Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О некоторых свойствах пространства n -мерных алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 31–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:27:33

УДК 512.554.3

В. В. Горбачевич

О некоторых свойствах пространства n -мерных алгебр Ли

Изучаются некоторые общие свойства пространства n -мерных алгебр Ли $\mathcal{L}_n$. Это пространство задается системой квадратичных уравнений Якоби. Доказано, что эти уравнения линейно независимы и между собой эквивалентны (точнее, аффинно эквивалентны задающие их квадратичные формы). Кроме того, рассматривается вопрос о замыканиях некоторых орбит естественного действия группы GL_n на $\mathcal{L}_n$. Указаны две алгебры Ли, орбиты которых замкнуты в проективизации пространства $\mathcal{L}_n$. Рассматривается также пересечение всех неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_n$. Доказано, что оно нетривиально и состоит из нильпотентных алгебр Ли. Указаны две алгебры Ли, принадлежащие этому пересечению. Приведен также ряд других результатов, касающихся произвольных алгебр Ли и образованного ими пространства $\mathcal{L}_n$.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: алгебра Ли, тождество Якоби, неприводимая компонента, сжатие.

Введение

В статье рассматриваются свойства пространства $\mathcal{L}_n$, образованного всеми n -мерными алгебрами Ли. В основном рассматриваются алгебры Ли над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, однако многие утверждения могут быть перенесены (иногда даже с некоторыми упрощениями) на случай алгебр Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ или над произвольным полем нулевой характеристики.

В последнее время при изучении пространства алгебр Ли часто применяются довольно сложные методы (например, кохомологические методы или специальные методы коммутативной алгебры). Однако вопросы, касающиеся строения пространства алгебр Ли, настолько важны и фундаментальны, что начинать их изучение нужно, используя как можно более простые (но, конечно, эффективные) методы. Сложные методы могут здесь существенно затруднить понимание сути проблемы. Именно такие простые методы и описаны в настоящей статье. Они касаются фундаментальных свойств произвольных алгебр Ли и их пространства $\mathcal{L}_n$.

Пусть L – некоторая вещественная алгебра Ли размерности n . В некотором базисе $\{e_i\}$ структура алгебры Ли задается структурным тензором $c = \{c_{ij}^k\}$: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$. Компоненты c_{ij}^k кососимметричны по нижним индексам

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00230).

и удовлетворяют условиям Якоби, которые следуют из общего тождества Якоби для алгебр Ли:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

При переходе к другому базису в L структурные константы естественным образом преобразуются (по тензорному закону). Через $\mathcal{L}_n$ будем обозначать множество всевозможных структурных тензоров $c = \{c_{ij}^k\}$, соответствующих всевозможным n -мерным алгебрам Ли (над заданным полем). Точнее, мы будем рассматривать в основном пространство $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ вещественных алгебр Ли. Аналогично вводится и изучается пространство комплексных алгебр Ли $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. Можно изучать также и пространство $\mathcal{L}_n(\mathbb{Q})$ всех рациональных алгебр Ли – это полезно при рассмотрении некоторых специальных вопросов, связанных с алгебрами Ли, соответствующими им группами Ли и их однородными пространствами.

Ясно, что $\mathcal{L}_n$ (точнее, $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$) можно рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^N$, где $N = n^2(n-1)/2$ (на самом деле $\mathbb{R}^N = \Lambda^2 \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$). Для этого нужно упорядочить (например, лексикографически по индексам i, j, k) компоненты c_{ij}^k структурного тензора и учесть, что они кососимметричны по нижним индексам, и потому можно ограничиться рассмотрением только таких компонент c_{ij}^k , для которых $i < j$. Отметим, что размерность объемлющего $\mathcal{L}_n$ пространства $\mathbb{R}^N$ имеет порядок роста $n^3/2$.

Рассмотрим естественное действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на $\mathcal{L}_n$. Оно порождается линейным действием группы $GL_n(\mathbb{R})$ на координаты относительно базиса $\{e_i\}$ алгебры Ли L . Иногда удобно вместо этого действия рассматривать действие линейной группы на структурные тензоры. В зависимости от ситуации мы в дальнейшем будем использовать тот или иной из этих двух эквивалентных подходов.

Орбиты действия группы $GL_n(\mathbb{R})$ на $\mathcal{L}_n$ состоят из всех изоморфных между собой алгебр Ли. Стационарная подгруппа произвольной точки для этого действия естественно отождествляется с группой автоморфизмов $\text{Aut}(L)$ алгебры Ли L , соответствующей этой точке пространства алгебр Ли (структурный тензор, очевидно, однозначно порождает операцию в этой алгебре Ли: $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$).

Далее мы будем постоянно пользоваться понятием сжатия. Напомним, что алгебру Ли L' называют *сжатием алгебры Ли L* , если L' принадлежит замыкающую орбиты $\mathcal{O}_L$ алгебры Ли L (это можно обозначать так: $L \Rightarrow L'$).

Подмножество $\mathcal{L}_n \subset \mathbb{R}^N$ задается алгебраическими уравнениями $J_I^q = 0$ (мы будем называть их координатными уравнениями Якоби), где для $I = (i, j, k)$, $1 \leq i < j < k \leq n$, $q = 1, 2, \dots, n$, имеем

$$J_I := c_{ij}^p c_{pk}^q e_q + c_{jk}^p c_{pi}^q e_q + c_{ki}^p c_{pj}^q e_q, \quad J_I = 0,$$

и в координатной записи (J_I^q – координаты векторзначных J_I)

$$J_I^q := c_{ij}^p c_{pk}^q + c_{jk}^p c_{pi}^q + c_{ki}^p c_{pj}^q, \quad J_I^q = 0.$$

Поэтому $\mathcal{L}_n$ является алгебраическим подмножеством в $\mathbb{R}^N$. Через $\mathcal{I}$ обозначим идеал, порожденный левыми частями J_{ijk}^q координатных уравнений Якоби (квадратичными формами).

Рассмотрим простейшие примеры.

1. $n = 1$.

В этом случае $\mathcal{L}_n$ состоит из одной точки, соответствующей одномерной абелевой алгебре Ли. Нетривиальных уравнений Якоби здесь нет.

2. $n = 2$.

В этом случае $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2$, действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ – это ее естественное действие на плоскости. Орбит здесь две – это точка нуль (соответствующая двумерной абелевой алгебре Ли) и дополнение к ней – открытая орбита, соответствующая единственной (с точностью до изоморфизма) двумерной разрешимой алгебре Ли, которую мы будем обозначать через R_2 . Нетривиальных уравнений Якоби здесь также нет.

3. $n = 3$.

В этом случае $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^9$, на этом пространстве действует 9-мерная группа $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. В этом случае, как известно, имеются непрерывные семейства разрешимых алгебр Ли, а также открытые орбиты жестких алгебр Ли $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{sl}_2$ (подробнее см., например, [1]).

Выпишем в случае $n = 3$ все нетривиальные координатные уравнения Якоби $J_I^J = 0$. Здесь имеется только одно нетривиальное векторное условия Якоби

$$[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2] = 0.$$

Оно порождает три координатных уравнения Якоби (в каждом из которых в первоначальной сумме по два слагаемых взаимно сокращаются):

$$\begin{aligned} (c_{12}^2 + c_{13}^3)c_{23}^1 - c_{23}^2c_{12}^1 - c_{23}^3c_{13}^1 &= 0, \\ c_{13}^2(c_{12}^1 - c_{23}^3) - c_{13}^1c_{12}^2 + c_{13}^3c_{23}^2 &= 0, \\ c_{12}^1c_{13}^3 + c_{12}^2c_{23}^3 - c_{12}^3(c_{13}^1 + c_{23}^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что левые части всех трех уравнений – это квадратичные формы ранга шесть и индекса нуль. Более подробно вопрос о типе квадратичных форм, входящих в уравнения Якоби, рассматривается в § 1 настоящей работы. Кроме того, все эти три формы приводятся в одному и тому же каноническому виду

$$\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 - U^2 - V^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(Z^2 - W^2).$$

Интересно отметить, что результат применения к указанным трем уравнениям современных методов символической вычислительной алгебры оказался неудовлетворительным даже при использовании весьма совершенных программ и достаточно мощного процессора). Конечно, базис Гребнера для идеала, порожденного этими тремя уравнениями, был найден легко (в нем, кроме этих трех многочленов, содержатся также многочлены третьей и четвертой степени). Однако, попытка выяснить при помощи компьютера, будет ли этот идеал простым (хотя известно, что он не простой, так как пространство $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$ имеет три неприводимые компоненты), привела фактически к зависанию компьютера – вычисления длились несколько часов и не привели ни к какому результату). То же получилось и при попытке выяснить, будет ли этот идеал радикальным (на самом деле при $n = 3$ он радикален).

4. $n = 4$.

Здесь $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{24}$ и на этом пространстве действует группа $GL_4(\mathbb{R})$ размерности шестнадцать.

Здесь имеется шестнадцать скалярных уравнений Якоби. Мы укажем только одно из них, которое принципиально отлично от тех, что были описаны в случае $n = 3$ (здесь не сокращается ни одно из слагаемых из первоначальной суммы):

$$c_{12}^1 c_{13}^4 + c_{12}^2 c_{23}^4 - c_{23}^2 c_{12}^4 - c_{23}^3 c_{13}^4 - c_{13}^1 c_{12}^4 + c_{13}^3 c_{23}^4 = 0.$$

Имеется еще три уравнения Якоби подобного вида. Остальные двенадцать уравнений Якоби подобны тем, что были приведены для случая $n = 3$.

При изучении пространства $\mathcal{L}_n$ кажется удивительным, что орбиты точек такого не очень сложного представления классической группы GL_n (само это представление есть прямая сумма двух неприводимых представлений, подробнее об этом см. [1]) описывают все возможные алгебры Ли (т.е. описание всех n -мерных алгебр Ли есть часть описания орбит одного лишь линейного представления). Это указывает на сложность изучения произвольных орбит линейных действий. Поэтому нужно стремиться выделять среди них те, которые являются в каком-то смысле особенными.

Как и всякое алгебраическое подмножество, $\mathcal{L}_n$ разлагается в объединение неприводимых компонент (определяемых исходным алгебраическим множеством однозначно с точностью до порядка их перечисления): $\mathcal{L}_n = \bigcup_{\alpha} {}^{\alpha}\mathcal{L}_n$, где ${}^{\alpha}\mathcal{L}_n$ – неприводимые компоненты (их число всегда конечно).

Отметим, что наряду с пространством $\mathcal{L}_n$ всех n -мерных алгебр Ли интересно рассматривать и некоторые его подпространства – например, подпространство всех разрешимых алгебр Ли $\mathcal{R}_n$, подпространство всех нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{N}_n$ и др. Подпространства $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{N}_n$ выделяются в $\mathcal{L}_n$ полиномиальными условиями и поэтому тоже являются алгебраическими подмножествами в $\mathbb{R}^N$ (и, следовательно, тоже разлагаются в объединения своих неприводимых компонент).

В настоящей статье в § 1 изучаются уравнения Якоби, устанавливаются некоторые их свойства. Основной результат здесь – теорема 1, в силу которой все уравнения Якоби как квадратичные формы между собой аффинно эквивалентны (все они – формы ранга $6(n-2)$ и индекса нуль), причем среди них при $n \geq 4$ существует ровно три класса ортогонально эквивалентных (при $n = 3$ класс только один, см. выше). В § 2 изучаются замкнутые орбиты естественного действия группы $PGL_n(\mathbb{R})$ на проективизации пространства $\mathcal{L}_n$. Оказывается, что таких орбит только две, но, как будет показано, их роль в $\mathcal{L}_n$ различна. В § 3 рассмотрены некоторые результаты о неприводимых компонентах пространств алгебр Ли. В частности, изучается пересечение всех неприводимых компонент. Оно, как показано в теореме 3, состоит из метабелевых (2-нильпотентных) алгебр Ли, две из которых в работе указаны явно. Тем самым доказано, что существуют нетривиальные алгебры Ли, которые в некотором смысле являются “универсальными”: они принадлежат всем неприводимым компонентам пространства алгебр Ли. В § 4 приводятся некоторые отдельные факты и замечания, касающиеся пространства алгебр Ли. В частности, кратко обсуждаются некоторые свойства пространств разрешимых и нильпотентных алгебр Ли.

Здесь также сформулировано несколько важных вопросов, ответы на которые в настоящее время неизвестны.

Автор благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний.

§ 1. Свойства уравнения Якоби

Для мультииндекса $I = (i, j, k)$ координатные уравнения Якоби относительно структурных констант c_{ij}^k имеет вид

$$c_{ij}^p c_{pk}^q + c_{jk}^p c_{pi}^q + c_{ki}^p c_{pj}^q = 0.$$

При этом можно предполагать, что индексы i, j, k удовлетворяют условиям $1 \leq i < j < k \leq n$; индекс p – это индекс суммирования (от 1 до n), а индекс q может принимать любые значения от 1 до n .

