Общероссийский математический портал

М. А. Ольшанецкий, В. К. Рогов, q -преобразование Фурье q -обобщенных функций,
Матем. сб., 1999, том 190, номер 5, 93–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:59:08

УДК 517.58

М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Рогов

 q -преобразование Фурье q -обобщенных функций

Рассматриваются функции на решетке, порождаемой целыми степенями q^2 , $0 < q < 1$. Строится q -аналог преобразования Фурье, базирующийся на интеграле Джексона в пространстве обобщенных функций на решетке.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Классическое преобразование Фурье является мощным средством гармонического анализа на простых группах Ли и на однородных пространствах. В случае квантовых групп многие задачи могут быть просто решены с помощью преобразования Фурье в квантовых аффинных пространствах. Имеется ряд работ, посвященных квантовому преобразованию Фурье [1], [2], но их основной объект исследования – квантовая алгебра операторов без указания функциональных пространств, в которых эти операторы определены. Такой подход мешает применению полученных результатов в конкретных задачах гармонического анализа.

Здесь мы изучаем простейший одномерный случай, где весь эффект некоммутативности проявляется только в том, что функции заданы на решетке и очень проста алгебра, порожденная функциональными пространствами образов и преобразов. Эта ситуация может трактоваться как q -деформация классического преобразования Фурье, которой в последнее время уделяется особое внимание в силу ее связи с обобщениями классического гармонического осциллятора (см. [3]–[6]). В то время как одной из первых задач этих работ является изучение различных ядер q -преобразования Фурье, мы останавливаемся на функциональных пространствах и их q -экспоненциальном q -преобразовании Фурье. Наше исследование очень близко к классической ситуации, изученной в [7]. Мы рассматриваем пространства основных и q^2 -обобщенных функций и определяем q^2 -преобразование Фурье основных функций; q^2 -преобразование Фурье q^2 -обобщенных функций определяется с помощью равенства Парсеваля. В заключение мы приводим таблицу q^2 -преобразований Фурье некоторых q^2 -обобщенных функций.

Работа частично выполнена во время визита первого автора в Институт высших исследований (Bures-sur-Yvette). Он благодарен К. Гаведски за гостеприимство.

Работа первого автора частично поддержана Российской программой поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96455), фондом INTAS (грант № 93-0166) и CRDF (грант № RM2-150).

Работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 97-01-00747) и фондом НИОКР МПС РФ.

§ 2. Некоторые предварительные соотношения

Мы будем считать, что $z \in \mathbb{C}$ и $|q| < 1$, если специально не оговорено противное. Напомним некоторые обозначения [8]. Для любого a

$$(a, q)_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}) & \text{при } n \geq 1, \end{cases}$$

$$(a, q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a, q)_n,$$

$$\begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{(q^2, q^2)_l}{(q^2, q^2)_i (q^2, q^2)_{l-i}}.$$

Рассмотрим q^2 -экспоненты

$$e_{q^2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q^2, q^2)_n} = \frac{1}{(z, q^2)_\infty}, \quad |z| < 1, \quad (2.1)$$

$$E_{q^2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)} z^n}{(q^2, q^2)_n} = (-z, q^2)_\infty \quad (2.2)$$

и q^2 -тригонометрические функции

$$\cos_{q^2} z = \frac{1}{2} (e_{q^2}(iz) + e_{q^2}(-iz)), \quad \sin_{q^2} z = \frac{1}{2i} (e_{q^2}(iz) - e_{q^2}(-iz)), \quad (2.3)$$

$$\text{Cos}_{q^2} z = \frac{1}{2} (E_{q^2}(iz) + E_{q^2}(-iz)), \quad \text{Sin}_{q^2} z = \frac{1}{2i} (E_{q^2}(iz) - E_{q^2}(-iz)). \quad (2.4)$$

Мы рассмотрим также базисный гипергеометрический ряд

$${}_0\Phi_1(-; 0; q^2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n-1)} z^n}{(q^2, q^2)_n}. \quad (2.5)$$

Из формулы (2.1) следует, что $e_{q^2}(z)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $z = q^{-2k}$, $k = 0, 1, \dots$.

ЛЕММА 2.1. *Функция $e_{q^2}(z)$ представляется в виде суммы простейших дробей:*

$$e_{q^2}(z) = \frac{1}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (1 - zq^{2k})}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$e_{q^2}(z, n) = \frac{1}{(z, q^2)_n} = \sum_{k=0}^n \frac{c_{k,n}}{1 - zq^{2k}},$$

где

$$\begin{aligned} c_{k,n} &= \operatorname{res}_{z=q^{-2k}} e_{q^2}(z, n) = \lim_{z \rightarrow q^{-2k}} (1 - zq^{2k}) e_{q^2}(z, n) \\ &= \frac{1}{(1 - q^{-2k}) \cdots (1 - q^{-2})(1 - q^2) \cdots (1 - q^{2(n-k)})} = \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (q^2, q^2)_{n-k}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e_{q^2}(z, n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (q^2, q^2)_{n-k} (1 - zq^{2k})}.$$

Из неравенства

$$\frac{1}{(q^2, q^2)_{n-k}} < \frac{1}{(q^2, q^2)_{\infty}} = e_{q^2}(q^2)$$

мы получим

$$e_{q^2}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{q^2}(z, n) = \frac{1}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (1 - zq^{2k})}.$$

Так как этот ряд абсолютно сходится при $q \in (0, 1)$, представление (2.6) справедливо для любого $z \neq q^{-2k}$.

Из (2.3) мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Функции $\cos_{q^2} z$ и $\sin_{q^2} z$ представляются в виде суммы простейших дробей:*

$$\cos_{q^2} z = \frac{1}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (1 + z^2 q^{4k})}, \quad (2.7)$$

$$\sin_{q^2} z = \frac{z}{(q^2, q^2)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+3)}}{(q^2, q^2)_k (1 + z^2 q^{4k})}. \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если z и q вещественные, то*

$$\begin{aligned} |\cos_{q^2} z| &\leq \frac{(-q^2, q^2)_{\infty}}{(1 + z^2)(q^2, q^2)_{\infty}}, \\ |\sin_{q^2} z| &\leq \frac{|z|(-1, q^2)_{\infty}}{(1 + z^2)(q^2, q^2)_{\infty}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{1}{1+z^2q^{4k}} \leq \frac{q^{-4k}}{1+z^2}$$

для любого вещественного z и для любого $k \geq 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k (1+z^2q^{4k})} \right| &\leq \frac{1}{1+z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)} q^{-2k}}{(q^2, q^2)_k} = \frac{1}{1+z^2} E_{q^2}(q^{-2}), \\ \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+3)}}{(q^2, q^2)_k (1+z^2q^{4k})} \right| &\leq \frac{1}{1+z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)}}{(q^2, q^2)_k} = \frac{1}{1+z^2} E_{q^2}(1). \end{aligned}$$

Из последних соотношений и формул (2.7) и (2.8) вытекает утверждение предложения.

