Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Милованов, Интегрируемость разрешимых алгебр Ли, *Матем. сб.*, 1999, том 190, номер 5, 45–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:01:47

УДК 512.813.5

М. В. Милованов

Интегрируемость разрешимых алгебр Ли

Для класса разрешимых алгебр Ли доказана справедливость известной гипотезы Мищенко–Фоменко об интегрируемости любой конечномерной алгебры Ли.

Библиография: 15 названий.

Введение

Пусть M – гладкое многообразие. *Симплектической структурой* на M называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω . Пара (M, ω) называется *симплектическим многообразием*. Всякое симплектическое многообразие имеет четную размерность (см. [1]).

На симплектическом многообразии имеется естественный изоморфизм между векторными полями и 1-формами. Векторное поле $\text{sgrad } f$, соответствующее дифференциалу функции $f \in C^\infty(M)$, называется *гамильтоновым векторным полем*. Система дифференциальных уравнений $\dot{x} = \text{sgrad } f$ называется *гамильтоновой системой*, а функция f – ее *гамильтонианом*.

Скобкой Пуассона функций $f, g \in C^\infty(M)$ называется функция $\{f, g\}$, определенная равенством $\{f, g\} = -\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g)$. Если $\{f, g\} = 0$, то говорят, что функции f, g *находятся в инволюции*. Функция g является первым интегралом гамильтоновой системы $\dot{x} = \text{sgrad } f$ тогда и только тогда, когда $\{f, g\} = 0$. Если g_1 и g_2 – первые интегралы гамильтоновой системы, то и $\{g_1, g_2\}$ – первый интеграл этой системы.

Множество $C^\infty(M)$ образует бесконечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Во многих конкретных ситуациях гамильтонова система обладает набором функционально независимых интегралов $g_1, \dots, g_m$, линейная оболочка которых образует конечномерную алгебру Ли $\mathbf{G}$, т.е. $\{g_i, g_j\} = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k g_k$, где C_{ij}^k – константы. Особый интерес представляет случай, когда эта алгебра коммутативна и $m = \frac{1}{2} \dim M$. Мы попадаем при этом в сферу действия теоремы Лиувилля и будем говорить, что рассматриваемая гамильтонова система *интегрируема в коммутативном смысле*.

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко показали [2], что теорема Лиувилля допускает обобщение на случай некоммутативной алгебры $\mathbf{G}$ первых интегралов гамильтоновой системы, если условие $m = \frac{1}{2} \dim M$ заменить условием $\dim \mathbf{G} + \text{ind } \mathbf{G} = \dim M$, где целое число $\text{ind } \mathbf{G}$ называется *индексом* алгебры $\mathbf{G}$ и будет определено ниже. В этом случае говорят об *интегрируемости гамильтоновой системы в некоммутативном смысле*.

Пусть $\mathbf{G}$ – произвольная конечномерная алгебра Ли над полем действительных чисел, $\mathcal{G}$ – соответствующая ей связная группа Ли. Группа $\mathcal{G}$ действует сама на себе посредством сопряжения: $b \rightarrow aba^{-1}$. Это действие индуцирует линейное действие $\mathcal{G}$ на ее алгебре $\mathbf{G}$: $\text{Ad}: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(\mathbf{G})$, которое называется *присоединенным представлением* группы $\mathcal{G}$. Пусть $\mathbf{G}^*$ – коалгебра алгебры $\mathbf{G}$, т.е. пространство линейных функций $\xi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$ на $\mathbf{G}$. Определим *коприсоединенное представление* $\text{Ad}^*: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(\mathbf{G}^*)$ следующим образом: $(\text{Ad}_g^* \xi)(X) = \xi(\text{Ad}_{g^{-1}} X)$, $X \in \mathbf{G}$. Дифференциал коприсоединенного представления в единице $\mathbf{G}$ называется *коприсоединенным представлением алгебры Ли* $\mathbf{G}$: $\text{ad}^*: \mathbf{G} \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{G}^*)$. При этом для $X, Y \in \mathbf{G}$ и $\xi \in \mathbf{G}^*$ имеет место равенство: $(\text{ad}_X^* \xi)(Y) = -\xi([X, Y])$.

Для данного ковектора $\xi \in \mathbf{G}^*$ определим подпространство $\text{Ann}(\xi) = \{X \in \mathbf{G} : \text{ad}_X^* \xi = 0\}$, которое называется *аннулятором* ξ . Число

$$\text{ind } \mathbf{G} = \min_{\xi \in \mathbf{G}^*} \dim \text{Ann}(\xi)$$

называется *индексом алгебры Ли* $\mathbf{G}$.

На орбитах коприсоединенного представления имеется естественная симплектическая структура (*форма Кириллова*), в результате чего каждая орбита оказывается симплектическим многообразием с соответствующей скобкой Пуассона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра Ли $\mathbf{G}$ называется *интегрируемой*, если на $\mathbf{G}^*$ существует семейство функций $f_1, \dots, f_r$ из $C^\infty(\mathbf{G}^*)$, удовлетворяющее следующим трем условиям:

- 1) $f_1, \dots, f_r$ функционально независимы;
- 2) $r = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} + \text{ind } \mathbf{G})$;
- 3) $f_1, \dots, f_r$ находятся попарно в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления.

Такое семейство будем называть *полным инволютивным набором функций* на $\mathbf{G}^*$.

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко доказали [2], что если гамильтонова система интегрируема в некоммутативном смысле с помощью интегрируемой алгебры Ли $\mathbf{G}$ своих интегралов, то эта система интегрируема и в коммутативном смысле. Ими же была высказана следующая общая гипотеза (см. [2]–[5]).

ГИПОТЕЗА. *Любая конечномерная алгебра Ли интегрируема.*

Доказательство этой гипотезы для того или иного класса алгебр Ли дает возможность не только редуцировать некоммутативную интегрируемость соответствующих гамильтоновых систем к коммутативной интегрируемости, но и позволяет предъявить большой запас интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления для таких алгебр. На этом пути появляются гамильтоновы системы, интересные с точки зрения приложений в геометрии, механике и физике.

Как известно, всякая алгебра Ли есть полупрямая сумма полупростой подалгебры и разрешимого идеала. Поэтому случаи, когда алгебра $\mathbf{G}$ полупроста или

разрешима, можно считать основными. Для любой полупростой алгебры Ли гипотезу доказали ее авторы. Но она до сих пор не доказана для произвольной разрешимой алгебры (детали см. в [4], [5]). Тем не менее, гипотеза доказана для всех нильпотентных алгебр [6] и многих бесконечных серий разрешимых ([7]–[10] и др.).

Главным результатом настоящей статьи является

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Любая разрешимая алгебра Ли $\mathbf{G}$ интегрируема. При этом полный инволютивный набор на $\mathbf{G}^*$ можно выбрать из однородных функций первой степени однородности, каждая из которых выражается в явном виде в квадратурах.*

Этот результат анонсирован автором в [11].

§ 1. Индуктивный переход

Пусть $\mathbf{G}$ – произвольная алгебра Ли над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис $\mathbf{G}$, то через $e^1, \dots, e^n$ обозначим соответствующий сопряженный базис в $\mathbf{G}^*$, так что $e^j(e_i) = \delta_{ij}$. Координаты ковектора $x \in \mathbf{G}^*$ в базисе $e^1, \dots, e^n$ будем обозначать через $x_1, \dots, x_n$.

Скобку Пуассона на орбитах коприсоединенного представления в $\mathbf{G}^*$ можно “склеить” в единую скобку Пуассона на всем пространстве $\mathbf{G}^*$ (скобка Березина). Если $f, g \in C^\infty(\mathbf{G}^*)$, то положим по определению $\{f, g\}(x) = \{f|_{\mathcal{O}(x)}, g|_{\mathcal{O}(x)}\}(x)$. При этом (см. [5; § 22]), имеет место равенство

$$\{f, g\} = C_{ij}^k x_k \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (1.1)$$

где C_{ij}^k – структурные константы алгебры $\mathbf{G}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пусть W – подпространство векторного пространства V , а W^* и V^* – соответствующие сопряженные пространства. Если $x \in V^*$, т.е. x – линейная функция на V , то можно рассмотреть $x|_W$ – ограничение x на W . Ясно, что $x|_W$ есть линейная функция на W , так что $x|_W \in W^*$. В результате возникает естественное отображение $\pi: V^* \rightarrow W^*$ такое, что $\pi(x) = x|_W$, $x \in V^*$. Легко видеть, что отображение π – линейное.

Пусть теперь f – произвольная функция на W^* , т.е. $f: W^* \rightarrow \mathbb{R}$. Положим $\tilde{f} = f \circ \pi$. Тогда $\tilde{f}$ – вполне определенная функция на V^* , зависящая лишь от выбора функции f .

Выберем в W какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_m$ и дополним его произвольным образом до базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V . Через $e_W^1, \dots, e_W^m$ обозначим базис W^* , сопряженный к базису $e_1, \dots, e_m$, а через $e_V^1, \dots, e_V^n$ – базис V^* , сопряженный к базису $e_1, \dots, e_n$.

Пусть ковектор $x \in W^*$ имеет в базисе $e_W^1, \dots, e_W^m$ координаты $x_1, \dots, x_m$. Тогда $f = f(x)$ можно записать в виде $f = f(x_1, \dots, x_m)$. Посмотрим, какой вид имеет функция $\tilde{f}$ в базисе $e_V^1, \dots, e_V^n$. Если ковектор $x \in V^*$ имеет в базисе

$e_V^1, \dots, e_V^n$ координаты $x_1, \dots, x_n$, то $\tilde{f} = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}(x_1 e_V^1 + \dots + x_n e_V^n) \\ &= f(\pi(x_1 e_V^1 + \dots + x_n e_V^n)) \\ &= f(x_1 \pi(e_V^1) + \dots + x_n \pi(e_V^n)) \\ &= f(x_1 e_W^1 + \dots + x_m e_W^m + x_{m+1} \cdot 0 + \dots + x_n \cdot 0) \\ &= f(x_1 e_W^1 + \dots + x_m e_W^m) = f(x_1, \dots, x_m).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_m). \quad (1.2)$$

Равенство (1.2) означает, что функция $\tilde{f} = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$ получается из функции $f = f(x_1, \dots, x_m)$, если последнюю рассматривать как функцию от переменных $x_1, \dots, x_n$. Ясно, что $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = 0$ при $i > m$.

Если отождествить W^* с линейной оболочкой $L(e_V^1, \dots, e_V^m)$, то $W^* \subset V^*$ и $\tilde{f}|_{W^*} = f$. Это дает основание называть функцию $\tilde{f}$ *продолжением функции f* на V^* . Равенство (1.2) говорит о том, что продолжение f на V^* снова можно обозначить буквой f .

Пусть теперь H – произвольная подалгебра алгебры $\mathbf{G}$, $V = \mathbf{G}$, $W = H$. Если f – функция на H^* , то ее продолжение на $\mathbf{G}^*$ будем обозначать той же буквой f .

Следующая важная лемма принадлежит В. В. Трофимову [8].

ЛЕММА 1.1. *Если гладкие функции f и g на H^* находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления в H^* , то их продолжения на $\mathbf{G}^*$ будут в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления в $\mathbf{G}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (1.1). Пусть a, b, c пробегает значения $1, \dots, n$; i, j, k – значения $1, \dots, m$; α, β, γ – значения $m+1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned}C_{ab}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_a} \frac{\partial f}{\partial x_b} &= C_{\alpha\beta}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + C_{i\beta}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \\ &\quad + C_{\alpha i}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_i} + C_{ij}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= C_{ij}^c x_c \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = C_{ij}^k x_k \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что f и g находятся в инволюции на всех орбитах в H^* . Надо учесть также, что $\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_\beta} = 0$ и что $C_{ij}^\gamma = 0$ в силу условия $[e_i, e_j] \in H$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{O}$ – орбита коприсоединенного представления, проходящая через ковектор $\xi \in \mathbf{G}^*$. Тогда касательная плоскость $T_\xi \mathcal{O}$ к орбите $\mathcal{O}$ состоит из ковекторов вида $\text{ad}_X^* \xi$, где X пробегает $\mathbf{G}$ (см. [5; §22]). Это означает, что $\dim \mathcal{O} = \dim \mathbf{G} - \dim \text{Ann}(\xi)$. Если $\mathcal{O}$ – орбита общего положения (т.е. наибольшей размерности),

то $\dim \mathcal{O} = \dim \mathbf{G} - \text{ind } \mathbf{G}$. Другими словами, $\text{ind } \mathbf{G}$ совпадает с коразмерностью орбиты общего положения коприсоединенного представления в $\mathbf{G}^*$. Это утверждение раскрывает геометрический смысл понятия индекса алгебры $\mathbf{G}$.

В дальнейшем полезно иметь в виду, что если $\mathcal{O}$ — орбита общего положения в $\mathbf{G}^*$, то

$$\frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} + \text{ind } \mathbf{G}) = \text{codim } \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}. \quad (1.3)$$

Действительно,

$$\text{codim } \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O} = \text{ind } \mathbf{G} + \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} - \text{ind } \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\dim \mathbf{G} + \text{ind } \mathbf{G}).$$

Пусть теперь $\mathbf{G}$ — произвольная разрешимая алгебра Ли размерности n .

Если $n = 1$, то $\mathbf{G}$ — коммутативная алгебра, $\dim \mathcal{O} = 0$, $\text{codim } \mathcal{O} = 1$ и $r = \text{codim } \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O} = 1$. Это означает, что полный инволютивный набор на $\mathbf{G}^*$ должен состоять из одной функции, например из координатной функции x_1 на $\mathbf{G}^*$. Очевидно, $f_1 = x_1$ — однородная функция первой степени однородности.

Предположим, что основная теорема уже доказана для разрешимых алгебр размерности меньше n . Пусть $\mathbf{G}_0$ — один из $(n-1)$ -мерных идеалов алгебры $\mathbf{G}$. Выберем в $\mathbf{G}_0$ какой-либо базис $e_1, \dots, e_{n-1}$ и дополним его до базиса $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$ алгебры $\mathbf{G}$. По предположению индукции на $\mathbf{G}_0^*$ существует полный инволютивный набор $f_1, \dots, f_{r_0}$, состоящий из однородных функций первой степени однородности. Их продолжения на $\mathbf{G}^*$ согласно лемме 1.1 находятся попарно в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления в $\mathbf{G}^*$ и, очевидно, остаются однородными функциями первой степени однородности.