Обозначим через J_{ijk}^q левые части этих уравнений (это – квадратичные формы относительно переменных c_{ij}^k). В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства этих квадратичных форм. Напомним, что система уравнений, полученная приравниванием к нулю этих квадратичных форм, – это скалярная (координатная) запись условия Якоби для алгебр Ли, и поэтому эта система уравнений задает алгебраическое подмножество $\mathcal{L}_n \subset \mathbb{R}^N$ всех n -мерных алгебр Ли.

Можно точно найти число уравнений Якоби: оно равно $n^2(n-1)(n-2)/6$. Оценочно получаем $\sim n^4/6$ (это – объем пирамиды, задаваемой уравнениями $0 \leq x \leq y \leq z$, умноженный на n).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Квадратичные формы J_{ijk}^q при $n \geq 3$ не связаны между собой никакими нетривиальными линейными соотношениями (т.е. они линейно независимы как элементы векторного пространства всех квадратичных форм от переменных c_{ij}^k).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует нетривиальное линейное соотношение вида

$$\sum \alpha_{ijk}^q J_{ijk}^q = 0,$$

где α_{ijk}^q – некоторые вещественные коэффициенты, причем не все они равны нулю. Пусть некоторый коэффициент $\alpha_{ijk}^q \neq 0$. Перенумеровав индексы, можно считать, что $i = 1, j = 2, k = 3$.

Предположим, что при некотором q коэффициент $\alpha_{123}^q \neq 0$. При этом возникают два случая (I и II), в зависимости от того, равен ли индекс q одному из чисел 1, 2, 3 или же он больше трех (в этом случае после подходящей перенумерации можно считать, что $q = 4$).

Мы докажем, что в обоих случаях неравенство $\alpha_{123}^q \neq 0$ невозможно. Для этого будем в каждом случае подбирать должным образом наборы структурных констант c_{ij}^k или, что то же самое, косокоммутативную n -мерную алгебру (не обязательно алгебру Ли), т.е. элемент пространства $\mathbb{R}^N$.

Начнем со случая I, когда $q = 4$. Рассмотрим косокоммутативную n -мерную алгебру, которая в базисе $\{e_i\}$ задается такими соотношениями:

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_3] = -e_3,$$

где указаны только нетривиальные коммутационные соотношения, все остальные получаются из них по кососимметричности или же являются нулевыми (т.е. $[e_a, e_b] = 0$). В частности, имеем $[e_j, e_4] = 0$ при всех i . Как нетрудно понять, все слагаемые в сумме $\sum \alpha_{ijk}^q J_{ijk}^q$ для алгебры, соответствующей указанным выше структурным константам, равны нулю автоматически, кроме одного слагаемого $\alpha_{123}^4 J_{123}^4$, которое равно нулю в силу предположения о наличии указанного выше линейного соотношения. Так как здесь по условию коэффициент $\alpha_{123}^4 \neq 0$, то должно быть $J_{123}^4 = 0$. Но на самом деле J_{123}^4 есть четвертая координата вектора $[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2]$. В нашем случае непосредственная подстановка коммутационных соотношений введенной выше алгебры (с учетом ее косокоммутативности) показывает, что это выражение равно $e_4 + e_4 + 0 = 2e_4$ и потому значение $J_{123}^4 = 2 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает предложение в случае I.

Теперь рассмотрим случай II, когда $q = 1, 2$ или 3 . Так как все эти варианты равнозначны, то можно ограничиться рассмотрением только одного из них – например, можно полагать, что $q = 1$. В этом случае мы тоже подбираем подходящий набор структурных констант, точнее, выбираем некоторую подходящую для получения противоречия косокоммутативную алгебру.

Предположим, что $\alpha_{123}^1 \neq 0$. Рассмотрим косокоммутативную n -мерную алгебру, которая в базисе $\{e_i\}$ задается соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2.$$

Здесь мы опять указываем только нетривиальные коммутационные соотношения. Применяем то же рассуждение, что и в предыдущем случае. Имеем

$$[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2] = e_1 - e_1 - e_1 = -e_1$$

и потому $J_{123}^1 = -1 \neq 0$. Это, как и выше, дает противоречие. Тем самым предложение 1 доказано.

Смысл предложения 1 в том, что среди координатных уравнений Якоби нет “лишних” (по крайней мере, лишних в тривиальном смысле, т.е. представляющих собой линейную комбинацию остальных).

В связи с предложением 1 возникает естественный вопрос: а не будут ли формы J_{ijk}^q алгебраически зависимыми (хоть бы и нелинейно)? Отметим, что в общем случае может оказаться, что некоторые квадратичные формы, не являющиеся линейно зависимыми, будут связаны между собой некоторым алгебраическим соотношением. Например, таковы три формы $Q_1 = x^2 - y^2$, $Q_2 = xy$, $Q_3 = x^2 + y^2$ (для них $Q_1^2 + 4Q_2^2 = Q_3^2$).

В предложении 2, по форме похожем на предложение 1, будут рассматриваться не отдельные уравнения Якоби, а совокупность их общих решений, т.е. пространство $\mathcal{L}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Подпространство $\mathcal{L}_n \subset \mathbb{R}^N$ при $n \geq 3$ не содержится ни в одной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^N$. Другими словами, не существует нетривиальных линейных комбинаций между компонентами всевозможных структурных тензоров $c = \{c_{ij}^k\}$ алгебр Ли размерности больше или равной трем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь будем использовать мультииндексы вида $\alpha = \binom{k}{ij}$.

Предположим, что существует некоторое нетривиальное линейное соотношение

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} c_{\alpha} = 0$$

между компонентами $c_{\alpha} = c_{ij}^k$ структурного тензора c произвольной алгебры Ли из $\mathcal{L}_n$ (причем коэффициенты $\lambda_{\alpha} \in \mathbb{R}$ не зависят от выбора алгебры Ли).

Предположим, что некоторый коэффициент $\lambda_{\alpha} \neq 0$. Перенумеровав подходящим образом индексы, можно считать, что $i = 1, j = 2$. В зависимости от того, равен ли индекс k одному из индексов i, j или же он отличен от них обоих, мы будем рассматривать два частных случая: случай I (здесь можно предполагать в силу кососимметричности коммутирования в алгебрах Ли, что $k = 3$) и случай II (здесь можно считать, что $k = 1$); ясно, что к этим двум случаям сводятся случаи любых других наборов индексов. Рассмотрим эти две ситуации по отдельности.

I. Пусть сначала $\lambda_{\alpha} \neq 0$ при $\alpha = \binom{3}{12}$. Мы получим противоречие, используя тот же метод выбора “пробных” алгебр, который был использован при доказательстве предложения 1. Но если там мы выбирали подходящие косокоммутативные алгебры (соответствующие элементам из $\mathbb{R}^N$), то здесь нам нужно использовать только алгебры Ли, т.е. элементы из $\mathcal{L}_n$. При этом достаточно рассмотреть лишь две серии, связанные с двумя простейшими разрешимыми алгебрами Ли. Начнем с их краткого описания.

Пусть R_2 – это алгебра Ли, которая в подходящем базисе X, Y задается коммутационным соотношением $[X, Y] = Y$; она двумерна и разрешима. Рассмотрим также алгебру Ли N_3 – это алгебра Ли, состоящая из всех нильпотентных матриц третьего порядка, она трехмерна, нильпотентна и в подходящем базисе X, Y, Z задается соотношением $[X, Y] = Z$.

Вернемся теперь к доказательству предложения 2. В рассматриваемом нами случае I возьмем в качестве “пробной” алгебры Ли $L_1 = N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$. Для нее нетривиально только одно коммутационное соотношение и только одна компонента структурного тензора (в естественном базисе) отлична от нуля: $c_{12}^3 = 1$. Поэтому если мы подставим в предполагаемое линейное соотношение компоненты структурного тензора алгебры Ли L_1 , то получим соотношение $\lambda_{12}^3 = 0$. Но это противоречит сделанному выше предположению.

II. Аналогично получаем противоречие и во втором из указанных выше возможных случаев – для этого используем алгебру Ли $L_2 = R_2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$. Это завершает доказательство предложения 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Отметим, что для алгебр Ли размерностей один и два ситуация несколько отлична от той, что описана в предложениях 1 и 2. При $n = 1$ все структурные тензоры тривиальны. При $n = 2$ существуют с точностью до изоморфизма только две алгебры Ли – абелева и R_2 . Здесь условия Якоби выполняются автоматически, т.е. нетривиальных уравнений Якоби здесь просто нет. Формально можно все же считать, что предложения 1 и 2 справедливы и при $n = 1, 2$.

2. Так как алгебры Ли L_1, L_2 , использованные при доказательстве предложения 2, разрешимы, то утверждение предложения 2 о линейной независимости

структурных констант справедливо и для подпространства $\mathcal{R}_n \subset \mathbb{R}^N$ разрешимых алгебр Ли. Чуть более сложное рассуждение (использующее вместо алгебры Ли R_2 другие алгебры Ли – нильпотентные) показывает, что утверждение предложения 2 справедливо и для $\mathcal{N}_n$ при $n \geq 3$ (при $n = 2$ оно неверно, так как не существует неабелевых двумерных нильпотентных алгебр Ли).

Пусть $\mathcal{J}$ – идеал, порожденный квадратичными формами J_{ijk}^q . Строеение этого идеала очень мало изучено. Сами квадратичные формы J_{ijk}^q , порождающие идеал $\mathcal{J}$, не являются для него базисом Гребнера. Это легко проверить непосредственно, используя критерий Бухбергера, а именно, проверяется, что S -многочлены $S(J, J')$ не делятся без остатка на идеал $\mathcal{J}$ (см. [2]).

Из предложения 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В идеале $\mathcal{J}$ нет линейных многочленов. В частности, то же верно и для любого базиса Гребнера этого идеала.*

Теперь перейдем к более подробному исследованию тех квадратичных форм, которые входят в координатные уравнения Якоби. Оказывается, что несмотря на кажущуюся многочисленность возможных видов этих форм, с точностью до ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ их всего три, причем все они между собой аффинно эквивалентны.

Обозначим через $Q_{k,l}$ стандартную квадратичную форму ранга k и индекса l (под индексом понимается разность между числом положительных и числом отрицательных квадратов в канонической записи квадратичной формы): $Q_{k,l} = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_p^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_q^2$, $p + q = k$, $p - q = l$.

Классификация квадратичных форм может быть аффинной (по рангу и индексу) и ортогональной – с учетом спектра, т.е. набора собственных чисел соответствующей симметричной матрицы (среди этих чисел могут быть положительные, нулевые и отрицательные). В случае уравнений Якоби обе классификации приводят практически к одному и тому же результату.

ТЕОРЕМА 1. *Любая квадратичная форма J_{ijk}^q при $n \geq 3$ является формой типа $Q_{6(n-2),0}$. Число переменных c_{ij}^k , входящих в форму J_{ijk}^q , равно $6n - 9$.*

Канонический вид (в подходящих ортонормированных базисах пространства $\mathbb{R}^N$) для J_{ijk}^q – один из следующих трех:

$$\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_m^2 - Y_1^2 - \dots - Y_m^2) + Q^*,$$

где Q^* – квадратичная форма, равная нулю, $(\sqrt{2}/2)(X^2 - U^2)$ или $(\sqrt{3}/2)(X^2 + Y^2 + Z^2 - U^2 - V^2 - W^2)$, а $m = 3n - 6$, $3n - 7$, $3n - 9$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную квадратичную форму вида J_{ijk}^q . Перенумеровав коэффициенты, можно считать, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только квадратичных форм вида

$$c_{12}^p c_{p3}^q + c_{23}^p c_{p1}^q + c_{31}^p c_{p2}^q.$$

При этом в зависимости от значения индекса q мы имеем два принципиально различных частных случая:

I. $q \neq 1, 2, 3$.

II. $q = 1, 2$ или 3 .

Рассмотрим случай I. Здесь можно предположить, что $q = 4$ (перенумеровав в случае необходимости индексы структурного тензора). Поэтому квадратичная форма здесь имеет вид $c_{12}^p c_{p3}^4 + c_{23}^p c_{p1}^4 + c_{31}^p c_{p2}^4$, она состоит из попарных произведений переменных. Выделим входящие в эту квадратичную форму независимые переменные и выясним, в какие слагаемые входит каждая из них и сколько раз. При $p \geq 5$ все слагаемые состоят из строго различных произведений пар переменных. А вот при $p \leq 4$ возможны некоторые повторы. Выпишем эту часть суммы отдельно:

$$c_{12}^1 c_{13}^4 + c_{12}^2 c_{23}^4 - c_{12}^4 c_{34}^4 - c_{23}^2 c_{12}^4 - c_{23}^3 c_{13}^4 - c_{23}^4 c_{14}^4 - c_{13}^1 c_{12}^4 + c_{13}^3 c_{23}^4 + c_{13}^4 c_{24}^4.$$

Для простоты изложения введем вспомогательные обозначения

$$x_p = c_{12}^p, \quad y_p = c_{23}^p, \quad z_p = c_{13}^p, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Все эти переменные входят в рассматриваемую квадратичную форму, и мы уже в этой форме имеем $3n$ независимых переменных. К ним добавятся некоторые переменные, имеющие вид $c_{p3}^4, c_{p1}^4, c_{p2}^4$, фигурирующие как вторые множители в рассматриваемой квадратичной форме.