Следующее предложение сразу же получим из (2.2) и (2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функции $\text{Cos}_{q^2} z$ и $\text{Sin}_{q^2} z$ удовлетворяют неравенствам*

$$|\text{Cos}_{q^2} z| \leq 1, \quad |\text{Sin}_{q^2} z| \leq |z|. \quad (2.9)$$

Рассмотрим тета-функцию

$$\vartheta(u \mid \tau) = 2p^{1/8} \sin(\pi u) \prod_{n>0} (1 - e^{2\pi i u} p^n)(1 - e^{-2\pi i u} p^n)(1 - p^n),$$

где $p = \exp(2\pi i \tau)$, $\text{Im } \tau > 0$. Пусть

$$\mathbf{Q}(z, q) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z q^{2m} + z^{-1} q^{-2m}}. \quad (2.10)$$

Тогда из модулярных свойств функции (2.10) следует, что

$$\mathbf{Q}(z, q) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\vartheta(u + \tau/2 \mid \tau) \vartheta'(0 \mid \tau)}{\vartheta(u \mid \tau) \vartheta(\tau/2 \mid \tau)},$$

где

$$\tau = -\frac{2i \ln q}{\pi}, \quad u = \frac{1}{\pi i} \ln z + \frac{1}{2}.$$

Определим функцию

$$\Theta(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin_{q^2}((1 - q^2) q^{2m} z). \quad (2.11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Функция $\Theta(z)$ обладает следующими свойствами:

1. $\Theta(q^{2k}z) = \Theta(z)$ для любого $z \neq 0$,
2. $\Theta(z) = \mathbf{Q}((1 - q^2)z, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1 сразу же следует из (2.11).

В силу формулы (2.8) функция $\Theta(z)$ может быть представлена в виде

$$\Theta(z) = \frac{1 - q^2}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+3)} (1 - q^2)z}{(q^2, q^2)_k [1 + (1 - q^2)^2 z^2 q^{4(m+k)}]}.$$

Так как внутренний ряд сходится равномерно по m , мы можем поменять порядок суммирования. Тогда, используя (2.1), (2.2) и (2.10), мы получим

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \frac{1 - q^2}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+3)}}{(q^2, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - q^2)z q^{2m}}{1 + (1 - q^2)^2 z^2 q^{4(m+k)}} \\ &= \frac{1 - q^2}{(q^2, q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k+1)}}{(q^2, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - q^2)z q^{2m}}{1 + (1 - q^2)^2 z^2 q^{4m}} = \mathbf{Q}((1 - q^2)z, q). \end{aligned}$$

Особо определим

$$\Theta_0 = \Theta(1) = \mathbf{Q}(1 - q^2, q). \quad (2.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для любого целого $M > 0$

$$(1 - q^2)z \sum_{m=-M}^{\infty} q^{2m} \cos_{q^2}((1 - q^2)q^{2m}z) = \sin_{q^2}((1 - q^2)q^{-2M}z), \quad (2.13)$$

$$(1 - q^2)z \sum_{m=-M}^{\infty} q^{2m} \sin_{q^2}((1 - q^2)q^{2m}z) = 1 - \cos_{q^2}((1 - q^2)q^{-2M}z). \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|(1 - q^2)q^{-2M}z| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} &(1 - q^2)z \sum_{m=-M}^{\infty} q^{2m} \cos_{q^2}((1 - q^2)q^{2m}z) \\ &= \sum_{m=-M}^{\infty} (1 - q^2)z q^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1 - q^2)^{2k} q^{4mk} z^{2k}}{(q^2, q^2)_{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1 - q^2)^{2k+1} z^{2k+1}}{(q^2, q^2)_{2k}} \sum_{m=-M}^{\infty} q^{2m(2k+1)} \\ &= \sin_{q^2}((1 - q^2)q^{-2M}z). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для остальных значений $z \neq \pm i(1 - q^2)^{-1}q^{-2n}$ левая часть (2.13) определяется как аналитическое продолжение (2.15). Формула (2.14) доказывается аналогичным образом.

§ 3. q^2 -производная и q^2 -интеграл

Пусть $\mathcal{A} = C(z, z^{-1})$ – алгебра формальных рядов Лорана. q^2 -производная функции $f(z) \in \mathcal{A}$ определяется следующим образом:

$$\partial_z f(z) = \frac{z^{-1}}{1 - q^2} (f(z) - f(q^2 z)). \quad (3.1)$$

Для любого $n \geq 0$

$$\partial_z^k z^n = \begin{cases} \frac{(q^2, q^2)_n}{(q^2, q^2)_{n-k} (1 - q^2)^k} z^{n-k} & \text{при } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n, \end{cases} \quad (3.2)$$

и для любых $n \geq 0$ и $k \geq 0$

$$\partial_z^k z^{-n-1} = (-1)^k q^{-k(2n+k+1)} \frac{(q^2, q^2)_{n+k}}{(q^2, q^2)_n (1 - q^2)^k} z^{-n-k-1}. \quad (3.3)$$

q^2 -интеграл (интеграл Джексона [8]) определяется как отображение I_{q^2} алгебры $\mathcal{A}$ в пространство формальных числовых рядов:

$$I_{q^2} f = \int d_{q^2} z f(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} [f(q^{2m}) + f(-q^{2m})]. \quad (3.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $f(z)$ является *локально q^2 -интегрируемой*, если q^2 -интеграл

$$\int_a^b d_{q^2} z f(z) = (1 - q^2) \sum_{m=0}^{\infty} q^{2m} [bf(bq^{2m}) - af(aq^{2m})] \quad (3.5)$$

существует для любых конечных a и b , т.е. ряд в правой части (3.5) сходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Функция $f(z)$ является *абсолютно q^2 -интегрируемой*, если ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} [|f(q^{2m})| + |f(-q^{2m})|]$$

сходится.

