phi_\alpha|^n} T_n f_\alpha^{(n)} - \left\{ \frac{\Phi_\alpha^n}{|\Phi_\alpha|^n} T f_\alpha + \overline{\frac{\Phi_\alpha^n}{|\Phi_\alpha|^n} T f_\alpha} \right\} \right\|_{L_{2,\rho_j}(E_j)} = o(1), \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала из (1.12) мы выведем (1.14), затем из (1.14) получим (1.13).

Доказываем (1.14). Введем обозначение

$$\widehat{f}_\alpha := \{e^{in\theta_\alpha} f_\alpha + \overline{e^{in\theta_\alpha} f_\alpha}\},$$

где

$$\theta_\alpha(x) = \arg \Phi_\alpha(x), \quad x \in E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Возьмем существующую по теореме 2' последовательность $\mathbf{g}^{(n)} \in \widehat{H}^{+n}$ такую, что

$$1) \quad \|\mathbf{g}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{H(\Omega)} = o(1), \quad (1.15)$$

$$2) \quad \|e^{in\theta_\alpha} g_\alpha^{(n)} - \widehat{T f_\alpha}\|_{L_{2,\rho_\alpha}(E_\alpha)} = o(1), \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (1.16)$$

Применим к левой части (1.14) неравенство треугольника

$$\begin{aligned} & \|e^{in\theta_\alpha} T_n f_\alpha^{(n)} - \widehat{T f_\alpha}\|_{L_{2,\rho_\alpha}} \\ & \leq \|e^{in\theta_\alpha} T_n f_\alpha^{(n)} - \widehat{T f_\alpha^{(n)}}\|_{L_{2,\rho_\alpha}} + \|\widehat{T f_\alpha^{(n)}} - \widehat{T f_\alpha}\|_{L_{2,\rho_\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ввиду (1.11) и (1.12) для первого слагаемого в правой части справедливо при больших n :

$$\begin{aligned} & \|e^{in\theta_\alpha} T_n f_\alpha^{(n)} - \widehat{T f_\alpha^{(n)}}\|_{L_{2,\rho_\alpha}} \\ & \asymp \int_{E_\alpha} |e^{in\theta_\alpha(x)} T_n f_\alpha^{(n)}(x) - \widehat{T f_\alpha^{(n)}}(x)|^2 \left(\frac{\tilde{h}_{\alpha,n} \rho_\alpha}{f_{\alpha-1}^{(n)} f_{\alpha+1}^{(n)}} \right) (x) dx \\ & = \int_{E_\alpha} \left| \frac{P_{\alpha,n}(x)}{|\Phi_\alpha(x)|^n} - \widehat{T f_\alpha^{(n)}}(x) \right|^2 \left(\frac{\tilde{h}_{\alpha,n} \rho_\alpha}{f_{\alpha-1}^{(n)} f_{\alpha+1}^{(n)}} \right) (x) dx. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Поскольку полином $P_{\alpha,n}$ является ортогональным относительно веса

$$\frac{h_{\alpha,n}\rho_{\alpha}}{\Phi_{\alpha-1}^n f_{\alpha-1}^{(n)} \Phi_{\alpha+1}^n f_{\alpha+1}^{(n)}},$$

а Tf_{α} есть функция Сегё, соответствующая весу

$$\frac{h_{\alpha,n}\rho_{\alpha}}{f_{\alpha-1}^{(n)} f_{\alpha+1}^{(n)}},$$

то из экстремальности ортогональных полиномов, воспроизводящего свойства функции Сегё и (1.10) следует, что значение интеграла, стоящего в правой части (1.18), может только увеличиться, если в него подставить вместо $P_{\alpha,n}$ какой-нибудь другой полином той же степени и с тем же старшим коэффициентом (подробнее см. §3).

Таким образом, заменяя в левой части (1.18) функции $T_n f_{\alpha}^{(n)}$ на функции $g_{\alpha}^{(n)}$, удовлетворяющие (1.16), мы получаем

$$\begin{aligned} \|e^{in\theta_{\alpha}} T_n f_{\alpha}^{(n)} - \widehat{T f_{\alpha}^{(n)}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}} &\lesssim \|e^{in\theta_{\alpha}} g_{\alpha}^{(n)} - \widehat{T f_{\alpha}^{(n)}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}} \\ &\leq \|e^{in\theta_{\alpha}} g_{\alpha}^{(n)} - \widehat{T f_{\alpha}^{(n)}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}} + \|\widehat{T f_{\alpha}^{(n)}} - \widehat{T f_{\alpha}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (1.17), для достаточно больших n имеем

$$\|e^{in\theta_{\alpha}} T_n f_{\alpha}^{(n)} - \widehat{T f_{\alpha}}\|_{L_{2,\rho}(E_{\alpha})} \lesssim \|e^{in\theta_{\alpha}} g_{\alpha}^{(n)} - \widehat{T f_{\alpha}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}} + 2\|\widehat{T f_{\alpha}^{(n)}} - \widehat{T f_{\alpha}}\|_{L_{2,\rho_{\alpha}}},$$

где первое слагаемое в правой части стремится к нулю в силу (1.16), а стремление к нулю второго слагаемого обеспечивается (1.12) и непрерывностью $\mathbf{T}$ – (1.5) (см. замечания 1.4 и 1.2, также детали можно найти в доказательстве соотношения (5.10) из [11]).

Таким образом, (1.14) доказано.

Для доказательства (1.13) заметим, что ввиду (1.14) справедливо

$$\|g^{(n)} - \mathbf{T}_n f^{(n)}\|_{H_{2,\rho}} = o(1)$$

и, следовательно, по интегральной формуле Коши

$$\|g^{(n)} - \mathbf{T}_n f^{(n)}\|_{H(\Omega)} = o(1),$$

откуда с учетом (1.15) следует справедливость (1.13).

Предложение 1.2 доказано.

Следствием доказанного предложения и принципа компактности для аналитических функций является глобальная (“равномерная”) близость $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть для отображений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$ выполняется (1.11). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{T}_n \mathbf{f} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{C_E} \rightarrow 0$$

равномерно по $\mathbf{f} \in H_E$ таким, что $\|\mathbf{f}\|_{H_E} \leq C \quad \forall C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N$ и $\forall \mathbf{f}, \|\mathbf{f}\|_{H_E} \leq C$, справедливо

$$\|\mathbf{T}_n \mathbf{f} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{C_E} \leq \varepsilon.$$

Докажем от противного. Пусть сформулированное выше утверждение неверно. То есть $\exists \varepsilon > 0, \exists \Lambda$ – бесконечная последовательность индексов и $\exists \mathbf{f}^{(n)}, \|\mathbf{f}^{(n)}\|_{H_E} \leq C, n \in \Lambda$:

$$\|\mathbf{T}_n \mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}^{(n)}\|_{C_E} > \varepsilon \quad \forall n \in \Lambda, \quad (1.19)$$

но так как $\|\mathbf{f}^{(n)}\|_{H_E} \leq C$, то последовательность $\{\mathbf{f}^{(n)}\}_{n \in \Lambda}$ по теореме Монделя есть компактное семейство на E и, следовательно, существуют $\Lambda' \subseteq \Lambda$ и $\mathbf{f} \in C(E)$ такие, что

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}\|_{C_E} \rightarrow 0, \quad n \in \Lambda',$$

и, следовательно, по подпоследовательности Λ' мы имеем

$$\|\mathbf{T}_n \mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}^{(n)}\|_{C_E} \leq (\|\mathbf{T}_n \mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{C_E} + \|\mathbf{T} \mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{T} \mathbf{f}\|_{C_E}) \rightarrow 0,$$

где первое слагаемое в правой части стремится к нулю по предложению 1.2, а второе стремится к нулю ввиду непрерывности $\mathbf{T}$ (см. (1.5)). Получили противоречие с (1.19).

Предложение 1.3 доказано.

1.4. Асимптотическая близость неподвижных точек отображений $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{T}$. Доказательство теоремы 1. Свойство сжатия в d -метрике отображения $\mathbf{T}$ (предложение 1.1) и свойство “равномерной” близости при больших n отображений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$ (предложение 1.3), вытекающее из плотности конусов $\hat{H}^{+n}$ в $\hat{H}_{2,\rho}^+$ (теорема 2'), позволяют убедиться, что в любую окрестность неподвижной точки $\mathbf{T}$ при $n \rightarrow \infty$ попадают неподвижные точки $\mathbf{T}_n$. Что по сути является утверждением, эквивалентным сформулированной во введении теореме 1.