Положим $u_p = c_{p3}^4$. Выясним, являются ли эти переменные новыми или они совпадают (хотя бы некоторые из них) с уже введенными выше. Из явного вида квадратичной формы имеем, очевидно, следующий список совпадений переменных в ней. Во-первых, $u_1 = z_4$. При этом к уже описанным выше слагаемым квадратичной формы добавляется слагаемое $x_1 z_4$ (в полной записи оно имеет вид $c_{12}^1 c_{13}^4$), которое входит в выписанную выше отдельную часть общей суммы. Далее, имеем $u_2 = y_4$; здесь добавляется слагаемое $x_2 y_4$.

При $p = 3$ переменная u_3 не рассматривается, так как автоматически $c_{33}^4 = 0$. Однако при $p \geq 4$ переменные u_p – новые (не совпадают ни с одной из переменных x_i, y_i, z_i). Итак, мы получаем дополнительные $n - 3$ переменные.

Продолжим исследование новых переменных. Положим $v_p = c_{p1}^4$ и проведем исследование этих переменных, подобное проведенному выше для u_p .

При $p = 2$ имеем $v_2 = -x_4$; соответствующее этой переменной слагаемое в квадратичной форме равно $-y_2 x_4$. При $p = 3$ имеем $v_3 = -z_4$; здесь соответствующее слагаемое равно $-y_3 z_4$. При $p = 1$ переменная v_p , очевидно, не рассматривается (так как она тождественно равна нулю), а вот при всех $p \geq 4$ переменные v_p являются новыми (т.е. не совпадают с теми, которые уже были введены выше), так что мы получаем еще $n - 3$ независимые переменные.

Наконец, положим $w_p = c_{p2}^4$. При $p = 1$ имеем $w_1 = x_4$, что дает новое слагаемое $z_1 x_4$. При $p = 3$ имеем $w_3 = -y_4$ и дополнительное слагаемое $-z_3 y_4$. При $p \geq 4$ все w_p – это новые переменные и их число равно $n - 3$.

Итак, мы выяснили, что в рассматриваемой квадратичной форме фигурируют ровно $3n + 3(n - 3) = 6n - 9$ независимых переменных. При этом из явного вида квадратичной формы и проведенного выше изучения нескольких специальных случаев видно, что она состоит из отдельных одночленов – попарных произведений переменных, причем эти произведения – произведения различных переменных и они встречаются среди слагаемых в квадратичной

форме J_{123}^4 (и в аналогичных ей J_{ijk}^q) обычно только по одному разу (хотя есть и исключения – в той части формы, которая выписана нами выше отдельно).

Рассматриваемая нами квадратичная форма есть сумма попарных произведений, из которых почти никакие два не имеют общих переменных. Есть только несколько исключений. Выписывая явно сумму тех слагаемых, в которые хоть какая-то независимая переменная (из числа выделенных выше) входит не менее чем дважды, получим

$$x_4(u_4 - y_2 + z_1) + y_4(v_4 + x_2 - z_3) + z_4(w_4 + x_1 - y_3).$$

Каждая из трех скобок в этом выражении содержит переменные, которые не встречаются в других скобках и вообще в других слагаемых нашей квадратичной формы. Поэтому мы можем рассматривать каждую из трех форм-слагаемых в этой “исключительной” сумме отдельно.

Как нетрудно понять, форма $x_4u_4 - y_2x_4 + z_1x_4$ имеет ранг два (так как линейным, хотя и не ортогональным, преобразованием она приводится к виду XU , где $X = x_4$, $U = u_4 + y_2 - z_4$). То же самое верно для каждого из остальных двух слагаемых. Каждое из этих слагаемых – форма ранга два и индекса нуль. Отметим также, что рассматриваемая нами квадратичная форма $x_4(u_4 - y_2 + z_1)$ ортогональным преобразованием приводится к виду $(\sqrt{3}/2)(U^2 - V^2)$ (это проверяется непосредственно); аналогичное верно и для двух других слагаемых.

Так как “неисключительные” слагаемые – это попарные произведения непесекающихся наборов переменных, то получаем, что и вся исследуемая нами квадратичная форма J_{123}^4 – квадратичная форма ранга нуль, т.е. при приведении ее к каноническому виду (ортогональным преобразованием пространства $\mathbb{R}^N$) мы получаем “сумму квадратов”, причем в ней будет одинаковое число членов с положительными и отрицательными квадратами. Собственные числа квадратичной формы J_{ijk}^q будут, как следует из сказанного выше, по модулю равны $1/2$ (для большинства квадратов в канонической форме), $\sqrt{2}/2$ для одной пары слагаемых и $\sqrt{3}/2$ для трех пар слагаемых.

Нам остается найти ранг квадратичной формы J_{123}^4 . Так как эта форма есть прямая сумма квадратичных форм ранга два, то достаточно найти число этих прямых слагаемых. Количество попарных произведений равно $3n - 3$ (так как $p \neq 1, 2, 3$). Но, как было обнаружено выше, среди попарных произведений есть группы исключительных. Это шесть слагаемых, которые формально давали бы ранг двенадцать, но на самом деле каждое из них – ранга два и потому суммарный их ранг равен шести – это на шесть единиц меньше “ожидаемого” числа $2(3n - 3)$. Поэтому ранг нашей квадратичной формы равен $6n - 12 = 6(n - 2)$. Что касается канонического вида квадратичных форм, то из сказанного выше следует, что все собственные значения квадратичной формы J_{123}^4 равны $\pm 1/2$, $\pm \sqrt{2}/2$, $\pm \sqrt{3}/2$ и сам этот канонический вид именно тот, который указан в формулировке доказываемой сейчас теоремы 1. Тем самым все утверждения теоремы 1 в рассматриваемом случае I доказаны.

Рассмотрим случай II. Тут будет применен тот же метод доказательства, что и для случая I. Формально требуется рассмотреть все три возможности $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$, но ясно, что они совершенно эквивалентны. Поэтому мы предположим, что $q = 1$. Тогда рассматриваемая квадратичная форма

принимает вид

$$c_{12}^p c_{p3}^1 + c_{23}^p c_{p1}^1 + c_{31}^p c_{p2}^1.$$

В явном виде часть ее уже была выписана выше – во введении, где были приведены три уравнения Якоби при $n = 3$ (нужное нам здесь – первое из них):

$$(c_{12}^2 + c_{13}^3)c_{23}^1 - c_{23}^2 c_{12}^1 - c_{23}^3 c_{13}^1.$$

Положим $x_p = c_{12}^p$, $y_p = c_{23}^p$, $z_p = c_{13}^p$. Это дает $3n$ независимых переменных, входящих в рассматриваемую квадратичную форму. Будем выделять теперь в этой форме другие независимые переменные.

Положим и здесь $u_p = c_{p3}^1$. При $p = 1$ имеем $u_1 = z_1$, поэтому слагаемое $x_1 u_1$ в квадратичной форме, в которое входит u_1 , равно $x_1 z_1$. При $p = 2$ имеем $u_2 = y_1$ и потому вместо формального слагаемого $x_2 u_2$ получаем слагаемое $x_2 y_1$. При $p \geq 4$ все переменные u_p являются новыми, т.е. отличными от введенных выше.

Теперь положим $v_p = c_{p1}^1$. При $p = 2$ имеем $v_2 = -x_1$ и вместо формального слагаемого $y_2 v_2$ получаем слагаемое $-y_2 x_1$. При $p = 3$ имеем $v_3 = -z_3$ и вместо формального слагаемого $y_3 v_3$ получаем $-y_3 z_3$. При $p \geq 4$ переменные v_p являются новыми.

Наконец, положим $w_p = c_{p2}^1$. При $p = 1$ имеем $w_1 = x_1$ и слагаемое $-z_1 x_1$ вместо $z_1 w_1$. При $p = 3$ имеем $w_3 = -y_1$ и слагаемое $z_3 y_1$ вместо формального $z_3 w_3$. При $p \geq 4$ все переменные w_p – новые независимые переменные.

Рассмотрим теперь форму J_{123}^1 как сумму попарных произведений независимых переменных. Как и в случае I, в случае II тоже почти все слагаемые в квадратичной форме не имеют общих переменных. Выпишем в виде отдельной суммы четыре “исключительных” слагаемых (именно они давали одно из уравнений Якоби при $n = 3$, см. выше):

$$(x_2 + z_3)y_1 - y_2 x_1 - y_3 z_1.$$

Вычислим и здесь ранг рассматриваемой нами формы J_{123}^1 . Формально ранг равен $6n - 6$, как и в случае I. Вместо суммы шести попарных произведений, которые формально давали бы нам квадратичную форму ранга двенадцать, мы выше выписали форму, которая имеет ранг шесть, т.е. на шесть единиц меньше, чем “формальный ранг”. Поэтому, как и в случае I, получаем, что ранг нашей формы равен $6(n - 2)$. Так как из сказанного выше следует, что форма J_{123}^1 имеет индекс нуль, то доказательство теоремы 1 на этом завершается (канонический вид формы и здесь можно найти очевидным образом).

После проведенного довольно подробного исследования отдельных уравнений Якоби вернемся к тому объекту, который они описывают в своей совокупности – к пространству $\mathcal{L}_n$ n -мерных алгебр Ли.

Будучи образованным решениями системы уравнений, составленных из координатных уравнения Якоби, это пространство в силу теоремы 1 является пересечением цилиндрических квадратичных гиперповерхностей, причем они – одного из трех возможных видов (с точностью до ортогональных преобразований в $\mathbb{R}^N$), а аффинно все они эквивалентны. Эту гиперповерхность мы можем описать очень подробно.

Рассмотрим уравнение $Q_{2k,0} = 0$, где $Q_{2k,0}$ – квадратичная форма ранга $2k$ и индекса нуль. В подходящей системе координат (прямоугольных, но не обязательно декартовых) эта квадратичная форма записывается в виде

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_k^2.$$

В $2k$ -мерном пространстве эта форма, приравненная к нулю, задает конус C_k , а гиперповерхность в $\mathbb{R}^N$, задаваемая уравнением $Q_{2k,0} = 0$, – ортогональное прямое произведение этого конуса и евклидова (точнее, аффинного) пространства размерности $N - 2k$, т.е. эта гиперповерхность есть цилиндр, построенный над указанным конусом: $[Q_{2k,0} = 0] = C_k \times \mathbb{R}^{N-2k}$. Этот конус – это конус над прямым произведением двух сфер $S^{k-1} \times S^{k-1}$. Покажем это. Рассмотрим сечение конуса

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \dots - Y_k^2 = 0$$

сферой единичного радиуса

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_k^2 = 1.$$

Получаем соотношения $\sum X_i^2 = 1/2$, $\sum Y_i^2 = 1/2$, задающие это сечение. Тем самым в сечении мы получаем прямое произведение двух $(k-1)$ -мерных сфер и именно над этим произведением и построен указанный выше конус. Отметим, что этот конус связан (в евклидовой топологии) при $k \geq 2$.

Таким образом, при $2k = 6(n-2)$ мы получаем описание тех гиперповерхностей, пересечением которых является пространство $\mathcal{L}_n$. Напомним также, что в силу предложения 2 это пространство не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^N$.

В результате получаем описание гиперповерхностей, задаваемых уравнением $J_{ijk}^q = 0$. Все они получаются из трех фиксированных гиперповерхностей ортогональными поворотами. Можно подробно описать и сами эти повороты. Они составлены из поворотов в двух-, трех- и четырехмерных взаимно ортогональных подпространствах. Повороты в двумерных подпространствах – это повороты на $\pi/4$ в некоторых двумерных координатных плоскостях пространства $\mathbb{R}^N$. Они соответствуют приведению квадратичной формы вида XY к каноническому виду $(1/2)(U^2 - V^2)$. Таких поворотов как составляющих результирующий поворот для исходной гиперповерхности – подавляющее большинство. Поворотов в трехмерном координатном подпространстве может быть не более одного – он соответствует приведению к каноническому виду $(\sqrt{2}/2)(U^2 - V^2)$ квадратичной формы $X(Y+Z)$ (см. случай II в доказательстве теоремы 1). Поворотов в четырехмерных координатных подпространствах – не более трех (см. случай I в доказательстве теоремы 1). Каждый из них соответствует приведению к каноническому виду квадратичной формы $X(Y+Z+U)$. Можно, конечно, выписать матрицы указанных поворотов в трехмерных и четырехмерных подпространствах, но нам это не понадобится.