Пусть $\mathcal{B}$ – алгебра, аналогичная алгебре $\mathcal{A}$, но порождаемая образующими s, s^{-1} , которые связаны с z коммутационным соотношением $zs = q^2 sz$. Определим q^2 -дифференцирование в $\mathcal{B}$

$$\partial_s \phi(s) = (\phi(s) - \phi(q^2 s)) \frac{s^{-1}}{1 - q^2}.$$

Обозначим через $\mathcal{AB}$ алгебру с четырьмя образующими z, z^{-1}, s, s^{-1} , q^2 -дифференцированием и с соотношениями

$$zs = q^2 sz, \quad \partial_z s = q^{-2} s \partial_z, \quad \partial_s z = q^2 z \partial_s, \quad \partial_z \partial_s = q^2 \partial_s \partial_z. \quad (3.6)$$

Мы будем рассматривать $\mathcal{AB}$ как левый модуль по отношению к умножению на элементы из $\mathcal{A}$ и как правый модуль по отношению к умножению на элементы из $\mathcal{B}$.

Для определения q^2 -интеграла в $\mathcal{AB}$ мы упорядочим переменные интегрирования так, чтобы z стояла слева, в то время как s находилась бы справа. Например, если $f(z) = \sum_r a_r z^r$, то

$$f(zs) = \sum_r a_r (zs)^r = \sum_r a_r q^{-r(r-1)} z^r s^r.$$

Для удобства введем обозначение

$$\ddagger g(zs) \ddagger = \sum_r a_r z^r s^r, \quad \text{если } g(z) = \sum_r a_r z^r.$$

Например, из (2.1), (2.2) и (3.6) мы можем получить

$$E_{q^2}(i(1-q^2)zs) = \ddagger e_{q^2}(i(1-q^2)zs) \ddagger.$$

Следуя описанному выше правилу, вычислим q^2 -интегралы:

1. $\int d_{q^2} z z^{-1} E_{q^2}(i(1-q^2)zs) = 2i\Theta(s)$ (см. (2.12));
2. используя формулу (2.14) и предложение 2.1, получим

$$\int d_{q^2} z \Theta(z) E_{q^2}(i(1-q^2)zs) = 2i\Theta_0 s^{-1}.$$

§ 4. q^2 -обобщенные функции

Пусть $S_{q^2} = \{\phi(x)\}$ — пространство бесконечно q^2 -дифференцируемых быстро убывающих функций, удовлетворяющих неравенству

$$|x^k \partial_x^l \phi(x)| \leq C_{k,l}(q), \quad k \geq 0, \quad l \geq 0. \quad (4.1)$$

Пусть S — пространство бесконечно дифференцируемых (в классическом смысле) быстро убывающих функций, удовлетворяющих неравенству

$$|x^k \phi^{(l)}(x)| \leq C_{k,l}, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0. \quad (4.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Справедливо вложение $S \subset S_{q^2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\phi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ разделенную разность k -го порядка. Тогда нетрудно заметить, что для любого целого $l \geq 0$

$$\phi(q^{2l}x, q^{2l-2}x, \dots, x) = \frac{(q^2, q^2)_l}{(1-q^2)^l} \partial_x^l \phi(x). \quad (4.3)$$

С другой стороны, если $\phi(x)$ l раз дифференцируема (в классическом смысле), то существует такая точка $\xi \in (q^{2l}x, x)$, что

$$\phi(q^{2l}x, q^{2l-2}x, \dots, x) = \frac{1}{l!} \phi^{(l)}(\xi). \quad (4.4)$$

Тогда из (4.3) и (4.4) вытекает, что

$$\partial_x^l \phi(x) = \frac{(1-q^2)^l}{(q^2, q^2)_l l!} \phi^{(l)}(\xi), \quad \xi \in (q^{2l}x, x).$$

Следовательно, из (4.2)

$$|x^k \partial_x^l \phi(x)| \leq \frac{(1-q^2)^l}{(q^2, q^2)_l l!} C_{k,l}.$$

Наконец, если $\phi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве S , то $\phi_n(x) \rightarrow 0$ в пространстве S_{q^2} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Скелетом* $\widehat{\phi}(z)$ функции $\phi(z) \in S_{q^2}$ назовем множество значений функции $\phi(z)$ на решетке, порождаемой целыми степенями q^2 :

$$\widehat{\phi}(z) = \phi(z)|_{z=q^{2n}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Пространство скелетов мы будем обозначать через $\widehat{S}_{q^2}$.

Функции

$$\widehat{\phi}_n^+(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = q^{2n}, \\ 0 & \text{при } z \neq q^{2n}, \end{cases} \quad \widehat{\phi}_n^-(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = -q^{2n}, \\ 0 & \text{при } z \neq -q^{2n} \end{cases}$$

образуют базис в пространстве $\widehat{S}_{q^2}$:

$$\widehat{\phi}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \widehat{\phi}_n^+(z) + b_n \widehat{\phi}_n^-(z)], \quad a_n = \phi(q^{2n}), \quad b_n = \phi(-q^{2n}).$$

Здесь $|a_n|$ и $|b_n|$ ограничены при $n \rightarrow \infty$ и убывают быстрее любой степени q^{-2n} при $n \rightarrow -\infty$.

Топология в пространстве $\widehat{S}_{q^2}$ индуцируется топологией пространства S_{q^2} (4.1):

$$\left| \frac{q^{2n(k-l)}}{(1-q^2)^l} \sum_{i=1}^l (-1)^i \begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}_{q^2} q^{-i(2l-i-1)} a_{n+i} \right| \leq C_{k,l}(q),$$

$$\left| (-1)^{r-l} \frac{q^{2n(k-l)}}{(1-q^2)^l} \sum_{i=1}^l (-1)^i \begin{bmatrix} l \\ i \end{bmatrix}_{q^2} q^{-i(2l-i-1)} b_{n+i} \right| \leq C_{k,l}(q).$$

Пусть L_{q^2} – линейное отображение пространства S_{q^2} в $\widehat{S}_{q^2}$, являющееся сужением функции на решетку

$$L_{q^2} S_{q^2} = \widehat{S}_{q^2}.$$

Пусть $\Lambda\phi(z) = \phi(q^2 z)$. Тогда

$$\Lambda z = q^2 z \Lambda, \quad \partial_z \Lambda = q^2 \Lambda \partial_z. \quad (4.5)$$

Операторы Λ и ∂_z определены в $\widehat{S}_{q^2}$, так как

$$\Lambda L_{q^2} = L_{q^2} \Lambda, \quad \partial_z L_{q^2} = L_{q^2} \partial_z.$$

