Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональная геометрия двойных накрытий Фано, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 8, 123–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:07:39

УДК 512.76

А. В. Пухликов

Бирациональная геометрия двойных накрытий Фано

Доказана дивизориальная каноничность двойных гиперповерхностей Фано общего положения.

Библиография: 19 названий.

Введение

0.1. Основной результат. Пусть символ $\mathbb{P}$ обозначает комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^{M+1}$, $M \geq 6$. Зафиксируем пару целых чисел $m \geq 3$, $l \geq 2$, удовлетворяющих соотношению $m + l = M + 1$. Пусть

$$\mathcal{F} \subset \{(f, g) \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \times H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2l))\}$$

– открытое по Зарискому множество пар ненулевых многочленов (f, g) , для которых двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q \subset \mathbb{P}$, разветвленное над $W = W^* \cap Q$, есть неприводимое многообразие. Здесь $Q = \{f = 0\}$ – гиперповерхность степени m , $W^* = \{g = 0\}$ – гиперповерхность степени $2l$. Пусть $\mathcal{F}_{\text{sm}} \subset \mathcal{F}$ – открытое множество, соответствующее гладким двойным накрытиям V . Цель настоящей работы – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Существует непустое открытое по Зарискому множество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}_{\text{sm}}$ такое, что для любой пары $(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ соответствующее многообразие V обладает свойством дивизориальной каноничности: для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_V|$, $n \geq 1$, пара*

$$\left(V, \frac{1}{n}D\right)$$

имеет канонические особенности.

Напомним, что для $(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{sm}}$ соответствующее многообразие $V = V(f, g)$ есть примитивное многообразие Фано размерности $M \geq 6$, т.е. $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V$. Каноничность пары $(V, \frac{1}{n}D)$ означает, что для любого бирационального морфизма $\varphi: V^+ \rightarrow V$ и любого исключительного дивизора $E \subset V^+$ справедливо неравенство

$$\nu_E(D) \leq na(E),$$

противоположное неравенству Нётера–Фано, где $a(E)$ – дискрепантность E относительно модели V . В силу линейности этого неравенства можно всегда предполагать, что D – простой дивизор, т.е. неприводим и приведен.

0.2. Бирациональная жесткость. Свойство дивизориальной каноничности (свойство (C)) было введено в [1]. Если пара $(V, \frac{1}{n}D)$ канонична для общего дивизора $D \in \Sigma \subset |-nK_V|$ любой подвижной линейной системы Σ , то многообразие V обладает свойством *подвижной каноничности* (свойство (M)).

Если же пара $(V, \frac{1}{n}D)$ лог-канонична для любого дивизора $D \in |-nK_V|$, то многообразие V *дивизориально лог-канонично* (свойство (L)). Подвижная каноничность доказана для многих классов многообразий Фано (см. [2] и библиографию к этой статье). Важность свойства (M) обусловлена тем, что из него немедленно следует *бirationально жесткость* многообразия.

Напомним, что гладкое проективное рационально связанное многообразие X называется *бirationально сверхжестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на X имеет место равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, X),$$

где $c(\Sigma, X) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid D + tK_X \in A_+^1 X, D \in \Sigma\}$ – *порог канонического присоединения* (символ $A_+^1 X$ обозначает псевдоэффективный конус многообразия X в $A_{\mathbb{R}}^1 X = A^1 X \otimes \mathbb{R}$), а

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = \inf_{X^+ \rightarrow X} \{c(\Sigma^+, X^+)\}$$

– *виртуальный порог канонического присоединения*, точная нижняя грань берется по всем бирациональным морфизмам $X^+ \rightarrow X$ гладких проективных многообразий, Σ^+ – собственный прообраз Σ на X^+ . Если для любой подвижной системы Σ существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } X$, обеспечивающий равенство порогов

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\chi_*^{-1}\Sigma, X),$$

где $\chi_*^{-1}\Sigma$ – собственный прообраз системы Σ относительно χ , то многообразие X называется *бirationально жестким*. Свойство (M) и бирациональная сверхжесткость двойных гиперповерхностей Фано доказаны в [3].

Главное геометрическое следствие бирациональной жесткости для примитивных многообразий Фано – это отсутствие нетривиальных структур рационально связанного расслоения, т.е. рациональных доминантных отображений $\rho: X \dashrightarrow S$, слой общего положения которых рационально связан. Поэтому бирационально жесткие примитивные многообразия Фано автоматически нерациональны. Кроме того, бирациональная жесткость позволяет дать исчерпывающее описание бирациональных отображений данного многообразия на другие многообразия.

0.3. Теорема о прямых произведениях. Важность дивизориальной каноничности связана со следующей теоремой, доказанной в [1] (условие (C), очевидно, влечет условия (M) и (L)).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что примитивные многообразия Фано $F_1, \dots, F_K$, $K \geq 2$, удовлетворяют условиям (L) и (M). Тогда их прямое произведение*

$$V = F_1 \times \dots \times F_K$$

– бirationально сверхжесткое многообразие.

Перечислим основные геометрические последствия бирациональной жесткости прямого произведения V (см. [1; следствие 1]).