В дальнейшем будем рассматривать не только пространство $\mathcal{L}_n$, но и его проективизацию (см. § 2). В этом случае тоже имеем представление пространства $\mathcal{L}_n^*$ в виде пересечения квадратичных гиперповерхностей (причем тоже

только одного аффинного типа), которые тоже являются конусами, но не над произведением двух сфер, а над его факторпространством по инволюции σ , которую легко описать. Рассмотрим на каждой из двух сфер-сомножителей антипоидальную инволюцию. Тогда σ – это диагональная инволюция. Соответствующее ей факторпространство $S^{k-1} \times S^{k-1} / \sigma$ есть ориентируемое многообразие, двулистно накрывающее прямое произведение двух проективных пространств $\mathbb{R}P^{k-1} \times \mathbb{R}P^{k-1}$ (указанное накрытие есть ориентированное накрытие над $\mathbb{R}P^{k-1} \times \mathbb{R}P^{k-1}$).

§ 2. Замкнутые орбиты

Как было отмечено во введении, имеется естественное действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$. В этом параграфе мы будем изучать некоторые орбиты этого действия. Напомним, что эти орбиты состоят из множеств попарно изоморфных алгебр Ли. Изучать все возможные орбиты в данном случае бессмысленно, так как их очень много (как и алгебр Ли). Поэтому полезно выделить какие-либо орбиты, обладающие специальными свойствами. Рассматривая линейные действия алгебраических групп (а именно таким и является указанное выше действие), часто особое внимание уделяют замкнутым орбитам. Однако, в нашем случае это не дает интересных результатов, что связано с тем, что здесь имеется единственная замкнутая орбита – точка нуль (соответствующая абелевой алгебре Ли). Все остальные орбиты, как хорошо известно, незамкнуты. Все они, будучи конусами, содержат в своем замыкании указанную точку. Для того, чтобы все же получить некоторую нетривиальную информацию о GL_n -орбитах, связанную с их замыканием, в данном случае полезно перейти к проективизации пространства $\mathcal{L}_n$. Для этого прежде всего заметим, что это пространство является конусом в $\mathbb{R}^N$, так как условия Якоби, его задающие, однородны.

Обозначим через $\mathcal{L}_n^*$ проективизацию подпространства $\mathcal{L}_n$ – это множество прямых, проходящих через точки подпространства $\mathcal{L}_n$. Оно будет алгебраическим подмножеством в проективном пространстве $\mathbb{R}P^{N-1}$ – проективизации пространства $\mathbb{R}^N$. Отметим, что переход к этой проективизации не вызывает потерь существенной информации о пространстве алгебр Ли в целом и об отдельных алгебрах Ли (теперь мы будем рассматривать структурные константы с точностью до пропорциональности). При этом орбиты действия группы GL_n переходят (в виде своих проективизаций) в орбиты естественного действия группы PSL_n (проективной линейной группы, изоморфной фактору группы GL_n по ее центру, образованному скалярными матрицами) на $\mathcal{L}_n^*$.

Итак, мы будем рассматривать орбиты естественного действия простой группы PSL_n на $\mathcal{L}_n^*$. При проективизации пространства алгебр Ли $\mathcal{L}_n$ оказывается “потерянной” только одна алгебра Ли – абелева, все же остальные “сохраняются”, переходя в свои проективизации. Но при переходе к этой проективизации мы обнаружим полезные для нас объекты – нетривиальные замкнутые орбиты естественного действия группы PSL_n . Замкнутым в $\mathcal{L}_n^*$ орбитам соответствуют орбиты в $\mathcal{L}_n$, замыкание которых добавляет к ним только точку нуль (соответствующую абелевой алгебре Ли).

Орбиты группы PSL_n на $\mathcal{L}_n^*$ состоят из алгебр Ли, проективно изоморфных между собой. Проективный изоморфизм – это такое биективное линейное отображение $f: L \rightarrow L'$ одной алгебры Ли на другую, при котором $f([X, Y]) = C_f \cdot [f(X), f(Y)]$, где C_f – некоторая ненулевая константа, зависящая только от f . Ясно, что алгебры Ли проективно изоморфны только тогда, когда они изоморфны (если f – проективный изоморфизм, то $C_f \cdot f$ будет обычным изоморфизмом). Именно в силу этого переход к проективизации пространства не приводит к потере информации о пространстве алгебр Ли и о GL_n -орбитах в нем.

Стационарная подгруппа естественного действия группы PSL_n на $\mathcal{L}_n^*$ – это группа проективных автоморфизмов алгебры Ли, соответствующей рассматриваемой точке пространства.

Группа PSL_n алгебраична и действует алгебраически на проективном алгебраическом множестве $\mathcal{L}_n^*$. Известно, что любое такое действие всегда имеет замкнутые орбиты. Это связано с тем, что замыкание любой орбиты алгебраического действия состоит из орбит меньшей размерности. Поэтому орбиты минимальной размерности всегда замкнуты. Оказывается, что для действия PSL_n на $\mathcal{L}_n^*$ имеется при $n \geq 2$ только две замкнутые орбиты.

В [1] было доказано, что в $\mathcal{L}_n^*$ имеется ровно две замкнутые орбиты (на самом деле в [1] рассматривался более общий случай – косокоммутативные алгебры и соответствующие им орбиты, но нужный нам результат об алгебрах Ли извлекается из [1] очень просто). Одна из них – это орбита алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, а вторая – орбита алгебры Ли R_n (которая в подходящем базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ задается коммутационными соотношениями $[e_1, e_i] = e_i$, $i = 2, 3, \dots, n$; при $n = 2$ получаем алгебру Ли R_2 , уже фигурировавшую выше). Других замкнутых орбит в $\mathcal{L}_n^*$ нет. Фактически это утверждение было доказано и в [3]. Более точно, в [3] доказано, что любая алгебра Ли, отличная от R_n , содержит в замыкании своей орбиты алгебру Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2 (см. [1], [3]). *Естественное действие группы PSL_n на $\mathcal{L}_n^*$ имеет при $n \geq 3$ ровно две замкнутые орбиты – это орбиты алгебр Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и R_n (при $n = 2$ замкнутая орбита только одна – это орбита алгебры Ли R_2).*

Группы автоморфизмов для алгебр Ли, указанных в теореме 2, были явно описаны в [1]. Из этого описания выводится описание топологического строения орбит этих алгебр Ли в $\mathcal{L}_n^*$. Одна из них диффеоморфна $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-3) \times \mathrm{SO}(2)$. Размерность этой орбиты равна $3n-7$. Вторая – это $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) = S^{n-1} - (n-1)$ -мерная сфера. При $n \geq 3$ имеем $3n-7 \geq n-1$. Поэтому $n-1$ – это наименьшая из размерностей PSL_n -орбит на $\mathcal{L}_n^*$, а наименьшая размерность GL_n -орбит на $\mathcal{L}_n$ на единицу больше, т.е. равна n . Отсюда, в частности, вытекает, что размерность группы автоморфизмов неабелевой n -мерной алгебры Ли не меньше, чем $n^2 - n$.

Размерности групп автоморфизмов можно оценивать и снизу. Для полупростых алгебр Ли эта размерность равна размерности самой алгебры Ли. Может оказаться, что размерность группы автоморфизмов меньше размерности самой алгебры Ли. Так будет, например, для полупрямой суммы $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) +_{\varphi} n_3(\mathbb{R})$. Однако легко проверить, что для алгебр размерностей меньше или равных пяти всегда будет $\dim(\mathrm{Aut}(L)) \geq \dim(L)$.

В общем случае если $[L, L] \neq L$ то $\dim \operatorname{Aut}(L) \geq \dim L$ (см. [4], где, однако, рассматривались не группы автоморфизмов, а алгебры дифференцирований алгебр Ли) и потому размерности орбит тут не более чем $n^2 - n$. При $[L, L] = L$ может оказаться, что $\dim \operatorname{Aut}(L) < \dim L$.

В силу упомянутого выше результата из [3] имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В замыкании орбиты любой неабелевой алгебры Ли, отличной от R_n , есть алгебра Ли, изоморфная $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$.*

Отметим, что в [5] ошибочно утверждалось, что в замыкании орбиты любой алгебры Ли из $\mathcal{L}_n$ содержится $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ (в [1] было показано, что это все же верно при переходе к понятию стабилизации и стабильного изоморфизма алгебр Ли). Полезно отметить различие в статусе алгебр Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и R_n . Если $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ лежит в замыкании орбит всех, кроме одной, неабелевых алгебр Ли, то для R_n имеем более слабое утверждение: она лежит в замыканиях лишь некоторых орбит. Например, она не может лежать в замыканиях орбит нильпотентных алгебр Ли, так как она сама не является нильпотентной. С другой стороны, она действительно лежит в замыканиях некоторых орбит, например, орбиты алгебры Ли $R_{n,1} = \mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$, где линейное представление φ задается матрицей $\varphi(1) = J_{n-1}(1)$ – жордановой клеткой порядка $n-1$, отвечающей собственному значению, равному единице. Легко убедиться, что $J_{n-1}(1)$ сжимается в единичную матрицу (т.е. E лежит в замыкании класса матриц, подобных $J_{n-1}(1)$), что порождает сжатие построенной алгебры Ли $R_{n,1}$ в R_n .

Сделаем теперь несколько отдельных замечаний по поводу замыканий орбит и замкнутых орбит в пространствах алгебр Ли.

Прежде всего отметим, что если алгебра Ли нильпотентна, то в замыкании соответствующей ей орбиты содержатся только нильпотентные алгебры Ли (так как подмножество $\mathcal{N}_n$ алгебраически замкнуто в $\mathcal{L}_n$). Поэтому ни одна орбита в $\mathcal{N}_n$ в своем замыкании не содержит разрешимую алгебру Ли R_n .

Замыкание орбиты алгебры Ли $R_2 \oplus \mathbb{R}^k$ при $k \geq 1$ должно содержать некоторую замкнутую орбиту (орбиту минимальной размерности) – фактически она содержит указанную выше замкнутую орбиту алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ (при $k = 1$ это хорошо известно) и, более того, это замыкание в $\mathcal{L}_n^*$ совпадает с объединением орбит алгебр Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и $R_2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$.

Из доказательства предложения 2 видно, что объединение орбит алгебр Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и $R_2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ не лежит ни в какой гиперплоскости (так как именно эти алгебры Ли использовались для получения противоречия при предположении о том, что $\mathcal{L}_n$ лежит в некоторой гиперплоскости). Из сказанного выше следует, что и одна только орбита алгебры Ли $R_2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ тоже не лежит ни в какой гиперплоскости.

Отметим теперь некоторые факты о произвольных замкнутых инвариантных подмножествах в $\mathcal{L}_n$. В [6] доказано, что среди замкнутых алгебраических подмножеств в $\mathcal{L}_n$ инвариантными относительно GL_n и гладкими являются только точка нуль и замыкание орбиты алгебры Ли R_n (в размерности три к ним еще добавляется замыкание орбиты алгебры Ли sl_2). Ясно, что инвариантные подмногообразия являются конусами и потому такое замкнутое подмногообразие неособо только тогда, когда оно является GL_n -инвариантным подпространством. Именно это условие и проверялось в [6]. Замыкание орбиты

алгебры R_n в $\mathcal{L}_n$ – линейное подпространство, а замыкание орбиты $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ в $\mathcal{L}_n$ – конус (хотя в $\mathcal{L}_n^*$ орбита этой алгебры Ли – гладкое замкнутое подмногообразие).

Сделаем еще одно замечание о замыкании орбит. Пусть P – параболическая подгруппа в GL_n . Тогда (см., например, [7]) замыкание орбиты любой алгебры Ли L относительно действия подгруппы P пересекает все орбиты в замыкании орбиты L относительно G . Параболическость в доказательстве нужна для того, чтобы однородное пространство G/P было компактно. В качестве подгруппы P можно в этом случае взять максимальную треугольную подгруппу Ли $T_n(\mathbb{R})$, которая сохраняет некоторый полный флаг в алгебре Ли L .

§ 3. О неприводимых компонентах пространства $\mathcal{L}_n$

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_n$.

Рассуждая так же, как в [8] (где на основании неравенства Безу для степеней алгебраических подмножеств, не обязательно неприводимых, оценивалось число неприводимых компонент пространства ассоциативных алгебр), легко доказать, что число этих компонент – не более степени алгебраического множества $\mathcal{L}_n$, а эта степень в силу неравенства Безу не превосходит $2^{n^4/6}$ (асимптотически, так как мы использовали асимптотику для числа уравнений Якоби). То же самое было сделано в [9].

Известно, что число компонент растет экспоненциально (см. [9], [10]). В [10] доказано, что снизу оно оценивается числом $e^{kn/\ln(n)}$, где $k = (\ln 2)^2/4 \approx 1/44$.

Очевидно, что уравнений Якоби очень много, намного больше числа переменных (см. выше). Поэтому неудивительно, что $\mathcal{L}_n$ устроено очень сложно – в нем много неприводимых компонент, причем многие из них имеют одну и ту же размерность. Добавление уравнений Якоби показывает, что обычно при этом размерность пересечения, соответствующего получающейся системе алгебраических уравнений, не меняется, а меняются только размерности компонент не максимальной размерности и их число.