Кроме того, q^2 -интеграл от функций из $\ker L_{q^2}$ равен нулю и, следовательно, определен на факторпространстве

$$\widehat{S}_{q^2} = S_{q^2} / \ker L_{q^2}.$$

В некоторых случаях мы будем под знаком q^2 -интеграла записывать элемент пространства $\widehat{S}_{q^2}$, имея в виду, что он является представителем класса из факторпространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $\widehat{\phi}(z) \in \widehat{S}_{q^2}$, то

$$\int d_{q^2} z \partial_z \widehat{\phi}(z) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (3.1), (3.4) и (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} \int d_{q^2} z \partial_z \widehat{\phi}(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\widehat{\phi}(q^{2m}) - \widehat{\phi}(q^{2m+2}) - \widehat{\phi}(-q^{2m}) + \widehat{\phi}(-q^{2m+2})] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [\widehat{\phi}(q^{-2M}) - \widehat{\phi}(-q^{-2M})] = 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1 (q^2 -интегрирование по частям). Для любого $k \geq 0$

$$\int d_{q^2} z \widehat{\phi}(z) \partial_z^k \widehat{\psi}(z) = (-1)^k q^{-k(k-1)} \int d_{q^2} z \partial_z^k \widehat{\phi}(z) \widehat{\psi}(q^{2k} z).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. q^2 -обобщенной функцией f над $\widehat{S}_{q^2}$ назовем линейный непрерывный функционал

$$f: \widehat{S}_{q^2} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Пространство q^2 -обобщенных функций над $\widehat{S}_{q^2}$ обозначим через $\widehat{S}'_{q^2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Последовательность $\{f_n\}$ назовем *сходящейся* в $\widehat{S}'_{q^2}$ к $f \in \widehat{S}'_{q^2}$, если для любой функции $\phi(z) \in \widehat{S}_{q^2}$ последовательность $\{\langle f_n, \phi \rangle\}$ сходится к $\langle f, \phi \rangle$.

q^2 -обобщенную функцию, определяемую q^2 -интегралом

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d_{q^2} z \bar{f}(z) \phi(z) \\ &= (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} [\bar{f}(q^{2m}) \phi(q^{2m}) + \bar{f}(-q^{2m}) \phi(-q^{2m})], \end{aligned}$$

мы будем называть *регулярной*.

Предложение 4.2 и следствие 4.1 позволяют ввести q^2 -дифференцирование в $\widehat{S}'_{q^2}$:

$$\langle \partial_z f, \phi \rangle = -\langle \Lambda f, \partial_z \phi \rangle. \quad (4.6)$$

Приведем примеры q^2 -обобщенных функций.

$$1. \quad \langle \theta_{q^2}^+, \phi \rangle = \int_0^{\infty} d_{q^2} z \widehat{\phi}(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \phi(q^{2m}). \quad (4.7)$$

$$2. \quad \langle \theta_{q^2}^-, \phi \rangle = \int_{-\infty}^0 d_{q^2} z \widehat{\phi}(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \phi(-q^{2m}). \quad (4.8)$$

Таким образом, q^2 -обобщенные функции $\theta_{q^2}^+$ и $\theta_{q^2}^-$ отвечают функциям

$$\widehat{\theta}^+(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_n^+(z), \quad \widehat{\theta}^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_n^-(z).$$

$$3. \quad \langle \delta_{q^2}, \phi \rangle = \phi(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi(q^{2m}) + \phi(-q^{2m})}{2}.$$

При этом из (4.6), очевидно, следует:

$$\begin{aligned} \langle \partial_z (\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-), \phi \rangle &= -\langle \theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-, \partial_z \phi \rangle \\ &= -(1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \left(\frac{q^{-2m}}{1 - q^2} [\phi(q^{2m}) - \phi(q^{2m+2})] \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^{-2m}}{1 - q^2} [\phi(-q^{2m}) - \phi(-q^{2m+2})] \right) \\ &= -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M [\phi(q^{2m}) - \phi(q^{2m+2}) + \phi(-q^{2m}) - \phi(-q^{2m+2})] \\ &= -\lim_{M \rightarrow \infty} [\phi(q^{-2M}) - \phi(q^{2M+2}) + \phi(-q^{-2M}) - \phi(-q^{2M+2})] = 2\phi(0), \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_z (\theta_{q^2}^+(z) - \theta_{q^2}^-(z)) = 2\delta_{q^2}(z). \quad (4.9)$$

$$4. \langle z^{-1}, \phi \rangle = \int_0^\infty d_{q^2} z z^{-1} [\widehat{\phi}(z) - \widehat{\phi}(-z)] = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^\infty [\phi(q^{2m}) - \phi(-q^{2m})].$$

5. Для любого $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle z^{-k-1}, \phi \rangle &= (-1)^k q^{k(k+1)} \frac{(1 - q^2)^k}{(q^2, q^2)_k} \langle \partial_z^k z^{-1}, \phi \rangle = \frac{(1 - q^2)^k}{(q^2, q^2)_k} \langle z^{-1}, \partial_z^k \phi \rangle \\ &= \frac{(1 - q^2)^{k+1}}{(q^2, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^\infty [\partial_z^k \phi(z)|_{z=q^{2m}} - \partial_z^k \phi(z)|_{z=-q^{2m}}]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

6. Для любого $\nu > -1$

$$\langle z_+^\nu, \phi \rangle = \int_0^\infty d_{q^2} z z^\nu \widehat{\phi}(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m(\nu+1)} \phi(q^{2m}).$$

Так как для любого $k \geq 0$

$$\partial_z^k z^\nu = (-1)^k q^{k(2\nu-k+1)} \frac{(q^{-2\nu}, q^2)_k}{(1 - q^2)^k} z^{\nu-k},$$

то

$$\langle z_+^{\nu-k}, \phi \rangle = \frac{(1 - q^2)^{k+1}}{(q^{-2\nu}, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m(\nu+1)} \partial_z^k \phi(z)|_{z=q^{2m}}.$$

7. Аналогично, для любого $\nu > -1$

$$\langle z_-^\nu, \phi \rangle = \int_{-\infty}^0 d_{q^2} z (-z)^\nu \widehat{\phi}(z) = (1 - q^2) \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m(\nu+1)} \phi(-q^{2m})$$

и для любого $k \geq 0$

$$\langle z_-^{\nu-k}, \phi \rangle = (-1)^k \frac{(1 - q^2)^{k+1}}{(q^{-2\nu}, q^2)_k} \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m(\nu+1)} \partial_z^k \phi(z)|_{z=-q^{2m}}.$$

§ 5. q^2 -преобразование Фурье

Рассмотрим пространство $S^{q^2} = \{\psi(s)\}$, содержащее функции того же класса, что и $S_{q^2} = \{\phi(z)\}$ (4.1), но s и z ведут себя как образующие алгебры $\mathcal{AB}$ (3.6). Введем в S^{q^2} такую же топологию, как и в S_{q^2} :

$$|s^k \partial_s^l \phi(s)| \leq C_{k,l}(q), \quad k \geq 0, \quad l \geq 0, \quad (5.1)$$

в силу чего эти пространства становятся изоморфными.