(i) Все структуры рационально связного расслоения на многообразии V суть проекции на прямые сомножители. Точнее, пусть $\beta: V^\# \rightarrow S^\#$ – рационально связное расслоение и $\chi: V \dashrightarrow V^\#$ – бирациональное отображение. Тогда существуют множество индексов

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, K\}$$

и бирациональное отображение

$$\alpha: F_I = \prod_{i \in I} F_i \dashrightarrow S^\#$$

такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V^\# \\ \pi_I \downarrow & & \downarrow \beta \\ F_I & \xrightarrow{\alpha} & S^\# \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\beta \circ \chi = \alpha \circ \pi_I$, где $\pi_I: \prod_{i=1}^K F_i \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ – естественная проекция на прямой сомножитель. В частности, на многообразии V нет структур расслоения на рационально связные многообразия размерности строго меньшей чем $\min\{\dim F_i\}$ и V не имеет структур расслоения на коники и рациональные поверхности.

(ii) Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают, т.е.

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V.$$

В частности, группа $\mathrm{Bir} V$ конечна.

(iii) Многообразие V нерационально.

Для общего двойного накрытия $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ имеем

$$\mathrm{Bir} F = \mathrm{Aut} F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(см. [3]). Следовательно, для попарно неизоморфных двойных накрытий общего положения $F_1, \dots, F_K \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^K.$$

С другой стороны, для двойного накрытия $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ общего положения группа $\mathrm{Bir} F^{\times K} = \mathrm{Aut} F^{\times K}$ есть расширение

$$1 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^K \rightarrow \mathrm{Aut} F^{\times K} \rightarrow S_K \rightarrow 1,$$

где S_K – симметрическая группа перестановок K элементов. Это расширение на самом деле есть полупрямое произведение: группа автоморфизмов $\mathrm{Aut} V$ содержит подгруппу S_K , переставляющую сомножители прямого произведения $F \times \dots \times F$. Действие S_K на подгруппе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^K$ также очевидно: перестановки $\mu \in S_K$ переставляют образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_K$ групп Галуа сомножителей F .

Отметим также, что теорема 1 позволяет применять линейный метод доказательства бирациональной жесткости [4] к изучению расслоений Фано $V/\mathbb{P}^1$ на двойные гиперповерхности [5], [6] (см. § 5 настоящей статьи).

0.4. Структура статьи. Открытое множество $\mathcal{F}_{\text{reg}}$ определяется явными условиями в § 1. Непустота этого множества доказана в § 4. Пусть $(f, g) \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ – фиксированная пара многочленов, $V = V(f, g)$ – соответствующее двойное накрытие. Предположим, что утверждение теоремы 1 неверно для V , т.е. для некоторого эффективного дивизора $D \in |-nK_V|$, $n \geq 1$, пара $(V, \frac{1}{n}D)$ не канонична. В обозначениях п. 0.1 пусть $C = \varphi(E) \subset V$ – центр особенности E на многообразии V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. *Имеет место неравенство $\text{codim } C \geq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $C \subset V$ есть подмногообразие коразмерности два. Из неравенства Нётера–Фано следует, что $\text{mult}_C D > n$. В частности, дивизор D не совпадает с дивизором $R \subset V$ ветвления двойного накрытия σ , так как R – гладкий дивизор на V . Очевидно, $R \cong W$, т.е. R – гладкое полное пересечение коразмерности два в $\mathbb{P}$.

Ограничивая D на R , получаем эффективный дивизор Z на R , высекаемый (в смысле указанного отождествления $R \cong W$) гиперповерхностью степени n . Пусть Y – неприводимая компонента множества $C \cap R$, $\text{codim}_R Y = 1$ (если $C \subset R$) или $\text{codim}_R Y = 2$ (в противном случае). Имеет место неравенство

$$\text{mult}_Y Z > n.$$

Теперь метод конусов (см. [7; предложение 3.6]) дает противоречие (случай, когда $\text{codim}_R Y = 1$, сразу исключается по теореме Лефшеца для R), потому что $\dim Y = M - 3 \geq 3$. Предложение доказано.

Пусть $o \in C$ – точка общего положения, $\varphi: V^+ \rightarrow V$ – ее раздутие, $E = \varphi^{-1}(o) \subset V^+$ – исключительный дивизор, D^+ – собственный прообраз дивизора D на V^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.2. *Для некоторой гиперплоскости $B \subset E$ имеет место неравенство*

$$\text{mult}_o D + \text{mult}_B D^+ > 2n. \quad (1)$$

Доказательство дано в [1; § 3].

Следовательно, доказательство теоремы 1 будет закончено, если будет установлено, что для любой точки $o \in V$, где $V \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ – регулярное многообразие, любого (простого) дивизора $D \in |-nK_V|$ и любой гиперплоскости $B \subset E$ выполнено неравенство, противоположное (1), т.е.

$$\text{mult}_o D + \text{mult}_B D^+ \leq 2n. \quad (2)$$

Доказательству этого неравенства посвящена основная часть настоящей работы (§§ 2, 3).

0.5. Замечания. Понятие бирациональной (сверх)жесткости является общепринятым, однако разные авторы используют разные определения (см. [2], [8]–[10]). По-видимому, наиболее точным является такое определение: *проективное рационально связанное многообразие X бирационально жесткое, если существует модель $\tilde{X}$, бирационально эквивалентная X , удовлетворяющая условию п. 0.2, т.е. для любой подвижной системы Σ на $\tilde{X}$ существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } \tilde{X} = \text{Bir } X$, обеспечивающий равенство*

порогов $c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma)$. (Как показывает пример из [10], на самом многообразии X такого автоморфизма χ может не быть.) Другими словами, многообразие X бирационально жесткое, если на некоторой его модели $\tilde{X}$ можно открутить все максимальные особенности подвижных линейных систем бирациональными автоморфизмами.