Пусть C_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathbf{G}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. И пусть ковектор $x \in \mathbf{G}^*$ имеет в базисе $\mathbf{G}^*$, дуальном к базису $e_1, \dots, e_n$, координаты $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим матрицу $A = \|C_{ij}^k x_k\|$. Если $\mathcal{O}(x)$ — орбита коприсоединенного представления, проходящая через x , то $\dim \mathcal{O}(x) = \text{rang } A$ (см. [8; § 2]).

Соответствующую матрицу для идеала $\mathbf{G}_0$ и его базиса $e_1, \dots, e_{n-1}$ обозначим через A_0 . Если в матрице A зачеркнуть последнюю строку и последний столбец, то получится матрица A_0 .

Если $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_0$ — орбиты общего положения в $\mathbf{G}^*$ и $\mathbf{G}_0^*$ соответственно, то из теоремы о ранге матрицы следует, что $\dim \mathcal{O}_0 \leq \dim \mathcal{O} \leq \dim \mathcal{O}_0 + 2$. А так как каждая орбита коприсоединенного представления четномерна, то либо $\dim \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}_0 + 2$, либо $\dim \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}_0$.

В первом случае полный инволютивный набор на $\mathbf{G}_0^*$ можно рассматривать как полный инволютивный набор на $\mathbf{G}^*$. Действительно,

$$\begin{aligned} r &= \text{codim } \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O} = (n - \dim \mathcal{O}) + \frac{1}{2}(\dim \mathcal{O}_0 + 2) \\ &= [n - (\dim \mathcal{O}_0 + 2)] + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_0 + 1 = [(n-1) - \dim \mathcal{O}_0] + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_0 \\ &= \text{codim } \mathcal{O}_0 + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_0 = r_0. \end{aligned}$$

где $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$, $a_{ik} = a_{ik}(x_1, \dots, x_n)$. Все нужные нам результаты теории таких систем изложены в книге [12; § 1], терминологии и обозначений которой мы будем придерживаться.

Если $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ и $\psi = \psi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ — любые гладкие функции переменных $x_1, \dots, x_n$ и $p_1, \dots, p_n$, то определим их скобку Пуассона следующим равенством:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial \psi}{\partial p_s} \right).$$

Можно считать, не ограничивая общности, что уравнения системы (2.2) линейно независимы, т.е. не существует множителей $\lambda_k = \lambda_k(x_1, \dots, x_n)$, среди которых есть отличные от нуля, таких, что имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k X_k(f) = 0,$$

тождественное относительно $x_1, \dots, x_n$.

Система (2.2) называется *полной*, если всевозможные скобки Пуассона $(X_i(f), X_j(f))$ есть линейные комбинации левых частей уравнений (2.2):

$$(X_i(f), X_j(f)) = \sum_{k=1}^m \lambda_{ij}^k X_k(f),$$

где $\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)$.

Если система (2.2) полная, то при некоторых естественных ограничениях на коэффициенты a_{ij} ее общее решение можно записать (локально) в виде

$$f = \psi(\psi_1, \dots, \psi_{n-m}), \quad (2.3)$$

где ψ — произвольная гладкая функция, а $\psi_1, \dots, \psi_{n-m}$ — функционально независимые (локально определенные) функции.

Вернемся к системе (2.1). Если положить $\frac{\partial f}{\partial x_j} = p_j$, то она запишется в виде

$$C_{ij}^k x_k p_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Обозначим через $X_i = X_i(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ левую часть i -го уравнения системы (2.4).

ТЕОРЕМА 2.1. Система (2.4) является полной для любой алгебры Ли $\mathbf{G}$. При этом

$$(X_\alpha, X_\beta) = \sum_{s=1}^n C_{\alpha\beta}^s X_s, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X_\alpha = C_{\alpha j}^k x_k p_j$, $X_\beta = C_{\beta j}^k x_k p_j$, то

$$\begin{aligned} (X_\alpha, X_\beta) &= \sum_{s=1}^n [(C_{\alpha s}^k x_k)(C_{\beta j}^s p_j) - (C_{\alpha j}^s p_j)(C_{\beta s}^k x_k)] \\ &= \sum_{s=1}^n (C_{\alpha s}^k C_{\beta j}^s - C_{\alpha j}^s C_{\beta s}^k) x_k p_j \\ &= \sum_{s=1}^n (-C_{\beta j}^s C_{s\alpha}^k - C_{\alpha j}^s C_{\beta s}^k) x_k p_j \\ &= \sum_{s=1}^n (-C_{\beta j}^s C_{s\alpha}^k - C_{j\alpha}^s C_{\beta s}^k) x_k p_j. \end{aligned}$$

Из тождества Якоби для алгебры $\mathbf{G}$ вытекает следующее соотношение между структурными константами:

$$\sum_{s=1}^n (C_{\beta j}^s C_{s\alpha}^k + C_{j\alpha}^s C_{s\beta}^k + C_{\alpha\beta}^s C_{sj}^k) = 0,$$

или

$$\sum_{s=1}^n (-C_{\beta j}^s C_{s\alpha}^k - C_{j\alpha}^s C_{s\beta}^k) = \sum_{s=1}^n C_{\alpha\beta}^s C_{sj}^k.$$

Поэтому

$$(X_\alpha, X_\beta) = \sum_{s=1}^n C_{\alpha\beta}^s C_{sj}^k x_k p_j = \sum_{s=1}^n C_{\alpha\beta}^s X_s.$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathbf{G}$ — n -мерная несводимая разрешимая алгебра Ли, $\mathbf{G}_0$ — ее $(n-1)$ -мерный идеал. Пусть, далее, $e_1, \dots, e_n$ — базис $\mathbf{G}$ такой, что $e_1, \dots, e_{n-1}$ — базис $\mathbf{G}_0$. И пусть $e^1, \dots, e^n$ — соответствующий сопряженный базис коалгебры $\mathbf{G}^*$, в котором ковектор $x \in \mathbf{G}^*$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$. Тогда на $\mathbf{G}^*$ существует (локально определенный) инвариант f , зависящий от x_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если θ и θ_0 — орбиты общего положения в $\mathbf{G}^*$ и $\mathbf{G}_0^*$ соответственно, то из несводимости $\mathbf{G}$ следует, что $\dim \theta = \dim \theta_0 = m$. Поэтому в системе (2.4) можно оставить m линейно независимых уравнений, причем полученная таким образом система остается полной и можно считать, что в ней отсутствует последнее уравнение из (2.4). Так как новая система имеет своими коэффициентами линейные функции, то ее общее решение имеет вид (2.3).

Покажем, что хотя бы один из инвариантов $\psi_1, \dots, \psi_{n-m}$ зависит от x_n . Предположим противное. Тогда $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial \psi_{n-m}}{\partial x_n} = 0$ и, следовательно, $\psi_1, \dots, \psi_{n-m}$ есть решения системы для определения инвариантов на коалгебре $\mathbf{G}_0^*$. Но общее решение такой системы имеет вид

$$f = h(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m-1}),$$

так что $\psi_i = h_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m-1})$, $i = 1, \dots, n-m$. Это противоречит функциональной независимости $\psi_1, \dots, \psi_{n-m}$. Лемма доказана.

Так как функции, входящие в полный инволютивный набор на $\mathbf{G}_0^*$, после продолжения на $\mathbf{G}^*$ не зависят от x_n , то f есть искомый инвариант на $\mathbf{G}^*$. Однако лемма 2.1 гарантирует лишь его локальное существование.

§ 3. Алгебры индекса 1

Пусть $\mathbf{G}$ — несводимая разрешимая алгебра Ли размерности n , $\mathbf{G}_0$ — ее $(n-1)$ -мерный идеал, θ и θ_0 — орбиты общего положения в $\mathbf{G}^*$ и $\mathbf{G}_0^*$. Из несводимости алгебры $\mathbf{G}$ следует, что ее индекс $\text{ind } \mathbf{G}$ не может быть равен нулю. Действительно, в этом случае мы имели бы $\dim \theta_0 = \dim \theta = n > \dim \mathbf{G}_0^*$, что невозможно. Поэтому простейшим является случай $\text{ind } \mathbf{G} = 1$.

Итак, пусть $\text{ind } \mathbf{G} = 1$, так что

$$\dim \theta = \dim \theta_0 = n - 1. \quad (3.1)$$

Выберем в $\mathbf{G}_0$ какой-нибудь базис $e_1, \dots, e_{n-1}$ и дополним его до базиса $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathbf{G}$. Так как коммутант алгебры $\mathbf{G}$ содержится в $\mathbf{G}_0$, то коэффициенты системы (2.4) для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$, соответствующей базису $e_1, \dots, e_n$, могут зависеть от $x_1, \dots, x_{n-1}$, но не зависят от x_n .

Если в матрице $\|C_{ij}^k x_k\|$ системы (2.4) зачеркнуть последнюю строку и последний столбец, то получится матрица системы для определения инвариантов на $\mathbf{G}_0^*$, соответствующей базису $e_1, \dots, e_{n-1}$. Определитель этой матрицы с учетом (3.1) отличен от нуля. Выражая $p_1, \dots, p_{n-1}$ через p_n по правилу Крамера, получим

$$p_i = a_i p_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.2)$$

где a_i — однородные рациональные функции степени однородности 0 от переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$. Ясно, что системы (2.4) и (3.2) эквивалентны.

Вернемся к системе (2.2). Она называется *якобиевой*, если для нее все скобки Пуассона $(X_i(f), X_j(f))$ тождественно равны нулю. Ясно, что якобиевость является частным случаем понятия полноты. Из теории полных систем (см. [12; § 1]) известно, что полнота системы (2.4) влечет за собой якобиевость системы (3.2). Поэтому из теоремы 2.1 следует, что система (3.2) якобиева.

Следующая лемма доказывается простым вычислением.

ЛЕММА 3.1. Система (3.2) является якобиевой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$f = x_1 a_1 + \dots + x_{n-1} a_{n-1} + x_n. \quad (3.4)$$

Тогда f есть решение системы (3.2). При этом f — однородная рациональная функция степени однородности 1, удовлетворяющая условию $\frac{\partial f}{\partial x_n} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как a_i — однородная функция нулевой степени однородности от переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$, то для нее справедлива формула Эйлера:

$$x_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_{n-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.5)$$

Если $i = 1, \dots, n-1$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i + \left(x_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_i} \right).$$

Поэтому из (3.3) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i + \left(x_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + \dots + x_{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_{n-1}} \right),$$

откуда с учетом (3.5) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Так как $a_1, \dots, a_{n-1}$ не зависят от x_n , то $\frac{\partial f}{\partial x_n} = 1$ и, следовательно, f удовлетворяет системе (3.2). Однородность функции f степени 1 есть очевидное следствие формулы (3.4). Теорема доказана.

Найденный инвариант f функционально не зависит от функций, входящих в полный инволютивный набор на $\mathbf{G}_0^*$, это и есть искомая недостающая функция на $\mathbf{G}^*$.

§ 4. Алгебры произвольного индекса. Случай $\varphi_1 = \dots = \varphi_q = 0$

Изучение разрешимых алгебр Ли произвольного индекса опирается на специальный выбор базиса таких алгебр.

Будем обозначать через $L(e_1, \dots, e_k)$ линейную оболочку векторов $e_1, \dots, e_k$.

ЛЕММА 4.1. *Для всякой разрешимой алгебры Ли $\mathbf{G}$ существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что при любом $i = 1, \dots, n$ имеет место одна из следующих трех возможностей:*

1) для каждого $X \in \mathbf{G}$

$$[X, e_i] = \lambda e_i + \dots,$$

где $\lambda = \lambda(X) \in \mathbb{R}$, а многоточие обозначает некоторую линейную комбинацию $e_1, \dots, e_{i-1}$; при этом $L(e_1, \dots, e_{i-1})$ является идеалом $\mathbf{G}$;

2) для каждого $X \in \mathbf{G}$

$$\begin{aligned} [X, e_{i-1}] &= u e_{i-1} - v e_i + \dots, \\ [X, e_i] &= v e_{i-1} + u e_i + \dots, \end{aligned}$$

где $u = u(X) \in \mathbb{R}$, $v = v(X) \in \mathbb{R}$, а многочотия обозначают некоторые линейные комбинации $e_1, \dots, e_{i-2}$; при этом $L(e_1, \dots, e_{i-2})$ является идеалом $\mathbf{G}$ и $v(X) = 0$ не для всех $X \in \mathbf{G}$;

3) для каждого $X \in \mathbf{G}$

$$\begin{aligned} [X, e_i] &= ue_i - ve_{i+1} + \dots, \\ [X, e_{i+1}] &= ve_i + ue_{i+1} + \dots, \end{aligned}$$

где $u = u(X) \in \mathbb{R}$, $v = v(X) \in \mathbb{R}$, а многочотия обозначают некоторые линейные комбинации $e_1, \dots, e_{i-1}$; при этом $L(e_1, \dots, e_{i-1})$ является идеалом $\mathbf{G}$ и $v(X) = 0$ не для всех $X \in \mathbf{G}$.

Если при этом алгебра $\mathbf{G}$ имеет коммутант размерности $s > 0$, то $e_1, \dots, e_s$ – базис коммутанта.

Описанный в лемме 4.1 базис будем называть *каноническим базисом* алгебры $\mathbf{G}$. Его существование без труда выводится из теоремы Ли о разрешимых алгебрах Ли, примененной к присоединенному представлению $X \rightarrow \text{ad } X$ алгебры $\mathbf{G}$. Легко видеть, что канонический базис данной алгебры определен не однозначно.

Пусть $\mathbf{G}$ – произвольная несводимая разрешимая алгебра Ли, у которой $\text{ind } \mathbf{G} = q+1 > 1$. Выберем и зафиксируем какой-либо канонический базис $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathbf{G}$ и рассмотрим соответствующую ему систему для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$. Если A – матрица этой системы, то $\text{rang } A = n - q - 1$.

Обозначим через $v_1, \dots, v_n$ систему столбцов матрицы A . Выберем из них все столбцы, которые состоят из одних нулей или являются линейными комбинациями столбцов, им предшествующих. Легко видеть, что количество выбранных столбцов равно $q+1$. Среди них (в силу несводимости $\mathbf{G}$) будет и столбец v_n . Пусть $v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_q}, v_n$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_q$, – выбранные столбцы. Так как оставшиеся столбцы матрицы A линейно независимы, то система для определения инвариантов позволяет выразить все $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_q, n$, через $\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_q}}, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Пусть $\dim[\mathbf{G}, \mathbf{G}] = s$. Так как случай $s = 0$ интереса не представляет, будем считать, что $s > 0$. Если положить $\frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i$, $i = 1, \dots, n$, то

$$p_i = a_{i\alpha_1}p_{\alpha_1} + \dots + a_{i\alpha_q}p_{\alpha_q} + a_{in}p_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_q, \quad (4.1)$$

где $a_{i\alpha_1}, \dots, a_{i\alpha_q}, a_{in}$ – однородные рациональные функции степени однородности 0 от переменных $x_1, \dots, x_s$. Нетрудно убедиться, что $a_{i\alpha_1} = 0$ при $i > \alpha_1$, $a_{i\alpha_2} = 0$ при $i > \alpha_2, \dots, a_{i\alpha_q} = 0$ при $i > \alpha_q$.