Определим отображение S_{q^2} в S^{q^2}

$$S_{q^2} \xrightarrow{L_{q^2}} \widehat{S}_{q^2} \xrightarrow{\mathcal{F}_{q^2}} S^{q^2},$$

где

$$\mathcal{F}_{q^2}\phi(z) = \int d_{q^2}z \phi(z) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2zs) \quad (5.2)$$

является q^2 -преобразованием Фурье, а ${}_0\Phi_1$ определяется формулой (2.5).

Из (5.2) следует, что преобразование $\mathcal{F}_{q^2}$ определено на S_{q^2} , и в некоторых случаях мы будем оставлять то же обозначение $\mathcal{F}_{q^2}$ для отображения из S_{q^2} в S^{q^2} , опуская действие оператора L_{q^2} .

Нашей целью является построение отображения $\mathcal{F}_{q^2}^{-1}$, обратного к $\mathcal{F}_{q^2}$, и доказательство их непрерывности. Точнее, мы определяем дуальное пространство скелетов $\widehat{S}^{q^2}$ для функций из S^{q^2} и отображение

$$\mathcal{F}_{q^2}^{-1}\psi(s) = \frac{1}{2\Theta_0} \int E_{q^2}(-i(1-q^2)zs)\psi(s) d_{q^2}s, \quad \psi(s) \in \widehat{S}^{q^2}, \quad (5.3)$$

из $\widehat{S}^{q^2}$ в S_{q^2} .

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S_{q^2} & \xrightarrow{L_{q^2}} & \widehat{S}_{q^2} \\ \uparrow \mathcal{F}_{q^2}^{-1} & & \downarrow \mathcal{F}_{q^2} \\ \widehat{S}^{q^2} & \xrightarrow{L_{q^2}} & S^{q^2}. \end{array}$$

Мы докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. 1. *Отображения*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q^2}L_{q^2} &: S_{q^2} \rightarrow S^{q^2}, \\ \mathcal{F}_{q^2}^{-1}L_{q^2} &: S^{q^2} \rightarrow S_{q^2} \end{aligned}$$

являются изоморфизмами топологических пространств.

2. *Отображения*

$$\begin{aligned} L_{q^2}\mathcal{F}_{q^2}^{-1}L_{q^2}\mathcal{F}_{q^2} &: \widehat{S}_{q^2} \rightarrow \widehat{S}_{q^2}, \\ L_{q^2}\mathcal{F}_{q^2}L_{q^2}\mathcal{F}_{q^2}^{-1} &: \widehat{S}^{q^2} \rightarrow \widehat{S}^{q^2} \end{aligned}$$

являются тождественными в $\widehat{S}_{q^2}$ и в $\widehat{S}^{q^2}$ соответственно.

Мы начнем с доказательства вспомогательного утверждения.

ЛЕММА 5.1. *Справедливо равенство*

$$\int d_{q^2}z e_{q^2}(-i(1-q^2)z) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2zs) = \begin{cases} \frac{2}{1-q^2}\Theta_0 & \text{при } s = 1, \\ 0 & \text{при } s \neq 1, \end{cases}$$

где Θ_0 определяется формулой (2.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с нашим определением q^2 -интеграла переменные под знаком q^2 -интеграла должны быть упорядочены. Из формул (2.2), (2.5) и (3.6) следует, что

$${}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2zs) = \dagger E_{q^2}(i(1-q^2)q^2zs)\dagger,$$

и мы приходим к q^2 -интегралу

$$\int d_{q^2}z e_{q^2}(-i(1-q^2)z)\dagger E_{q^2}(i(1-q^2)q^2zs)\dagger.$$

Используя (2.1) и (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \partial_z [e_{q^2}(-i(1-q^2)z)\dagger E_{q^2}(i(1-q^2)zs)\dagger] \\ = -ie_{q^2}(-i(1-q^2)z)\dagger E_{q^2}(i(1-q^2)q^2zs)\dagger(1-s). \end{aligned}$$

Следовательно, если $s \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int d_{q^2}z e_{q^2}(-i(1-q^2)z)\dagger E_{q^2}(i(1-q^2)q^2zs)\dagger \\ = i(1-s)^{-1} \int d_{q^2}z \partial_z [e_{q^2}(-i(1-q^2)z)\dagger E_{q^2}(i(1-q^2)zs)\dagger]. \end{aligned}$$

Последний q^2 -интеграл может быть представлен в виде (см. (2.3) и (2.4))

$$\begin{aligned} (s-1)^{-1} \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\cos_{q^2}((1-q^2)q^{-2M}) \operatorname{Sin}_{q^2}((1-q^2)q^{-2M+2}s) \right. \\ - \sin_{q^2}((1-q^2)q^{-2M}) \operatorname{Cos}_{q^2}((1-q^2)q^{-2M+2}s) \\ - \cos_{q^2}((1-q^2)q^{2M+2}) \operatorname{Sin}_{q^2}((1-q^2)q^{2M+4}s) \\ \left. + \sin_{q^2}((1-q^2)q^{2M+2}) \operatorname{Cos}_{q^2}((1-q^2)q^{2M+4}s) \right]. \end{aligned}$$

В силу предложений 2.1 и 2.2 это выражение равно нулю.

Если же $s = 1$, то

$$\begin{aligned} \int d_{q^2}z e_{q^2}(-i(1-q^2)z) E_{q^2}(i(1-q^2)q^2z) \\ = (1-q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \left[\frac{(-i(1-q^2)q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(-i(1-q^2)q^{2m}, q^2)_{\infty}} + \frac{(i(1-q^2)q^{2m+2}, q^2)_{\infty}}{(i(1-q^2)q^{2m}, q^2)_{\infty}} \right] \\ = (1-q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2m} \left(\frac{1}{1+i(1-q^2)q^{2m}} + \frac{1}{1-i(1-q^2)q^{2m}} \right) \\ = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-q^2)^{-1}q^{-2m} + (1-q^2)q^{2m}} = \frac{2}{1-q^2} \Theta_0 \end{aligned}$$

(см. (2.10) и (2.12)).