В основе настоящей работы лежат идеи и конструкции, развитые в [1]. В [4] было начато изучение двойных гиперповерхностей Фано, однако наиболее трудный случай, когда точка o лежит на дивизоре ветвления морфизма σ , не рассматривался. Поэтому в [4] сформулирован промежуточный результат о каноничности пар $(V, \frac{1}{n}D)$, где V – двойная гиперповерхность Фано.

Теорема 1 распространяет действие теоремы о прямых произведениях Фано [1] на двойные гиперповерхности. Ее можно интерпретировать как утверждение о глобальном каноническом пороге многообразия V : общая двойная гиперповерхность V имеет глобальный порог равный единице. Глобальные лог-канонические пороги имеют приложения в дифференциальной геометрии (существование метрики Кэлера-Эйнштейна, см. [11]–[13]).

Утверждение теоремы 1 для $m = 1$ (двойные пространства) доказано в [1], для $m = 2$ (двойные квадратики) в [4].

Наконец, комбинируя рассуждения настоящей работы с построениями [14] по образцу статьи [1], можно точно так же доказать дивизориальную каноничность итерированных двойных накрытий Фано

$$V = V^{(l)} \rightarrow V^{(l-1)} \rightarrow \dots \rightarrow V^{(1)} \rightarrow Q \subset \mathbb{P}.$$

Здесь $Q \subset \mathbb{P}^{M+k}$ – полное пересечение Фано индекса больше или равного трем, и каждая стрелка есть двойное накрытие с гладким дивизором ветвления, причем $V = V^{(l)}$ есть примитивное многообразие Фано.

§ 1. Регулярные двойные накрытия

В настоящем параграфе сформулированы условия регулярности, определяющие множество $\mathcal{F}_{\text{reg}}$. Непустотота этого множества (т.е. корректность условий регулярности) доказана в § 4. Условия регулярности имеют локальный характер и существенно различаются в зависимости от того, лежит ли заданная точка $o \in V$ на дивизоре ветвления морфизма σ или нет.

1.1. Условия регулярности вне дивизора ветвления. Пусть зафиксирована система аффинных координат $z_1, \dots, z_{M+1}$ на $\mathbb{P}$ с началом в точке $p = \sigma(o)$. Уравнение гиперповерхности Q есть $f = q_1 + \dots + q_m$, уравнение гиперповерхности W^* , высекающей на Q дивизор ветвления W , есть $g = 1 + w_1 + \dots + w_{2l}$. Следуя [3], [14], рассмотрим формальный ряд

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i t^i = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \dots,$$

где

$$\gamma_i = (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!!}{2^i i!} = (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!}{2^{2i-2} i! (i-2)!}.$$

Построим соответствующий формальный ряд от переменных z_* :

$$\sqrt{g} = (1 + w_1 + \dots + w_{2l})^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (w_1 + \dots + w_{2l})^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(w_1, \dots, w_{2l}),$$

где $\Phi_i(w_1(z_*), \dots, w_{2l}(z_*))$ — однородные многочлены степени i от переменных z_* . Очевидно, что

$$\Phi_i(w_*) = \frac{1}{2} w_i + (\text{многочлен от } w_1, \dots, w_{i-1}).$$

Например, $\Phi_1(w_*) = w_1/2$. Далее, для $j \geq 1$ положим

$$[\sqrt{g}]_j = 1 + \sum_{i=1}^j \Phi_i(w_*(z_*)), \quad g^{(j)} = g - [\sqrt{g}]_j^2.$$

Легко видеть, что первая ненулевая однородная компонента многочлена $g^{(j)}$ имеет степень $j + 1$. Обозначим ее символом h_{j+1} . Очевидно, что

$$h_{j+1}[g] = w_{j+1} + A_j(w_1, \dots, w_j), \quad (3)$$

где конкретный вид многочлена A_j не важен. Скажем, что многообразие V *регулярно* в точке o , если выполнены следующие три условия регулярности (R 1.1)–(R 1.3).

(R 1.1). Последовательность однородных многочленов

$$q_1, \dots, q_m, h_{l+1}, \dots, h_{2l-1}$$

регулярна в локальном кольце $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{M+1}}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = \dots = q_m = h_{l+1} = \dots = h_{2l-1} = 0$$

задает одномерное множество в $\mathbb{C}^{M+1}$ — конечный набор прямых, проходящих через начало координат.

(R 1.2). Линейная оболочка любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0$$

в $\mathbb{C}^{M+1}$ есть гиперплоскость $q_1 = 0$.