Так как компонент очень много, то нет смысла изучать их все. Лучше выделить некоторые компоненты или классы компонент, которые обладают дополнительными свойствами. Например, можно рассматривать компоненты минимальной размерности (входящие в эти компоненты алгебры Ли в некотором смысле не очень гибкие), компоненты максимальной размерности и др.

Группа GL_n связна в топологии Зариского и потому все неприводимые компоненты инвариантны относительно ее действия на $\mathcal{L}_n$. Рассмотрим естественное действие группы GL_n на некоторой неприводимой компоненте ${}^\alpha\mathcal{L}_n$ пространства алгебр Ли $\mathcal{L}_n$. Точки этой неприводимой компоненты, для которых размерность стационарной подгруппы минимальна, образуют открытое по Зарискому и плотное в этой компоненте подмножество. Орбиты всех таких точек имеют одинаковую размерность, хотя могут быть и не изоморфными друг другу. Алгебры Ли, принадлежащие указанному открытому подмножеству, можно рассматривать как типичные для заданной компоненты. Для другой компоненты типичными в указанном смысле будут уже совсем другие алгебры Ли.

Поэтому единого, универсального понятия “типичная алгебра Ли заданной размерности” не существует (при $n \geq 3$).

Рассмотрим теперь пересечение всех неприводимых компонент ${}^\alpha \mathcal{L}_n$ пространства $\mathcal{L}_n$. Ниже будет показано, что $\bigcap {}^\alpha \mathcal{L}_n$ содержит орбиту $\mathcal{O}_{N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}}$ алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$. Алгебры Ли из этого пересечения неприводимых компонент мы будем называть *универсальными алгебрами Ли* и будем обозначать это пересечение через $\mathcal{UL}_n$. Универсальными они названы потому, что они – общие для всех неприводимых компонент и, в частности, они лежат в замыканиях орбит всех жестких алгебр Ли. Напомним, что алгебра Ли называется *жесткой*, если ее орбита открыта в $\mathcal{L}_n$ (что эквивалентно тому, что ее малые деформации тривиальны; именно это свойство и привело к наименованию этих алгебр жесткими). Например, жесткими являются все полупростые алгебры Ли, имеются и разрешимые жесткие алгебры Ли. Достаточным условием жесткости алгебры Ли L является, как известно, условие $H^2(L, L) = 0$ (см., например, [10] и обзор [11]). Если L – жесткая алгебра Ли, то замыкание соответствующей ей орбиты в пространстве $\mathcal{L}_n$ является неприводимой компонентой этого пространства (именно на этом основаны многие оценки снизу числа неприводимых компонент в $\mathcal{L}_n$).

Универсальные алгебры Ли как лежащие в пересечении неприводимых компонент суть сжатия алгебр Ли, принадлежащих любой из неприводимых компонент, а в силу сказанного выше о типичных алгебрах Ли получаем, что любая универсальная алгебра Ли есть сжатие типичной алгебры Ли из каждой неприводимой компоненты. Именно с этим связан наш интерес к изучению пересечения всех неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_n$.

Следующее утверждение – первый шаг на пути изучения пересечения $\mathcal{UL}_n$. Оказывается, что универсальными могут быть алгебры только очень специального типа – метабелевы. Подмножество в $\mathcal{L}_n$, состоящее из всех метабелевых (или, в другой терминологии, 2-нильпотентных, т.е. нильпотентных класса нильпотентности два) алгебр Ли, обозначим через $\mathcal{Met}_n$.

ТЕОРЕМА 3. *Все алгебры Ли из $\mathcal{UL}_n$ при $n \geq 3$ метабелевы (2-нильпотентны), т.е. $\mathcal{UL}_n \subset \mathcal{Met}_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим два специальных класса жестких алгебр Ли и изучим соответствующие им неприводимые компоненты в пространстве алгебр Ли $\mathcal{L}_n$.

Сначала рассмотрим компактные полупростые алгебры Ли. Все такие алгебры Ли являются жесткими, т.е. имеют открытые в $\mathcal{L}_n$ орбиты. Замыкание этих орбит описать нетрудно. Покажем, что существуют полупростые компактные алгебры Ли произвольной заданной размерности $n \geq 8$ (о других размерностях см. ниже).

При $n = 3m$ (т.е. для числа n , кратного трем) рассмотрим алгебру Ли $L = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{su}(2)$ – это прямая сумма m экземпляров трехмерной алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ (изоморфной $\mathfrak{so}(3)$). Для $n = 3m + 1$ при $n \geq 10$ положим $L = \mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cdots \oplus \mathfrak{su}(2)$ – это прямая сумма алгебры Ли $\mathfrak{so}(5)$ размерности десять и $m - 3$ экземпляров алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$. Наконец, при $n = 3m + 2$ при $n \geq 8$ положим $L = \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{su}(2)$ – это прямая сумма восьмимерной простой алгебры Ли $\mathfrak{su}(3)$ и $m - 2$ экземпляров алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$.

Итак, при всех $n \geq 8$ нами указаны n -мерные компактные полупростые алгебры Ли. Отметим, что такие алгебры Ли имеются, очевидно, и для размерностей три и шесть, а вот полупростых компактных алгебр Ли размерностей один, два, четыре, пять и семь, как следует из классификации компактных простых алгебр Ли, не существует. В дальнейшем будем предполагать, что $n \geq 8$, а случаи меньшей размерности могут быть рассмотрены более прямыми методами. Более того, известны описания всех неприводимых компонент пространств $\mathcal{L}_n$ при $n \leq 7$ (см. например [9], [10], а также § 3 настоящей работы).

Пусть L – некоторая компактная полупростая алгебра Ли. Для любого $X \in L$ собственные значения линейного оператора ad_X присоединенного представления являются чисто мнимыми. Поэтому и для любой алгебры Ли из замыкания орбиты алгебры Ли L собственные значения для всех операторов присоединенного представления тоже будут чисто мнимыми (некоторые из них, возможно, нулевые).

Рассмотрим теперь еще один класс алгебр Ли – вполне разрешимые алгебры Ли или треугольные, т.е. такие, для которых все собственные значения операторов ad_X вещественны. Такие алгебры Ли существуют для любой размерности n . Нужные нам алгебры Ли будут жесткими; мы их будем составлять из вполне определенных “строительных блоков”.

Сначала введем необходимые “строительные блоки” – это максимальные треугольные подалгебры T_q в алгебрах Ли $\mathfrak{sl}_q(\mathbb{R})$. При $q = 2$ алгебра Ли T_2 изоморфна введенной выше алгебре Ли R_2 . При $q = 3$ алгебра Ли T_3 пятимерна. Отметим, что все алгебры Ли T_n , как хорошо известно, жесткие (для них $H^2(L, L) = 0$).

Теперь из указанных блоков составим нужные нам алгебры Ли. А именно, если $n = 2m$, то положим $L = R_2 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_2$ – прямая сумма m экземпляров двумерной разрешимой алгебры Ли R_2 . Если $n = 2m + 1$, то положим $L = T_3 \oplus R_2 \oplus R_2 \cdots \oplus R_2$ – прямая сумма пятимерной алгебры T_3 , описанной выше, и $m - 2$ экземпляров алгебры Ли R_2 (здесь полагаем, что $m \geq 2$, а при $m = 1$ ситуация намного проще и мы на ней останавливаться не будем).

В силу условия $H^2(L, L) = 0$ все построенные алгебры Ли L являются жесткими (так как это условие выполнено для каждого прямого слагаемого). Поэтому их орбиты в $\mathcal{L}_n$ открыты и неприводимые компоненты, содержащие их, состоят из замыкания соответствующей открытой орбиты. Отметим также, что любая разрешимая жесткая алгебра Ли с абелевым нильрадикалом изоморфна, как можно доказать, одной из алгебр Ли вида $R_2 \oplus R_2 \cdots \oplus R_2$.

Так как построенные алгебры Ли треугольны, то и алгебры Ли, лежащие в замыканиях их орбит, тоже треугольны, т.е. собственные значения операторов присоединенного представления все вещественны.

Теперь рассмотрим пересечение двух неприводимых компонент – замыканий орбит полупростой компактной и треугольной алгебр Ли размерности n , описанных выше. Входящие в него алгебры Ли должны принадлежать обоим неприводимым компонентам. Но тогда собственные значения операторов присоединенного представления для алгебр Ли из этого пересечения должны быть как чисто мнимыми, так и вещественными. Поэтому они обязательно нулевые. Алгебра Ли, для которой все линейные операторы присоединенного

представления нулевые, обязательно нильпотентна (теорема Энгеля). Поэтому пересечение всех неприводимых компонент $\mathcal{UL}_n$, содержащееся в пересечении указанных двух компонент, состоит из нильпотентных алгебр Ли. Покажем теперь, что это – нильпотентные алгебры Ли класса 2 (или метабелевы – в другой терминологии).

Рассмотрим сначала алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ и R_2 . Для любого их элемента в разложении Жордана соответствующего оператора присоединенного представления входят клетки порядка меньше или равного двум. При переходе к замыканию орбиты алгебры Ли размеры жордановых клеток не увеличиваются (это свойство хорошо известно специалистам и неоднократно отмечалось в литературе (см., например, [9]). Поэтому для прямых сумм $\mathfrak{su}(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{su}(2)$ (и $R_2 \oplus \dots \oplus R_2$, хотя это нам не понадобится) в замыканиях их орбит линейные операторы присоединенного представления имеют жордановы клетки порядка один или два (так как это верно, очевидно, для $\mathfrak{su}(2)$). Нужно еще рассмотреть дополнительные строительные блоки – алгебры Ли $\mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{so}(5)$. Для компактных $\mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{so}(5)$ в силу полной приводимости операторов ad_X все клетки тоже порядка один или два, так как неприводимое представление одномерной компактной алгебры Ли одномерно или двумерно. Поэтому и для прямых сумм компактных простых алгебр Ли, введенных выше, в присоединенном представлении нет блоков порядка три и более и, следовательно, это должно быть верно и для замыканий орбит этих жестких алгебр Ли.

Итак, для любого $X \in L$ при $L \in \mathcal{UL}_n$ жорданово разложение нильпотентного линейного оператора ad_X содержит клетки только порядков один и два. Но это означает, что $(\text{ad}_X)^2 = 0$, что эквивалентно 2-нильпотентности алгебры Ли L . Теорема 3 доказана.

Отметим, что для алгебр Ли над $\mathbb{C}$ приведенное доказательство не применимо, так как мы использовали противопоставление мнимых и вещественных собственных значений, а в комплексном случае оно теряет свою силу. Но само утверждение (по мнению автора) остается справедливым и в этом случае.

Пересечение неприводимых компонент пространства алгебр Ли нетривиально, так как содержит алгебру Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$. Покажем это.

Имеются только две замкнутые в проективизации пространства $\mathcal{L}_n$ орбиты группы GL_n и только одна из них – орбита метабелевой алгебры Ли (алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$). Покажем, что именно эта алгебра Ли лежит в указанном выше пересечении.

Хотя бы одна из двух указанных алгебр Ли обязательно лежит в замыкании любой орбиты группы GL_n , так как в любом замкнутом подмножестве всегда содержится некоторая замкнутая орбита. Можно было бы предположить, что некоторые из неприводимых компонент содержат из указанных выше двух алгебр Ли только алгебру Ли R_n . Пусть C – такая неприводимая компонента. Тогда она содержит R_n , но при этом не может содержать никаких алгебр Ли L , не изоморфных R_n (так как любая такая L имеет в силу предложения 3 сжатие в $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и потому $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ лежала бы в C , но мы предположили, что для выбранной компоненты C это невозможно). Поэтому все неабелевы алгебры Ли в C должны быть изоморфны R_n . Но это невозможно, так как R_n получается

сжатием из подходящей алгебры Ли $R_{n,1}$, построенной в § 2, и потому C содержится в неприводимой компоненте, содержащей эту алгебру Ли $R_{n,1}$. Однако одна неприводимая компонента не может содержаться в другой. Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании неприводимой компоненты C , не содержащей $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, неверно. Тем самым мы показали, что пересечение неприводимых компонент пространства алгебр Ли нетривиально.

Укажем далее еще одну алгебру Ли, которая лежит в этом пересечении. Вопрос о полном описании этого пересечения пока остается открытым.

Рассмотрим некоторые примеры. При $n = 1$ имеется только одна алгебра Ли и потому в $\mathcal{L}_1$ имеется только одна неприводимая компонента (одноточечная). При $n = 2$ имеются с точностью до изоморфизма две алгебры Ли, они дают единственную неприводимую компоненту $\mathcal{L}_2 = \mathbb{R}^2$. При $n \geq 2$ ситуация становится более нетривиальной.