ТЕОРЕМА 1''. Пусть для отображений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_n$ выполняется (1.11). Тогда существует последовательность неподвижных точек $\mathbf{T}_n$:

$$\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{T}_n \mathbf{f}^{(n)}, \quad \mathbf{f}^{(n)} = \left(\frac{q_{1,n}}{\Phi_1^n}, \dots, \frac{q_{p,n}}{\Phi_p^n} \right), \quad (1.20)$$

такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{f}^{(n)} - \mathbf{f}^{(\infty)}\|_{C_E} \rightarrow 0, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{f}^{(\infty)}$ есть неподвижная точка отображения $\mathbf{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\theta < 1$. Пусть ω есть замкнутая окрестность $\mathbf{f}^{(\infty)}$ в $C_{\mathbf{E}}$ -норме такая, что

$$\|\mathbf{f}^{(\infty)} - g\|_{C(\mathbf{E})} \leq \theta r(\mathbf{f}^{(\infty)}) \quad \forall g \in \omega, \quad (1.22)$$

где $r(\mathbf{f}^{(\infty)})$ определено в замечании 1.2, см. (1.3). Рассмотрим семейство ω_ε замкнутых окрестностей $\mathbf{f}^{(\infty)}$ в d -метрике такое, что

$$d(\mathbf{f}^{(\infty)}, g) \leq \varepsilon \quad \forall g \in \omega_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

где ε_0 выбирается из условия

$$\omega_{\varepsilon_0} \subset \omega \quad (1.23)$$

(поскольку $\mathbf{f}^\infty$ — из конуса положительных непрерывных функций $\hat{C}_{\mathbf{E}}^+$, то такое ε_0 существует).

Определим

$$\omega_{\varepsilon,n} := \omega_\varepsilon \cap \hat{H}^{+n}.$$

Множество $\omega_{\varepsilon,n}$ является замкнутым, ограниченным (т.е. компактным) подмножеством конечномерного пространства. По теореме 2' множество $\omega_{\varepsilon,n}$ непусто. Кроме того, непосредственно проверяется, что $\omega_{\varepsilon,n}$ выпукло. (Действительно, $\omega_{\varepsilon,n}$ состоит из векторов вида (1.8), графики координат которых лежат в “трубке” с осью вдоль графика $\mathbf{f}^\infty$. Элементы $t\mathbf{g}^{(1)} + (1-t)\mathbf{g}^{(2)}$, $\mathbf{g}^{(1)}, \mathbf{g}^{(2)} \in \omega_{\varepsilon,n}$ и $t \in [0, 1]$, сохраняют вид (1.8), и поточечная проверка показывает, что их графики остаются зажатыми в “трубке”.)

Покажем, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon$ выполняется

$$\mathbf{T}_n[\omega_{\varepsilon,n}] \subset \omega_{\varepsilon,n}. \quad (1.24)$$

Действительно, так как элементы $g \in \omega_{\varepsilon,n}$ ограничены в $\hat{H}_{\mathbf{E}}^+$, то из предложения 1.3 с учетом согласованности нормы и метрики в $\omega_{\varepsilon,n}$ (ввиду (1.23), (1.22); см. Замечание 1.2) следует, что $\exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon, \forall g \in \omega_{\varepsilon,n}$ справедливо

$$d(\mathbf{T}_n g, \mathbf{T}g) < (1 - \gamma)\varepsilon,$$

где γ определено в (1.6). Теперь с учетом предложения 1.1 (см. (1.6)) имеем

$$d(\mathbf{f}^\infty, \mathbf{T}_n g) \leq d(\mathbf{f}^\infty, \mathbf{T}g) + d(\mathbf{T}g, \mathbf{T}_n g) < \gamma d(\mathbf{f}^\infty, g) + (1 - \gamma)\varepsilon < \varepsilon,$$

что доказывает (1.24). Отсюда по теореме Брауэра о неподвижной точке следует справедливость теоремы 1''.

Справедливость теоремы 1, сформулированной во введении, теперь получается применением к последовательности неподвижных точек (1.20), (1.21) предложения 1.2.

Осталось отметить, что если в определении отображения $\mathbf{T}_n: \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{T}_n \mathbf{f}$ (см. (1.9)) весовую функцию $\{\tilde{h}_{\alpha,n}\}_{\alpha=1}^p$ задавать, как и для систем Никишина, с помощью формулы (0.12):

$$\tilde{h}_{\alpha,n}(\mathbf{f}; x) := \int_{E_\alpha} \frac{f_{\alpha-1}^2(t)}{x-t} \frac{\tilde{h}_{\alpha-1,n}(\mathbf{f}; t)}{f_{\alpha-2}(t)f_\alpha(t)} d\sigma_{\alpha-1}(t), \quad \alpha = 2, \dots, p; \quad \tilde{h}_{1,n} := 1, \quad (1.25)$$

то, ввиду того что предельные соотношения (0.14) обеспечивают (1.11), получаем, что отображение (1.9), (1.25) удовлетворяет условиям теоремы 1''. С учетом единственности многочленов Эрмита–Паде Q_n для системы Никишина (см. введение) определенное таким образом $\mathbf{T}_n$ имеет единственную неподвижную точку. Тем самым (в предположении справедливости теоремы 2) также получаем *справедливость теоремы 1'*.

§ 2. Свойства некоторых рациональных на $\mathcal{R}$ функций. Доказательство теоремы 2

2.1. Свойства функций $\Psi(z)$, $\Phi(z)$. В этом пункте мы изучим свойства функции Ψ , задающей главные члены асимптотики – функции $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ (см. (0.25)). Функция $\Psi(z)$ была определена нами во введении как рациональная функция на римановой поверхности $\mathcal{R}$ (см. (0.19), (0.20)) с дивизором (0.21).

Сначала отметим общие свойства функций с дивизором (0.21), рациональных на $(p+1)$ -листных римановых поверхностях с квадратичными точками ветвления в концах отрезков $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^p$, т.е. свойства, не зависящие от группы монодромии римановой поверхности (0.20).

1) Нетрудно проверить, что эти алгебраические функции удовлетворяют уравнению

$$\Psi^{p+1} + r_1(z)\Psi^p + r_2(z)\Psi^{p-1} + \dots + r_p(z)\Psi + r_0 = 0 \quad (2.1)$$

с полиномиальными коэффициентами $r_k(z)$:

$$\deg r_k = k, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad r_0 = (-1)^p.$$

Отметим, что хотя коэффициенты $\{r_k\}_{k=1}^p$ однозначно связаны с дивизором и группой монодромии, тем не менее, их конструктивное определение по этим данным является нетривиальной задачей.

2) Нас будет интересовать множество I комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, на котором различные ветви функции $\Psi(z)$:

$$\Psi_l(z) := \Psi(z^{(l)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad z^{(l)} \in \overline{\mathcal{R}}_l, \quad l = 0, 1, \dots, p,$$

имеют одинаковый модуль:

$$I := \left\{ z : \left| \frac{\Psi_{l_1}}{\Psi_{l_2}} \right| = 1; \quad l_1 \neq l_2; \quad l_1, l_2 = 0, 1, \dots, p \right\}.$$

Множество I может быть описано как объединение траекторий всех корней $z(\nu)$ уравнения

$$J(\nu, z) := \prod_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_1 > l_2}}^{p+1} \left(\nu - \left(\frac{\Psi_{l_1}}{\Psi_{l_2}} + \frac{\Psi_{l_2}}{\Psi_{l_1}} \right) \right) = 0 \quad (2.2)$$

при $\nu \in [-2, 2]$. Коэффициенты уравнения алгебраической функции $\nu(z)$ являются симметрическими функциями от $\{\Psi_l\}_{l=0}^p$, и, следовательно, приводя их к элементарным симметрическим функциям от $\{\Psi_l\}_{l=0}^p$, коими являются полиномы $\{r_k\}_{k=0}^p$ из (2.1), убеждаемся, что эти коэффициенты также есть полиномы от z :

$$J(\nu, z) = \nu^{m_p} + S_{m_p-1}(z)\nu^{m_p-1} + \dots = \sum_{k=0}^{m_p} S_k(z)\nu^k, \quad m_p = \frac{p(p+1)}{2}, \quad (2.3)$$

причем с учетом степени r_m имеем

$$\max_{k=0, \dots, m_p} \deg S_k = p(p+1). \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что алгебраическая функция $z(\nu)$ имеет $p(p+1)$ ветвей. Таким образом, множество I (комплексной плоскости z) представляет собой объединение $p(p+1)$ траекторий $\{I_j\}_{j=1}^{p(p+1)}$, стартующих в точках $z(2)$ и приходящих в точки $z(-2)$.

Рассмотрим множество стартовых точек $\{z_j\}$ и множество конечных точек $\{d_j\}$ (как геометрические множества без учета кратностей):

$$\{z_j\} : J(2, z_j) = 0; \quad \{d_j\} : J(-2, d_j) = 0.$$

Полином $J(2, z)$ является дискриминантом алгебраической функции (2.1), в его корнях должны совпадать значения некоторых двух различных ветвей функции $\Psi(z)$:

$$\exists k, l, \quad k \neq l : \quad \Psi_k(z_j) = \Psi_l(z_j).$$

Число корней полинома $J(2, z)$ с учетом их кратностей равно $p(p+1)$. Из них $2p$ корней однократных, являющихся точками ветвления $\Psi(z)$ в концах отрезков $E_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$, остальные имеют большую (четную) кратность, так как в них $\Psi(z)$ не ветвится. То есть

$$\{z_j\} = \{a_\alpha, b_\alpha\}_{\alpha=1}^p \cup \{c_j\}_{j=1}^{u_p},$$

где

$$u_p \leq \frac{(p+1)p-2p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}. \quad (2.5)$$

Полином $J(-2, z)$ является квадратом симметрической функции от $\{\Psi_l\}_{l=0}^p$, см. (2.2), поэтому его корни имеют четную кратность,

$$\{d_j\}_{j=1}^{v_p} : \quad \exists k, l, \quad k \neq l : \quad \Psi_k(d_j) = -\Psi_l(d_j),$$

где

$$v_p \leq \frac{p(p+1)}{2}. \quad (2.6)$$

Итак, множество I представляет собой объединение $p(p+1)$ траекторий (возможно, имеющих общие точки, но не имеющих участков совпадения). $2p$ траекторий по одной выходят из концов E_α , $\alpha = 1, \dots, p$ (и идут вдоль отрезка E_α , пока не закончатся в какой-либо из точек d_j или, вообще говоря, пока не встретят траекторию, идущую навстречу вдоль E_α , после чего эти две траектории уходят сопряженным образом в комплексную плоскость). Остальные траектории попарно выходят из точек c_j (и идут либо в разные стороны по действительной оси, либо сопряженным образом уходят в комплексную плоскость). Заканчиваются все траектории попарно в точках d_j .