(R 1.3). Здесь необходимо различать два случая: $m = 3$ и $m \geq 4$. При $m = 3$ потребуем, чтобы σ -прообраз сечения любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества $\{q_1 = q_2 = q_3 = 0\} \subset Q$ любым антиканоническим дивизором $\sigma^{-1}(P) \ni o$, содержащим точку o , был бы неприводим (т.е. соответствующее двойное накрытие не распадалось). Пусть $m \geq 4$. В этом случае условие регулярности состоит в том, что замкнутое алгебраическое множество

$$\sigma^{-1}(\overline{\{q_1 = q_2 = 0\}} \cap Q) \subset V$$

неприводимо и любое сечение этого множества антиканоническим дивизором $\sigma^{-1}(P) \ni o$, где $P \ni p$ — некоторая гиперплоскость, удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) оно также неприводимо и приведено;
- 2) оно распадается на две неприводимые компоненты $B_1 + B_2$, где $B_i = \sigma^{-1}(Q \cap S_i)$ есть σ -прообраз сечения Q плоскостью $S_i \subset \mathbb{P}$ коразмерности три и, более того, $\text{mult}_o B_i = \text{mult}_p Q \cap S_i = 3$;
- 3) оно неприведено и имеет вид $2B$, где $B = \sigma^{-1}(Q \cap S)$ есть σ -прообраз сечения Q плоскостью $S \subset \mathbb{P}$ коразмерности три и, более того, $\text{mult}_o B = \text{mult}_p(Q \cap S) = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Как будет видно из доказательства предложения 1.1, данного ниже, вторая и третья возможности в условии (R1.3) реализуются для многообразия V общего положения, только когда квадрика

$$q_2|_{\{q_1=0\} \cap P}$$

есть пара плоскостей $S_1 \cup S_2$ или двойная плоскость $2S$ соответственно. Поэтому при $M \geq 7$ вторую и третью возможности можно исключить.

1.2. Условия регулярности на дивизоре ветвления. Пусть точка $o \in V$ лежит на дивизоре ветвления морфизма σ , $p = \sigma(o) \in W$. Пусть $\varphi_V: V^+ \rightarrow V$ и $\varphi_Q: Q^+ \rightarrow Q$ – раздутья точек o и p соответственно, $E_V = \varphi_V^{-1}(o) \subset V^+$ и $E_Q = \varphi_Q^{-1}(p) \subset Q^+$ – исключительные дивизоры. Пусть $W^+ \subset Q^+$ – собственный прообраз гиперповерхности W , $E_W = W^+ \cap E_Q$ – гиперплоскость в $E_Q \cong \mathbb{P}^{M-1}$. Символами E_V^* , E_Q^* и E_W^* обозначим двойственные проективные пространства. Естественное вложение $\sigma^*: T_p^*W \hookrightarrow T_o^*V$ определяет вложение $\sigma^*: E_W^* \hookrightarrow E_V^*$. Рациональное отображение $\sigma^+: V^+ \dashrightarrow Q^+$, индуцированное морфизмом σ , определяет линейную проекцию $\sigma_E^+: E_V \dashrightarrow E_W \cong \mathbb{P}^{M-2}$, двойственную к этому вложению.

Пусть $z_1, \dots, z_{M+1}$ – аффинные координаты на $\mathbb{P}$ с центром в точке p . Гиперповерхность Q задается уравнением

$$f(z_1, \dots, z_{M+1}) = q_1 + \dots + q_m,$$

где можно предполагать, что $q_1 \equiv z_{M+1}$, так что функции $z_1|_Q, \dots, z_M|_Q$ задают на Q систему локальных координат. Гиперповерхность W^* задается уравнением

$$g(z_1, \dots, z_{M+1}) = w_1 + \dots + w_{2l},$$

где можно предполагать, что $w_1 \equiv z_1$, так что функции $z_2|_W, \dots, z_M|_W$ задают на дивизоре ветвления W систему локальных координат. Многообразие V задается в $\mathbb{A}_{(y, z_1, \dots, z_{M+1})}^{M+2}$ системой аффинных уравнений

$$y^2 - g(z_*) = f(z_*) = 0,$$

которая локально имеет вид

$$y^2 - z_1 + \dots = z_{M+1} + \dots = 0,$$

где многоточие обозначает члены порядка два и выше по z_* , так что функции $y|_V, z_2|_V, \dots, z_M|_V$ образуют систему локальных координат на V с началом в точке o . В этих координатах линейная проекция σ_E^+ имеет вид

$$(y, z_2, \dots, z_M) \mapsto (z_2, \dots, z_M).$$

Пусть $B \subset E_V$ – некоторая гиперплоскость. Имеются две возможности:

(А) либо B задается уравнением

$$y + \lambda(z_2, \dots, z_M) = 0,$$

где $\lambda \in T_p^*W$ – некоторая линейная форма (возможно, нулевая); в этом случае будем говорить, что B не поднята с Q ;

(В) либо B задается уравнением

$$\lambda(z_2, \dots, z_M) = 0,$$

где $\lambda \in T_p^*W \setminus \{0\}$ – некоторая ненулевая линейная форма; в этом случае будем говорить, что B поднята с Q .

Очевидно, B поднята с Q тогда и только тогда, когда $B \in \sigma^*(E_W^*)$ как точка двойственного проективного пространства $B \in E_V^*$. Будем говорить, что многообразие V регулярно в точке o , где $p = \sigma(o) \in W$, если выполнены следующие три условия (R.2.1)–(R.2.3). Зафиксируем рассмотренную выше систему координат $z_1, \dots, z_{M+1}$ на $\mathbb{P}$ с началом в точке p . Ограничения многочленов w_i, q_j на плоскость $\{z_1 = z_{M+1} = 0\}$ обозначим символами $\bar{w}_i, \bar{q}_j$.