Следующая теорема играет ключевую роль во многих дальнейших рассуждениях.

ТЕОРЕМА 4.1. Коэффициенты $a_{i\alpha_j}$, $i = 1, \dots, n-1$, $i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_q$, $j = 1, \dots, q$, системы (4.1) имеют следующий вид:

$$a_{i\alpha_j} = a'_{i\alpha_j}x_{\alpha_j} + a''_{i\alpha_j},$$

где функции $a'_{i\alpha_j}, a''_{i\alpha_j}$ не зависят от переменных $x_{\alpha_j}, x_{\alpha_j+1}, x_{\alpha_j+2}, \dots, x_n$.

Теорема 4.1 будет доказана в следующем параграфе.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Коэффициенты $a_{i\alpha_j}$, $i = 1, \dots, n-1$, $i \neq \alpha_1, \dots, \alpha_q$, $j = 1, \dots, q$, системы (4.1) можно записать в виде

$$a_{i\alpha_j} = a'_{i\alpha_j} x_{\alpha_j} + a''_{i\alpha_j},$$

где функции $a'_{i\alpha_j}, a''_{i\alpha_j}$ не зависят от $x_{\alpha_j}, x_{\alpha_{j+1}}, \dots, x_{\alpha_q}, x_n$.

С этого момента нам будет удобно перейти к новым обозначениям переменных $x_1, \dots, x_n$: переменные $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_q}, x_n$ будем обозначать через $y_1, \dots, y_q, y_{q+1}$ соответственно. Все прочие переменные из $x_1, \dots, x_n$ обозначим (в порядке возрастания номеров) через $x_1, \dots, x_m$. Таким образом, $m + q + 1 = n$.

В новых обозначениях система (4.1) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + a_{iq} \frac{\partial f}{\partial y_q} + a_{i,q+1} \frac{\partial f}{\partial y_{q+1}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_q)$ — однородные рациональные функции степени однородности 0, а $f = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_q, y_{q+1})$ — искомая функция.

Новую форму принимает и следствие 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1'. Коэффициенты a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, q$, системы (4.2) можно записать в виде

$$a_{ij} = a'_{ij} y_j + a''_{ij},$$

где функции a'_{ij}, a''_{ij} не зависят от $y_j, y_{j+1}, \dots, y_q, y_{q+1}$.

Из теоремы 2.1 вытекает якобиевость системы (4.2). Условия якобиевости систем такого вида приведены в [13; § 6].

ЛЕММА 4.2. Система (4.2) является якобиевой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} - a_{jt} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q+1. \quad (4.3)$$

Учитывая теорему 3.1, доказанную для алгебр индекса 1, будем искать решение f системы (4.2) в виде однородной функции степени однородности 1, удовлетворяющей дополнительному условию $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$.

Предположим, что такое решение существует. Так как f — функция первой степени однородности, то

$$f = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q+1} y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}. \quad (4.4)$$

В то же время f удовлетворяет системе (4.2) и потому

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{q+1} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial y_k}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) получаем:

$$f = \sum_{i=1}^m x_i \left(\sum_{k=1}^{q+1} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) + \sum_{k=1}^{q+1} y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{q+1} \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ik} + y_k \right) \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Если положить

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^m x_i a_{ik} + y_k, \quad k = 1, \dots, q+1,$$

то

$$f = \sum_{k=1}^{q+1} \varphi_k \frac{\partial f}{\partial y_k}.$$

Так как по условию $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$, то

$$f = \sum_{k=1}^{q+1} \varphi_k \frac{\partial f}{\partial y_k} + \varphi_{q+1}.$$

Мы видим, что если функция f существует, то она удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \varphi_q \frac{\partial f}{\partial y_q} = f - \varphi_{q+1}. \quad (4.6)$$

Обратно, пусть функция f удовлетворяет уравнению (4.6), условию $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$ и является решением системы (4.2). Тогда f удовлетворяет равенству (4.4) и, следовательно, есть однородная функция первой степени однородности.

ЛЕММА 4.3. *Функции φ_k , $k = 1, \dots, q+1$, удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \varphi_t \right) + \left(a_{ik} - \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial y_k}{\partial y_t} \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

При этом

$$a_{ik} - \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial y_k}{\partial y_t} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 1, \dots, q, \\ a_{ik}, & \text{если } k = q+1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как a_{ik} — однородные функции степени однородности 0, то

$$\sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^q y_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_j}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$, $k = 1, \dots, q+1$, $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + a_{ik} = |\text{см. (4.3)}| \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} - a_{jt} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \right) \right) + a_{ik} \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \sum_{j=1}^m x_j a_{jt} \right) + a_{ik} = |\text{см. (4.8)}| \\ &= - \sum_{j=1}^q y_j \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_j} + \sum_{t=1}^q \left[a_{it} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\sum_{j=1}^m x_j a_{jk} + y_k \right) \right. \\ &\quad \left. - a_{it} \frac{\partial y_k}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \left(\sum_{j=1}^m x_j a_{jt} + y_t \right) + y_t \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \right] + a_{ik} \\ &= \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \varphi_t \right) + \left(a_{ik} - \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial y_k}{\partial y_t} \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к уравнению (4.6). Рассмотрим простейший случай, когда $\varphi_1 = \dots = \varphi_q = 0$. При таком предположении $f = \varphi_{q+1}$. Проверим, что функция φ_{q+1} удовлетворяет системе (4.2).

При $k = q+1$ формула (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^q \left(a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{iq+1}}{\partial y_t} \varphi_t \right) + a_{iq+1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

А так как $\varphi_1 = \dots = \varphi_q = 0$ и $\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_{q+1}} = 1$, то из (4.9) получаем

$$\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^{q+1} a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t}, \quad i = 1, \dots, m,$$

т.е. φ_{q+1} — решение системы (4.2).

Доказана

ТЕОРЕМА 4.2. Если $\varphi_1 = \dots = \varphi_q = 0$, то функция $f = \varphi_{q+1}$ есть решение системы (4.2). При этом f — однородная рациональная функция степени однородности 1 и $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$.

§ 5. Доказательство теоремы 4.1

Утверждение теоремы 4.1 становится очевидным, если $\alpha_j > s$. Действительно, $a_{i\alpha_j} = a_{i\alpha_j}(x_1, \dots, x_s) = a_{i\alpha_j}(x_1, \dots, x_{\alpha_j-1})$. Поэтому $a_{i\alpha_j} = a'_{i\alpha_j}x_{\alpha_j} + a''_{i\alpha_j}$, где $a'_{i\alpha_j} = 0$, $a''_{i\alpha_j} = a_{i\alpha_j}$.

Будем считать для простоты обозначений, что $\alpha_1 < \alpha_2 \leq s$, $s < \alpha_3 < \dots < \alpha_q$. Тогда достаточно доказать утверждение теоремы только для коэффициентов $a_{i\alpha_1}$ и $a_{i\alpha_2}$. Мы ограничимся рассмотрением $a_{i\alpha_1}$, так как для $a_{i\alpha_2}$ все делается аналогично. При этом можно считать, что $\alpha_1 > 1$, так как в случае $\alpha_1 = 1$ все $a_{i\alpha_1} = 0$ и $a_{i\alpha_1} = 0x_{\alpha_1} + 0$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – выбранный канонический базис алгебры $\mathbf{G}$. В соответствии с леммой 4.1 в случае $i = \alpha_1$ имеются три возможности, из которых первая – наиболее простая для анализа. С нее и начнем.

Итак, пусть для каждого $X \in \mathbf{G}$

$$[X, e_{\alpha_1}] = \lambda e_{\alpha_1} + \dots,$$

где $\lambda = \lambda(X) \in \mathbb{R}$, а многоточие обозначает некоторую линейную комбинацию $e_1, \dots, e_{\alpha_1-1}$. При этом $L(e_1, \dots, e_{\alpha_1-1})$ является идеалом $\mathbf{G}$.

Рассмотрим вначале случай, когда $\lambda(X) = 0$ для каждого $X \in \mathbf{G}$ (*нулевой случай*). Он заведомо имеет место, если $\mathbf{G}$ – нильпотентная алгебра. Покажем, что в нулевом случае коэффициенты $a_{i\alpha_1}$ есть функции от переменных $x_1, \dots, x_{\alpha_1-1}$, так что $a_{i\alpha_1} = a'_{i\alpha_1}x_{\alpha_1} + a''_{i\alpha_1}$, где $a'_{i\alpha_1} = 0$, $a''_{i\alpha_1} = a_{i\alpha_1}$.

Рассмотрим систему для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$ в каноническом базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}^k x_k p_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

По условию она эквивалентна системе (4.1). Так как матрица A системы (5.1) кососимметрична, то ее можно записать в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^T & A_3 \end{bmatrix},$$

где A_1 – квадратная матрица порядка α_1 , а T – значок транспонирования. Тогда коэффициенты матриц A_1 и A_2 (а потому и $-A_2^T$) – функции от $x_1, \dots, x_{\alpha_1-1}$.

Так как в системе (4.1) коэффициенты $a_{i\alpha_1} = 0$ при $i > \alpha_1$, то все p_i при $i > \alpha_1$ выражаются через $p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_q}, p_n$:

$$p_i = a_{i\alpha_2}p_{\alpha_2} + \dots + a_{i\alpha_q}p_{\alpha_q} + a_{in}p_n, \quad i = \alpha_1 + 1, \dots, n-1, \quad i \neq \alpha_2, \dots, \alpha_q. \quad (5.2)$$

Если подставить в систему (5.1) вместо p_i , $i > \alpha_1$, их выражения через $p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_q}, p_n$ по формулам (5.2), то получим новую систему, которая вместе с (5.2) эквивалентна (5.1). Эта новая система позволяет выразить $p_1, \dots, p_{\alpha_1-1}$ через $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \dots, p_{\alpha_q}, p_n$. Если воспользоваться для этого правилом Крамера и тем, что коэффициенты матриц $A_1, -A_2^T$ есть функции переменных $x_1, \dots, x_{\alpha_1-1}$, то сразу видно, что

$$p_i = a_{i\alpha_1}p_{\alpha_1} + \dots + a_{i\alpha_q}p_{\alpha_q} + a_{in}p_n, \quad i = 1, \dots, \alpha_1 - 1,$$

где $a_{i\alpha_1} = a_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_{\alpha_1-1})$. Этим завершается рассмотрение нулевого случая.

Предположим теперь, что $\lambda(X) = 0$ не для всех $X \in \mathbf{G}$ (*вещественный случай*). Покажем, что это предположение приводит к противоречию, т.е. на самом деле вещественный случай не может иметь места.

По предположению

$$[e_i, e_{\alpha_1}] = \lambda_i e_{\alpha_1} + \dots, \quad i = 1, \dots, n,$$

где многоточие обозначает некоторую линейную комбинацию $e_1, \dots, e_{\alpha_1-1}$. При этом $\lambda_i = 0$ для всех $i \leq s$ (ввиду нильпотентности коммутанта разрешимой алгебры Ли), но для $i > s$ не все $\lambda_i = 0$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\lambda_n \neq 0$.

Если $\lambda_i \neq 0$, $s < i < n$, то положим

$$e'_i = -\frac{\lambda_n}{\lambda_i} e_i + e_n.$$

Тогда

$$[e'_i, e_{\alpha_1}] = 0 e_{\alpha_1} + \dots,$$

где многоточие есть линейная комбинация $e_1, \dots, e_{\alpha_1-1}$. Если теперь в каноническом базисе $e_1, \dots, e_n$ заменить каждый такой элемент e_i на e'_i , то получится новый канонический базис $\mathbf{G}$, удовлетворяющий условию

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n \neq 0. \quad (5.3)$$

Обозначим его через $e'_1, \dots, e'_n$.

При переходе от старого канонического базиса к новому матрица A системы для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$ меняется, а вместе с ней меняется и матрица A_0 , которая получается из A после зачеркивания в ней последней строки и последнего столбца. Эти новые матрицы обозначим через A' и A'_0 . Очевидно, ранг матрицы A остается при этом без изменения, т.е. $\text{rang } A' = n - q - 1$. Так как алгебра $\mathbf{G}$ предполагается несводимой, то и $\text{rang } A'_0 = n - q - 1$. Поэтому последняя строка (столбец) матрицы A' есть линейная комбинация ее остальных строк (столбцов).

Вернемся к системе для определения инвариантов с матрицей A . Мы знаем (см. § 4), что столбец A с номером α_1 есть линейная комбинация предыдущих столбцов A . Следовательно, и столбец матрицы A_0 с номером α_1 линейно выражается через предшествующие ему столбцы из A_0 .

Покажем, что и в матрице A'_0 столбец с номером α_1 линейно выражается через предыдущие столбцы A'_0 . Так как матрица A'_0 кососимметрична, то последнее утверждение равносильно аналогичному утверждению для строк из A'_0 .

Имея в виду, что s — размерность коммутанта алгебры $\mathbf{G}$, обозначим через A^s и A_0^s матрицы, которые получаются из матриц A и A_0 после зачеркивания их строк с номерами, большими s . Проследим, как изменится матрица A_0^s при переходе от старого базиса к новому. У матрицы A_0^s могут меняться лишь столбцы с номерами $s+1, \dots, n-1$, причем меняются они в результате операций двух типов. Первая из них заключается в умножении одного из этих столбцов на ненулевое число $-\lambda_n/\lambda_i$.

Операция второго типа прибавляет к результату умножения последний столбец матрицы A^s . Так как последний столбец A^s есть линейная комбинация столбцов матрицы A_0^s , то мы имеем дело с элементарными преобразованиями столбцов матрицы A_0^s , которые, как известно, не меняют ранга матрицы. В качестве следствия получаем, что любая система строк матрицы A_0^s не меняет своего ранга. Так как строка с номером α_1 из A_0 (а потому и из A_0^s) линейно выражается через предыдущие, то из сказанного выше ясно, что строка с номером α_1 матрицы A'_0 линейно выражается через предыдущие строки A'_0 , что и требовалось установить.