Отметим еще раз, что все вышесказанное касается произвольных $(p+1)$ -листных римановых поверхностей с квадратичными точками ветвления в a_α, b_α , $\alpha = 1, \dots, p$, и не учитывает специфику группы монодромии (0.20).

Теперь мы перейдем к конкретной, ассоциированной с системой Никишина римановой поверхности (0.19) с группой монодромии (0.20). Оказывается, в этом случае (в отличие от римановых поверхностей, ассоциированных с системой Анжелеско и с системами марковских функций на пересекающихся отрезках, см. [11], [18]) геометрия I тривиальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеет место соотношение*

$$I = \bigcup_{\alpha=1}^p E_\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по определению (0.21)

$$\Psi_0(z) \in \widehat{H}^+(\mathbb{C} \setminus E_1), \quad \Psi_0(z)|_\infty = \frac{1}{C_0 z^p} + \dots,$$

то из принципа аргумента следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_{E_1} \operatorname{Arg} \Psi_0 = p,$$

т.е. Ψ_0 на E_1 по крайней мере в $p+1$ точке принимает чисто действительные значения (с учетом концевых точек a_1 и b_1), и по крайней мере в p точках E_1 предельные значения Ψ_0 сверху и снизу будут чисто мнимыми. Отсюда с учетом вещественной симметричности $\Psi(z)$,

$$\Psi_0(x) = \overline{\Psi_1(x)}, \quad x \in E_1,$$

следует, что внутри отрезка E_1 должно находиться по крайней мере $p-1$ точек из $\{c_j\}$, см. (2.5), и p точек из $\{d_j\}$, см. (2.6),

$$\begin{aligned} c_{j_k} \in E_1 : \quad \Psi_0(c_{j_k}) &= \Psi_1(c_{j_k}), \quad k = 1, \dots, k_1, \quad k_1 \geq p-1, \\ d_{j_s} \in E_1 : \quad \Psi_0(d_{j_s}) &= -\Psi_1(d_{j_s}), \quad s = 1, \dots, s_1, \quad s_1 \geq p, \end{aligned}$$

а также отметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_{E_1} \text{Arg } \Psi_1 = -p. \quad (2.7)$$

Далее, так как из определения $\Psi(z)$, см. (0.21), имеем

$$\Psi_1(z) \in \widehat{H}^+(\mathbb{C} \setminus \{E_1 \cup E_2\}), \quad \Psi_1(z)|_\infty = \frac{z}{C_1} + \dots,$$

то по принципу аргумента

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_{E_1 \cup E_2} \text{Arg } \Psi_1 = -1,$$

а следовательно, с учетом (2.7)

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_{E_2} \text{Arg } \Psi_1 = p - 1,$$

что обязывает находиться внутри E_2 по крайней мере $p - 2$ точек из $\{c_j\}$ и $p - 1$ точек из $\{d_j\}$, а также отметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_{E_2} \text{Arg } \Psi_2 = -(p - 1).$$

Таким образом, двигаясь по α от 1 до m , получаем, что

$$\begin{aligned} c_{j_k(\alpha)} \in E_\alpha : \quad \Psi_\alpha(c_{j_k(\alpha)}) &= \Psi_{\alpha-1}(c_{j_k(\alpha)}), \quad k = 1, \dots, k_\alpha, \quad k_\alpha \geq p - \alpha, \\ d_{j_s(\alpha)} \in E_\alpha : \quad \Psi_\alpha(d_{j_s(\alpha)}) &= \Psi_{\alpha-1}(d_{j_s(\alpha)}), \quad s = 1, \dots, s_\alpha, \quad s_\alpha \geq p - \alpha + 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

и, следовательно, общее число точек $\{c_j\}$ и $\{d_j\}$ ограничено снизу:

$$u_p = \sum_{\alpha=1}^p k_\alpha \geq \frac{p(p-1)}{2}, \quad v_p = \sum_{\alpha=1}^p s_\alpha \geq \frac{(p+1)p}{2}.$$

Поэтому с учетом общей оценки сверху (2.5), (2.6) получаем

$$\begin{aligned} u_p = \frac{p(p-1)}{2} &\Rightarrow k_\alpha = p - \alpha, \\ v_p = \frac{(p+1)p}{2} &\Rightarrow s_\alpha = p - \alpha + 1, \end{aligned} \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Итак, доказали, что множества точек $\{c_j\}$ и $\{d_j\}$ размещены внутри отрезков $\{E_\alpha\}_1^p$ в количестве $k_\alpha = p - \alpha$ и $s_\alpha = p - \alpha + 1$ на каждом. То есть множество I представляет собой объединение $p(p+1)$ траекторий (2.2), которые в количестве $2(p - \alpha) + 2$ стартуют (при $\nu = 2$) из $p - \alpha + 2$ точек каждого отрезка E_α , $\alpha = 1, \dots, m$ (по одной траектории из концов a_α, b_α и по две траектории из точек

$c_{j_k^{(\alpha)}} \in E_\alpha$, см. (2.8)), и заканчиваются (при $\nu = -2$) в $p - \alpha + 1$ точках *того же* (с которого стартовали) отрезка E_α (по две траектории в каждой точке $d_{j_s^{(\alpha)}} \in E_\alpha$); в точках этих траекторий $|\Psi_\alpha| = |\Psi_{\alpha-1}|$.

Отметим два важных момента.

Во-первых, *траектории, стартовавшие с отрезка E_α , не могут пересекать действительную ось вне отрезка E_α* , так как в точках множества $\mathbb{R} \setminus E_\alpha$ одна из функций Ψ_α или $\Psi_{\alpha-1}$ принимает действительные значения, а следовательно, пересечение рассматриваемой траекторией множества $\mathbb{R} \setminus E_\alpha$ означало бы появление новой точки e , в которой либо

$$\Psi_\alpha(e) = \Psi_{\alpha-1}(e), \quad \text{либо} \quad \Psi_\alpha(e) = -\Psi_{\alpha-1}(e),$$

что противоречило бы (2.8) и (2.4).

Во-вторых, *траектории, стартовавшие с отрезка E_α , не могут уходить с E_α в комплексную плоскость*, потому что ввиду вещественной симметричности функций $z(\nu)$ (см. (2.3)) такие траектории вместе с обязательно существующими в этом случае симметричными (комплексно сопряженными) траекториями по возвращении на E_α образовали бы границу области, в которой гармонические функции $|\Psi_\alpha(z)|$ и $|\Psi_{\alpha+1}|$ обязаны были бы совпадать по принципу максимума, что приводило бы к противоречию.

Поэтому траектории, образующие I , стартуют в точках $a_\alpha, b_\alpha, c_{j_k^{(\alpha)}}, k = 1, \dots, p - \alpha$, каждого отрезка E_α , $\alpha = 1, \dots, p$, и идут (при $\nu: 2 \rightarrow -2$) по отрезку E_α (по одной из a_α, b_α и по две в разные стороны из $c_{j_k^{(\alpha)}}$) и заканчиваются (по две с разных сторон) в точках $d_{j_s^{(\alpha)}}, s = 1, \dots, p - \alpha + 1$, перемежающихся с точками $c_{j_k^{(\alpha)}}$ (см. рис. 1).

Рис. 1

Тем самым, $I = \bigcup_{\alpha=1}^p E_\alpha$ и

$$|\Psi_{l-1}(x)| = |\Psi_l(x)|, \quad x \in E_\alpha,$$

и, более того, если $|l - k| > 1$, $l, k = 1, \dots, p$, то

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\Psi_k(z)| \neq |\Psi_l(z)|. \quad (2.9)$$

Предложение 2.1 доказано.