Точно так же доказывается следующая

ЛЕММА 5.2. *Справедливо равенство*

$$\int E_{q^2}(-i(1-q^2)zs) E_{q^2}(i(1-q^2)q^2s) d_{q^2}s = \begin{cases} \frac{2}{1-q^2} \Theta_0 & \text{при } z = 1, \\ 0 & \text{при } z \neq 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.3. *Имеют место соотношения*

$$\mathcal{F}_{q^2} \Lambda = q^{-2} \Lambda^{-1} \mathcal{F}_{q^2}, \quad \mathcal{F}_{q^2} \partial_z = -is \mathcal{F}_{q^2}, \quad \mathcal{F}_{q^2} z = -iq^{-2} \Lambda^{-1} \partial_s \mathcal{F}_{q^2}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{F}_{q^2}^{-1} \Lambda = q^{-2} \Lambda^{-1} \mathcal{F}_{q^2}^{-1}, \quad \mathcal{F}_{q^2}^{-1} \partial_s = i \Lambda^{-1} z \mathcal{F}_{q^2}^{-1}, \quad \mathcal{F}_{q^2}^{-1} s = i \partial_z \mathcal{F}_{q^2}^{-1}. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что ядра q^2 -интегральных преобразований (5.1) и (5.3) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2zs) &= \dagger E_{q^2}(i(1-q^2)q^2zs) \dagger, \\ E_{q^2}(-i(1-q^2)zs) &= \dagger e_{q^2}(i(1-q^2)zs) \dagger \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \partial_z \dagger E_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger &= a \dagger E_{q^2}((1-q^2)aq^2zs) \dagger s, \\ \partial_s \dagger E_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger &= az \dagger E_{q^2}((1-q^2)aq^2zs) \dagger, \\ \partial_z \dagger e_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger &= a \dagger e_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger s, \\ \partial_s \dagger e_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger &= az \dagger e_{q^2}((1-q^2)azs) \dagger. \end{aligned}$$

Из (4.5) и последних соотношений мы получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.1. Из формул (5.4) вытекает

$$\mathcal{F}_{q^2} z^k \partial_z^l \phi(z) = (-i)^{k+l} q^{-2k} (\Lambda^{-1} \partial_s)^k s^l \mathcal{F}_{q^2} \phi(z).$$

С другой стороны,

$$\partial_s^k s^l = (-1)^k q^{k(2l-k+1)} \sum_{j=0}^k (-1)^j q^{j(j-1)} \frac{(q^{-2l}, q^2)}{(1-q^2)^{k-j}} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]_{q^2} s^{l-k+j} \partial_s^j.$$

Следовательно, если $\phi(z)$ удовлетворяет неравенству (4.1), то ее образ $\mathcal{F}_{q^2} \phi(z)$ удовлетворяет неравенству (5.1). Это значит, в частности, что образ сходящейся в $\widehat{S}_{q^2}$ последовательности сходится в $\widehat{S}^{q^2}$. То же утверждение относительно $\mathcal{F}_{q^2}^{-1}$ доказывается аналогично с использованием формул (5.5).

Для доказательства второй части предложения рассмотрим действие операторов Фурье на базисные функции:

$$\mathcal{F}_{q^2} \circ \mathcal{F}_{q^2}^{-1} \widehat{\psi}_n^\pm(s) = \widehat{\psi}_n^\pm(s), \quad (5.6)$$

$$\mathcal{F}_{q^2}^{-1} \circ \mathcal{F}_{q^2} \widehat{\phi}_n^\pm(z) = \widehat{\phi}_n^\pm(z). \quad (5.7)$$

Рассмотрим первое соотношение:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{q^2} \circ \mathcal{F}_{q^2}^{-1} \widehat{\psi}_n^+(s) &= \frac{1}{2\Theta_0} \int d_{q^2} z \left(\int E_{q^2}(-i(1-q^2)z\xi) \widehat{\psi}_n^+(\xi) d_{q^2} \xi \right) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2 zs) \\ &= \frac{1-q^2}{2\Theta_0} q^{2n} \int d_{q^2} z e_{q^2}(-i(1-q^2)q^{2n}z) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2 zs) \\ &= \frac{1-q^2}{2\Theta_0} \int d_{q^2} z e_{q^2}(-i(1-q^2)z) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^{-2n+2}zs). \end{aligned}$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$\mathcal{F}_{q^2} \circ \mathcal{F}_{q^2}^{-1} \widehat{\psi}_n^+(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s = q^{2n}, \\ 0 & \text{при } s \neq q^{2n}, \end{cases}$$

и мы приходим к (5.6). Точно так же, используя лемму 5.2, приходим к (5.7).

§ 6. q^2 -преобразование Фурье q^2 -обобщенных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. q^2 -преобразование Фурье q^2 -обобщенной функции $f \in \widehat{S}'_{q^2}$ — это q^2 -обобщенная функция $g \in (\widehat{S}^{q^2})'$, определяемая равенством

$$\langle g, \psi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \quad (6.1)$$

где $\phi(z)$ — произвольная функция из S_{q^2} и $\psi(s) \in \widehat{S}^{q^2}$ — ее q^2 -преобразование Фурье.

Предположим, что q^2 -обобщенная функция f отвечает $f(z)$ и $zf(z)$ — абсолютно q^2 -интегрируемая функция. Пусть $\phi(z) = \mathcal{F}_{q^2}^{-1} \widehat{\psi}(s)$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \frac{1}{2\Theta_0} \int d_{q^2} z \bar{f}(z) \int E_{q^2}(-i(1-q^2)zs) \psi(s) d_{q^2} s \\ &= \frac{1}{2\Theta_0} \int \overline{\int d_{q^2} z f(z) E_{q^2}(i(1-q^2)zs) \psi(s) d_{q^2} s} = \langle g, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Это означает, что q^2 -обобщенная функция g отвечает функции

$$g(s) = \frac{1}{2\Theta_0} \int d_{q^2} z f(z) E_{q^2}(i(1-q^2)zs). \quad (6.2)$$

Точно так же, если g определяется абсолютно q^2 -интегрируемой функцией $g(s)$ и $\widehat{\psi}(s) = \mathcal{F}_{q^2} \widehat{\phi}(z)$, то

$$\begin{aligned} \langle g, \psi \rangle &= \iint d_{q^2} z \phi(z) {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, i(1-q^2)q^2 zs) \bar{g}(s) d_{q^2} s \\ &= \int d_{q^2} z \phi(z) \overline{\int {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, -i(1-q^2)q^2 zs) g(s) d_{q^2} s} = \langle f, \phi \rangle, \end{aligned}$$