Так как для нового базиса выполняется условие (5.3) и при этом $L(e'_1, \dots, e'_{\alpha_1-1}) = L(e_1, \dots, e_{\alpha_1-1})$ — идеал алгебры $\mathbf{G}$, то элементы первых α_1 строк матрицы A'_0 есть функции от переменных $x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}$. Поэтому строка матрицы A'_0 с номером α_1 есть линейная комбинация первых $\alpha_1 - 1$ строк A'_0 с коэффициентами в виде рациональных функций от $x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}$.

Рассмотрим теперь систему для определения инвариантов с матрицей A' . Если из ее уравнения с номером α_1 вычесть линейную комбинацию ее первых $\alpha_1 - 1$ уравнений с описанными выше коэффициентами, то получится уравнение вида

$$\psi(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1}) \frac{\partial f}{\partial x'_n} = 0. \quad (5.4)$$

Так как первые $\alpha_1 - 1$ элементов последнего столбца матрицы A' есть функции от $x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}$, а его элемент с номером α_1 зависит от x'_{α_1} (ибо $\lambda_n \neq 0$), то

$$\psi(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1}) \neq 0.$$

Поэтому (5.4) противоречит лемме 2.1. Это завершает изучение вещественного случая.

Пусть теперь для каждого $X \in \mathbf{G}$

$$\begin{aligned} [X, e_{\alpha_1-1}] &= ue_{\alpha_1-1} - ve_{\alpha_1} + \dots, \\ [X, e_{\alpha_1}] &= ve_{\alpha_1-1} + ue_{\alpha_1} + \dots, \end{aligned}$$

где $u = u(X) \in \mathbb{R}$, $v = v(X) \in \mathbb{R}$, а многоточия обозначают некоторые линейные комбинации $e_1, \dots, e_{\alpha_1-2}$. При этом предполагается, что $L(e_1, \dots, e_{\alpha_1-2})$ — идеал алгебры $\mathbf{G}$ и $v(X) = 0$ не для всех $X \in \mathbf{G}$ (*комплексный случай*). Тогда

$$\begin{aligned} [e_i, e_{\alpha_1-1}] &= u_i e_{\alpha_1-1} - v_i e_{\alpha_1} + \dots, \\ [e_i, e_{\alpha_1}] &= v_i e_{\alpha_1-1} + u_i e_{\alpha_1} + \dots, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$. Так как коммутант алгебры $\mathbf{G}$ нильпотентен, то $u_i = v_i = 0$ при $i \leq s$. По условию при $i > s$ не все $v_i = 0$. Поэтому будем считать, что $v_n \neq 0$, так как в противном случае вектор e_n можно заменить на сумму e_n и одного из векторов e_i , у которого $v_i \neq 0$.

Положим

$$d_i = \begin{cases} e_i, & \text{если } v_i = 0 \text{ или } i = n; \\ -\frac{v_n}{v_i} e_i + e_n, & \text{если } v_i \neq 0 \text{ и } i < n. \end{cases}$$

Тогда при $i < n$

$$\begin{aligned} [d_i, d_{\alpha_1-1}] &= u'_i d_{\alpha_1-1} + \dots, \\ [d_i, d_{\alpha_1}] &= u'_i d_{\alpha_1} + \dots, \end{aligned}$$

где $u'_i \in \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} [d_n, d_{\alpha_1-1}] &= u_n d_{\alpha_1-1} - v_n d_{\alpha_1} + \dots, \\ [d_n, d_{\alpha_1}] &= v_n d_{\alpha_1-1} + u_n d_{\alpha_1} + \dots. \end{aligned}$$

Все многоточия обозначают линейные комбинации $d_1, \dots, d_{\alpha_1-2}$. Ясно, что новый базис $d_1, \dots, d_n$ остается каноническим базисом алгебры $\mathbf{G}$.

Если бы все $u'_i = 0, i = 1, \dots, n-1$, то возникла бы ситуация, аналогичная разобранной выше для вещественного случая и приводящая к противоречию. Поэтому среди $u'_i, i = s+1, \dots, n-1$, не все равны нулю. Будем считать, что $u'_{n-1} \neq 0$. В противном случае вектор d_{n-1} можно заменить на сумму d_{n-1} и одного из векторов d_i , у которого $u'_i \neq 0$.

Положим

$$e'_i = \begin{cases} d_i, & \text{если } u'_i = 0 \text{ или } i = n-1, n; \\ -\frac{u'_{n-1}}{u'_i} d_i + d_{n-1}, & \text{если } u'_i \neq 0 \text{ и } i < n-1. \end{cases}$$

Тогда при $i < n-1$

$$\begin{aligned} [e'_i, e'_{\alpha_1-1}] &= 0 + \dots, \\ [e'_i, e'_{\alpha_1}] &= 0 + \dots. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} [e'_{n-1}, e'_{\alpha_1-1}] &= u'_{n-1} e'_{\alpha_1-1} + \dots, \\ [e'_{n-1}, e'_{\alpha_1}] &= u'_{n-1} e'_{\alpha_1} + \dots \end{aligned} \tag{5.6}$$

и

$$\begin{aligned} [e'_n, e'_{\alpha_1-1}] &= u_n e'_{\alpha_1-1} - v_n e'_{\alpha_1} + \dots, \\ [e'_n, e'_{\alpha_1}] &= v_n e'_{\alpha_1-1} + u_n e'_{\alpha_1} + \dots. \end{aligned} \tag{5.7}$$

В формулах (5.5)–(5.7) все многоточия обозначают линейные комбинации $e'_1, \dots, e'_{\alpha_1-2}$. При этом $L(e'_1, \dots, e'_{\alpha_1-2})$ является идеалом $\mathbf{G}$.

Новый базис $e'_1, \dots, e'_n$ снова является каноническим базисом алгебры $\mathbf{G}$. Он лучше двух предыдущих базисов приспособлен к целям нашего исследования.

При переходе от старого базиса $e_1, \dots, e_n$ к новому базису $e'_1, \dots, e'_n$ матрица A системы для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$ меняется, а вместе с ней меняется и матрица A_0 , которая получается из A после зачеркивания в ней последней строки и последнего столбца. Эти новые матрицы обозначим через A' и A'_0 . Ясно, что $\text{rang } A' = \text{rang } A = n - q - 1$. Так как алгебра $\mathbf{G}$ предполагается несводимой, то и $\text{rang } A'_0 = n - q - 1$. Поэтому последняя строка (столбец) матрицы A' есть линейная комбинация ее остальных строк (столбцов). Отсюда, в частности, следует, что в

системе для определения инвариантов с матрицей A' можно зачеркнуть последнее уравнение.

Как и в вещественном случае, устанавливается, что столбец матрицы A'_0 с номером α_1 линейно выражается через предыдущие столбцы A'_0 . Совершенно аналогично получаем, что столбец A'_0 с номером α_2 есть линейная комбинация столбцов A'_0 с номерами $1, \dots, \alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_2 - 1$. Наконец, сходное рассуждение приводит к выводу, что в матрице A'_0 столбцы с номерами $i = 1, \dots, s, i \neq \alpha_1, \alpha_2$, линейно независимы.

Рассмотрим систему для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$, отнесенную к базису $e'_1, \dots, e'_n$. Она имеет матрицу A' . Как мы уже знаем, последнее уравнение этой системы можно зачеркнуть. В результате получится однородная система, которая позволяет выразить все p_i через $p_{\beta_1}, p_{\beta_2}, \dots, p_{\beta_q}, p_n$, причем $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_q < n$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$ и $\beta_3 > s$. Если воспользоваться для этого правилом Крамера, то сразу видно, что

$$p_i = b_{i\beta_1}p_{\beta_1} + \dots + b_{i\beta_q}p_{\beta_q} + b_{in}p_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq \beta_1, \dots, \beta_q, \quad (5.8)$$

где $b_{i\beta_1}, \dots, b_{i\beta_q}, b_{in}$ — функции переменных $x'_1, \dots, x'_s$, причем $b_{i\beta_1} = 0$ при $i > \beta_1 = \alpha_1$, $b_{i\beta_2} = 0$ при $i > \beta_2 = \alpha_2$.

Покажем, что

$$b_{i\beta_1} = b_{i\alpha_1} = b'_{i\alpha_1}(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1})x'_{\alpha_1} + b''_{i\alpha_1}(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}), \quad (5.9)$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq \beta_1, \dots, \beta_q.$$

Пусть $A' = (t_{ij})$. Из равенств (5.5)–(5.7) следует, что

$$\begin{aligned} t_{i\alpha_1-1} &= 0 + \dots, \quad i < n-1, & t_{i\alpha_1} &= 0 + \dots, \quad i < n-1, \\ t_{n-1\alpha_1-1} &= u'_{n-1}x'_{\alpha_1-1} + \dots, & t_{n-1\alpha_1} &= u'_{n-1}x'_{\alpha_1} + \dots, \\ t_{n\alpha_1-1} &= u_n x'_{\alpha_1-1} - v_n x'_{\alpha_1} + \dots, & t_{n\alpha_1} &= v_n x'_{\alpha_1-1} + u_n x'_{\alpha_1} + \dots, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где многоточия обозначают некоторые линейные функции от переменных $x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-2}$. А так как $L(e'_1, \dots, e'_{\alpha_1-2})$ — идеал $\mathbf{G}$, то при $j \leq \alpha_1 - 2$

$$t_{ij} = t_{ij}(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-2}).$$

Для дальнейшего будет удобно представлять себе матрицу A' в виде

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2^T \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix},$$

где A_1 — квадратная матрица порядка α_1 .

Так как система с матрицей A' эквивалентна системе (5.8) и $b_{i\beta_1} = b_{i\alpha_1} = 0$ при $i > \alpha_1$, то p_i при $i > \alpha_1$ выражаются через $p_{\beta_2}, \dots, p_{\beta_q}, p_n$:

$$p_i = b_{i\beta_2}p_{\beta_2} + \dots + b_{i\beta_q}p_{\beta_q} + b_{in}p_n, \quad i = \alpha_1 + 1, \dots, n-1, \quad i \neq \beta_2, \dots, \beta_q. \quad (5.11)$$

Если в систему с матрицей A' вместо p_i , $i = \alpha_1 + 1, \dots, n-1$, $i \neq \beta_2, \dots, \beta_q$, подставить соответствующие выражения из (5.11), то получится система, которая вместе с (5.11) эквивалентна системе с матрицей A' . Эта новая система позволяет выразить $p_1, \dots, p_{\beta_1-1}$ через $p_{\beta_1}, \dots, p_{\beta_q}, p_n$. Мы можем зачеркнуть ее последнее уравнение (так как $\text{rang } A' = \text{rang } A'_0$); заметим, что в оставшейся системе коэффициенты при $p_1, \dots, p_{\alpha_1}$ зависят лишь от переменных $x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}$. Единственное исключение составляет коэффициент $t_{n-1 \alpha_1}$ при p_{α_1} , зависящий от x'_{α_1} (см. (5.10)): $t_{n-1 \alpha_1} = u'_{n-1} x'_{\alpha_1} + \dots$. Поэтому, выражая $p_1, \dots, p_{\alpha_1-1}$ через $p_{\beta_1}, \dots, p_{\beta_q}, p_n$ с помощью правила Крамера, получаем

$$p_i = b_{i\beta_1} p_{\beta_1} + \dots + b_{i\beta_q} p_{\beta_q} + b_{in} p_n, \quad i = 1, \dots, \alpha_1 - 1,$$

где

$$b_{i\beta_1} = b_{i\alpha_1} = b'_{i\alpha_1}(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1})x'_{\alpha_1} + b''_{i\alpha_1}(x'_1, \dots, x'_{\alpha_1-1}), \quad i = 1, \dots, \alpha_1 - 1.$$

Так как $b_{i\beta_1} = b_{i\alpha_1} = 0$ при $i > \alpha_1$, то тем самым формула (5.9) доказана.

Итак, утверждение теоремы 4.1 для коэффициентов $a_{i\alpha_1}$ пока что доказано нами не для исходного канонического базиса $e_1, \dots, e_n$, а лишь для специально подобранный канонического базиса $e'_1, \dots, e'_n$. В этой ситуации естественно воспользоваться формулами преобразования координат ковектора при изменении базиса алгебры $\mathbf{G}$ (см. [14; §23]).

Пусть рассматриваются два базиса алгебры $\mathbf{G}$ — $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$. И пусть

$$e_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e'_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.12)$$

Обозначим через $e^1, \dots, e^n$ и $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ соответствующие сопряженные базисы коалгебры $\mathbf{G}^*$. Если ковектор $x \in \mathbf{G}^*$ в базисе $e^1, \dots, e^n$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$, а в базисе $e^{1'}, \dots, e^{n'}$ — координаты $x'_1, \dots, x'_n$, то

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} x'_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.13)$$

Таким образом, закон преобразования (5.13) имеет тот же вид (с теми же коэффициентами c_{ij}), что и закон преобразования (5.12).

В рассматриваемом нами случае

$$e_j = \begin{cases} e'_j, & \text{если } j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=s+1}^n c_{ij} e'_i, & \text{если } j = s+1, \dots, n. \end{cases}$$

Поэтому

$$x_j = \begin{cases} x'_j, & \text{если } j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=s+1}^n c_{ij} x'_i, & \text{если } j = s+1, \dots, n. \end{cases} \quad (5.14)$$

С помощью формул (5.14) новые координаты x можно выразить через его старые координаты:

$$x'_j = \begin{cases} x_j, & \text{если } j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=s+1}^n d_{ij} x_i, & \text{если } j = s+1, \dots, n. \end{cases} \quad (5.15)$$

Рассмотрим произвольный инвариант $g = g(x'_1, \dots, x'_n)$ на $\mathbf{G}^*$, записанный в новых координатах. По доказанному выше он должен удовлетворять системе (5.8) и, в частности, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial x'_i} = b_{i\beta_1} \frac{\partial g}{\partial x'_{\beta_1}} + \dots + b_{i\beta_q} \frac{\partial g}{\partial x'_{\beta_q}} + b_{in} \frac{\partial g}{\partial x'_n}, \quad (5.16)$$

где $i = 1, \dots, s, i \neq \beta_1, \beta_2$. Если перейти к старым координатам, то наш инвариант запишется в виде функции $f = f(x_1, \dots, x_n)$, которая будет удовлетворять уже другому дифференциальному уравнению, соответствующему уравнению (5.16). Выясним, что это за уравнение.

Нам понадобится следующий общий факт (см. [12; §1]). Пусть известно, что функция $g = g(x'_1, \dots, x'_n)$ удовлетворяет уравнению

$$b_1 \frac{\partial g}{\partial x'_1} + \dots + b_n \frac{\partial g}{\partial x'_n} = 0,$$

где $b_i = b_i(x'_1, \dots, x'_n)$. Введем новые независимые переменные

$$x_j = \gamma_j(x'_1, \dots, x'_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

причем

$$x'_j = h_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n.$$

И пусть $f = g(h_1, \dots, h_n)$, так что $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда эта новая функция удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$D(\gamma_1)|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + D(\gamma_n)|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

где D обозначает оператор $b_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial x'_n}$.