Непосредственно из доказанного предложения вытекает важное для дальнейшего

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любой точки комплексной плоскости справедливо

$$|\Psi_0(z)| \leq |\Psi_1(z)| \leq \dots \leq |\Psi_p(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (2.10)$$

причем знак равенства между $|\Psi_{l-1}(z)|$ и $|\Psi_l(z)|$ достигается только при $z \in E_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $\Psi(z)$ (0.21) имеем

$$|\Psi_0(\infty)| < |\Psi_1(\infty)|,$$

и, следовательно, по (2.9) (с учетом непрерывности $|\Psi_l|$ в $\mathbb{C}$, $l = 0, \dots, p$)

$$\begin{aligned} |\Psi_0(z)| &< |\Psi_1(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_1, \\ |\Psi_0(x)| &= |\Psi_1(x)| < |\Psi_2(x)|, \quad x \in E_1 \end{aligned} \quad (2.11_1)$$

(последнее неравенство верно ввиду того, что при наличии обратного неравенства из (0.21) следовало бы, что $\exists \tilde{z} \in \overline{\mathbb{C}} : |\Psi_0(\tilde{z})| = |\Psi_2(\tilde{z})|$, что противоречит (2.9)). Из последнего неравенства (2.11₁) в силу непрерывности следует, что

$$|\Psi_1(z)| < |\Psi_2(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_2, \quad (2.11_2)$$

$$|\Psi_1(x)| = |\Psi_2(x)| < |\Psi_3(x)|, \quad x \in E_2 \quad (2.11_3)$$

(наличие обратного неравенства в (2.11₃) означало бы ввиду (2.9), что $|\Psi_3(z)| < |\Psi_1(z)| \forall z \in \mathbb{C}$, что приводило бы к противоречию с (2.11₃) и к равенству $|\Psi_2(x)| = |\Psi_3(x)|$ при $x \in E_3$).

Продолжая проведенные рассуждения при $l = 1, \dots, p$, получаем

$$|\Psi_{l-1}(z)| < |\Psi_l(z)|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E_l.$$

Предложение 2.2 доказано.

В заключение пункта отметим свойства главного члена асимптотики – функций $\{\Phi_\alpha(z)\}_{\alpha=1}^p$ (см. (0.25)):

$$\Phi_\alpha(z) := \prod_{l=\alpha}^p \Psi_l(z), \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Непосредственно из определения следует:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Phi_\alpha \in \widehat{H}^+(\mathbb{C} \setminus E_\alpha), \\ 2) \quad & \Phi_\alpha(z) \Big|_{z=\infty} \simeq \frac{z^{p-\alpha+1}}{c_\alpha}, \quad c_\alpha = \prod_{l=\alpha}^p C_l, \\ 3) \quad & |\Phi_\alpha(x)|^2 \frac{1}{|\Phi_{\alpha-1}(x) \Phi_{\alpha+1}(x)|} = 1, \quad x \in E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.12)$$

(как обычно, по соглашению $\Phi_{p+1} \equiv \Phi_0 \equiv 1$).

Поясним справедливость свойства 3) из (2.12). Из определения $\{\Phi_\alpha\}$ имеем

$$\frac{\Phi_\alpha}{\Phi_{\alpha-1}} = \frac{1}{\Psi_{\alpha-1}},$$

откуда при $\alpha = 2, 3, \dots, p$ с учетом

$$\Psi_\alpha(x) = \overline{\Psi_{\alpha-1}(x)}, \quad x \in E_\alpha, \quad (2.13)$$

следует

$$\frac{|\Phi_\alpha(x)|^2}{|(\Phi_{\alpha-1}\Phi_{\alpha+1})(x)|} = \left| \frac{\Psi_\alpha(x)}{\Psi_{\alpha-1}(x)} \right| = 1, \quad x \in E_\alpha, \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

При $\alpha = 1$ ввиду (2.13), а также учитывая, что $\prod_{l=0}^p \Psi_l \equiv 1$ (см. (0.22)), получаем

$$\frac{|\Phi_1(x)|^2}{|\Phi_2(x)|} = |\Psi_1(x)|^2 \prod_{l=2}^p |\Psi_l(x)| = \left| \prod_{l=0}^p \Psi_l(x) \right| = 1, \quad x \in E_1.$$

2.2. Полиномы Бернштейна–Сегё для $\mathcal{R}$. Доказательство теоремы 2.

В этом пункте мы докажем теорему 2, сформулированную во введении (см. п. 0.5). Напомним, что нам для этого нужно. Для произвольного фиксированного набора (неотрицательных, интегрируемых и удовлетворяющих условию Сегё на $\mathbf{E}$) весовых функций $\mathbf{w} = \{w_\alpha\}_{\alpha=1}^p$, порождающих решение граничной задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \{f_\alpha\} \in \widehat{H}_{2,w}^+(\Omega), \\ \left(\frac{|f_\alpha|^2 w_\alpha}{|f_{\alpha+1} f_{\alpha-1}|} \right)(x) &= 1, \quad x \in E_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad f_0 \equiv f_{p+1} \equiv 1, \end{aligned} \quad (2.14)$$

нужно построить последовательность полиномов

$$\mathbf{P}_n = \{P_\alpha\}_{\alpha=1}^p, \quad P_\alpha(z) = z^{n_\alpha} + \dots, \quad n_\alpha = n(p - \alpha + 1),$$

такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\| \frac{P_\alpha(x)}{|c_\alpha \Phi_\alpha(x)|^n} - \left\{ \left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n \frac{f_\alpha(x)}{f_\alpha(\infty)} + \overline{\left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n \frac{f_\alpha(x)}{f_\alpha(\infty)}} \right\} \right\|_{L_{w_\alpha}^2(E_\alpha)} = o(1), \\ 2) \quad & \left\| \frac{P_\alpha(z)}{(c_\alpha \Phi_\alpha(z))^n} - \frac{f_\alpha(z)}{f_\alpha(\infty)} \right\|_{H(\Omega_\alpha)} = o(1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Построение полиномов $\mathbf{P}_n$ будет происходить по следующей схеме.

А) Сначала мы построим последовательность специальных весовых функций $\{w_j^{(m)}\}_{j=1}^p$, аппроксимирующих $\mathbf{w}$ в интегральной норме и d_L -метрике: при $m \rightarrow \infty$

$$\|w_j^{(m)} - w\|_{L(E_j)} = o(1), \quad \left\| \ln \frac{w_j^{(m)}}{w} \right\|_{L(E_j)} = o(1), \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.16)$$

Для этих специальных весов решение граничной задачи (2.14) может быть выписано в явном виде с помощью некоторых рациональных на $\mathcal{R}$ функций $\{f_j^{(m)}\}_{j=1}^p$. С учетом замечания 1.4 при $m \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{f}\|_{H_{2,\mathbf{w}}(\Omega)} = o(1). \quad (2.16')$$

В) Затем для произвольного фиксированного m мы строим последовательность полиномов

$$\mathbf{P}_n^{(m)} = \{P_\alpha^{(m)}\}_{\alpha=1}^p, \quad P_\alpha^{(m)}(z) = z^{n_\alpha} + \dots, \quad n_\alpha = n(p - \alpha + 1), \quad n \geq N_m,$$

такую, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\| \frac{P_\alpha^{(m)}(x)}{|c_\alpha \Phi_\alpha(x)|^n} - \left\{ \left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n \frac{f_\alpha^{(m)}(x)}{f_\alpha^{(m)}(\infty)} + \overline{\left(\frac{\Phi_\alpha(x)}{|\Phi_\alpha(x)|} \right)^n \frac{f_\alpha^{(m)}(x)}{f_\alpha^{(m)}(\infty)}} \right\} \right\|_{C(E_\alpha)} = O(C_{E_\alpha}^n), \quad (2.17) \\ 2) \quad & \left\| \frac{P_\alpha^{(m)}(z)}{(c_\alpha \Phi_\alpha(z))^n} - \frac{f_\alpha^{(m)}(z)}{f_\alpha^{(m)}(\infty)} \right\|_{C(K)} = O(C_K^n), \end{aligned}$$

где

$$C_{E_\alpha}, C_K < 1 \quad \forall K \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

При $p = 1$ полиномы $P^{(m)}$ будут совпадать с полиномами, введенными С. Н. Бернштейном (в случае отрезка) и Г. Сегё (в случае окружности) при доказательстве формул сильной асимптотики для обычных ортогональных многочленов.

Наконец, при условии реализации шагов А) и В) мы немедленно получаем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ положительных чисел, монотонно стремящуюся к нулю:

$$\varepsilon_k > 0, \quad \varepsilon_k \searrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для каждого k выберем такое m_k , что правая часть в (2.16') меньше чем $\varepsilon_k/2$. Затем для каждого m_k выберем N_k так, что $\forall n > N_k$ правые части обеих асимптотических формул в (2.17) меньше чем $\varepsilon_k/2$. Искомая последовательность полиномов $\mathbf{P}_n$ теперь может быть определена так:

$$\mathbf{P}_n := \mathbf{P}_n^{(m_k)}, \quad n \in [N_k, N_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N};$$

очевидно (неравенство треугольника), что для $\mathbf{P}_n$ справедливы асимптотические формулы (2.15).

Теорема 2 доказана.

Итак, нам осталось реализовать шаги А) и В).

Зафиксируем произвольное $\alpha \in \{1, \dots, p\}$. Приступим к построению полинома $P_\alpha^{(m)}$, удовлетворяющего (2.17).

А1) *Построение* $\{w_j^{(m)}\}_{j=1}^p$. Нам придется использовать три различные конструкции при $j = \nu \in \{\alpha + 1, \dots, p\}$, при $j = k \in \{1, \dots, \alpha - 1\}$ и при $j = \alpha$.