Рассмотрим один специальный класс нильпотентных алгебр Ли – алгебры Ли вида $\mathbb{R} \oplus_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$ – полупрямые суммы, соответствующие гомоморфизмам (в данном случае – просто линейным отображениям) $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{n-1})$, где матрица $A = \varphi(1)$ нильпотентна и является прямой суммой жордановых нильпотентных клеток порядков k_i , соответствующих нулевым собственным значениям: $A = \oplus J_{k_i}(0)$. Такие алгебры Ли определяются наборами натуральных чисел $(k_1, k_2, \dots, k_r)$, где $\sum k_i = n - 1$; соответствующую такому набору алгебру Ли будем обозначать через $N(k_1, k_2, \dots, k_r)$. Например, $N(2)$ – это в точности алгебра Ли N_3 . Вместо поля $\mathbb{R}$ можно рассматривать поле $\mathbb{C}$ и другие поля и соответствующие алгебры Ли над ними.

При $n = 3$ в пространстве $\mathcal{L}_3$ имеется уже несколько неприводимых компонент, из которых две соответствуют двум простым (а потому жестким) алгебрам Ли $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. При $n = 3$ имеется только одна неабелева 2-нильпотентная алгебра Ли – это N_3 . Поэтому $\mathcal{UL}_3$ состоит из орбиты этой метабелевой алгебры Ли, дополненной точкой (орбитой, соответствующей абелевой алгебре Ли). Совершенно аналогичная ситуация и при $n = 4$: в этом случае тоже имеется только одна неабелева 2-нильпотентная алгебра Ли – это $N_3 \oplus \mathbb{R}$ и поэтому $\mathcal{UL}_4$ состоит из двух орбит – алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}$ и точки нуль. Однако при $n = 5$ ситуация начинает меняться. Здесь появляется вторая неабелева 2-нильпотентная алгебра Ли – это $N(2, 2)$. В силу теоремы 3 эта алгебра Ли может претендовать на то, что она принадлежит $\mathcal{UL}_5$. На самом деле с увеличением размерности n и пересечение $\mathcal{UL}_n$ будет расширяться. Можно, например, доказать, что при $n \geq 5$ в нем всегда будет находиться не только $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$, но и $N(2, 2) \oplus \mathbb{R}^{n-5}$, и т.д.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Алгебры Ли $N(2) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ и $N(2, 2) \oplus \mathbb{R}^{n-5}$ при $n \geq 5$ принадлежат $\mathcal{UL}_n$.*

У автора есть все основания полагать, что это утверждение верно, но он не готов сейчас привести его доказательство в общем виде.

Для алгебры $N(2) \oplus \mathbb{R}^{n-3}$ это утверждение было доказано выше, для аналогичных комплексных алгебр Ли $N(2) \oplus \mathbb{C}^{n-3}$ в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ доказательство аналогично. Ниже мы это утверждение (точнее, его комплексный аналог) докажем для $N(2, 2) \oplus \mathbb{R}^{n-5}$ в частном случае – случае (комплексных) алгебр Ли при

$n = 5, 6, 7$. Используемые при этом методы могут быть применены и при доказательстве сформулированного выше утверждения в общем случае.

ТЕОРЕМА 4. *Алгебры Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$ при $n = 5, 6, 7$ принадлежат пространству $\mathcal{UL}_n(\mathbb{C})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. План приводимого ниже доказательства таков. Мы докажем, что в любой неприводимой компоненте пространства $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, $n = 5, 6, 7$, существует такая алгебра Ли, которая сжимается в $N(2, 2)$. Для этого сначала покажем, что можно ограничиться рассмотрением алгебр Ли весьма специального вида $\mathbf{K} +_{\varphi} \mathbf{K}^{n-1}$ (т.е. имеющими абелев идеал коразмерности один), здесь $\mathbf{K}$ – это поле $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ (сначала предпочтительнее будет все же полагать, что $\mathbf{K} = \mathbb{R}$). Затем мы изучим некоторые сжатия для этих специальных алгебр Ли. В результате окажется, что в каждой компоненте есть алгебра Ли, сжимаемая в $N(2, 2)$. Некоторые из используемых здесь рассуждений имеют общий характер и могут быть использованы для доказательства более общих результатов – например, сформулированного выше утверждения.

Начнем с перехода к алгебрам Ли вида $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$. При этом будет использовано понятие IW-сжатия (сжатия Инёно–Вигнера, см., например, [11]).

Пусть L – некоторая алгебра Ли из $\mathcal{L}_n$ (пока при произвольном n и над произвольным полем $\mathbf{K}$). Выберем произвольный ненулевой элемент $X \in L$ и через $\langle X \rangle$ обозначим прямую, натянутую на него. Далее, пусть W – некоторое дополнительное к $\langle X \rangle$ подпространство в L : $L = \langle X \rangle + W$, $\langle X \rangle \cap W = \{0\}$. Рассмотрим линейный оператор ad_X , где $\text{ad}: L \rightarrow \text{End}(L)$ – присоединенное представление. Так как прямая $\langle X \rangle$, очевидно, инвариантна относительно ad_X , то этот линейный оператор индуцирует линейный оператор на факторпространстве $L/\langle X \rangle$, изоморфном W и $\mathbf{K}^{n-1}$ как векторное пространство. Рассмотрим алгебру Ли $L' = \mathbf{K} +_{\varphi} \mathbf{K}^{n-1}$, где $\varphi: \mathbf{K} \rightarrow \text{End}(\mathbf{K}^{n-1})$ – линейное отображение (гомоморфизм), который, очевидно, однозначно определяется элементом $\varphi(1)$, являющимся линейным оператором на $\mathbf{K}^{n-1}$. В качестве $\varphi(1)$ в нашей конструкции возьмем $\text{ad}_X|_{L/\langle X \rangle}$. Общая конструкция IW-сжатия, примененная в случае полей $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ к одномерной подалгебре $\langle X \rangle$ и дополнительному к ней подпространству W , дает сжатие алгебры Ли L в алгебру Ли L' , описанную выше. Так как эта конструкция совершенно общая, то мы видим, что всегда можно ограничиться рассмотрением только алгебр Ли вида $\mathbf{K} +_{\varphi} \mathbf{K}^{n-1}$.

На следующем шаге мы покажем, что линейный оператор $\varphi(1)$ (или соответствующую ему матрицу A в некотором базисе) можно считать полупростым (вполне приводимым). Это означает, что для любого A -инвариантного подпространства в $\mathbf{K}^{n-1}$ существует инвариантное дополнение. Над полем $\mathbb{C}$ это эквивалентно диагонализируемости матрицы A . Далее мы будем предполагать, что $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, но потом, переходя к непосредственному доказательству теоремы 4, будем полагать, что $\mathbf{K} = \mathbb{C}$.

Рассмотрим разложение матрицы A в сумму $A = A_s + A_n$ полупростой и нильпотентной компонент, коммутирующих между собой (его иногда называют разложением Жордана, а сами слагаемые – компонентами разложения Жордана). Такое разложение всегда существует. В [12] показано (как переформулировка хорошо известного результата из теории инвариантов), что существует сжатие алгебры Ли $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$ в такую алгебру Ли $\mathbb{R} +_{\psi} \mathbb{R}^{n-1}$, что

$\psi(1) = A_s$. Поэтому при изучении сжатий мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда матрица $A = \varphi(1)$ полупроста.

Итак, теперь мы рассматриваем алгебры Ли вида $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$ или $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$, для которых матрица $A = \varphi(1)$ полупроста. При этом не исключен случай, что матрица A окажется нулевой, когда в нашей конструкции мы исходим из некоторого элемента $X \in L$. Так будет, если исходный элемент $X \in L$, с которого начиналось построение этой конструкции, нильпотентен (т.е. линейный оператор ad_X нильпотентен). Для нас, как будет показано ниже, случай нулевой матрицы A нежелателен и поэтому мы сейчас попытаемся свести его к случаю ненулевой матрицы A . Для этого можно заменить X на какой-то другой элемент из L . Если окажется, что в L имеется некоторый ненильпотентный элемент, то мы именно его возьмем в качестве того исходного X , для которого выше были проведены все построения сжатий. Если же все элементы $X \in L$ нильпотентны, то в силу теоремы Энгеля это означает, что рассматриваемая алгебра Ли L нильпотентна. Если все алгебры Ли в рассматриваемой неприводимой компоненте нильпотентны, то заменить алгебру Ли L на ненильпотентную невозможно. В этом случае нужно применять особые рассуждения, которые для нашей цели – доказательства теоремы 4 – не нужны. Следует отметить, что вопрос о существовании нильпотентных компонент в общем случае пока открыт, но хорошо известно, что таких компонент нет для пространств алгебр Ли малой размерности, в частности, их нет в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ при $n = 5, 6, 7$. Однако можно доказывать утверждение и не решив вопрос о существовании нильпотентных компонент и используя некоторые дополнительные приемы, но на этом подробнее здесь останавливаться не будем.

Мы видим, что в рассматриваемом случае $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, $n = 5, 6, 7$, можно предполагать, что алгебра Ли L не является нильпотентной, а потому построенная алгебра Ли $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^{n-1}$ неабелева. Отметим, что в этом месте мы перешли от изучения случая вещественных алгебр Ли к случаю комплексных алгебр Ли, что более естественно при доказательстве теоремы 4.

Для дальнейшего важно знать, сколько ненулевых собственных значений имеет полупростая матрица $A = \varphi(1)$. На следующем шаге доказательства теоремы 4 мы покажем, что это число всегда больше или равно двум. При этом мы будем основываться на еще одном общем результате для произвольных алгебр Ли, не ограничиваясь и здесь рассмотрением только комплексных алгебр Ли малой размерности (что было бы нам нужно для доказательства теоремы 4).

Элемент $X \in L$ алгебры Ли L называется, как известно, *регулярным*, если нильпотентная компонента для ad_X имеет наименьшую возможную для данной алгебры Ли размерность. Эта наименьшая размерность называется *рангом алгебры Ли* и обозначается через $\text{rg}(L)$. Напомним, что для произвольного линейного оператора на L (или на любом другом конечномерном векторном пространстве) имеется разложение пространства L в прямую сумму $L = L_{(0)} \oplus L_{(1)}$ двух инвариантных подпространств, ограничение на одно из которых (на $L_{(0)}$) нильпотентно, а на другое (на $L_{(1)}$) – невырождено. Фактически $L_{(0)}$ есть сумма всех корневых подпространств, соответствующих нулевому собственному значению, а $L_{(1)}$ – сумма всех корневых подпространств, соот-

ветствующих ненулевым собственным значениям рассматриваемого линейного оператора. Множество регулярных элементов в алгебре Ли всегда открыто в топологии Зариского, а нуль-компонента для регулярного элемента является подалгеброй Картана (нильпотентной подалгеброй, совпадающей со своим нормализатором). Напомним также, что подалгебра Картана является в алгебре Ли максимальной nilьпотентной подалгеброй (подробнее см., например, [13]).

Ранг алгебры Ли не превосходит, очевидно, ее размерность. Ранг алгебры Ли равен ее размерности только тогда, когда эта алгебра Ли nilьпотентна. С другой стороны, ранг всегда положителен, так как ad_X тривиально действует на X и на порожденную этим элементом прямую.

ЛЕММА 1. *Для n -мерной алгебры Ли L (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) ранг равен $n-1$ только тогда, когда эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли вида $R_2 \oplus N$ – прямой сумме двумерной разрешимой алгебры Ли R_2 и некоторой nilьпотентной алгебры Ли N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим здесь вещественные алгебры Ли. Случай комплексных алгебр Ли рассматривается совершенно так же.

Прежде всего отметим, что ранг алгебры Ли R_2 равен единице (картановскими здесь будут любые одномерные подалгебры Ли, отличные от одномерного коммутанта $[R_2, R_2]$). Поэтому и для любой nilьпотентной алгебры Ли N прямая сумма $R_2 \oplus N$ тоже имеет ранг, который на единицу меньше ее размерности. Тем самым в одну сторону утверждение леммы 1 доказано. Переходим к доказательству обратного утверждения. Предположим, что L – такая алгебра Ли, ранг которой на единицу меньше ее размерности.

По условию в алгебре Ли L подалгебры Картана имеют коразмерность единицу. В [14] дано описание всевозможных подалгебр Ли H коразмерности один – оказывается, что здесь возможен только один из следующих трех случаев:

- 1) H – идеал в L ;
- 2) H содержит такой идеал L' алгебры Ли L , что $L/L' = \mathfrak{sl}_2$, а фактор-алгебра H/L' изоморфна алгебре Ли R_2 (фактически – максимальной треугольной подалгебре в $\mathfrak{sl}_2$);
- 3) H содержит такой идеал L' алгебры Ли L , что алгебра Ли L/L' изоморфна R_2 , а H/L' – одномерная подалгебра в R_2 , не являющаяся идеалом (или, что эквивалентно в данном случае, отличная от $[R_2, R_2]$).