В нашем случае

$$\gamma_j = \begin{cases} x'_j, & \text{если } j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=s+1}^n c_{ij} x'_i, & \text{если } j = s+1, \dots, n, \end{cases}$$

$$h_j = \begin{cases} x_j, & \text{если } j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=s+1}^n d_{ij} x_i, & \text{если } j = s+1, \dots, n. \end{cases}$$

Возвращаемся к уравнению (5.16). Для него оператор D таков:

$$D = \frac{\partial}{\partial x'_i} - b_{i\beta_1} \frac{\partial}{\partial x'_{\beta_1}} - \dots - b_{i\beta_q} \frac{\partial}{\partial x'_{\beta_q}} - b_{in} \frac{\partial}{\partial x'_n}.$$

Поэтому при $j = 1, \dots, s$

$$D(\gamma_j) = D(x'_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i, \beta_1, \beta_2, \\ 1, & \text{если } j = i, \\ -b_{i\beta_1}, & \text{если } j = \beta_1, \\ -b_{i\beta_2}, & \text{если } j = \beta_2. \end{cases}$$

Учитывая, что $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$, получаем, что функция f должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} - b_{i\alpha_1} \Big|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_1}} - b_{i\alpha_2} \Big|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_2}} \\ - D(\gamma_{s+1}) \Big|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}} - \dots - D(\gamma_n) \Big|_{x'_j=h_j} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Так как $b_{i\alpha_1}, b_{i\alpha_2}, D(\gamma_{s+1}), \dots, D(\gamma_n)$ есть функции от переменных $x'_1, \dots, x'_s$ и $h_j = x_j$ при $j = 1, \dots, s$, то

$$\begin{aligned} b_{i\alpha_1} \Big|_{x'_j=h_j} &= b_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_s), \quad b_{i\alpha_2} \Big|_{x'_j=h_j} = b_{i\alpha_2}(x_1, \dots, x_s), \\ D(\gamma_{s+1}) \Big|_{x'_j=h_j} &= D(\gamma_{s+1})(x_1, \dots, x_s), \quad \dots, \quad D(\gamma_n) \Big|_{x'_j=h_j} = D(\gamma_n)(x_1, \dots, x_s). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (5.17) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= b_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_1}} + b_{i\alpha_2}(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_2}} \\ &+ D(\gamma_{s+1})(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}} + \dots + D(\gamma_n)(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Так как функция $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — инвариант, то она должна удовлетворять системе (4.1). Следовательно, при $i = 1, \dots, s, i \neq \alpha_1, \alpha_2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i\alpha_1} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_1}} + a_{i\alpha_2} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_2}} + \dots + a_{i\alpha_q} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_q}} + a_{in} \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad (5.19)$$

а при $i > s$ все $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ выражаются через $\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_3}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_q}}, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Сравнивая уравнения (5.18) и (5.19), приходим к выводу, что

$$a_{i\alpha_1} = b_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_s). \quad (5.20)$$

В противном случае $\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_1}}$ можно было бы линейно выразить через $\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_2}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha_q}}, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, а это противоречило бы тому, что $\mathbf{G}$ — алгебра индекса $q + 1$.

Из (5.20) и (5.9) вытекает нужная формула:

$$a_{i\alpha_1} = a'_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_{\alpha_1-1})x_{\alpha_1} + a''_{i\alpha_1}(x_1, \dots, x_{\alpha_1-1}), \\ i = 1, \dots, n-1, \quad i \neq \beta_1, \dots, \beta_q.$$

Это завершает изучение комплексного случая.

В соответствии с леммой 4.1 для завершения доказательства теоремы 4.1 следовало бы разобрать третью возможность из этой леммы. Оказывается, однако, что новая ситуация ничем существенным не отличается от уже изученного комплексного случая.

§ 6. Алгебры произвольного индекса. Случай $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$

Вернемся к системе (4.2) и уравнению (4.6). После уже рассмотренного случая $\varphi_1 = \dots = \varphi_q = 0$ следующим по сложности является случай, когда одна из функций $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ отлична от нуля, а все остальные нулевые. Для простоты обозначений будем считать, что $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$. Все прочие варианты рассматриваются аналогично.

При сделанном предположении уравнение (4.6) превращается в уравнение

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = f - \varphi_{q+1}, \quad (6.1)$$

а формулы (4.7) принимают вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_1} \varphi_1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.2)$$

$$0 = -\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_1} \varphi_1, \quad k = 2, \dots, q, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} - \frac{\partial a_{iq+1}}{\partial y_1} \varphi_1 + a_{iq+1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.4)$$

Так как $\varphi_1 \neq 0$, то из (6.3) следует, что

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_1} = 0, \quad k = 2, \dots, q, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.1) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, считая все переменные, кроме y_1 , параметрами. Хорошо известно, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

имеет общее решение вида

$$y = e^{-\int P dx} \left(C + \int Q e^{\int P dx} dx \right),$$

где C – произвольная постоянная. В случае уравнения (6.1)

$$y = f, \quad x = y_1, \quad P = -\frac{1}{\varphi_1}, \quad Q = -\frac{\varphi_{q+1}}{\varphi_1}, \quad C = C(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_{q+1}).$$

Поэтому общее решение уравнения (6.1) таково:

$$f = e^{\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} \left(C - \int \frac{\varphi_{q+1}}{\varphi_1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \right).$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$-\int \frac{\varphi_{q+1}}{\varphi_1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} dy_1 = \varphi_{q+1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} - \int \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} dy_1.$$

Следовательно,

$$f = \varphi_{q+1} + e^{\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} \left(C - \int \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \right). \quad (6.6)$$

Так как φ_1 и $\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1}$ не зависят от y_{q+1} , то можно считать, что каждый из интегралов, входящих в формулу (6.6), определен с точностью до произвольной функции от переменных $x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q$. Следующая теорема утверждает, что эти интегралы можно подобрать так, чтобы при $C = 0$ формула (6.6) определяла функцию f , удовлетворяющую системе (4.2).

ТЕОРЕМА 6.1. Если $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$, то функция

$$f = \varphi_{q+1} - e^{\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} \int \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} e^{-\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \quad (6.7)$$

при специальном выборе входящих в нее интегралов есть решение системы (4.2). При этом f – однородная функция степени однородности 1 и $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_{q+1}} = 1$, то необходимо добиться, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial f}{\partial y_t} + a_{i, q+1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.8)$$

Пусть F_1^0 – фиксированная гладкая функция, которая является одним из возможных значений интеграла $\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1$. С помощью формул (6.2) и (6.5) доказываем, что

$$\frac{\partial F_1^0}{\partial x_i} = \frac{a_{i1}}{\varphi_1} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_1^0}{\partial y_t} - c_i^1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.9)$$

где c_i^1 – некоторая функция переменных $x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q$.

ЛЕММА 6.1. *Существует функция $\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q)$ такая, что функция $F_1 = F_1^0 + \lambda_1$ удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \frac{a_{i1}}{\varphi_1} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_1}{\partial y_t}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.10)$$

Функция λ_1 находится в явном виде в квадратурах и зависит от выбора произвольной гладкой функции от $q - 1$ переменных.

Лемма 6.1 будет доказана в следующем параграфе.

В дальнейшем будем считать, что в формуле (6.7) $\int \frac{1}{\varphi_1} dy_1 = F_1$.

Пусть F_2^0 — фиксированная гладкая функция, которая является одним из возможных значений интеграла $\int \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} e^{-F_1} dy_1$. С помощью формул (6.4), (6.5) и (6.10) доказывается, что

$$\frac{\partial F_2^0}{\partial x_i} = e^{-F_1} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i \ q+1} - \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} \right) + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_2^0}{\partial y_t} - c_i^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.11)$$

где c_i^2 — некоторая функция переменных $x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q$.

ЛЕММА 6.2. *Существует функция $\lambda_2 = \lambda_2(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q)$ такая, что функция $F_2 = F_2^0 + \lambda_2$ удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = e^{-F_1} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i \ q+1} - \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} \right) + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_2}{\partial y_t}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.12)$$

Функция λ_2 находится в явном виде в квадратурах и зависит от выбора произвольной гладкой функции от $q - 1$ переменных.

Лемма 6.2 будет доказана в следующем параграфе.

В дальнейшем будем считать, что в формуле (6.7) $\int \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} e^{-F_1} dy_1 = F_2$. Таким образом,

$$f = \varphi_{q+1} - e^{F_1} F_2. \quad (6.13)$$

Проверим, что функция f , определенная формулой (6.13), удовлетворяет системе (6.8).

Так как f есть решение уравнения (6.1), то

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{f - \varphi_{q+1}}{\varphi_1},$$

а потому из (6.13) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{1}{\varphi_1} e^{F_1} F_2. \quad (6.14)$$

Из (6.13) вытекает равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y_t} = \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} - \frac{\partial F_1}{\partial y_t} e^{F_1} F_2 - e^{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_t}, \quad t = 2, \dots, q. \quad (6.15)$$

Переходим к вычислению $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, \dots, m$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_1}{\partial x_i} e^{F_1} F_2 - e^{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} = |\text{см. (6.10), (6.12)}| \\ &= \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - \left(\frac{a_{i1}}{\varphi_1} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \right) e^{F_1} F_2 \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} + a_{i, q+1} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} - e^{F_1} \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_2}{\partial y_t} \\ &= a_{i1} \left(-\frac{1}{\varphi_1} e^{F_1} F_2 \right) \\ &\quad + \sum_{t=2}^q a_{it} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_t} - \frac{\partial F_1}{\partial y_t} e^{F_1} F_2 - e^{F_1} \frac{\partial F_2}{\partial y_t} \right) + a_{i, q+1} = |\text{см. (6.14), (6.15)}| \\ &= a_{i1} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial f}{\partial y_t} + a_{i, q+1} = \sum_{t=1}^q a_{it} \frac{\partial f}{\partial y_t} + a_{i, q+1}, \end{aligned}$$

что и доказывает (6.8).

Мы видим, что функция f удовлетворяет системе (4.2), является решением уравнения (4.6) и $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$. Поэтому f есть однородная функция первой степени однородности. Теорема 6.1 доказана.

§ 7. Доказательство лемм 6.1 и 6.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1. Прежде всего заметим, что функция $F_1 = F_1^0 + \lambda_1$ удовлетворяет системе (6.10) тогда и только тогда, когда функция λ_1 удовлетворяет системе

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_t} + c_i^1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.1)$$

Нужные нам сведения о системах такого вида изложены в [13; § 6]. В частности, мы можем выписать *условия интегрируемости* системы (7.1):

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{t=2}^q \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} a_{jt} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} a_{it} \right), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 2, \dots, q, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial c_i^1}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j^1}{\partial x_i} = \sum_{t=2}^q \left(\frac{\partial c_i^1}{\partial y_t} a_{jt} - \frac{\partial c_j^1}{\partial y_t} a_{it} \right), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (7.3)$$

Из равенств (6.5) следует, что условия (7.2) совпадают с уже доказанными формулами (4.3) при $k = 2, \dots, q$. Остается проверить справедливость условий (7.3).

Из формул (6.9) получаем

$$c_i^1 = \frac{a_{i1}}{\varphi_1} + \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial F_1^0}{\partial y_k} - \frac{\partial F_1^0}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_j^1}{\partial x_i} - \frac{\partial c_i^1}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(\frac{\partial c_i^1}{\partial y_t} a_{jt} - \frac{\partial c_j^1}{\partial y_t} a_{it} \right) \\ &= \sum_{k=2}^q \frac{\partial F_1^0}{\partial y_k} \left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} - a_{it} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a_{j1}}{\varphi_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{a_{i1}}{\varphi_1} \right) + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{a_{i1}}{\varphi_1} \right) - a_{it} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{a_{j1}}{\varphi_1} \right) \right) \\ &= |\text{см. (4.3), (6.5)}| \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{a_{j1}}{\varphi_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{a_{i1}}{\varphi_1} \right) + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{a_{i1}}{\varphi_1} \right) - a_{it} \frac{\partial}{\partial y_t} \left(\frac{a_{j1}}{\varphi_1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left[\frac{\partial a_{j1}}{\partial x_i} \varphi_1 - a_{j1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_j} \varphi_1 + a_{i1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_t} \varphi_1 - a_{i1} a_{jt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} - a_{it} \frac{\partial a_{j1}}{\partial y_t} \varphi_1 + a_{j1} a_{it} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left[\varphi_1 \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_t} - a_{it} \frac{\partial a_{j1}}{\partial y_t} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-a_{j1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + a_{i1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(-a_{i1} a_{jt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} + a_{j1} a_{it} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} \right) \right) \right] \\ &= |\text{см. (4.3) при } k = 1| \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left[\varphi_1 \left(a_{i1} \frac{\partial a_{j1}}{\partial y_1} - a_{j1} \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(-a_{j1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + a_{i1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(-a_{i1} a_{jt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} + a_{j1} a_{it} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left[a_{i1} \left(\varphi_1 \frac{\partial a_{j1}}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} - \sum_{t=2}^q a_{jt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} \right) \right. \\ &\quad \left. + a_{j1} \left(-\varphi_1 \frac{\partial a_{i1}}{\partial y_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_t} \right) \right] \\ &= |\text{см. (6.2)}| \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2} \left(a_{i1} a_{j1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} - a_{j1} a_{i1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, условия (7.2) и (7.3) выполняются. Поэтому к системе (7.1) можно применить *метод Майера*, который сводит ее решение к решению единственного уравнения.

Заметим, что коэффициенты a_{it} , c_i^1 и неизвестная функция λ_1 системы (7.1) зависят лишь от переменных $x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q$. При этом в силу следствия 4.1' коэффициенты a_{it} можно представить в виде

$$a_{it} = a'_{it}y_t + a''_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 2, \dots, q, \quad (7.4)$$

где функции a'_{it} , a''_{it} не зависят от $y_t, y_{t+1}, \dots, y_q$.

Будем искать решение λ_1 системы (7.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\lambda_1(\xi_1, \dots, \xi_m, y_2, \dots, y_q) = \omega(y_2, \dots, y_q), \quad (7.5)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ — фиксированные значения переменных $x_1, \dots, x_m$, а $\omega(y_2, \dots, y_q)$ — произвольная фиксированная гладкая функция аргументов $y_2, \dots, y_q$. При некоторых ограничениях на числа $\xi_1, \dots, \xi_m$ система (7.1) имеет единственное решение λ_1 , удовлетворяющее начальному условию (7.5). Найти это решение можно методом Майера.