Пусть $\nu \in \{\alpha + 1, \dots, p\}$. Определим

$$w_\nu^{(m)}(x) := \frac{1}{t^{(\nu)}(x)}, \quad x \in E_\nu, \quad t^{(\nu)}(z) = C_{\nu, m_\nu} \prod_{\mu=1}^{m_\nu} (z - z_{\mu, m_\nu}), \quad (2.18_1)$$

где $t^{(\nu)}(z)$ — полином на $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. “рациональная функция на римановой поверхности $\overline{\mathbb{C}}$ с полюсом кратности m_ν в бесконечности и с m_ν нулями (с учетом кратностей), расположенными в конечных точках”. По теореме Вейерштрасса полином $t^{(\nu)}$ выберем так, чтобы $w_\nu^{(m)}$ аппроксимировало w_ν с требуемой точностью (т.е. чтобы (2.16) выполнялось).

Пусть $k \in \{1, \dots, \alpha - 1\}$. Определим

$$w_k^{(m)}(x) := \frac{1}{\tilde{t}_{k-1}^{(k)}(x)}, \quad x \in E_k, \quad (2.18_2)$$

где $\tilde{t}_{k-1}^{(k)}$ есть $(k-1)$ -я ветвь функции $\tilde{t}^{(k)} \in \mathfrak{M}(r^{(k)})$, рациональной на k -листной римановой поверхности

$$r^{(k)} := \bigcup_{l=0}^{k-1} r_l^{(k)}, \quad r_l^{(k)} \equiv \mathcal{R}_l, \quad l = 0, \dots, k-1.$$

Риманова поверхность $r^{(k)}$ (листья занумерованы: $r_l^{(k)}$, $l = 0, \dots, k-1$) по определению представляет собой первые k листов поверхности $\mathcal{R}$ без точек ветвления в проекциях концов отрезка E_k на $(k-1)$ -й лист $\mathcal{R}_{k-1}$. Функция $\tilde{t}^{(k)}$ определяется своим дивизором:

$$\tilde{t}^{(k)} \in \mathfrak{M}(r^{(k)}) : \begin{cases} \tilde{t}^{(k)}(z) = \infty, & z|_{\infty(0)} = c_{k, m_k} z^{m_k} + \dots, \\ \tilde{t}^{(k)}(z) = 0, & z \in \{\tilde{z}_{\mu, m_k}\}_{\mu=1}^{m_k}, \end{cases} \quad (2.19)$$

где нули $\{\tilde{z}_{\mu, m_k}\}_{\mu=1}^{m_k}$ “полинома” $\tilde{t}^{(k)}$ на римановой поверхности $r^{(k)}$ выбираются так, чтобы (по теореме Вейерштрасса–Лаврентьева) на последнем листе поверхности $r^{(k)}$ в точках проекции E_k на $r_{k-1}^{(k)}$ “полином” $\tilde{t}^{(k)}$ аппроксимировал функцию

$1/w_k(x)$ с требуемой для выполнения (2.16) точностью $(t_{k-1}^{(k)}(z) := t^{(k)}(z^{(k-1)}), z := \pi_{r^{(k)}}(z^{(k-1)}), z^{(k-1)} := \pi_{r_{k-1}^{(k)}}^{-1}(z))$.

Наконец, определим

$$w_\alpha^{(m)}(x) := \frac{[\psi_{\alpha-1}^{(\alpha)}(x)]^{M_\alpha}}{\tilde{t}_{\alpha-1}^{(\alpha)}(x)}, \quad M_\alpha = \sum_{\nu=\alpha+1}^p m_\nu, \quad x \in E_\alpha,$$

где $\psi_{\alpha-1}^{(\alpha)}$ есть значение на последнем листе стандартной рациональной функции $\psi^{(\alpha)}$ на $r^{(\alpha)}$, определяемой дивизором:

$$\psi^{(\alpha)}(z) \in \mathfrak{M}(r^{(\alpha)}) : \begin{cases} \psi^{(\alpha)}(z) = \infty, & z \in \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}, \dots, \infty^{(\alpha-1)}\}, \\ \psi^{(\alpha)}(z) = 0, & z \in \{(\infty^{(0)})^{\alpha-1}\}, \end{cases}$$

$$\prod_{l=0}^{\alpha-1} \psi_l^{(\alpha)} = 1, \quad \psi_l^{(\alpha)}(z) = \psi^{(\alpha)}(z^{(l)}), \quad l = 0, \dots, \alpha-1$$

(отметим, что $\psi^{(p+1)} = \Psi$, см. (0.21)), а $\tilde{t}_{\alpha-1}^{(\alpha)}$ есть $(\alpha-1)$ -я ветвь функции $\tilde{t}^{(\alpha)}$, рациональной на $r^{(\alpha)}$, определяемой своим дивизором, аналогичным (2.19), где нули “полинома” $\tilde{t}^{(\alpha)}$ на $r^{(\alpha)}$ выбираются так, чтобы $\tilde{t}_{\alpha-1}^{(\alpha)}$ аппроксимировала $[\psi_{\alpha-1}^{(\alpha)}]^{M_\alpha}/w_\alpha$ с требуемой для выполнения (2.16) точностью.

Отметим, что аппроксимация весов w_j при $j \neq \alpha$ производится независимо друг от друга. Вместе с тем, аппроксимация w_α осуществляется после аппроксимации $w_\nu, \nu = \alpha+1, \dots, p$, и аппроксимант $\tilde{t}^{(\alpha)}$ зависит от суммы степеней аппроксимантов $t^{(\nu)}$. Однако это обстоятельство не вносит осложнений.

Также отметим, что при $\alpha = 1$ имеем $\psi^{(1)} \equiv 1$ и определение $w_\alpha^{(m)}$ совпадает с (2.18₁), а при $\alpha = p$ имеем $M_\alpha = 0$ и определение $w_\alpha^{(m)}$ совпадает с (2.18₂).

A2) *Решение граничной задачи для $\{w_j^{(m)}\}$. Определение $\{f_j^{(m)}(z)\}_{j=1}^p$.* Построим на $\mathcal{R}$ рациональную функцию $g(z)$, следующим образом задавая ее нули и полюсы.

Все нули каждого из полиномов $t^{(\nu)}, \nu = \alpha+1, \dots, p$, размещаются на *каждом* листе $\mathcal{R}_l, l = 0, \dots, \nu-1$, т.е.

$$z_{\mu, m_\nu}^{(l)} = \pi_{\mathcal{R}_l}^{-1}(z_{\mu, m_\nu}), \quad \mu \in \{1, \dots, m_\nu\}, \quad l = 0, \dots, \nu-1, \quad \nu = \alpha+1, \dots, p.$$

Все нули каждого из “полиномов” $\tilde{t}^{(k)}, k = 1, \dots, \alpha$, переносятся на *соответствующие* листы $\mathcal{R}$, т.е.

$$r_l^{(k)} \ni \tilde{z}_{\mu, m_k} \rightarrow \tilde{z}_{\mu, m_k} \in \mathcal{R}_l, \quad \mu \in \{1, \dots, m_k\}, \quad l = 0, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, \alpha.$$

На листах $\mathcal{R}_l, l = \alpha, \dots, p-1$, полюсы размещены в точках $(\infty^{(l)})$, их кратность равна числу нулей на $\mathcal{R}_l$. Все остальные полюсы (с учетом кратности), делающие $g(z)$ рациональной на $\mathcal{R}$, помещены в точку $\infty^{(0)}$.

Таким образом, $g(z)$ определена своим дивизором:

$$g(z) \in \mathfrak{M}(\mathcal{R}) : \begin{cases} g(z) = \infty, \\ z \in \{(\infty^{(0)})^{\sum_{k=1}^{\alpha} m_k + \alpha M_{\alpha}}, (\infty^{(\alpha)})^{\sum_{\nu=\alpha+1}^p m_{\nu}}, \\ (\infty^{(\alpha+1)})^{\sum_{\nu=\alpha+2}^p m_{\nu}}, \dots, (\infty^{(p-1)})^{m_p}\}, \\ g(z) = 0, \\ z \in \{\{\tilde{z}_{\mu, m_k}\}_{\mu=1}^{m_k}, k = 1, \dots, \alpha\}; \\ \{\{z_{\mu, m_{\nu}}^{(l)}\}_{\mu=1}^{m_{\nu}}, l = 0, \dots, \nu - 1, \nu = \alpha + 1, \dots, p\}\}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Выберем нормировку в определении $g(z)$ так, чтобы выполнялось

$$\prod_{l=0}^p g_l = \prod_{k=1}^{\alpha} t^{(k)} \cdot \prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu}, \quad (2.21)$$

где через $t^{(k)}$ обозначен полином на $\mathbb{C}$:

$$t^{(k)} = \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{t}_l^{(k)}.$$

В связи с нормировкой отметим одно полезное для дальнейшего тождество:

$$\prod_{k=1}^{\alpha} t^{(k)} = \prod_{k=1}^{\alpha} \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{t}_l^{(k)} = \prod_{l=0}^{\alpha-1} \prod_{k=l+1}^{\alpha} \tilde{t}_l^{(k)}.$$