т.е. f отвечает функции

$$f(z) = \int {}_0\Phi_1(-; 0; q^2, -i(1-q^2)q^2 zs) g(s) d_{q^2} s. \quad (6.3)$$

q^2 -преобразование Фурье q^2 -обобщенных функций из $\widehat{S}'_{q^2}$ мы обозначим через $\mathcal{F}'_{q^2}$. Следующее предложение вытекает из формул (6.2), (6.3) и леммы 5.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. В пространстве q^2 -обобщенных функций имеют место коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{q^2}\Lambda &= q^{-2}\Lambda^{-1}\mathcal{F}'_{q^2}, & (\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}\Lambda &= q^{-2}\Lambda^{-1}(\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}, \\ \mathcal{F}'_{q^2}\partial_z &= -i\Lambda^{-1}s\mathcal{F}'_{q^2}, & (\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}\partial_z &= iz(\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}, \\ \mathcal{F}'_{q^2}z &= -i\partial_s\mathcal{F}'_{q^2}, & (\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}s &= iq^{-2}\Lambda^{-1}\partial_z(\mathcal{F}'_{q^2})^{-1}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Найдем q^2 -преобразования Фурье некоторых q^2 -обобщенных функций.

1. Из формулы (3.7) следует, что

$$\mathcal{F}'_{q^2}z^{-1} = \frac{1}{2\Theta_0} \int d_{q^2}z z^{-1} E_{q^2}(i(1-q^2)zs) = \frac{i}{\Theta_0} \Theta(s).$$

Таким образом, как обобщенная функция над $\widehat{S}^{q^2}$

$$\mathcal{F}'_{q^2}z^{-1} = i \operatorname{sign} s = i(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-). \quad (6.5)$$

2. Из (6.4), (6.5) и (3.7), (4.9) имеем

$$\mathcal{F}'_{q^2}1 = \mathcal{F}'_{q^2}zz^{-1} = -i\partial_s\mathcal{F}'_{q^2}z^{-1} = \partial_s(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-) = 2\delta_{q^2}. \quad (6.6)$$

3. $\mathcal{F}'_{q^2}(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\Theta_0} \int_0^\infty d_{q^2}z E_{q^2}(i(1-q^2)zs) - \frac{1}{2\Theta_0} \int_{-\infty}^0 d_{q^2}z E_{q^2}(i(1-q^2)zs) \\&= \frac{1-q^2}{2\Theta_0} \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m} [e_{q^2}(i(1-q^2)q^{2m}s) - e_{q^2}(-i(1-q^2)q^{2m}s)] \\&= \frac{i(1-q^2)}{\Theta_0} \sum_{m=-\infty}^\infty q^{2m} \sin_{q^2}((1-q^2)q^{2m}s).\end{aligned}$$

Воспользовавшись (2.15), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{q^2}(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-) &= \frac{is^{-1}}{\Theta_0} \lim_{M \rightarrow \infty} (1-q^2)s \sum_{m=-M}^\infty q^{2m} \sin_{q^2}((1-q^2)q^{2m}s) \\&= \frac{is^{-1}}{\Theta_0} \lim_{M \rightarrow \infty} [1 - \cos_{q^2}((1-q^2)q^{2M}s)] = \frac{is^{-1}}{\Theta_0}.\end{aligned}\quad (6.7)$$

4. Из (4.9), (6.4) и (6.7) выводим

$$\mathcal{F}'_{q^2}\delta = \frac{1}{2}\mathcal{F}'_{q^2}\partial_z(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-) = -\frac{i}{2}\Lambda^{-1}s\mathcal{F}'_{q^2}(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^-) = \frac{1}{2\Theta_0}.$$

5. Из (4.7) и (4.8), (6.6) и (6.7) находим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'_{q^2}\theta_{q^2}^+ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}'_{q^2}(\theta_{q^2}^+ - \theta_{q^2}^- + 1) = \frac{is^{-1}}{2\Theta_0} + \delta_{q^2}, \\ \mathcal{F}'_{q^2}\theta_{q^2}^- &= \frac{1}{2}\mathcal{F}'_{q^2}(-\theta_{q^2}^+ + \theta_{q^2}^- + 1) = -\frac{is^{-1}}{2\Theta_0} + \delta_{q^2}.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Для любого целого $n \geq 0$

$$\mathcal{F}'_{q^2} z^n = 2 i^n q^{-n(n+1)} \frac{(q^2, q^2)_n}{(1 - q^2)^n} s^{-n} \delta_{q^2}(s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.2) следует, что

$$1 = \frac{(1 - q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} \partial_z^n z^n.$$

Тогда из (6.6) и предложения 6.1

$$\delta_{q^2}(s) = \frac{1}{2} \mathcal{F}'_{q^2} 1 = \frac{(1 - q^2)^n}{2(q^2, q^2)_n} \mathcal{F}'_{q^2} \partial_z^n z^n = (-i)^n \frac{(1 - q^2)^n}{2(q^2, q^2)_n} (\Lambda^{-1} s)^n \mathcal{F}'_{q^2} z^n.$$

Отсюда

$$\mathcal{F}'_{q^2} z^n = 2 i^n \frac{(q^2, q^2)_n}{(1 - q^2)^n} (s^{-1} \Lambda)^n \delta_{q^2}(s). \quad (6.8)$$

Так как $(s^{-1} \Lambda)^n = q^{-n(n-1)} s^{-n} \Lambda^n$ и $\delta_{q^2}(q^{2n} s) = q^{-2n} \delta_{q^2}(s)$, то

$$(s^{-1} \Lambda)^n \delta_{q^2}(s) = q^{-n(n+1)} s^{-n} \delta_{q^2}(s).$$

Отсюда и из (6.8) вытекает утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Для любого целого $n \geq 0$

$$\mathcal{F}'_{q^2} z^{-n-1} = i^{n+1} \frac{(1 - q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} s^n \operatorname{sign} s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.3) следует, что для любого целого $n \geq 0$

$$\partial_z^n z^{-1} = (-1)^n q^{-n(n+1)} \frac{(q^2, q^2)_n}{(1 - q^2)^n} z^{-n-1}.$$

Используя предложение 6.1, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{q^2} z^{-n-1} &= (-1)^n q^{n(n+1)} \frac{(1 - q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} \mathcal{F}'_{q^2} \partial_z^n z^{-1} \\ &= i^n q^{n(n+1)} \frac{(1 - q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} (\Lambda^{-1} s)^n \mathcal{F}'_{q^2} z^{-1}. \end{aligned}$$