Рассматривается преобразование вида

$$x_i = \xi_i + uu_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $u_1, \dots, u_m, u$ — новые аргументы.

Неизвестная функция $\lambda_1(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q)$ превращается в функцию $z = z(u_1, \dots, u_m, y_2, \dots, y_q, u)$, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \sum_{k=2}^q f_k \frac{\partial z}{\partial y_k} = h, \quad (7.6)$$

где

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{i=1}^m u_i a_{ik}(\xi_1 + uu_1, \dots, \xi_m + uu_m, y_2, \dots, y_q), \\ h &= \sum_{i=1}^m u_i c_i^1(\xi_1 + uu_1, \dots, \xi_m + uu_m, y_2, \dots, y_q). \end{aligned}$$

Из (7.4) следует, что функцию f_k можно записать в виде

$$f_k = f'_k y_k + f''_k, \quad (7.7)$$

где f'_k, f''_k не зависят от $y_k, y_{k+1}, \dots, y_q$. Поэтому уравнение (7.6) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \sum_{k=2}^q (f'_k y_k + f''_k) \frac{\partial z}{\partial y_k} = h. \quad (7.8)$$

Из начального условия (7.5) для λ_1 следует, что

$$z(u_1, \dots, u_m, y_2, \dots, y_g, 0) = \omega(y_2, \dots, y_g). \quad (7.9)$$

$$\lambda_1(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q) = z(x_1 - \xi_1, \dots, x_m - \xi_m, y_2, \dots, y_q, 1) \quad (7.10)$$

Для того чтобы найти решение уравнения (7.8) с начальным условием (7.9), рассмотрим систему

$$\frac{du}{1} = -\frac{dy_2}{f_2' y_2 + f_2''} = \cdots = -\frac{dy_q}{f_q' y_q + f_q''} = \frac{dz}{h}. \quad (7.11)$$

[illegible][illegible]
$$\begin{cases} z = \rho_1(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_q), \\ y_i = \rho_i(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_q), \quad i = 2, \dots, q. \end{cases} \quad (7.14)$$
$$V(z, y_2, \dots, y_q, u) \equiv \rho_1(\psi_1, \dots, \psi_q) - \omega(\rho_2(\psi_1, \dots, \psi_q), \dots, \rho_q(\psi_1, \dots, \psi_q)).$$
$$V(z, y_2, \dots, y_g, u) = 0 \quad (7.15)$$

Остается найти систему (7.12) независимых интегралов системы (7.11).

Если в системе (7.11) принять u за независимую переменную, то система получит следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{du} + f'_k y_k = -f''_k, & k = 2, \dots, q, \\ \frac{dz}{du} = h. \end{cases} \quad (7.16)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (7.16). Согласно (7.7) в нем $f'_2 = f'_2(u)$, $f''_2 = f''_2(u)$ и потому оно имеет стандартное решение

$$y_2 = e^{-\int f'_2 du} \left(C_2 - \int f''_2 e^{\int f'_2 du} du \right), \quad (7.17)$$

где C_2 — произвольная постоянная. С помощью (7.17) получается следующий интеграл системы (7.11):

$$\psi_2(y_2, u) \equiv y_2 e^{\int f'_2 du} + \int f''_2 e^{\int f'_2 du} du = C_2.$$

Рассмотрим второе уравнение системы (7.16). Согласно (7.7) в нем $f'_3 = f'_3(y_2, u)$, $f''_3 = f''_3(y_2, u)$. Если воспользоваться формулой (7.17), то f'_3 , f''_3 превратятся в функции $\tilde{f}'_3 = \tilde{f}'_3(u, C_2)$, $\tilde{f}''_3 = \tilde{f}''_3(u, C_2)$, так что

$$y_3 = e^{-\int \tilde{f}'_3 du} \left(C_3 - \int \tilde{f}''_3 e^{\int \tilde{f}'_3 du} du \right), \quad (7.18)$$

откуда получаем еще один интеграл системы (7.11):

$$\psi_3(y_2, y_3, u) \equiv \left(y_3 e^{\int \tilde{f}'_3 du} + \int \tilde{f}''_3 e^{\int \tilde{f}'_3 du} du \right) \Big|_{C_2=\psi_2(y_2, u)} = C_3.$$

В третьем уравнении системы (7.16) $f'_4 = f'_4(y_2, y_3, u)$, $f''_4 = f''_4(y_2, y_3, u)$. Если воспользоваться формулами (7.17) и (7.18), то f'_4 , f''_4 превратятся в функции $\tilde{f}'_4 = \tilde{f}'_4(u, C_2, C_3)$, $\tilde{f}''_4 = \tilde{f}''_4(u, C_2, C_3)$ и т. д. В результате получим интегралы $\psi_2, \dots, \psi_q$ системы (7.11), не зависящие от z .

Переходя к последнему уравнению системы (7.16), из функции $h = h(y_2, \dots, y_q, u)$ аналогичным образом получим функции $\tilde{h} = \tilde{h}(u, C_2, \dots, C_q)$. Тогда

$$z = \int \tilde{h} du + C_1,$$

откуда получаем последний недостающий интеграл системы (7.11):

$$\psi_1(z, y_2, \dots, y_q, u) \equiv z - \int \tilde{h} du \Big|_{\substack{C_i=\psi_i, \\ i=2, \dots, q}} = C_1.$$

Очевидно, интегралы $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q$ независимы и определены в явном виде в квадратурах. Очевидно также, что найденная система интегралов (7.12) позволяет выразить $z, y_2, \dots, y_q$ через $\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_q$ в явном виде (см. (7.13) и (7.14)). Наконец, уравнение (7.15) определяет z как функцию от $y_2, \dots, y_q$ и снова в явном виде. После этого искомая функция $\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \dots, x_m, y_2, \dots, y_q)$ определяется формулой (7.10).

Мы видим, что λ_1 определяется в явном виде в квадратурах и зависит от выбора функции $\omega(y_2, \dots, y_q)$. Лемма 6.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2. Заметим сначала, что функция $F_2 = F_2^0 + \lambda_2$ удовлетворяет системе (6.12) тогда и только тогда, когда функция λ_2 удовлетворяет системе

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} = \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial \lambda_2}{\partial y_t} + c_i^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.19)$$

Проверка выполнения условий интегрируемости системы (7.19) сводится к проверке справедливости следующих равенств, аналогичных равенствам (7.3) для системы (7.1):

$$\frac{\partial c_i^2}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j^2}{\partial x_i} = \sum_{t=2}^q \left(\frac{\partial c_i^2}{\partial y_t} a_{jt} - \frac{\partial c_j^2}{\partial y_t} a_{it} \right), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (7.20)$$

Из формул (6.11) получаем:

$$c_i^2 = e^{-F_1} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i \ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) + \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial F_2^0}{\partial y_k} - \frac{\partial F_2^0}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Прямое вычисление дает:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_j^2}{\partial x_i} - \frac{\partial c_i^2}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(\frac{\partial c_i^2}{\partial y_t} a_{jt} - \frac{\partial c_j^2}{\partial y_t} a_{it} \right) \\ &= \sum_{k=2}^q \frac{\partial F_2^0}{\partial y_k} \left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{t=2}^q \left(a_{jt} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} - a_{it} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} \right) \right] \\ &+ e^{-F_1} \left[-\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j} - a_{j \ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{jk} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \right. \\ &- \left(\frac{\partial a_{j \ q+1}}{\partial x_i} + \sum_{k=2}^q \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \\ &+ \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i \ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) + \left(\frac{\partial a_{i \ q+1}}{\partial x_j} + \sum_{k=2}^q \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \\ &- \sum_{t=2}^q a_{jt} \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i \ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \\ &- \sum_{t=2}^q a_{jt} \left(\frac{\partial a_{i \ q+1}}{\partial y_t} + \sum_{k=2}^q \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \\ &+ \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j} - a_{j \ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{jk} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \\ &+ \sum_{t=2}^q a_{it} \left(\frac{\partial a_{j \ q+1}}{\partial y_t} + \sum_{k=2}^q \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \Big] \\ &= |\text{см. (4.3), (6.5)}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-F_1} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j} - a_{j\ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{jk} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \left(-\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{t=2}^q a_{it} \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i\ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j} - \sum_{t=2}^q a_{jt} \frac{\partial F_1}{\partial y_t} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_{i\ q+1}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{j\ q+1}}{\partial x_i} + \sum_{t=2}^q \left(a_{it} \frac{\partial a_{j\ q+1}}{\partial y_t} - a_{jt} \frac{\partial a_{i\ q+1}}{\partial y_t} \right) \right) \\
&\quad \left. + \sum_{k=2}^q \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \sum_{t=2}^q \left(a_{it} \frac{\partial a_{jk}}{\partial y_t} - a_{jt} \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_t} \right) \right) \right] \\
&= |\text{см. (6.10), (4.3), (6.5)}| \\
&= e^{-F_1} \left[- \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j} - a_{j\ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{jk} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \frac{a_{i1}}{\varphi_1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - a_{i\ q+1} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} \right) \frac{a_{j1}}{\varphi_1} + \left(a_{j1} \frac{\partial a_{i\ q+1}}{\partial y_1} - a_{i1} \frac{\partial a_{j\ q+1}}{\partial y_1} \right) \right] \\
&= e^{-F_1} \left[- \frac{a_{i1}}{\varphi_1} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j} - \sum_{k=2}^q a_{jk} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} + \frac{\partial a_{j\ q+1}}{\partial y_1} \varphi_1 - a_{j\ q+1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_{j1}}{\varphi_1} \left(\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_i} - \sum_{k=2}^q a_{ik} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_k} + \frac{\partial a_{i\ q+1}}{\partial y_1} \varphi_1 - a_{i\ q+1} \right) \right] \\
&= |\text{см. (6.4)}| \\
&= \frac{1}{\varphi_1} e^{-F_1} \left(-a_{i1} a_{j1} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} + a_{j1} a_{i1} \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial y_1} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Итак, условия (7.20) действительно выполняются.

Сравнивая систему (7.19) с уже изученной системой (7.1), приходим к выводу, что если в решении системы (7.1) методом Майера заменить c_i^1 на c_i^2 , то получится искомое решение системы (7.19). Лемма 6.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Завершая рассмотрение случая $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$, важно отметить для дальнейшего, что при его изучении мы пользовались не теоремой 4.1, а лишь ее следствием 4.1'.

§ 8. Алгебры произвольного индекса. Общий случай

Нам осталось рассмотреть случай, когда среди функций $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ отличны от нуля не менее двух функций. Оказывается, что с помощью подходящей замены переменных этот случай сводится к уже разобранному случаю, когда отлична от нуля лишь одна из функций $\varphi_1, \dots, \varphi_q$.

Нам понадобятся некоторые дополнительные сведения об однородных функциях.

ЛЕММА 8.1. Если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — гладкая однородная функция степени

однородности k , то $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, – однородная функция степени однородности $k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = kf. \quad (8.1)$$

Продифференцируем левую и правую части (8.1) по x_i . Получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = k \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

откуда

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = (k - 1) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Последнее равенство означает, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – однородная функция степени однородности $k - 1$. Лемма 8.1 доказана.

ЛЕММА 8.2. Если $f = f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, – гладкая однородная функция степени однородности k , то для каждого $i = 1, \dots, n$ существует гладкая однородная функция $F = F(x_1, \dots, x_n)$ степени однородности $k + 1$ такая, что $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f$. Функция F определяется в явном виде в квадратурах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $i = n$. И пусть $F_0 = F_0(x_1, \dots, x_n)$ – какая-либо гладкая функция, для которой $\frac{\partial F_0}{\partial x_n} = f$. Если F_0 неоднородна, то попробуем подобрать такую гладкую функцию $\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_{n-1})$, что $F = F_0 + \lambda$.

F будет однородной функцией степени однородности $k + 1$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = (k + 1)F. \quad (8.2)$$

По условию

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf. \quad (8.3)$$

Так как $F_0 = \int f dx_n$, то

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_i} = \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_n, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (8.4)$$

Рассмотрим левую часть (8.2).

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}. \quad (8.5)$$

где Φ – произвольная гладкая функция. Уравнение

$$\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0 \quad (8.10)$$

определяет z как функцию от $x_1, \dots, x_n$, причем эта функция удовлетворяет уравнению (8.8).

Вернемся к уравнению (8.7). Оно приводится к однородному линейному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + ((k+1)\lambda + \delta) \frac{\partial v}{\partial \lambda} = 0, \quad (8.11)$$

где $v = v(\lambda, x_1, \dots, x_{n-1})$. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (8.11):

$$\frac{dx_1}{x_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{d\lambda}{(k+1)\lambda + \delta}. \quad (8.12)$$

Считая x_1 независимой переменной, перепишем (8.12) в виде

[illegible]

Из первых уравнений системы (8.13) получаем

$$x_2 = C_2 x_1, \dots, x_{n-1} = C_{n-1} x_1, \quad (8.14)$$

где $C_2, \dots, C_{n-1}$ – произвольные константы. С учетом (8.14) последнее уравнение (8.13) принимает вид

$$\frac{d\lambda}{dx_1} - (k+1)\frac{1}{x_1}\lambda = \frac{\tilde{\delta}}{x_1}, \quad (8.15)$$

где $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(x_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = \delta(x_1, C_2 x_1, \dots, C_{n-1} x_1)$. Уравнение (8.15) есть частный случай уравнения

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

которое имеет первый интеграл

$$ye^{-\int P \, dx} - \int Qe^{\int P \, dx} \, dx = C.$$

Поэтому уравнение (8.15) имеет следующий первый интеграл:

$$\lambda x_1^{k+1} - \int \frac{\tilde{\delta}}{x_1^{k+2}} dx_1 = C_n.$$

Так как $C_i = x_i/x_1$, $i = 2, \dots, n-1$, то

$$\lambda x_1^{k+1} - \int \frac{\tilde{\delta}}{x_1^{k+2}} dx_1 \Big|_{C_i=x_i/x_1} = C_n$$

есть первый интеграл системы (8.12), зависящий от λ . Поэтому согласно теории функция

$$\lambda = \frac{1}{x_1^{k+1}} \int \frac{\tilde{\delta}}{x_1^{k+2}} dx_1 \Big|_{C_i=x_i/x_1}$$

должна удовлетворять уравнению (8.7). Лемма 8.2 доказана.

Вернемся к уравнению (4.6):

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \varphi_q \frac{\partial f}{\partial y_q} = f - \varphi_{q+1}.$$

Для простоты обозначений будем считать в дальнейшем, что функции $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ отличны от нуля.