Кроме функций $g(z)$, $\tilde{t}^{(k)}$ и $t^{(\nu)}$ для определения $\{f_j^{(m)}(z)\}_{j=1}^p$ нам потребуется еще одна рациональная на $r^{(\alpha)}$ функция $\tilde{T}^{(\alpha)}$:

$$\tilde{T}^{(\alpha)} \in \mathfrak{M}(r^{(\alpha)}) : \begin{cases} \tilde{T}^{(\alpha)}(z) = \infty, \\ z \in \{(\infty^{(0)})^{\alpha M_{\alpha}}\}, \\ \tilde{T}^{(\alpha)}(z) = 0, \\ z \in \{\{z_{\mu, m_{\nu}}^{(l)}\}_{\mu=1}^{m_{\nu}}, \nu = \alpha + 1, \dots, p, l = 0, \dots, \alpha - 1\}. \end{cases}$$

В связи с функцией $\tilde{T}^{(\alpha)}$ отметим еще одно полезное для дальнейшего тождество:

$$\tilde{T}^{(\alpha)}(\psi^{(\alpha)})^{M_{\alpha}} = T^{(\alpha)} := \prod_{\nu=\alpha+1}^p t^{(\nu)}. \quad (2.22)$$

(Тождество (2.22) становится очевидным, если полином $T^{(\alpha)}$, заданный на $\overline{\mathbb{C}}$, аналитически продолжить на $r^{(\alpha)}$, продублировав его значения на каждом листе $r_l^{(\alpha)}$, $l = 0, \dots, \alpha - 1$.)

Определим набор функций $\{f_j^{(m)}\}$:

$$f_j^{(m)} := \begin{cases} g_p, & j = p, \\ g_p \prod_{l=j}^{p-1} \frac{g_l}{\prod_{\nu=l+1}^p t^{(\nu)}}, & j = \alpha, \dots, p-1, \\ g_p \left(\prod_{l=\alpha}^{p-1} \frac{g_l}{\prod_{\nu=l+1}^p t^{(\nu)}} \right) \prod_{l=j}^{\alpha-1} \frac{g_l}{\tilde{T}_l^{(\alpha)} \prod_{k=l+1}^{\alpha} \tilde{t}_l^{(k)}}, & j = 1, \dots, \alpha-1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Проверим, что $\{f_j^{(m)}\}_{j=1}^p$ являются решением граничной задачи (2.14) с весами $\{w_j^{(m)}\}$.

Во-первых, убедимся, что $f_j^{(m)} \in \hat{H}^+(\Omega_j)$. Действительно, последовательное умножение ветвей g в определении $f_j^{(m)}$ “снимает” точки ветвления с последних листов $\mathcal{R}$ (римановой поверхности g), а последовательное деление на полиномы $t^{(\nu)}$ и соответствующие ветви $\tilde{t}^{(k)}$ и $\tilde{T}^{(\alpha)}$ “снимает” нули и полюсы с этих листов $\mathcal{R}$. В результате $f_j^{(m)}(z)$ оказывается аналитической в $\mathbb{C}$ функцией с точками ветвления в концах отрезка E_j и без нулей и полюсов на главном листе ее римановой поверхности, т.е. в Ω функция $f_j^{(m)}$ есть однозначная, аналитическая, не обращающаяся в нуль функция.

Во-вторых, убедимся, что $\{f_j^{(m)}\}_{j=1}^p$ удовлетворяют граничным условиям (2.14). Воспользуемся тем, что полиномы, приближающие вещественные функции, можно выбирать с вещественными коэффициентами, тогда алгебраические функции g , $\tilde{t}^{(k)}$ и $\tilde{T}^{(\alpha)}$ также можно считать вещественно симметричными. Поэтому на E_l справедливо:

$$|g_l^2(x)| = |(g_l g_{l-1})(x)|, \quad x \in E_l, \quad l = 1, \dots, p.$$

При $j = \alpha + 1, \dots, p$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{|f_p^{(m)}(x)|^2}{|f_{p-1}^{(m)}(x)|} &= \left| \left(\frac{g_p^2 t^{(p)}}{g_p g_{p-1}} \right) (x) \right| = t^{(p)}(x) = \frac{1}{w_p^{(m)}(x)}, \quad x \in E_p, \\ \frac{|f_j^{(m)}(x)|^2}{|(f_{j-1} f_{j+1})(x)|} &= \left| \left(\frac{g_j \prod_{\nu=j}^p t^{(\nu)}}{g_{j-1} \prod_{\nu=j+1}^p t^{(\nu)}} \right) (x) \right| = t^{(j)}(x) = \frac{1}{w_j^{(m)}(x)}, \quad x \in E_j, \\ j &= \alpha + 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

При $j = \alpha$ с учетом тождества (2.22) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|f_\alpha^{(m)}(x)|^2}{|(f_{\alpha-1} f_{\alpha+1})(x)|} &= \left| \left(\frac{g_\alpha [\prod_{l=\alpha+1}^{p-1} \prod_{\nu=l+1}^p t^{(\nu)}]^2 \prod_{\nu=\alpha+1}^p t^{(\nu)} \tilde{T}_{\alpha-1}^{(\alpha)} \tilde{t}_{\alpha-1}^{(\alpha)}}{g_{\alpha-1} [\prod_{l=\alpha}^{p-1} \prod_{\nu=l+1}^p t^{(\nu)}]^2} \right) (x) \right| \\ &= \frac{\tilde{T}_{\alpha-1}^{(\alpha)} \tilde{t}_{\alpha-1}^{(\alpha)}}{T^{(\alpha)}} = \frac{1}{w_\alpha^{(m)}(x)}, \quad x \in E_\alpha. \end{aligned}$$

При $j = 2, \dots, \alpha - 1$ с учетом вещественной симметричности $\tilde{t}^{(k)}$ и $\tilde{T}^{(\alpha)}$:

$$|\tilde{T}_j^{(\alpha)}(x)| = |\tilde{T}_{j-1}^{(\alpha)}(x)|, \quad |\tilde{t}_j^{(k)}(x)| = |\tilde{t}_{j-1}^{(k)}(x)|, \quad x \in E_j, \quad k = j+1, \dots, \alpha,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{|f_j^{(m)}(x)|^2}{|(f_{j-1}f_{j+1})(x)|} &= \left| \left(\frac{g_j \tilde{T}_{j-1}^{(\alpha)} \prod_{k=j}^{\alpha} \tilde{t}_{j-1}^{(k)}}{g_{j-1} \tilde{T}_j^{(\alpha)} \prod_{k=j+1}^{\alpha} \tilde{t}_j^{(k)}} \right) (x) \right| \\ &= \tilde{t}_{j-1}^{(j)}(x) = \frac{1}{w_j^{(m)}(x)}, \quad x \in E_j, \quad j = 2, \dots, \alpha - 1. \end{aligned}$$

Наконец, при $j = 1$ наряду с вещественной симметричностью функций g , $\tilde{t}^{(k)}$ и $\tilde{T}^{(\alpha)}$, учитывая их нормировки (см. (2.21)), имеем при $x \in E_1$

$$\begin{aligned} \frac{|f_1^{(m)}(x)|^2}{|f_2^{(m)}(x)|} &= \left| \left(\frac{g_1^2 g_2 \cdots g_p \prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha} \prod_{l=2}^{\alpha-1} \tilde{T}_l^{(\alpha)} \prod_{l=2}^{\alpha-1} \prod_{k=l+1}^{\alpha} \tilde{t}_l^{(k)}}{[\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha}]^2 [\prod_{l=1}^{\alpha-1} \tilde{T}_l^{(\alpha)}]^2 [\prod_{l=1}^{\alpha-1} \prod_{k=l+1}^{\alpha} \tilde{t}_l^{(k)}]^2} \right) (x) \right| \\ &= \left| \left(\frac{\prod_{k=1}^{\alpha} \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{t}_l^{(k)}}{\prod_{k=2}^{\alpha} (\tilde{t}_1^{(k)})^2 \prod_{l=2}^{\alpha-1} \prod_{k=l+1}^{\alpha} \tilde{t}_l^{(k)}} \right) (x) \right| \\ &= \tilde{t}_0^{(1)} = \frac{1}{w_1^{(m)}(x)}, \quad x \in E_1. \end{aligned}$$

Таким образом, построенные нами функции $\{f_j^{(m)}\}_{j=1}^p$ (см. (2.23)) являются решением граничной задачи (2.14) с весовыми функциями $\{w_j^{(m)}\}_{j=1}^p$ (см. (2.18)), которые, в свою очередь, аппроксимируют произвольный набор $\{w_j\}_{j=1}^p$ интегрируемых, удовлетворяющих условию Сегё функций.

B1) *Определение полиномов $P_{\alpha}^{(m)}$, их асимптотика.* Возьмем следующую рациональную на $\mathcal{R}$ функцию:

$$\chi(z) := g(z) \cdot \Psi^n(z),$$

где g и Ψ определены выше (см. (2.20) и (0.21)). Обозначим

$$S_{\nu}(\chi; z) := \sum_{0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{\nu} \leq p} \prod_{l=0}^{\nu} \chi_{i_l}(z), \quad \nu = 0, 1, \dots, p. \quad (2.24)$$

Элементарные симметрические функции $S_{\nu}(\chi)$ от ветвей алгебраической функции χ являются однозначными функциями в $\overline{\mathcal{C}}$, и ввиду того что полюсы χ находятся только над точкой ∞ , получаем, что $S_{\nu}(z)$ являются полиномами.