(R.2.1). Для любой линейной формы $\lambda(z_2, \dots, z_M)$ последовательность

$$\lambda^2(z_*) - \bar{w}_2, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m \quad (4)$$

регулярна в $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{M-1}}$, т.е. система уравнений

$$\lambda^2(z_*) - \bar{w}_2 = \bar{q}_2 = \dots = \bar{q}_m = 0$$

задает конус коразмерности m в $\mathbb{C}^{M-1}$ с вершиной в начале координат, причем для квадратичных форм $\bar{w}_2$ и $\bar{q}_2$ имеем оценки

$$\text{rk } \bar{w}_2 \geq 4, \quad \text{rk } \bar{q}_2 \geq 3.$$

(R.2.2). Линейная оболочка любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = 0$$

в $\mathbb{C}_{(z_2, \dots, z_M)}^{M-1}$ есть все пространство $\mathbb{C}^{M-1}$.

(R.2.3). При $m = 3$ σ -прообраз любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества

$$\overline{\{\lambda(z_*) = z_1 = z_{M+1} = q_2 = q_3 = 0\}} \subset Q$$

неприводим для любой линейной формы $\lambda(z_2, \dots, z_M)$. При $m \geq 4$ для любой линейной формы $\lambda(z_*)$ замкнутое множество

$$\sigma^{-1}(\overline{\{\lambda(z_*) = z_1 = z_{M+1} = q_2 = 0\}} \cap Q) \subset V$$

удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) оно неприводимо и приведено;
- 2) оно распадается на две неприводимые компоненты $B_1 + B_2$, где $B_i = \sigma^{-1}(Q \cap S_i)$ есть σ -прообраз сечения Q плоскостью $S_i \subset \{\lambda(z_*) = z_1 = z_{M+1} = 0\}$ и, более того, $\text{mult}_o B_i = 3$;
- 3) оно не приведено и имеет вид $2B$, где $B = \sigma^{-1}(Q \cap S)$ есть σ -прообраз сечения Q плоскостью S и, более того, $\text{mult}_o B = 3$.

1.3. Корректность условий регулярности. Из явных формулировок условий регулярности, данных выше, очевидно, что свойство многообразия V быть регулярным в точке o зависит от пары многочленов $(f, g) \in \mathcal{F}$ и точки $p = \sigma(o) \in \mathbb{P}$. Пусть $\mathcal{F}_{\text{reg}}(p) \subset \mathcal{F}$ – подмножество, состоящее из пар (f, g) , для которых $f(p) = 0$ и двойное накрытие $V = V(f, g)$ регулярно в любой (если их две) точке $o \in \sigma^{-1}(p)$. Если $g(p) \neq 0$, то регулярность понимается в смысле п. 1.1, а если $g(p) = 0$, то в смысле п. 1.2. Пусть $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$ – множество пар (f, g) , для которых двойное накрытие $V = V(f, g)$ регулярно в каждой точке $o \in V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Множество $\mathcal{F}_{\text{reg}}$ содержит непустое открытое по Зарискому подмножество в $\mathcal{F}$.*

Доказательство дано в § 4. Как обычно (см. обзор [2]), его идея состоит в том, чтобы оценить коразмерность замкнутого множества $\mathcal{F}_{\text{non-reg}}(p)$ двойных накрытий, нерегулярных в точке p . Если установить, что $\text{codim}_{\mathcal{F}} \mathcal{F}_{\text{non-reg}}(p) \geq M + 2$, то можно заключить, что

$$\overline{\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}} = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{F}_{\text{non-reg}}(p)}$$

есть собственное замкнутое подмножество положительной коразмерности в $\mathcal{F}$, откуда немедленно вытекает предложение 1.1.

§ 2. Доказательство неравенства (2) для точки на дивизоре ветвления

В настоящем параграфе доказано неравенство (2) в предположении, что точка $o \in V$ лежит на дивизоре ветвления, т.е. $p = \sigma(o) \in W$. При этом использованы обозначения п. 1.2. Доказательство проводится различными методами в зависимости от того, поднята гиперплоскость B с Q или нет.

2.1. Гиперплоскость B не поднята с Q . Чтобы доказать неравенство (2), предположим противное: выполнено неравенство (1), где $D \in |-nK_V|$ – неприводимый дивизор, $D^+ \subset V^+$ – его собственный прообраз. Пусть Λ – пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}$, порожденный касательными гиперплоскостями $T_p Q$ и $T_p W^*$ (в координатной форме это пучок $\alpha z_1 + \beta z_{M+1} = 0$). Пусть $T \in \Lambda$ – общая гиперплоскость.

Положим $Q_T = Q \cap T$, $W_T = W \cap T$ и $V_T = \sigma^{-1}(Q_T)$. Очевидно, гиперповерхность Q_T неособа в точке p , дивизор $W_T \subset Q_T$ имеет изолированную особенность в точке p , так что и $o \in V_T$ – изолированная особая точка, $\sigma_T = \sigma|_{V_T} : V_T \rightarrow Q_T$ – двойное накрытие, разветвленное над W_T . Относительно аффинных координат $(y, z_2, \dots, z_{M+1})$ многообразие V_T задается парой уравнений

$$y^2 - w_2|_{\{z_1 = -\beta z_{M+1}/\alpha\}} + \dots = z_{M+1} + q_2|_{\{z_1 = -\beta z_{M+1}/\alpha\}} + \dots = 0,$$

где многоточие обозначает члены порядка три и выше по $z_2, \dots, z_{M+1}$. В силу условия регулярности (R 2.1) квадрика $w_2|_{\{z_1 = z_{M+1} = 0\}}$ имеет ранг не меньше двух, так что $o \in V_T$ – изолированная квадратичная особенность, причем