ЛЕММА 8.3. *Функции φ_k , $k = 1, \dots, q$, имеют следующий вид:*

$$\varphi_k = \varphi'_k y_k + \varphi''_k, \quad (8.16)$$

где φ'_k и φ''_k — однородные функции степени однородности 0 и 1 соответственно, не зависящие от переменных $y_k, y_{k+1}, \dots, y_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\varphi_k = \sum_{i=1}^m x_i a_{ik} + y_k$. Согласно следствию 4.1' $a_{ik} = a'_{ik} y_k + a''_{ik}$, $i = 1, \dots, m$, где a'_{ik} и a''_{ik} не зависят от $y_k, \dots, y_q$. Поэтому φ_k можно записать в виде $\varphi_k = \varphi'_k y_k + \varphi''_k$, где $\varphi'_k = \sum_{i=1}^m x_i a'_{ik} + 1$, $\varphi''_k = \sum_{i=1}^m x_i a''_{ik}$, причем φ'_k и φ''_k не зависят от $y_k, \dots, y_q$.

Так как φ_k — однородная функция степени однородности 1 и $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k} = \varphi'_k$, то согласно лемме 8.1 φ'_k — однородная функция степени однородности 0. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\varphi''_k = \varphi_k - \varphi'_k y_k$ есть однородная функция степени однородности 1. Лемма 8.3 доказана.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \varphi_q \frac{\partial f}{\partial y_q} = 0, \quad (8.17)$$

соответствующее уравнению (4.6). Нас интересуют независимые решения уравнения (8.17). Чтобы их найти, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{\varphi_1} = \dots = \frac{dy_q}{\varphi_q}. \quad (8.18)$$

Если принять y_1 за независимую переменную, то система (8.18) принимает вид

$$\frac{dy_k}{dy_1} = \frac{\varphi_k}{\varphi_1}, \quad k = 2, \dots, q. \quad (8.19)$$

Из леммы 8.3 следует, что систему (8.19) можно записать в виде

$$\frac{dy_k}{dy_1} + \left(-\frac{\varphi'_k}{\varphi_1} \right) y_k = \frac{\varphi''_k}{\varphi_1}, \quad k = 2, \dots, q, \quad (8.20)$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(y_1)$, $\varphi'_k = \varphi'_k(y_1, \dots, y_{k-1})$, $\varphi''_k = \varphi''_k(y_1, \dots, y_{k-1})$.

Рассмотрим первое уравнение системы (8.20). Так как $\varphi_1 = \varphi_1(y_1)$, $\varphi'_2 = \varphi'_2(y_1)$, $\varphi''_2 = \varphi''_2(y_1)$, то оно имеет стандартное решение

$$y_2 = e^{\int \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} dy_1} \left(C_2 + \int \frac{\varphi''_2}{\varphi_1} e^{-\int \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \right), \quad (8.21)$$

где C_2 — произвольная константа, из которого получаем первый интеграл системы (8.20):

$$\gamma_2 \equiv y_2 e^{-\int \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} dy_1} - \int \frac{\varphi''_2}{\varphi_1} e^{-\int \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} dy_1} dy_1 = C_2. \quad (8.22)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (8.20). В нем $\varphi_1 = \varphi_1(y_1)$, $\varphi'_3 = \varphi'_3(y_1, y_2)$, $\varphi''_3 = \varphi''_3(y_1, y_2)$. Если воспользоваться формулой (8.21), то φ'_3 и φ''_3 превратятся в функции $\tilde{\varphi}'_3 = \tilde{\varphi}'_3(y_1, C_2)$, $\tilde{\varphi}''_3 = \tilde{\varphi}''_3(y_1, C_2)$, так что

$$y_3 = e^{\int \frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1} dy_1} \left(C_3 + \int \frac{\tilde{\varphi}''_3}{\varphi_1} e^{-\int \frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \right), \quad (8.23)$$

где C_3 — произвольная константа, откуда получаем еще один интеграл системы (8.20):

$$\gamma_3 \equiv \left(y_3 e^{-\int \frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1} dy_1} - \int \frac{\tilde{\varphi}''_3}{\varphi_1} e^{-\int \frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1} dy_1} dy_1 \right) \Big|_{C_2=\gamma_2(y_1, y_2)} = C_3. \quad (8.24)$$

В третьем уравнении системы (8.20) $\varphi_1 = \varphi_1(y)$, $\varphi'_4 = \varphi'_4(y_1, y_2, y_3)$, $\varphi''_4 = \varphi''_4(y_1, y_2, y_3)$. Если воспользоваться формулами (8.21) и (8.23), то φ'_4 и φ''_4 превратятся в функции $\tilde{\varphi}'_4 = \tilde{\varphi}'_4(y_1, C_2, C_3)$, $\tilde{\varphi}''_4 = \tilde{\varphi}''_4(y_1, C_2, C_3)$ и т. д. В результате получим набор из $q - 1$ независимых первых интегралов системы (8.18)

$$\gamma_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k), \quad k = 2, \dots, q,$$

которые согласно теории должны быть решениями уравнения (8.17).

Во всех рассуждениях, связанных с уравнением (8.17), переменные $x_1, \dots, x_m$ рассматривались как параметры. Теперь мы снова будем смотреть на них как на независимые переменные и покажем, что функции $\gamma_2, \dots, \gamma_q$ можно считать однородными степени однородности 1.

Из леммы 8.3 следует, что $\frac{\varphi'_k}{\varphi_1}$ и $\frac{\varphi''_k}{\varphi_1}$, $k = 2, \dots, q$, — однородные функции степени однородности -1 и 0 соответственно.

Рассмотрим формулу (8.22), определяющую функцию γ_2 . Согласно лемме 8.2 функции

$$F_2^1 = \int \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} dy_1, \quad F_2^2 = \int \frac{\varphi''_2}{\varphi_1} e^{-F_2^1} dy_1$$

можно считать гладкими однородными степени однородности 0 и 1 соответственно. Но тогда и

$$\gamma_2 = y_2 e^{-F_2^1} - F_2^2$$

— гладкая однородная функция степени однородности 1 по переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, y_2$.

Перейдем к формуле (8.24), определяющей функцию γ_3 . Учитывая, что $\tilde{\varphi}'_3$ и $\tilde{\varphi}''_3$ получаются из φ'_3 и φ''_3 с помощью формулы (8.21), запишем последнюю формулу в виде

$$y_2 = e^{F_2^1} (C_2 + F_2^2). \quad (8.25)$$

Так как правая часть (8.25) — гладкая однородная функция степени однородности 1 по переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, C_2$, то $\frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1}$ и $\frac{\tilde{\varphi}''_3}{\varphi_1}$ — гладкие однородные функции степени однородности -1 и 0 по переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, C_2$. Но тогда по лемме 8.2 функции

$$\tilde{F}_3^1 = \int \frac{\tilde{\varphi}'_3}{\varphi_1} dy_1, \quad \tilde{F}_3^2 = \int \frac{\tilde{\varphi}''_3}{\varphi_1} e^{-\tilde{F}_3^1} dy_1$$

можно считать гладкими однородными степени однородности 0 и 1 соответственно по переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, C_2$. Так как γ_2 — гладкая однородная функция степени однородности 1 , то и функция

$$\gamma_3 = (y_3 e^{-\tilde{F}_3^1} - \tilde{F}_3^2)|_{C_2=\gamma_2}$$

— гладкая однородная функция степени однородности 1 по переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, y_2, y_3$. Совершенно аналогично рассматриваются функции $\gamma_4, \dots, \gamma_q$.

Итак, будем считать далее, что функции $\gamma_2, \dots, \gamma_q$ выбраны гладкими однородными степени однородности 1 .

Рассмотрим новые независимые переменные $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_q, z_{q+1}$:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \gamma_2(x_1, \dots, x_m, y_1, y_2), \dots, \quad z_q = \gamma_q(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_q), \quad z_{q+1} = y_{q+1}, \\ y_1 = z_1, \quad y_2 = h_2(x_1, \dots, x_m, z_1, z_2), \dots, \quad y_q = h_q(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_q), \quad y_{q+1} = z_{q+1}.$$

Легко видеть, что не только $\gamma_2, \dots, \gamma_q$, но и $h_2, \dots, h_q$ — однородные функции степени однородности 1 , причем их можно выписать в явном виде.

При переходе к новым переменным функция $f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{q+1})$ превращается в функцию $g(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{q+1}) = f(x_1, \dots, x_m, z_1, h_2, \dots, h_q, z_{q+1})$. Если f удовлетворяет системе (4.2), то функция g будет решением уже другой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных

первого порядка, причем эта новая система остается якобиевой. Мы покажем, что она имеет тот же вид, что и система (4.2):

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{q+1} \bar{a}_{ik} \frac{\partial g}{\partial z_k}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.26)$$

а ее коэффициенты $\bar{a}_{ik}$ остаются однородными функциями степени однородности 0 и сохраняют основное свойство коэффициентов a_{ik} :

$$\bar{a}_{ik} = \bar{a}'_{ik} z_k + \bar{a}''_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, q, \quad (8.27)$$

где $\bar{a}'_{ik}$ и $\bar{a}''_{ik}$ не зависят от $z_k, z_{k+1}, \dots, z_{q+1}$. В то же время система (8.26) имеет важное преимущество перед исходной системой (4.2). Оказывается,

$$\bar{\varphi}_k = \sum_{i=1}^m x_i \bar{a}_{ik} + z_k = 0, \quad k = 2, \dots, q. \quad (8.28)$$

Все это означает, что система (8.26) обладает всеми свойствами, которыми мы пользовались, изучая систему (4.2) в случае $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$. Следовательно, можно найти решение системы (8.26) в виде однородной функции $g = g(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{q+1})$ степени однородности 1, причем $\frac{\partial g}{\partial z_{q+1}} = 1$. Возвращаясь к переменным $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{q+1}$, получаем функцию $f = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{q+1})$, удовлетворяющую исходной системе (4.2). Так как $f = g(x_1, \dots, x_m, y_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q, y_{q+1})$ и $\gamma_2, \dots, \gamma_q$ — однородные функции степени однородности 1, то и f — однородная функция степени однородности 1. Очевидно также, что $\frac{\partial f}{\partial y_{q+1}} = 1$. Полученный таким образом инвариант f и будет искомым недостающей функцией на $\mathbf{G}^*$.

Переходя к реализации намеченного выше, напомним (см. §5), что если функция $f = f(y_1, \dots, y_n)$ удовлетворяет уравнению

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial y_n} = 0 \quad (8.29)$$

и рассматривается преобразование переменных

$$z_i = \gamma_i(y_1, \dots, y_n), \quad y_i = h_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

то функция $g = g(z_1, \dots, z_n), g = f(h_1(z_1, \dots, z_n), \dots, h_n(z_1, \dots, z_n))$, удовлетворяет уравнению

$$D(\gamma_1) \Big|_{y_i=h_i} \frac{\partial g}{\partial z_1} + \dots + D(\gamma_n) \Big|_{y_i=h_i} \frac{\partial g}{\partial z_n} = 0, \quad (8.30)$$

где

$$D = a_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Если коэффициенты a_i уравнения (8.29) — однородные функции степени однородности 0, а γ_i и h_i — однородные функции степени однородности 1, то из леммы 8.1 следует, что коэффициенты уравнения (8.30) — однородные функции степени однородности 0.

В рассматриваемой ситуации (см. (4.2))

$$D = D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - a_{i1} \frac{\partial}{\partial y_1} - \dots - a_{i\,q+1} \frac{\partial}{\partial y_{q+1}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

и

$$\begin{aligned} D_i(x_j) &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m, \\ D_i(y_1) &= -a_{i1}, \quad D_i(y_{q+1}) = -a_{i\,q+1}, \\ D_i(\gamma_k) &= \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} - a_{i1} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} - \dots - a_{ik} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k}, \quad k = 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Таким образом, если f удовлетворяет системе (4.2), то функция g будет решением системы (8.26), где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i1} &= a_{i1} \Big|_{y_1=z_1}, \quad \bar{a}_{i\,q+1} = a_{i\,q+1} \Big|_{\substack{y_{q+1}=z_{q+1} \\ y_j=h_j}}, \\ \bar{a}_{ik} &= \left(-\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} + a_{i1} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + a_{ik} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} \right) \Big|_{\substack{y_1=z_1 \\ y_j=h_j}}, \quad k = 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Проверим, что коэффициенты $\bar{a}_{ik}$ обладают свойством (8.27).

При $k = 1$ $a_{i1} = a'_{i1}(x_1, \dots, x_m)y_1 + a''_{i1}(x_1, \dots, x_m)$, откуда

$$\bar{a}_{i1} = a'_{i1}(x_1, \dots, x_m)z_1 + a''_{i1}(x_1, \dots, x_m).$$

Пусть теперь $k = 2, \dots, q$. Согласно следствию 4.1'

$$a_{ik} = a'_{ik}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1})y_k + a''_{ik}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1}). \quad (8.32)$$

Функцию γ_k можно записать похожим образом (см. (8.22), (8.24)):

$$\gamma_k = \gamma'_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1})y_k + \gamma''_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1}). \quad (8.33)$$

Легко видеть, что и функция h_k имеет аналогичную структуру:

$$h_k = h'_k(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{k-1})z_k + h''_k(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{k-1}). \quad (8.34)$$

Из (8.31), (8.32) и (8.33) получаем, что $\bar{a}_{ik}$ записывается в виде

$$\bar{a}_{ik} = \left(\psi'(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1})y_k + \psi''(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{k-1}) \right) \Big|_{\substack{y_1=z_1 \\ y_j=h_j}},$$

откуда с учетом (8.34) получаем искомое представление $\bar{a}_{ik}$:

$$\bar{a}_{ik} = \bar{a}'_{ik}(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{k-1})z_k + \bar{a}''_{ik}(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_{k-1}).$$

Нам осталось проверить справедливость равенств (8.28).

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k &= \sum_{i=1}^m x_i \bar{a}_{ik} + z_k = |\text{см. (8.31)}| \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \left(a_{i1} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + a_{ik} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} - \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{y_1=z_1, y_j=h_j} + z_k \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i a_{i1} \right) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ik} \right) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} \right) \Big|_{y_1=z_1, y_j=h_j} + z_k. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_k = \gamma_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ — однородная функция степени однородности 1, то

$$- \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k y_j \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_j} - \gamma_k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k &= \left(\left(\sum_{i=1}^m x_i a_{i1} + y_1 \right) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ik} + y_k \right) \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} - \gamma_k \right) \Big|_{y_1=z_1, y_j=h_j} + z_k \\ &= \left(\varphi_1 \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + \varphi_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} - \gamma_k \right) \Big|_{y_1=z_1, y_j=h_j} + z_k. \end{aligned}$$

Так как γ_k есть решение уравнения (8.17) и $\frac{\partial \gamma_k}{\partial y_{k+1}} = \dots = \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_q} = 0$, то

$$\varphi_1 \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_1} + \dots + \varphi_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_k} = 0.$$

Следовательно,

$$\bar{\varphi}_k = -\gamma_k \Big|_{y_1=z_1, y_j=h_j} + z_k = -z_k + z_k = 0.$$

Этим завершается изучение разрешимых алгебр произвольного индекса.