Применим этот общий результат в нашей ситуации, когда H – это картановская подалгебра коразмерности один. Случай 1) тут невозможен, так как картановская подалгебра должна совпадать со своим нормализатором. Случай 2) тоже невозможен, так как картановская подалгебра nilьпотентна и поэтому ее фактор-алгебра не может быть изоморфна алгебре Ли R_2 (разрешимой, но не nilьпотентной). Поэтому здесь имеет место случай 3). Покажем, что в нашем случае L будет обязательно разрешима.

В силу того, что $L/L' = R_2$ (в частности, эта фактор-алгебра разрешима), полупростая часть алгебры Ли L должна содержаться в L' . При этом ее пересечение с картановской подалгеброй – это nilьпотентная подалгебра коразмерности один в этой полупростой части. Но, как легко понять, в полупростых алгебрах Ли нет nilьпотентных подалгебр коразмерности один (это

эквивалентно утверждению, что ранг полупростых алгебр Ли не может быть на единицу меньше их размерности), что следует из классификации полупростых алгебр Ли или может быть выведено из их общей теории. Итак, полупростая часть должна быть тривиальной и алгебра Ли L должна быть разрешимой.

Покажем, что L есть прямая сумма $R_2 \oplus L'$ алгебры Ли R_2 и алгебры Ли, изоморфной L' . Предположим, что это не так, тогда действие на L' элементов из $R_2 = L/L'$, лежащих вне коммутанта (точнее, их представителей в L), нетривиально и потому H не может быть нильпотентной, так как ее присоединенное действие на содержащуюся в ней L' не будет нильпотентным. Это противоречит тому, что L – картановская подалгебра. Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4. Из леммы 1 следует, что полупростая матрица A имеет не менее двух ненулевых собственных значений, за исключением случая, когда L имеет вид $R_2 \oplus N$. Этого исключения при рассмотрении произвольных неприводимых компонент можно избежать, если заметить, что ни в какой неприводимой компоненте не могут все алгебры Ли иметь вид $R_2 \oplus N$. Но это требует громоздких рассуждений, поэтому здесь мы снова вернемся к рассмотрению случая комплексных алгебр Ли размерностей $n \leq 7$. В этом случае, как следует из описания всех неприводимых компонент пространства $L_n(\mathbb{C})$, в любой неприводимой компоненте есть алгебры Ли, не разлагающиеся в прямую сумму вида $R_2 \oplus N$. Именно поэтому можно полагать в дальнейшем, что матрица A имеет не менее двух ненулевых собственных значений (среди которых могут быть комплексные и могут быть кратные).

Следующий шаг в доказательстве теоремы 4 – это доказательство леммы 2, которая дает нам несколько полезных сжатий. Применяя далее эти сжатия и их аналоги к подходящим алгебрам Ли из неприводимых компонент пространства $L_n(\mathbb{C})$, $n = 5, 6, 7$, мы сможем завершить доказательство теоремы 4.

ЛЕММА 2. *Существуют следующие сжатия:*

1. $N_3 \oplus N_3 \implies N(2, 2) \oplus \mathbb{R}$;
2. $R_2 \oplus R_2 \oplus \mathbb{R} \implies N(2, 2)$;
3. $N_3 \oplus R_2 \implies N(2, 2)$;
4. $(\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^2) \oplus \mathbb{R}^2 \implies N(2, 2)$, где матрица $\varphi(1)$ невырождена и полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть два экземпляра алгебры Ли N_3 задаются следующими образующими и соотношениями:

$$X_1, Y_1, Z_1; \quad [X_1, Y_1] = Z_1; \quad X_2, Y_2, Z_2; \quad [X_2, Y_2] = Z_2.$$

Положим

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1 + (1-t)X_2, & Y_1(t) &= Y_1, & Z_1(t) &= Z_1, \\ X_2(t) &= tX_2, & Y_2(t) &= Y_2, & Z_2(t) &= Z_2. \end{aligned}$$

Имеем $[X_1(t), Y_1(t)] = Z_1(t)$, $[X_1(t), Y_2(t)] = [(1-t)X_2, Y_2] = (1-t)Z_2$. Далее, имеем $[X_2(t), Y_1(t)] = tZ_1 \rightarrow 0$, $[X_2(t), Y_2(t)] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому в пределе при $t \rightarrow \infty$ получаем алгебру Ли $N(2, 2) \oplus \mathbb{R}$.

2. Пусть первое прямое слагаемое в $R_2 \oplus R_2$ задается в подходящем базисе X_1, Y_1 коммутационным соотношением $[X_1, Y_1] = Y_1$, а второе прямое слагаемое R_2 – соотношением $[X_2, Y_2] = Y_2$ в базисе X_2, Y_2 . Пусть Z – базисный вектор третьего прямого слагаемого. Положим

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{1}{t} X_1, & X_2(t) &= \frac{1}{t} X_2, & Y_1(t) &= Y_1, \\ Y_2(t) &= Y_2, & Z(t) &= t(Z + Y_1 + Y_2). \end{aligned}$$

Для получения нужного сжатия мы перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим коммутационные соотношения при конечных значениях параметра t (мы, как обычно, рассматриваем только нетривиальные соотношения):

$$\begin{aligned} [X_1(t), Y_1(t)] &= \frac{1}{t} Y_1, & [X_2(t), Y_2(t)] &= \frac{1}{t} Y_2, \\ [X_1(t), Z(t)] &= Y_1(t), & [X_2(t), Z(t)] &= Y_2(t). \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ в пределе получим коммутационные соотношения в точности те же, что для алгебры Ли $N(2, 2)$.

4. Так как матрица A полупроста, то можно считать, что она диагональная (в случае поля $\mathbb{C}$), т.е. $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, причем по условию $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2$. На самом деле тут условие полупростоты несущественно и можно строить нужное сжатие для произвольной невырожденной (что существенно) матрицы A .

Далее, для алгебры $\mathbb{R} +_{\varphi} \mathbb{R}^2$ матрица A задает действие образующей X на координаты в $\mathbb{R}^2$ относительно некоторого базиса Y_1, Y_2 . Далее, базис в прямом слагаемом $\mathbb{R}^2$ рассматриваемой нами алгебры Ли обозначим через Z_1, Z_2 .

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

– матрица ограничения ad_X на $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{t} X, & Y_1(t) &= Y_1, & Y_2(t) &= Y_2, \\ Z_1(t) &= t(Z + Y_1), & Z_2(t) &= t(Z + Y_2). \end{aligned}$$

Имеем $[X(t), Y_1(t)] = (1/t)[X, Y_1] \rightarrow 0$, $[X(t), Y_2(t)] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Далее, имеем $[X(t), Z_1(t)] = \text{ad}_X(Y_1) = AY_1$, $[X(t), Z_2(t)] = \text{ad}_X(Y_2) = AY_2$. В пределе получаем алгебру Ли L' вида $\mathbb{R} +_{\psi} \mathbb{R}^4$, где матрица $B = \psi(1) \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ – блочная, она составлена из четырех нильпотентных блоков порядка два (в каждом из них только один ненулевой элемент – это числа a, b, c, d , являющиеся элементами матрицы A). Нетрудно убедиться в том, что если матрица A невырождена (как мы и предполагали выше), то матрица B нильпотентна и подобна прямой сумме $J_2(0) \oplus J_2(0)$ двух клеток Жордана, соответствующих собственному значению нуль. Но это и означает, что рассматриваемая алгебра Ли L' изоморфна $N(2, 2)$, т.е. мы получили искомое сжатие.

3. Это сжатие строится по той же схеме, что и предыдущие. Лемма 2 доказана.

Теперь переходим непосредственно к доказательству теоремы 4. Начнем с подробного рассмотрения случая $n = 5$. Для этого нам потребуется рассмотреть все семь неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_5(\mathbb{C})$. Дадим сначала описание этих компонент, следуя [15].

Через $R_5(N)$ обозначим множество всех разрешимых пятимерных алгебр Ли, нильрадикал которых изоморфен заданной нильпотентной алгебре Ли N . Тогда следующие семь множеств исчерпывают список неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_5(\mathbb{C})$ – это замыкания (в обычной евклидовой топологии) подмножеств $R_5(\mathbb{C}^3)$, $R_5(\mathbb{C}^4)$, $R_5(N_3)$, $R_5(N_3 \oplus \mathbb{C})$, $R_5(N_4)$ (где N_4 – четырехмерная нильпотентная алгебра Ли, которая в базисе X_1, X_2, X_3, X_4 задается соотношениями $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$), а также замыкания орбит двух жестких алгебр Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R_2$ и $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) +_{\varphi} \mathbb{C}^2$ (где φ – естественное двумерное представление). Отметим, что в $R_5(N_3)$ имеется открытая орбита – это орбита алгебры Ли $T + N_3$ (полупрямой суммы N_3 и двумерной абелевой подалгебры T ее дифференцирований, составленной из полупростых элементов). Поэтому компоненту, соответствующую $R_5(N_3)$, можно рассматривать и как замыкание орбиты этой жесткой разрешимой алгебры Ли $T + N_3$.

Исследуем теперь все эти семь компонент и докажем, что в каждой из них существует алгебра Ли, сжимаемая в $N(2, 2)$.

Сначала рассмотрим разрешимые алгебры Ли вида $R_5(N)$.

Если $n = \mathbb{C}^k$, $k = 3, 4$, то нетрудно найти алгебру Ли из $R_5(N)$, в которой некоторый полупростой элемент X имеет ровно два ненулевых собственных значения (см. также лемму 1). Например, для $R_5(\mathbb{C}^4)$ можно взять $L = \mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^4$, где $\varphi(1) = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ – диагональная матрица. Эта алгебра Ли принадлежит $L_5(\mathbb{C}^4)$, она изоморфна прямой сумме трехмерной алгебры Ли вида $\mathbb{C} +_{\psi} \mathbb{C}^2$ (где $\psi(1) = \text{diag}(1, 1)$) и $\mathbb{C}^2$. В силу леммы 2 такая алгебра Ли имеет сжатие в $N(2, 2)$. Для $R_5(\mathbb{C}^3)$ возьмем принадлежащую этому множеству алгебру Ли $L = R_2 \oplus R_2 \oplus \mathbb{C}$ – она тоже в силу леммы 2 имеет сжатие в $N(2, 2)$.

Для $N = N_3$ рассмотрим алгебру Ли $T + N_3$, орбита которой плотна в $R_5(N)$. Алгебра Ли $T + N_3$ в подходящем базисе задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= Z, & [T_1, X] &= X, [T_1, Y] = 0, \\ [T_2, Y] &= 0, [T_2, Z] = Y, & [T_1, Z] &= [T_2, Z] = Z. \end{aligned}$$

Здесь, отступая от нашего обычного правила, мы указали и некоторые тривиальные (нулевые) коммутационные соотношения. Это сделано для большей наглядности описания алгебры Ли $T + N_3$.

Положим $X(t) = (1/t)X$, $Y(t) = (1/t)Y$, $Z(t) = Z$, $T_1(t) = T_1$, $T_2(t) = T_2$.

При $t \rightarrow \infty$ в пределе получим алгебру Ли вида $\mathbb{C}^2 +_{\varphi} \mathbb{C}^3$, причем легко понять, что она изоморфна $R_2 \oplus R_2 \oplus \mathbb{C}$ (два экземпляра алгебры Ли порождены парами элементов $T_1(\infty), X(\infty)$ и $T_2(\infty), Y(\infty)$ соответственно). Поэтому мы получаем сжатие алгебры Ли $T + N_3$ в $R_2 \oplus R_2 \oplus \mathbb{C}$, которая в силу леммы 2 сама имеет сжатие в $N(2, 2)$. Следовательно, алгебра Ли, принадлежащая $R_5(n_3)$, сжимается в $N(2, 2)$.

Для $N = N_3 \oplus \mathbb{C}$ возьмем в качестве L прямую сумму $N_2 \oplus R_2$. Эта алгебра Ли принадлежит $R_5(N)$ для указанной алгебры Ли N . В силу леммы 2 алгебра Ли L имеет сжатие в $N(2, 2)$.

Для неприводимой компоненты, получающейся замыканием множества $R_5(N_4)$, применим следующий прием. Сначала возьмем в ней алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} N_4$, где $\varphi(1)$ действует на базисные элементы алгебры Ли N_4 следующим образом (здесь λ – произвольный ненулевой параметр):

$$X_1 \rightarrow \lambda X_1, \quad X_2 \rightarrow \lambda X_2, \quad X_3 \rightarrow \lambda^2 X_3, \quad X_4 \rightarrow \lambda^3 X_4.$$

Ясно, что при $\lambda \neq 0$ это соответствие порождает автоморфизм A алгебры Ли N_4 . Матрица этого автоморфизма диагональная. Прибавим к A нильпотентную матрицу J – прямую сумму жордановых клеток $J_1(0) \oplus J_3(0)$, соответствующих нулевому собственному значению. Взяв $\lambda \neq \pm 1$, мы получим, что соответствующая матрица A имеет три различных собственных значения (одно из них – кратности два). Матрица $A + J$, как легко понять, подобна A , но при $\lambda \rightarrow 0$ в пределе получаем матрицу J . Поэтому рассматриваемая алгебра Ли L имеет сжатие в алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\psi} \mathbb{C}^4$ (в $\mathbb{C}^4$ сжимается подалгебра N_4), где $\psi(1) = J_1(0) \oplus J_3(0)$. Но известно (см., например, [7]), что такая матрица сжимается в $J_2(0) \oplus J_2(0)$ (т.е. замыкание класса матриц, сопряженных матрице $J_1(0) \oplus J_3(0)$, содержит матрицу $J_2(0) \oplus J_2(0)$). Таким образом, мы получаем алгебру Ли $N(2, 2)$ как результат последовательности двух сжатий исходной алгебры Ли $L \in L_5(N_4)$.