квадрика $E_T = V_T^+ \cap E_V$, где $V_T^+ \subset V^+$ – собственный прообраз дивизора V_T , задается уравнением

$$y^2 - w_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = 0.$$

Последняя квадратичная форма имеет ранг не меньше трех, так что E_T не содержит гиперплоскостей в E_V . Следовательно, $\text{mult}_o V_T + \text{mult}_B V_T^+ = 2$. Поскольку $V_T \in |-K_V|$ – антиканонический дивизор, имеем $D \neq V_T$. Поэтому корректно определен эффективный цикл $D_T = (D \circ V_T)$ коразмерности два – эффективный дивизор на V_T . Очевидно, $\text{mult}_o D_T \geq 2 \text{mult}_o D$ и собственный прообраз $D_T^+ \subset V^+$ содержит гиперплоское сечение квадрики $B_T = B \cap V_T^+$. Квадрика B_T задается на E_T уравнением $y + \lambda(z_2, \dots, z_M) = 0$. В силу условия регулярности (R 2.1) квадрика B_T неприводима и приведена.

ЛЕММА 2.1. *Имеет место неравенство*

$$\text{mult}_o D_T + 2 \text{mult}_{B_T} D_T^+ > 4n. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказывать это неравенство связана с тем, что касательный конус дивизора D , т.е. алгебраический цикл $(D^+ \circ E_V)$ может содержать квадрику E_T . В силу стандартных формул теории пересечений (см. [15])

$$\text{mult}_o D_T = 2 \text{mult}_o D + 2a, \quad (6)$$

где целое число $a \in \mathbb{Z}_+$ определяется соотношением

$$(D^+ \circ V_T^+) = aE_T + Z,$$

эффективный цикл Z не содержит E_T . С другой стороны, любая неприводимая компонента цикла Z не содержится в исключительном дивизоре E_V , т.е. $Z = (D \circ V_T)^+$ и поэтому

$$\text{mult}_{B_T} D_T^+ + a \geq \text{mult}_B D^+. \quad (7)$$

Комбинируя оценки (6) и (7), получаем неравенство (5). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь стандартные гиперкасательные линейные системы

$$\Lambda_1^Q, \dots, \Lambda_{m-1}^Q$$

на гиперповерхности Q в точке p . В терминах аффинных координат z_* эти системы имеют вид

$$\Lambda_i^Q = \left| \sum_{j=1}^i s_{i-j}(q_1 + q_2 + \dots + q_j) = 0 \right|,$$

где $s_a(z_*)$ – произвольные однородные многочлены степени $a \in \mathbb{Z}_+$ от z_* , $f_j = q_1 + \dots + q_j$ – левый отрезок длины j уравнения f . Пусть $\Lambda_i = \sigma^* \Lambda_i^Q$ – подъем этих систем на V , Λ_i^+ – их собственный прообраз на V^+ . Очевидно,

$$\Lambda_i \subset |-iK_V|, \quad \text{mult}_o \Lambda_i \geq i + 1,$$

причем в силу условия регулярности (R 2.1) можно даже сказать, что $\text{mult}_o \Lambda_i = i + 1$, т.е. Λ_i^+ есть подсистема полной линейной системы $|-i\varphi_V^* K_V - (i + 1)E_V|$.

Положим также $\Lambda_i^E = \Lambda_i^+|_{E_V}$. Это – линейные системы гиперповерхностей степени $(i+1)$ на $E_V \cong \mathbb{P}^{M-1}$.

Из условия регулярности (R2.1) следует, что базисные множества линейных систем Λ_i и Λ_i^E имеют коразмерность i относительно V и E_V соответственно, причем коразмерность не изменяется при ограничении на V_T и E_T соответственно. Эти базисные множества задаются системой уравнений

$$q_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = \dots = q_{i+1}|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = 0.$$

Пусть $(R_2, \dots, R_{m-1}) \in \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_{m-1}$ – общий набор дивизоров гиперкасательных систем. Их собственные прообразы на V^+ и ограничения на E_V обозначаем символами R_i^+ и $R_i^E = (R_i^+ \circ E_V)$ соответственно. В силу условия регулярности теоретико-множественные пересечения

$$\text{Supp } D_T \cap R_2 \cap \dots \cap R_i, \quad \text{Supp } D_T^+ \cap E_V \cap R_2^E \cap \dots \cap R_i^E$$

имеют в V_T и E_T коразмерность i , $i = 2, \dots, m-1$, соответственно. Поэтому корректно определены эффективные циклы

$$Y_{i+1} = (D_T \circ R_2 \circ \dots \circ R_i), \quad Y_{i+1}^E = (D_T^+ \circ E_V \circ R_2^E \circ \dots \circ R_i^E),$$

причем $Y_i^E = (Y_i^+ \circ E_V)$, т.е. Y_i^E – проеکتивизированный касательный конус к Y_i в точке o . В частности,

$$\text{mult}_o Y_i = \deg Y_i^E = \frac{i!}{2} \text{mult}_o D_T,$$

где степень цикла Y_i^E понимается в смысле проеکتивизированного пространства $E_V \cong \mathbb{P}^{M-1}$.