Из (4.5) следует, что $(\Lambda^{-1} s)^n = q^{-n(n+1)} s^n \Lambda^{-n}$. Используя этот факт и (6.5), получаем утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{F}'_{q^2} z_+^{\nu-1} = \frac{e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)})}{2\Theta_0} (\bar{c}_\nu s_-^{-\nu} + c_\nu s_+^{-\nu}), \quad (6.9)$$

$$\mathcal{F}'_{q^2} z_-^{\nu-1} = -\frac{e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)})}{2\Theta_0} (c_\nu s_-^{-\nu} + \bar{c}_\nu s_+^{-\nu}), \quad (6.10)$$

где

$$c_\nu = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu m} (q^{-2m} + i(1 - q^2))}{(1 - q^2)^{-1} q^{-2m} + (1 - q^2) q^{2m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.10) и (6.2) при $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$

$$\mathcal{F}_{q^2} z_+^{\nu-1} = \frac{1 - q^2}{2\Theta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2\nu m} e_{q^2}(i(1 - q^2) q^{2m} s). \quad (6.11)$$

Легко проверить, что функция $z_+^{\nu-1}$ удовлетворяет уравнению

$$z \partial_z f(z) = \frac{1 - q^{2(\nu-1)}}{1 - q^2} f(z).$$

Из предложения 6.1 следует, что после применения q^2 -преобразования Фурье это уравнение принимает вид

$$-q^{-2} \partial_s (s g(q^{-2} s)) = \frac{1 - q^{2(\nu-1)}}{1 - q^2} g(s).$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $s_-^{-\nu}$ и $s_+^{-\nu}$. Поэтому

$$\mathcal{F}'_{q^2} z_+^{\nu-1} = c_1 s_-^{-\nu} + c_2 s_+^{-\nu}. \quad (6.12)$$

Подставляя $s = 1$ в (6.12), из (2.6), (6.11) и (6.12) получаем

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1 - q^2}{2\Theta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2\nu m} e_{q^2}(i(1 - q^2) q^{2m}) \\ &= \frac{1 - q^2}{2\Theta_0} e_{q^2}(q^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2\nu m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)}}{(q^2, q^2)_n [1 - i(1 - q^2) q^{2(m+n)}]}. \end{aligned}$$

При условии $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$ можно поменять порядок суммирования. Тогда

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1 - q^2}{2\Theta_0} e_{q^2}(q^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)}}{(q^2, q^2)_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu m}}{1 - i(1 - q^2) q^{2(m+n)}} \\ &= \frac{e_{q^2}(q^2)}{2\Theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)} q^{2(1-\nu)n}}{(q^2, q^2)_n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu m} (q^{-2m} + i(1 - q^2))}{(1 - q^2)^{-1} q^{-2m} + (1 - q^2) q^{2m}}. \end{aligned}$$

Сумму внутреннего ряда обозначим через c_ν , тогда

$$c_2 = \frac{c_\nu}{2\Theta_0} e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)}).$$

Положим $s = -1$ в (6.12). Тогда аналогично получим

$$c_1 = \frac{\bar{c}_\nu}{2\Theta_0} e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)}).$$

Подставляя найденные значения констант в (6.12), приходим к (6.9). Для остальных значений ν , не равных целым числам, определим $\mathcal{F}'_{q^2} z_+^{\nu-1}$ как аналитическое продолжение функции (6.9).

q^2 -преобразование Фурье функции $z_-^{\nu-1}$, $\nu \neq 0, \pm 1, \dots$,

$$\mathcal{F}'_{q^2} z_-^{\nu-1} = -\frac{1-q^2}{2\Theta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2\nu m} e^{q^2} (-i(1-q^2)q^{2m}s)$$

отличается от (6.11) лишь знаком и комплексным сопряжением, т.е. мы имеем (6.10).

Полученные выше результаты сведем в таблицу:

$f(z)$	$g(s) = \frac{1}{2\Theta_0} \int d_{q^2} z f(z) E_{q^2}(i(1-q^2)zs)$
$\delta_{q^2}(z)$	$\frac{1}{2\Theta_0}$
$\theta_{q^2}^+(z)$	$\frac{i}{2\Theta_0} s^{-1} + \delta_{q^2}(s)$
$\theta_{q^2}^-(z)$	$-\frac{i}{2\Theta_0} s^{-1} + \delta_{q^2}(s)$
z^n ($n = 0, 1, \dots$)	$2i^n q^{-n(n+1)} \frac{(q^2, q^2)_n}{(1-q^2)^n} s^{-n} \delta_{q^2}(s)$
z^{-n-1} ($n = 0, 1, \dots$)	$i^{n+1} \frac{(1-q^2)^n}{(q^2, q^2)_n} s^n \text{sign } s$
$z_+^{\nu-1}$ ($\nu \neq 0, \pm 1, \dots$)	$\frac{e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)})}{2\Theta_0} (\bar{c}_\nu s_-^{-\nu} + c_\nu s_+^{-\nu})$
$z_-^{\nu-1}$ ($\nu \neq 0, \pm 1, \dots$)	$-\frac{e_{q^2}(q^2) E_{q^2}(-q^{2(1-\nu)})}{2\Theta_0} (c_\nu s_-^{-\nu} + \bar{c}_\nu s_+^{-\nu})$

Список литературы

1. *Chryssomalakos Ch., Zumino B.* Integrals and Fourier transforms in the quantum plane // Salamfest. 1993. P. 327–346.
2. *Kempf A., Majid S.* Algebraic q -integration and Fourier theory on quantum and braided spaces // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 12. P. 6802–6837.
3. *Koornwinder T. H., Swarttouw R. F.* On q -analogues of the Fourier and Hankel transforms // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 333. № 1. P. 445–461.
4. *Askey R., Atakishiyev N. M., Suslov S. K.* An analog of the Fourier transformation for a q -harmonic oscillator // Symmetries in science VI: From the rotation group to quantum algebras. Proceedings of a symposium held in Bregenz, Austria, August 2–7, 1992 / ed. B. Gruber. New York: Plenum Press, 1993. P. 57–63.
5. *Rahman M., Suslov S.* Singular analogue of the Fourier transformation for the Askey–Wilson polynomials // Preprint CRM-1915, 1993.
6. *Askey R., Rahman M., Suslov S.* On a general q -Fourier transformation with nonsymmetric kernels // Preprint ISSN 0827-3669, 1994.
7. *Гельфанд И. М., Шилев Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции. Вып 1. М.: Физматгиз, 1959.
8. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.

Институт теоретической и экспериментальной физики;
 Московский государственный университет путей сообщения
E-mail: olshanet@heron.itep.ru vrogov@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
 03.02.1998