Определим $\tilde{P}_{\alpha}^{(m)}$ как

$$\tilde{P}_{\alpha}^{(m)} := \frac{S_{p-\alpha}}{\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha}}. \quad (2.25)$$

Убедимся, что, во-первых, рациональная функция $\tilde{P}_\alpha^{(m)}$ является полиномом, а во-вторых, $\deg \tilde{P}_\alpha^{(m)} = n(p - \alpha + 1)$.

Действительно, $S_{p-\alpha}$ есть полином и каждое слагаемое в (2.24) обращается в нуль (с учетом кратностей) в нулях полинома $\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha}$ (по определению функций χ и g , см. (2.20)). Степень полинома $\tilde{P}_\alpha^{(m)}$ оценивается рассмотрением порядка полюса в бесконечности для каждого слагаемого

$$\frac{\prod_{l=0}^{\nu} g_{i_l} \Psi_{i_l}^n}{\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha}}, \quad 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_\nu \leq p, \quad (2.26)$$

в определении (2.25), (2.24). При $\sum_{k=1}^{\alpha} m_k + \alpha \sum_{\nu=\alpha+1}^p m_k - pn \leq n$ степень $\tilde{P}_\alpha^{(m)}$ оценивается степенью полюса в бесконечности у слагаемого

$$\left(\frac{\prod_{j=\alpha}^p g_j \Psi_j^n}{\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)})^{\nu-\alpha}} \right) (x) \Big|_{z=\infty} = O(z^{n(p-\alpha+1)}).$$

Таким образом, при

$$n \geq \frac{\widetilde{M}_\alpha + \alpha M_\alpha}{(p+1)}, \quad \widetilde{M}_\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha} m_k, \quad M_\alpha = \sum_{\nu=\alpha+1}^p m_\nu,$$

определенная в (2.25) функция является полиномом $\tilde{P}_\alpha^{(m)}$ степени $n(p - \alpha + 1)$.

Осталось проверить, что при $n \rightarrow \infty$ построенные полиномы после нормировки имеют асимптотику (2.17). Действительно, из свойства (2.10) ветвей функции Ψ (см. предложение 2.2) следует, что в области Ω_α главный вклад в асимптотику при $n \rightarrow \infty$ дает одно слагаемое из (2.26):

$$\tilde{P}_\alpha^{(m)}(z) = \frac{\prod_{j=\alpha}^p g_j(z)}{\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)}(z))^{\nu-\alpha}} \prod_{j=\alpha}^p \Psi_j^n(z) + o\left(\prod_{j=\alpha}^p \Psi_j^n(z)\right), \quad z \in \Omega_\alpha,$$

причем $o(\cdot)$ убывает на компактах Ω_α равномерно с экспоненциальной скоростью. Нормируя полученное соотношение и обращаясь к определению функций Φ_α и $f_\alpha^{(m)}$ (см. (0.25) и (2.23)), получаем, что для полиномов

$$P_\alpha^{(m)}(z) := \frac{\tilde{P}_\alpha^{(m)}(z)}{\tilde{P}_\alpha^{(m)}(\infty)}$$

выполняется асимптотическая формула 2) из (2.17). На отрезке E_α вклад в асимптотику дают два слагаемых из (2.26):

$$\tilde{P}_\alpha^{(m)}(x) = \frac{\prod_{j=\alpha+1}^p g_j(x) \Psi_j^n(x)}{\prod_{\nu=\alpha+1}^p (t^{(\nu)}(x))^{\nu-\alpha}} [g_\alpha(x) \Psi_\alpha^n(x) + g_{\alpha-1}(x) \Psi_{\alpha-1}^n(x) + o(\Psi_\alpha^n(x))],$$

$$x \in E_\alpha,$$

откуда, используя вещественную симметричность g и Ψ :

$$g_\alpha(x) = \overline{g_{\alpha-1}(x)}, \quad \Psi_\alpha(x) = \overline{\Psi_{\alpha-1}(x)}, \quad x \in E_\alpha,$$

а также определения $\Phi_\alpha, f_\alpha^{(m)}$, получаем

$$\tilde{P}_\alpha^{(m)}(x) = f_\alpha^{(m)}(x)\Phi_\alpha^n(x) + \overline{f_\alpha^{(m)}(x)\Phi_\alpha^n(x)} + o(\Phi_\alpha^n(x)), \quad x \in E_\alpha,$$

что после нормировки дает асимптотическую формулу 1) из (2.17).

Таким образом, полиномы, удовлетворяющие (2.17) для произвольного фиксированного α , построены. Это же построение проводится для всех остальных α из $\{1, 2, \dots, p\}$. Тем самым доказательство теорем 2 и 1 полностью завершено.

§ 3. Добавление. Об одном экстремальном свойстве ортогональных многочленов

В этом параграфе мы приведем одно экстремальное свойство многочленов, определяемых соотношениями ортогональности. Это свойство является полезным инструментом при доказательстве сильных асимптотик (см., например, [11]). Сначала мы продемонстрируем его для обыкновенных ортогональных многочленов, затем для многочленов, ортогональных относительно переменного, зависящего от номера многочлена, веса.

Пусть

$$q_n(x) = x^n + \dots, \quad \int_a^b q_n(x) x^\nu \rho(x) dx = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.1})$$

— многочлен, ортогональный на отрезке $E = [a, b]$ относительно веса $\rho(x)$,

$$\int_a^b \ln \rho(x) \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} > -\infty,$$

удовлетворяющего условию Сегё.

Обозначим через $F(x)$ *функцию Сегё* веса $\rho(x)$, определяемую как решение граничной задачи

$$\begin{aligned} F(x) &:= \frac{f(z)}{f(\infty)}, \\ 1) \quad f, \frac{1}{f} &\in H_{2,\rho}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E), \quad f(\infty) > 0, \\ 2) \quad |f(x)|^2 \rho(x) &= \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x \in E = [a, b]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Главный член асимптотики полиномов $q_n(z)$ обозначим через $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) := z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (E = [-1, 1]).$$

Напомним, что $\Phi(z)$ может быть описана с помощью комплексного логарифмического потенциала

$$v_\lambda(z) := V_\lambda(z) + i\widetilde{V_\lambda(z)}, \quad V_\lambda(z) := \int_a^b \ln \frac{1}{|z-x|} d\lambda(x),$$

равновесной меры $\lambda(x)$ отрезка E , которая характеризуется свойством равновесия

$$V_\lambda(x) = \gamma, \quad x \in E.$$

В этих обозначениях

$$\Phi(z) = C(E)e^{-v_\lambda(z)}, \quad C(E) := e^\gamma. \quad (\text{A.3})$$

Также обозначим

$$\mathcal{F}_n(x) := \Phi^n(x)F(x) + \overline{\Phi^n(x)F(x)}, \quad x \in E. \quad (\text{A.4})$$

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.1. Пусть q_n есть ортогональный многочлен (А.1), а C , $\mathcal{F}_n$ определены условиями (А.2)–(А.4). Тогда для любого многочлена $P_n(x) = x^n + \dots$ справедливо

$$\left\| \frac{q_n(x)}{C^n} - \mathcal{F}_n(x) \right\|_{L_{2,\rho}(E)} \leq \left\| \frac{P_n(x)}{C^n} - \mathcal{F}_n(x) \right\|_{L_{2,\rho}(E)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{q_n(x)}{C^n} - \mathcal{F}_n(x) \right\|_{L_{2,\rho}(E)}^2 \\ &= \frac{1}{C^n} \int_a^b |q_n(x)|^2 \rho(x) dx - 2 \operatorname{Re} \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n} \overline{\mathcal{F}_n(x)} \rho(x) dx + \int_a^b |\mathcal{F}_n|^2 \rho(x) dx \\ &=: I_1(q_n) + 2 \operatorname{Re} I_2(q_n) + I_3. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ввиду экстремального свойства ортогональных полиномов

$$I_1(q_n) \leq I_1(p_n).$$

С учетом тождества

$$\overline{\Phi(x)} = \frac{1}{\Phi(x)}$$

и вещественной симметричности функций Φ и F второй интеграл в (А.5) представим в виде

$$\begin{aligned} I_2(q_n) &= \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n \Phi^n(x)} \overline{F(x)} \rho(x) dx + \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n} \frac{F(x)}{\overline{\Phi^n(x)}} \rho(x) dx \\ &= \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n \Phi_+^n(x)} \overline{F_+(x)} \rho(x) dx + \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n \Phi_-^n(x)} \overline{F_-(x)} \rho(x) d(-x), \end{aligned}$$

где знаком “+” помечены граничные значения аналитической функции при подходе к отрезку сверху, соответственно “−” означает граничные значения на нижнем берегу отрезка E . Таким образом,

$$I_2(q_n) = \oint_E \frac{q_n(\xi)}{C^n \Phi^n(\xi)} \overline{F(\xi)} \rho(\xi) |d\xi|.$$

Откуда ввиду воспроизводящего свойства функции Сегё $F(z)$ (см., например, [22; с. 165]):

$$\forall H(z) \in H_{2,\rho}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E) \quad H(\infty) = \frac{1}{\mu} \oint_E H(\xi) \overline{F(\xi)} \rho(\xi) |d\xi|,$$

где

$$\mu = \oint_E |F(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi|,$$

с учетом того, что

$$C^n \Phi^n(z) \Big|_{z=\infty} = z^n + \dots, \quad \frac{q_n}{C^n \Phi^n}, \frac{P_n}{C^n \Phi^n} \in H_{2,\rho}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E),$$

следует

$$I_2(q_n) = I_n(P_n) = \mu.$$

Осталось заметить, что последний интеграл I_3 в (А.5) не зависит от q_n . Предложение А.1 доказано.