Для замыкания орбиты алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus R_2$ мы сначала рассмотрим IW-сжатие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^2$ (о таких сжатиях уже говорилось выше; здесь мы будем исходить из одномерной подалгебры, натянутой на полупростой элемент, т.е. из расщепимой картановской подалгебры). Прямое слагаемое R_2 имеет сжатие в $\mathbb{C}^2$ (напомним, что любая алгебра Ли имеет сжатие в абелеву алгебру Ли). Поэтому для нашей L имеется сжатие в алгебру Ли вида $(\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$. В силу леммы 2 такая алгебра Ли сжимается в $N(2, 2)$.

Рассмотрим теперь алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2 + \mathbb{C}^2$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ имеет, как известно, разложение $\mathfrak{sl}_2 = N_- + H + N_+$ в сумму трех одномерных подалгебр – одна из них (H) картановская, а две остальные порождены нильпотентными элементами. Рассмотрим IW-сжатие, построенное по образующей подалгебры N_+ . Ее действие на факторпространстве L/H описывается матрицей, являющейся прямой суммой двух нильпотентных жордановых клеток порядка два (одна из этих клеток соответствует действию N_+ на $\mathfrak{sl}_2$, а вторая – на $\mathbb{C}^2$). Получаем сжатие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 + \mathbb{C}^2$ в алгебру Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^4$, где $\varphi(1) = J_2(0) \oplus J_2(0)$. Но эта алгебра Ли – это в точности алгебра Ли $N(2, 2)$. Поэтому получаем сжатие $\mathfrak{sl}_2 + \mathbb{C}^2 \implies N(2, 2)$.

Итак, для каждой из семи неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_5(\mathbb{C})$ найдены алгебры Ли, лежащие в этих компонентах и имеющие сжатия в алгебру Ли $N(2, 2)$. Но это и означает, что алгебра Ли $N(2, 2)$ принадлежит пересечению неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_5(\mathbb{C})$, т.е. $N(2, 2) \in \mathcal{UL}_5(\mathbb{C})$.

Для $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ при $n = 6, 7$ применяются те же методы, что и для $n = 5$. Но при этом в большей мере, чем при $n = 5$, используются те общие результаты, которые были получены в начале доказательства теоремы 4. Дело в том, что неприводимых компонент в $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ при $n = 6, 7$ уже довольно много – семнадцать и пятьдесят одна соответственно (см. [9], [15]). Поэтому прямой перебор

всех возможных случаев здесь был бы довольно утомителен. Однако с помощью указанных выше общих результатов рассмотрение сразу сводится к изучению в этих компонентах алгебр Ли вида $\mathbb{C} +_{\varphi} \mathbb{C}^k$, $k = 5, 6$, причем $\varphi(1)$ – полупростой линейный оператор, имеющий не менее двух ненулевых собственных значений. Далее, применяя лемму 2 при разборе отдельных случаев, приходим к построению сжатий в $N(2, 2) \oplus \mathbb{C}^{n-5}$ для любой из неприводимых компонент. Нужно отметить, что классификация всех неприводимых компонент в нашем доказательстве играет не основную, а вспомогательную роль. Доказательство проводится не прямым перебором всех компонент и учетом их строения, а учетом некоторой информации об этих компонентах. Например, важным является тот факт, что в пространствах $\mathcal{L}_n$ при $n \leq 7$ нет нильпотентных компонент (хотя наличие таких компонент не является непреодолимым препятствием в доказательстве, так как для нильпотентных алгебр Ли можно строить сжатия многими разными способами, см., например, [12]).

В качестве дополнения к сформулированному выше утверждению можно выдвинуть следующую гипотезу: с ростом числа n в $\mathcal{UL}_n$ будут появляться и другие алгебры Ли. Например, в $\mathcal{UL}_7$ содержится, видимо, алгебра Ли $N(2, 2, 2)$ (семимерная 2-нильпотентная алгебра Ли, см. выше) и т.д.

В заключение этого параграфа, посвященного неприводимым компонентам пространства $\mathcal{L}_n$, еще раз сформулируем один очень интересный открытый вопрос, уже упоминавшийся выше: существуют ли в $\mathcal{L}_n$ нильпотентные компоненты, т.е. неприводимые компоненты, состоящие только из нильпотентных алгебр Ли? Известно, что разрешимые компоненты существуют. Более того, существуют жесткие разрешимые алгебры Ли (соответствующие им орбиты открыты). Некоторые из них указаны выше (например, $R_2 \oplus R_2 \cdots \oplus r_2$).

§ 4. Некоторые факты и замечания

Здесь будет приведено несколько очень простых замечаний, касающихся пространств $\mathcal{L}_n$ и не затронутых в предыдущих параграфах.

Сначала сделаем несколько замечаний о касательном пространстве к $\mathcal{L}_n$.

Алгебраическое множество $\mathcal{L}_n$ есть пересечение очень большого числа квадрик, описанных выше. Все эти квадрики имеют индекс нуль и потому могут быть записаны в виде $\sum_i X_i Y_i = 0$. В точке (x_i^0, y_i^0) касательное пространство к этой квадрике задается, как хорошо известно (и что легко проверить непосредственно), уравнением $\sum_i x_i^0 y_i^0 + x_i^0 y_i = 0$.

Что касается собственно касательного пространства к $\mathcal{L}_n$, понимаемого в смысле алгебраической геометрии, то известно, что оно изоморфно пространству коциклов $C^2(L, L)$ алгебры Ли L (здесь L рассматривается как модуль над самой собой относительно присоединенного действия) [16]. Подпространство, касательное к орбите в $\mathcal{L}_n$ алгебры Ли L , отождествляется с пространством кограниц $Z^2(L, L) \subset C^2(L, L)$. Однако, явно описать эти пространства в общем виде довольно сложно. Факторпространство C^2/Z^2 дает нам пространство когомологий $H^2(L, L)$, которое тоже в явном виде удастся описать только в частных случаях. Из сказанного выше следует, что векторное пространство

двумерных когомологий $H^2(L, L)$ можно рассматривать как пространство деформаций алгебры Ли L , но это только виртуальные (инфинитезимальные) деформации, которые не всегда соответствуют деформации в обычном смысле этого слова, т.е. гладким кривым в $\mathcal{L}_n$.

Пространство когомологий $H^3(L, L)$ тоже несет некоторую полезную информацию о свойствах пространства $\mathcal{L}_n$. А именно, если $H^3(L, L) = 0$, то точка $L \in \mathcal{L}_n$ является неособой, т.е. в ней алгебраическое множество $\mathcal{L}_n$ гладкое.

Теперь обсудим кратко пространства разрешимых и нильпотентных алгебр Ли.

Изучение пространств $\mathcal{R}_n, \mathcal{N}_n$ имеет свою специфику и иногда здесь ситуация может быть более сложной, чем для $\mathcal{L}_n$. В частности, неизвестно, существуют ли открытые орбиты в $\mathcal{N}_n$ (в $\mathcal{R}_n$ они есть, так как существуют жесткие разрешимые алгебры Ли).

Далее, отметим, что в $\mathcal{N}_n$ имеются интересные подпространства, которые допускают подробное описание. Например, это пространство филиформных алгебр Ли $\mathcal{Fil}_n$ (n -мерных нильпотентных алгебр Ли, имеющих максимально возможный класс нильпотентности, равный $n - 1$), пространство $\mathcal{Met}_n$ метабелевых алгебр Ли (в другой терминологии – нильпотентных класса два). Последнее подпространство уже рассматривалось ранее в теореме 3.

Известны следующие оценки размерности указанных подпространств: $\dim \mathcal{Fil}_n \leq 5n^2/4$ (см. [17]), $\dim \mathcal{Met}_n = 2n^3/27 + o(n^2)$ (они доказываются очень легко). Последний результат интересно сопоставить с тем, что $\dim L_n$ в силу [5] имеет оценку $(2/27)n^3 + o(n^{8/3})$. Мы видим, что подпространство $\mathcal{Met}_n$ имеет максимально возможную (асимптотически) размерность среди замкнутых подмножеств в $\mathcal{L}_n$.

В пространстве $\mathcal{N}_n^*$ (проективизации пространства $\mathcal{N}_n$) имеется только одна замкнутая орбита (алгебры Ли $N_3 \oplus \mathbb{R}^{n-3}$). Пересечение всех неприводимых компонент здесь будет, видимо, совпадать с пересечением неприводимых компонент пространства $\mathcal{L}_n^*$, так как $\mathcal{L}_n^*$ состоит в силу предложения 2 из 2-нильпотентных алгебр Ли.

Сфера применения рассмотренных в настоящей работе методов допускает значительное расширение. Например, пространство $\mathcal{L}_{p,q}$ всех n -мерных супералгебр Ли типа (p, q) можно эффективно изучать аналогично тому, как это делалось для пространства $\mathcal{L}_n$. Здесь тоже можно указать явный вид уравнений Якоби, вычислив ранг и индекс соответствующих квадратичных форм, описать замкнутые орбиты в проективизации $\mathcal{L}_{p,q}^*$ и пересечение неприводимых компонент.

Методами, использованными в настоящей работе, можно изучать и пространство n -мерных ассоциативных алгебр $\mathcal{Ass}_n$, и пространства алгебр многих других классов.

Список литературы

- [1] В. В. Горбачевич, “О сжатиях и вырождениях конечномерных алгебр”, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, № 10, 19–27; англ. пер.: V. V. Gorbachevich, “Contractions and degenerations of finite-dimensional algebras”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **35**:10 (1991), 17–24.

- [2] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры*, Мир, М., 2000; пер. с англ.: D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Undergrad. Texts Math., Springer-Verlag, New York, 1992.
- [3] R. Carles, *Introduction aux deformation d'algebres de Lie de dimension fini*, vol. 19, Univ. de Poitier, Poitier, 1986.
- [4] J. Dozias, "Sur les dérivations des algèbres de Lie", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **259** (1964), 2748–2750.
- [5] Ю. А. Неретин, "Оценка числа параметров, задающих n -мерную алгебру", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:2 (1987), 306–318; англ. пер.: Yu. A. Neretin, "An estimate of the number of parameters defining an n -dimensional algebra", *Math. USSR-Izv.*, **30**:2 (1988), 283–294.
- [6] L. Le Bruyn, Z. Reichstein, "Smoothness in algebraic geography", *Proc. London Math. Soc.* (3), **79**:1 (1999), 158–190.
- [7] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987; пер. с нем.: H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspects Math., **D1**, Vieweg, Braunschweig, 1984.
- [8] G. Mazzola, "The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five", *Manuscripta Math.*, **27**:1 (1979), 81–101.
- [9] А. А. Кириллов, Ю. А. Неретин, "Многообразия структур n -мерных алгебр Ли", *Некоторые вопросы современного анализа*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 42–56.
- [10] R. Carles, "Sur certaines classes d'orbites ouvertes dans les variétés d'algèbres de Lie", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293**:11 (1981), 545–547.
- [11] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, "Строение групп и алгебр Ли", *Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНИТИ, М., 1990.
- [12] В. В. Горбацевич, "Об уровне некоторых разрешимых алгебр Ли", *Сиб. матем. журн.*, **39**:5 (1998), 1013–1027; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, "On the level of some solvable Lie algebras", *Siberian Math. J.*, **39**:5 (1998), 872–883.
- [13] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Гл. 7–8: подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.*, Fasc. XXXVIII: Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII–VIII, Hermann, Paris, 1975.
- [14] K. H. Hofmann, "Lie algebras with subalgebras of co-dimension one", *Illinois J. Math.*, **9**:4 (1965), 636–643.
- [15] R. Carles, Y. Diakité, "Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension ≤ 7 ", *J. Algebra*, **91**:1 (1984), 53–63.
- [16] G. Rauch, "Effacement et déformation", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **22**:1 (1972), 239–269.
- [17] M. Goze, Yu. Khakimjanov, "Nilpotent and solvable Lie algebras", *Handbook of algebra*, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, 615–663.

В. В. Горбацевич (V. V. Gorbatsevich)

"МАТИ" – Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского, г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступила в редакцию
09.11.2007 и 25.07.2008