2.2. Завершение доказательства. Воспользуемся методом работы [5] (в модифицированной форме).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Неприводимая компонента Z цикла Y_i есть B -компонента, если хотя бы одна неприводимая компонента ее проеکتивизированного касательного конуса в точке o , т.е. алгебраического цикла $(Z^+ \circ E_V)$, где Z^+ – собственный прообраз Z на V^+ , содержится в гиперплоскости B .

Для эффективного цикла Y_m имеем разложение

$$Y_m = Y_{\sharp} + Y_B,$$

где в Y_B собраны все B -компоненты цикла Y_m и только они. Следующая лемма является ключевой.

ЛЕММА 2.2. Ни одна неприводимая компонента цикла Y_B не содержится в прообразе касательной гиперплоскости $\sigma^{-1}(T_p Q \cap Q) = \{z_{M+1} = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: такая B -компонента Z существует, $\sigma(Z) \subset T_p Q$. Тогда ее касательный конус $Z^E = (Z^+ \circ E_V)$ целиком содержится в касательном конусе дивизора $\sigma^{-1}(T_p Q \cap Q)$. Последний задается в E_V уравнением

$$q_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = 0.$$

По определению B -компоненты найдется неприводимая компонента S цикла Z^E , которая содержится в B . Следовательно, на S обращаются в нуль многочлены

$$y + \lambda(z_2, \dots, z_M), y^2 - \bar{w}_2, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m,$$

где, напомним, $S \subset E_V$ и $(y : z_2 : \dots : z_M)$ – однородные координаты на проективном пространстве E_V . Поэтому на S обращаются в нуль многочлены

$$\lambda^2(z_2, \dots, z_M) - \bar{w}_2, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m, \quad (8)$$

Эти многочлены не зависят от y , так множество их общих нулей есть набор конусов в $E_V \cong \mathbb{P}^{M-1}$ с вершиной в точке $(1 : 0 : \dots : 0)$. С другой стороны, гиперплоскость B не содержит эту точку, так что и S ее не содержит. Следовательно, m однородных многочленов (8) от переменных $z_2, \dots, z_M$ обращаются в нуль на неприводимом подмногообразии $\bar{S} \subset \mathbb{P}^{M-2}$, проекции S из точки $(1 : 0 : \dots : 0)$. В силу сказанного выше $\dim \bar{S} = \dim S$, так что $\text{codim } \bar{S} = m - 1$, что противоречит условию регулярности (R 2.1). Лемма 2.2 доказана.

Вернемся к доказательству неравенства (2). По построению алгебраический цикл Y_m имеет степень

$$\deg Y_m = \deg Y_{\sharp} + \deg Y_B = n \cdot 2m \cdot (m - 1)! = 2nm!$$

и его кратность в точке o есть

$$\text{mult}_o Y_m = \text{mult}_o Y_{\sharp} + \text{mult}_o Y_B = \frac{m!}{2} \text{mult}_o D_T. \quad (9)$$

Для цикла $Y_{\sharp}$ имеем универсальную оценку $\text{mult}_o \leq \deg Y_{\sharp}$, которая не может быть усилена. Положение с циклом Y_B гораздо лучше: по лемме 2.2 корректно определен эффективный цикл

$$Y^* = (Y_B \circ \sigma^{-1}(T_p Q \cap Q)),$$

для которого имеем

$$\deg Y^* = \deg Y_B, \quad \text{mult}_o Y^* \geq 2 \text{mult}_o Y_B,$$

так что в силу универсального неравенства $\text{mult}_o Y^* \leq \deg Y^*$ получаем оценку

$$\text{mult}_o Y_B \leq \frac{1}{2} \deg Y_B. \quad (10)$$

Наконец, по построению цикла Y_m имеет место неравенство

$$\text{mult}_o Y_B = \deg Y_B^E \geq \frac{m!}{2} \deg B_T \text{mult}_{B_T} D_T^+ = m! \text{mult}_{B_T} D_T^+.$$

Комбинируя это неравенство с оценками (9) и (10), получаем окончательно

$$\begin{aligned} (2 \text{mult}_{B_T} D_T^+) m! + (\text{mult}_o D_T) m! &\leq \deg Y_B + 2 \text{mult}_o Y_{\sharp} + 2 \text{mult}_o Y_B \\ &\leq \deg Y_B + 2 \deg Y_{\sharp} + \deg Y_B = 2 \deg Y_m = 4nm!. \end{aligned}$$

Сокращая на $m!$, получаем отсюда неравенство, противоположное (5). Таким образом, неравенство (2) доказано в том случае, когда гиперплоскость $B \subset E_V$ не поднята с Q .

2.3. Гиперплоскость B поднята с Q . Докажем неравенство (2) в предположении, что гиперплоскость $B \subset E_V$ поднята с Q , т.е. что в координатах $(y, z_2, \dots, z_M)$ она имеет уравнение $\lambda(z_2, \dots, z_M) = 0$, где $\lambda \neq 0$ – некоторая ненулевая линейная форма. Снова предположим противное: $\text{mult}_o D + \text{mult}_B D^+ > 2n$, где $D \in |-nK_V|$ – неприводимый дивизор, $D^+ \subset V^+$ – его собственный прообраз. Рассуждаем так же, как и в случае, когда точка $o \in V$ лежит вне дивизора ветвления.