Теперь рассмотрим аналогичное экстремальное свойство для многочленов $q_n(x) = x^n + \dots$, ортогональных относительно переменного веса $w_n(x) \rho(x)$,

$$\int_E q_n(x) x^\nu w_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad w_n \in C(E), \quad (\text{А.6})$$

удовлетворяющего условиям существования равномерных на E пределов:

$$\begin{aligned} (w_n(x))^{1/n} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x), \quad \varphi(x) > 0, \quad x \in E; \\ \frac{w_n(x)}{\varphi^n(x)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{А.7})$$

Определим аналоги функций Φ и F из (А.3) и (А.2). Через λ_φ обозначим сосредоточенную на отрезке E равновесную меру задачи равновесия логарифмического

потенциала во внешнем поле $\ln \varphi(x)$. Эта мера однозначно задается соотношением равновесия на E :

$$V_{\lambda_\varphi} + \frac{1}{2} \ln \varphi \begin{cases} = \gamma, & x \in \operatorname{supp} \lambda_\varphi, \\ > \gamma, & x \in E \setminus \operatorname{supp} \lambda_\varphi. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

По аналогии с (A.3) обозначим

$$\Phi(x) := C e^{-v_{\lambda_\varphi}(z)}, \quad v_{\lambda_\varphi}(z) := V_{\lambda_\varphi}(z) + i \widetilde{V_{\lambda_\varphi}}(z), \quad C := e^\gamma.$$

Пусть внешнее поле таково, что носитель равновесной меры задачи (A.8) является отрезком E ,

$$\operatorname{supp} \lambda_\varphi = E = [a, b], \quad (\text{A.9})$$

и пусть $\psi(x)$ из (A.7) удовлетворяет условию Сегё на E :

$$\int_a^b \ln(\psi(x)\rho(x)) \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \quad (\text{A.10})$$

Как и ранее (см. (A.2)), обозначим через $F(z)$ функцию Сегё для веса $\psi\rho$ на E , т.е.

$$F(z) := \frac{f(z)}{f(\infty)},$$

$$1) \quad f, \frac{1}{f} \in H_{2,\psi\rho}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E), \quad f(\infty) > 0,$$

$$2) \quad |f(x)|^2 \psi(x)\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x \in E,$$

а также обозначим

$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{\Phi^n(x)}{|\Phi^n(x)|} F(x) + \overline{\frac{\Phi^n(x)}{|\Phi^n(x)|} F(x)}.$$

Наконец, напомним формулу А. А. Гончара и Е. А. Рахманова (см. [23]) асимптотики корня n -й степени полиномов (A.6), (A.7):

$$|q_n(z)|^{1/n} \Rightarrow \exp\{-V_{\lambda_\varphi}(z) + \gamma\}, \quad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (\text{A.11})$$

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.2. Пусть $q_n(x)$ есть многочлены (A.6), ортогональные на E относительно переменного веса $w_n\rho$, удовлетворяющего условиям (A.7), (A.9) и (A.10). Тогда для любой последовательности многочленов $P_n(x) = x^n + \dots$ справедливо

$$\left\| \frac{q_n(x)}{(C|\Phi(x)|)^n} - \mathcal{F}_n(x) \right\|_{L_{2,\psi\rho}(E)} \leq \left\| \frac{P_n}{(C|\Phi(x)|)^n} - \mathcal{F}_n(x) \right\|_{L_{2,\psi\rho}(E)} \cdot (1 + o(1)). \quad (\text{A.12})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, представим левую часть (А.12) в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{q_n}{(C|\Phi|)^n} - \mathcal{F}_n \right\|_{L_{2,\psi\rho}(E)} \\ &= I_1(q_n) - 2 \operatorname{Re} I_2(q_n) + I_3 \\ &= \int_a^b \left| \frac{q_n(x)}{C^n \Phi^n(x)} \right|^2 \psi(x) \rho(x) dx \\ & \quad - 2 \operatorname{Re} \int_a^b \frac{q_n(x)}{C^n \Phi^n(x)} \overline{\mathcal{F}_n(x)} \psi(x) \rho(x) dx + \int_a^b |\mathcal{F}_n(x)|^2 \psi(x) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

С учетом (А.7) имеем

$$I_1(q_n) = \int_a^b \frac{q_n^2(x) w_n(x) \rho(x) dx}{|C^2 \Phi^2(x) \varphi(x)|^n} (1 + o(1)).$$

Ввиду соотношений равновесия (А.8) знаменатель подынтегрального выражения равен единице, поэтому

$$I_1(q_n) = \int_a^b q_n^2(x) w_n(x) \rho(x) dx (1 + o(1)).$$

Из экстремального свойства ортогональных многочленов (А.6) следует

$$I_1(q_n) \leq I_1(P_n).$$

Наконец, как и ранее,

$$\begin{aligned} I_2(q_n) &= \int_a^b \frac{q_n(x)}{|C\Phi(x)|^n} \left\{ \overline{\frac{\Phi^n(x)}{|\Phi(x)|^n} F(x)} + \frac{\Phi^n(x)}{|\Phi(x)|^n} F(x) \right\} \psi(x) \rho(x) dx \\ &= \oint_E \frac{q_n(\xi)}{C^n \Phi^n(\xi)} \overline{F(\xi)} \psi(\xi) \rho(x) |dx| \end{aligned}$$

и с помощью воспроизводящего свойства функции Сегё убеждаемся, что

$$I_2(q_n) = I_2(P_n).$$

Предложение А.2 доказано.

Список литературы

1. Никишин Е. М. Совместные аппроксимации Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113 (155). № 4 (12). С. 499–519.
2. Гончар А. А., Разманов Е. А., Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
3. Angelesco A. Sur l'approximation simultanée des plusieurs intégrales définies // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1918. V. 167. P. 629–631.

4. *Никишин Е. М.* О системе марковских функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1979. №4. С. 60–63.
5. *Aptekarev A. I., Marcellán F., Rocha I. A.* Semiclassical multiple ortogonal polynomials and the properties of Jacobi–Bessel polynomials // J. Approx. Theory. 1997. V. 90. P. 117–146.
6. *Aptekarev A., Stahl H.* Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // Progress in Approximation Theory / ed. A. Gonchar, E. B. Saff. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
7. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. V. 42. P. 299–386.
8. *Калягин В. А.* О классе полиномов, определенных двумя соотношениями ортогональности // Матем. сб. 1979. Т. 110 (152). №4 (12). С. 609–627.
9. *Bernstein S. N.* Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini. I // J. Math. Pures Appl. 1930. V. 9. P. 127–177; II // J. Math. Pures Appl. 1931. V. 10. P. 219–286.
10. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
11. *Аптекарев А. И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско // Матем. сб. 1988. Т. 136 (178). №1 (5). С. 56–84.
12. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Сходимость совместных аппроксимаций Паде для системы марковских функций // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
13. *Никишин Е. М.* Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Сер. матем. 1986. №2. С. 33–41.
14. *Бустаманте Ж., Лонес Г. Лагомасино* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем Никишина аналитических функций // Матем. сб. 1992. Т. 183. №11. С. 117–138.
15. *Driver K., Stahl H.* Normality in Nikishin systems // Indag. Math. (N.S.). 1994. V. 5. №2. P. 161–187.
16. *Driver K., Stahl H.* Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. I // Acta Sci. Math. 1995. V. 60. P. 245–263.
17. *Driver K., Stahl H.* Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. II // Acta Sci. Math. 1995. V. 61. P. 261–284.
18. *Stahl H.* Simultaneous rational approximants // Computational methods and function theory, 1994. Proceedings of the conference, Penang, Malaysia, March 21–25, 1994 / ed. Ali R. M. et al. Singapore: World Scientific, 1995. P. 325–349.
19. *López Lagomasino G.* Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to varying measures // Constr. Approx. 1989. V. 5. P. 199–219.
20. *Лонес Г.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов и сходимости много-точечных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1985. Т. 128 (170). №2. С. 216–228.
21. *de la Calle Y. B., López L. G.* Weak convergence of varying measures and Hermite–Padé orthogonal polynomials // Constr. Approx. 1999. V. 15. №4.
22. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3. P. 127–232.
23. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных полиномов // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). №1. С. 117–127.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша,
Москва

Поступила в редакцию
02.02.1998+28.09.1998