Чтобы убедиться в справедливости основной теоремы (см. введение), достаточно заметить теперь, что если функция f на $\mathbf{G}^*$ записывается в каком-либо базисе коалгебры $\mathbf{G}^*$ в виде однородной функции степени однородности 1, то и в любом другом базисе $\mathbf{G}^*$ f запишется в том же виде.

§9. Один пример

При рассмотрении конкретных примеров следует иметь в виду, что вопрос о несводимости данной разрешимой алгебры $\mathbf{G}$ требует специального изучения. Можно, однако, действовать по-иному.

Выберем сначала какой-либо канонический базис $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathbf{G}$. Затем рассмотрим $(n-1)$ -мерный идеал $\mathbf{G}_0 = L(e_1, \dots, e_{n-1})$. Если $\dim \mathcal{O}_0 \neq \dim \mathcal{O}$, то $\mathbf{G}$ сводима к идеалу $\mathbf{G}_0$. Если же $\dim \mathcal{O}_0 = \dim \mathcal{O}$, то проверяем справедливость утверждения теоремы 4.1. В случае положительного ответа нужный инвариант f строится так же, как если бы алгебра $\mathbf{G}$ была несводимой, после чего можно перейти к рассмотрению идеала $\mathbf{G}_0$. Если ответ отрицательный, то алгебра $\mathbf{G}$ сводима к одному из своих $(n-1)$ -мерных идеалов, который можно указать в явном виде (см. §5).

Пусть $\mathbf{G}$ — 7-мерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $e_1, \dots, e_7$ и таблицей умножения

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	0	0	0	0	0	0
e_2	0	0	0	0	0	e_1	e_1
e_3	0	0	0	0	$-e_1$	0	e_2
e_4	0	0	0	0	e_1	e_2	0
e_5	0	0	e_1	$-e_1$	0	e_3	e_4
e_6	0	$-e_1$	0	$-e_2$	$-e_3$	0	e_5
e_7	0	$-e_1$	$-e_2$	0	$-e_4$	$-e_5$	0

Требуется найти полный инволютивный набор функций на $\mathbf{G}^*$.

Ясно, что $e_1, \dots, e_7$ — канонический базис $\mathbf{G}$ и $[\mathbf{G}, \mathbf{G}] = L(e_1, \dots, e_5)$. Выпишем матрицу A системы для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$, соответствующей этому базису:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & -x_1 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & -x_1 & 0 & -x_2 & -x_3 & 0 & x_5 \\ 0 & -x_1 & -x_2 & 0 & -x_4 & -x_5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $\text{rang } A = 4$. Это означает, что если $\mathcal{O}$ — орбита общего положения из $\mathbf{G}^*$, то $\dim \mathcal{O} = 4$, $\text{codim } \mathcal{O} = 3$ и, следовательно, $\text{ind } \mathbf{G} = 3$. Таким образом, полный инволютивный набор на $\mathbf{G}^*$ должен состоять из пяти функций: $r = \frac{1}{2}(7 + 3) = 5$.

Рассмотрим $\mathbf{G}_0 = L(e_1, \dots, e_6)$ — 6-мерный идеал алгебры $\mathbf{G}$, и пусть $\mathcal{O}_0$ — орбита общего положения из $\mathbf{G}_0^*$. Если в матрице A зачеркнуть последнюю строку и последний столбец, то получится матрица A_0 системы для определения инвариантов на $\mathbf{G}_0^*$, соответствующей базису $e_1, \dots, e_6$. Очевидно, $\text{rang } A_0 = 4$, так что

$\text{rang } A_0 = \text{rang } A$ и потому $\dim \mathcal{O}_0 = \dim \mathcal{O}$. Как нам известно (см. §1), в этом случае к полному инволютивному набору на $\mathbf{G}_0^*$ необходимо добавить еще одну функцию f . Мы увидим ниже, что в качестве такой функции можно взять подходящий инвариант на $\mathbf{G}^*$.

Ясно, что полный инволютивный набор на $\mathbf{G}_0^*$ должен состоять из четырех функций. Так как $L(e_1, \dots, e_4)$ – абелева подалгебра $\mathbf{G}_0$, то из леммы 1.1 следует, что в качестве таких функций можно взять координатные функции x_1, x_2, x_3, x_4 . Остается определить инвариант f .

Система для определения инвариантов на $\mathbf{G}^*$ содержит четыре независимых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_6} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_7} = 0, \\ -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_5} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_7} = 0, \\ x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_6} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_7} = 0, \\ -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_5} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_7} = 0. \end{cases}$$

В соответствии с общей теорией (см. §4) перепишем ее в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_1 x_5 - x_2 x_3}{x_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_3 - x_4}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_7}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_6} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_7}, \end{cases} \quad (9.1)$$

а затем изменим обозначения: переменные x_1, x_4, x_7 будем обозначать через y_1, y_2, y_3 , а переменные x_2, x_3, x_5, x_6 – через x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно. В результате система (9.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{y_1 x_3 - x_1 x_2}{y_1^2} \frac{\partial f}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{x_2 - y_2}{y_1} \frac{\partial f}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial f}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_1} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{\partial f}{\partial y_3}, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ – неизвестная функция. Так как коэффициенты системы (9.2) имеют вид, указанный в следствии 4.1', то искомым инвариант f можно найти с помощью общего алгоритма.

В рассматриваемом случае (см. § 4)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= y_1, & \varphi_2 &= \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1} + y_2, \\ \varphi_3 &= \frac{2x_1 x_3 y_1 + x_2^2 y_1 - x_2 y_1 y_2 - x_1^2 x_2}{y_1^2} - x_4 + y_3.\end{aligned}$$

При этом вспомогательное уравнение (4.6) принимает вид

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = f - \varphi_3 \quad (9.3)$$

и $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$ (см. § 8).

Выпишем однородное уравнение, соответствующее уравнению (9.3):

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \left(y_2 + \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1} \right) \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0. \quad (9.4)$$

Чтобы найти какое-либо решение (9.4), рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2 + \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1}},$$

или

$$\frac{dy_2}{dy_1} + \left(-\frac{1}{y_1} \right) y_2 = \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1^2}. \quad (9.5)$$

Уравнение (9.5) имеет стандартное решение:

$$y_2 = e^{\int \frac{1}{y_1} dy_1} \left(C + \int \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1^2} e^{-\int \frac{1}{y_1} dy_1} dy_1 \right). \quad (9.6)$$

Положим

$$F_1 = \int \frac{1}{y_1} dy_1, \quad F_2 = \int \frac{x_2 y_1 - x_1^2}{y_1^2} e^{-F_1} dy_1.$$

Из (9.6) получаем первый интеграл уравнения (9.5):

$$\gamma \equiv y_2 e^{-F_1} - F_2 = C.$$

Следовательно, функция γ должна быть решением уравнения (9.4).

Подберем F_1 и F_2 так, чтобы γ была однородной функцией степени однородности 1. Для этого достаточно, чтобы F_1 и F_2 были однородными функциями степени 0 и 1 соответственно.

Выберем какое-либо гладкое значение F_1^0 первого интеграла, например $F_1^0 = \ln y_1$, считая $y_1 > 0$. Так как эта функция не является однородной, то будем искать F_1 в виде $F_1 = F_1^0 + \lambda_1$, где $\lambda_1 = \lambda_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_2)$ (см. лемму 8.2).

λ_1 является искомой функцией тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению (8.7) при $k = -1$:

$$\sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + y_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_2} = \delta,$$

где функция $\delta = \delta(x_1, x_2, x_3, x_4, y_2)$ определяется из равенства (8.6) при $k = -1$:

$$\delta = - \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial F_1^0}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 y_i \frac{\partial F_1^0}{\partial y_i}.$$

Таким образом, $\delta = -1$ и

$$\sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + y_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_2} = -1.$$

Последнее уравнение решается без труда. Например, в качестве λ_1 можно взять функцию $\lambda_1 = -\ln x_1$, считая $x_1 > 0$. В результате

$$F_1 = \ln y_1 - \ln x_1 = \ln \frac{y_1}{x_1}.$$

Найдем теперь какое-нибудь гладкое значение F_2^0 второго интеграла, учитывая, что $e^{-F_1} = x_1/y_1$. Пусть, например,

$$F_2^0 = \int \frac{x_1 x_2 y_1 - x_1^3}{y_1^3} dy_1 = \frac{x_1^3 - 2x_1 x_2 y_1}{2y_1^2}.$$

Так как F_2^0 — однородная функция степени однородности 1, то можно считать, что $F_2 = F_2^0$.

В результате получаем следующее решение уравнения (9.4):

$$\gamma = y_2 \frac{x_1}{y_1} + \frac{2x_1 x_2 y_1 - x_1^3}{2y_1^2}.$$

Сделаем теперь замену переменных: вместо $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$ рассмотрим новые независимые переменные $x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2, z_3$, где

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \gamma(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad z_3 = y_3.$$

При этом

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = h(x_1, x_2, z_1, z_2), \quad y_3 = z_3,$$

где

$$h = z_2 \frac{z_1}{x_1} + \frac{x_1^2 - 2x_2 z_1}{2z_1}.$$

Пусть функция $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяет системе (9.2). При переходе к новым переменным f превращается в функцию $g(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2, z_3)$, которая удовлетворяет уже другой системе дифференциальных уравнений. Мы можем найти эту новую систему в соответствии с общей теорией (см. § 8):

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = -\frac{z_2}{x_1} \frac{\partial g}{\partial z_2} + \frac{x_3 z_1 - x_1 x_2}{z_1^2} \frac{\partial g}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{4x_1 x_2 z_1 - 2z_1^2 z_2 - x_1^3}{2x_1 z_1^2} \frac{\partial g}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{x_1}{z_1} \frac{\partial g}{\partial z_3}, \\ \frac{\partial g}{\partial x_4} = -\frac{\partial g}{\partial z_3}. \end{cases} \quad (9.7)$$

Для системы (9.7)

$$\bar{\varphi}_1 = z_1, \quad \bar{\varphi}_2 = 0, \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{4x_1^2 x_3 z_1 - 3x_1^3 x_2 + 4x_1 x_2^2 z_1 - 2x_2 z_1^2 z_2}{2x_1 z_1^2} - x_4 + z_3.$$

Таким образом, замена переменных свела случай $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$ к случаю $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = 0$.

Найдем какое-либо решение системы (9.7) в виде однородной функции g степени однородности 1, удовлетворяющей условию $\frac{\partial g}{\partial z_3} = 1$ (см. § 6).

Согласно теореме 6.1 функцию g можно найти в виде

$$g = \bar{\varphi}_3 - e^{F_1} \cdot F_2, \quad (9.8)$$

где

$$F_1 = \int \frac{1}{\bar{\varphi}_1} dz_1, \quad F_2 = \int \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial z_1} e^{-F_1} dz_1,$$

причем функции F_1 и F_2 должны удовлетворять следующим дополнительным условиям:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \frac{\bar{a}_{i1}}{\bar{\varphi}_1} + \bar{a}_{i2} \frac{\partial F_1}{\partial z_2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = e^{-F_1} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial x_i} - \bar{a}_{i3} - \bar{a}_{i2} \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial z_2} \right) + \bar{a}_{i2} \frac{\partial F_2}{\partial z_2}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (9.10)$$

Так как $\bar{\varphi}_1 = z_1$, то в качестве F_1 естественно взять функцию $F_1 = \ln z_1$. Поскольку $\bar{a}_{i1} = 0, i = 1, 2, 3, 4$, и $\frac{\partial F_1}{\partial z_2} = 0$, то F_1 удовлетворяет условиям (9.9).

Перейдем к определению F_2 . Так как

$$e^{-F_1} = \frac{1}{z_1}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial z_1} = -2(x_1 x_3 + x_2^2) \frac{1}{z_1^2} + 3x_1^2 x_2 \frac{1}{z_1^3},$$

то в качестве F_2 естественно взять функцию $F_2 = (x_1x_3 + x_2^2)/z_1^2 + x_1^2x_2/z_1^3$. Непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет условиям (9.10).

Мы можем теперь выписать функцию g в явном виде:

$$g = \frac{2x_1x_3z_1 + 2x_2^2z_1 - x_1^2x_2}{2z_1^2} - \frac{x_2z_2}{x_1} - x_4 + z_3.$$

Искомое решение f системы (9.2) получается из функции g при переходе к переменным $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3$:

$$f = \frac{x_1x_3 - x_2y_2}{y_1} - x_4 + y_3.$$

Мы видим, что f — однородная функция степени однородности 1, причем $\frac{\partial f}{\partial y_3} = 1$. Непосредственно проверяется, что f действительно удовлетворяет системе (9.2) без каких-либо ограничений на независимые переменные (кроме $y_1 \neq 0$).

Возвращаясь к первоначальным обозначениям независимых переменных, окончательно получаем, что система функций

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \frac{x_2x_5 - x_3x_4}{x_1} - x_6 + x_7 \quad (9.11)$$

образует полный инволютивный набор на коалгебре $\mathbf{G}^*$, состоящий из однородных функций степени однородности 1.

В заключение отметим, что с помощью набора (9.11) можно получить полный инволютивный набор на $\mathbf{G}^*$, состоящий из полиномов. Для этого достаточно заменить в (9.11) последнюю функцию f функцией x_1f , которая тоже будет инвариантом, поскольку инвариантами являются функции x_1 и f .

Список литературы

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
2. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функци. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 2. С. 46–56.
3. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1983.
4. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
6. Vergne M. La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente // Bull. Soc. Math. France. 1972. V. 100. № 3. P. 301–335.
7. Архангельский А. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц // Матем. сб. 1979. Т. 108. № 1. С. 134–142.
8. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 714–732.
9. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 5. С. 1191–1199.
10. Ле Нгок Тьен. Коммутативные наборы функций на орбитах общего положения конечномерных алгебр Ли // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 179–180.

11. *Милованов М. В.* О гипотезе Мищенко–Фоменко и интегрируемости разрешимых алгебр Ли // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 1. С. 45–49.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. IV, часть 2. М.: Мир, 1989.
13. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
14. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
15. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

Белорусский государственный
педагогический университет им. М. Танка

Поступила в редакцию
05.06.1998