Пусть Λ_B – двумерная линейная система гиперплоскостей в $\mathbb{P}$, высекающих на касательном пространстве $T_p W$ гиперплоскость B . В координатах $(z_1, \dots, z_{M+1})$ уравнения этих гиперплоскостей имеют вид

$$\alpha z_1 + \beta z_{M+1} + \lambda(z_2, \dots, z_M) = 0,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ – константы. Пусть $\Lambda = \sigma^*(\Lambda_B|_Q)$ – соответствующая линейная система на V , $R \in \Lambda$ – общий дивизор, $Q_R = \sigma(R)$ – гладкая гиперповерхность степени m в $\mathbb{P}^M$. Дивизор ветвления $W_R = Q_R \cap W$ и само многообразие R гладкие в точках p и o соответственно.

ЛЕММА 2.3. *Для дивизора $D_R = D \cap R$ справедлива оценка $\text{mult}_o D_R > 2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул элементарной теории пересечений (см. [15]) имеем $\text{mult}_o D_R = \text{mult}_o D + \deg Z$, где эффективный дивизор Z на E_V определяется соотношением $(D^+ \circ R^+) = D_R^+ + Z$. По построению дивизора R имеем $(R^+ \circ E_V) = B$, так что Z содержит B с кратностью по меньшей мере $\text{mult}_B D^+$. Этим лемма доказана.

Рассмотрим теперь пучок Λ_R гиперплоских сечений Q_R , касательных к дивизору ветвления W_R в точке p . В координатной форме это ограниченный на Q_R пучок гиперплоскостей $\alpha^* z_1 + \beta^* z_{M+1} = 0$. Пусть $T \in \Lambda_R$ – общий дивизор этого пучка. Положим $W_T = W \cap T$ и $V_T = \sigma^{-1}(T)$. Дивизор T неособ в точке p , а дивизор ветвления W_T имеет изолированную квадратичную особенность в этой точке.

Точнее, функции $z_2, \dots, z_M$ образуют систему локальных координат на Q_R , касательная гиперплоскость к дивизору ветвления W_R задается уравнением $\lambda(z_2, \dots, z_M) = 0$, так что линейная компонента локального уравнения дивизора T в этих координатах есть $\lambda(z_2, \dots, z_M)$. Касательный конус к дивизору V_T в координатах $(y : z_2 : \dots : z_M)$ на E_V задается парой уравнений

$$y^2 - w_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = \lambda(z_*) = 0.$$

Следовательно, $\text{mult}_o V_T = 2$. Дивизор V_T неприводим и поэтому $D_R \neq V_T$ в силу леммы 2.3. Таким образом, корректно определен эффективный цикл

$$D_T = (D_R \circ V_T),$$

для которого справедлива оценка $\text{mult}_o D_T > 4n$. Эффективный дивизор D_T на особом двойном накрытии V_T можно считать неприводимым.

ЛЕММА 2.4. *Дивизор*

$$S = \sigma^{-1}(T_p Q \cap T) = \sigma^{-1}(T_p T)$$

на многообразии V_T неприводим и имеет кратность точно 4 в точке o .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия регулярности (R 2.3) система из трех уравнений

$$y^2 - w_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = \lambda(z_*) = q_2|_{\{z_1=z_{M+1}=0\}} = 0$$

задает на $E_V \cong \mathbb{P}_{(y:z_2:\dots:z_M)}^{M-1}$ эффективный цикл коразмерности три и степени четыре. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что $D_T \not\subset \sigma^{-1}(T_p Q)$ или, что то же самое, $D_T \neq S$. Рассмотрим вторую гиперкасательную систему

$$\Lambda_2 = |s_0 f_2 + s_1 f_1|,$$

где, напомним, $f_1 = q_1$, $f_2 = q_1 + q_2$, $s_i(z_*)$ – однородные многочлены от переменных $z_1, \dots, z_{M+1}$. В силу условия регулярности (R 2.3) ее ограничение $\Lambda_2^T = \Lambda_2|_T$ имеет базисное множество коразмерности два. Поэтому для общего дивизора $L \in \Lambda_2^T$ имеем $\sigma(D_T) \not\subset L$, так что корректно определен эффективный цикл коразмерности два на V_T

$$D_L = (D_T \circ \sigma^{-1}(L)),$$

удовлетворяющий оценке $\text{mult}_o D_L > 12n$. Степень цикла D_L (в смысле антиканонического класса $(-K_V)$) есть $2n \deg V = 4nm$. Таким образом,

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} D_L > \frac{6}{\deg V}. \quad (11)$$

Однако из условия регулярности (R 2.3) следует, что базисное множество линейной системы $\sigma^* \Lambda_2^T$ либо неприводимо и удовлетворяет равенству

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} \text{Bs } \sigma^* \Lambda_2^T = \frac{6}{\deg V},$$

либо распадается на две компоненты с тем же значением отношения $\text{mult}_o / \deg$. Заменяя цикл D_L его подходящей неприводимой компонентой, можно считать, что D_L неприводим и в силу неравенства (11) $D_L \not\subset \text{Bs } \sigma^* \Lambda_2^T$. По построению линейной системы Λ_2 , на $\sigma(D_L)$ обращается в нуль некоторый многочлен вида $u_0 f_2 + u_1 f_1$, где $u_0 \neq 0$ – константа, $u_1(z_*)$ – линейная форма. Без ограничения общности предполагаем, что $u_0 = 1$. Следовательно,

$$f_2|_{\sigma(D)} \equiv -u_1 q_1|_{\sigma(D)}. \quad (12)$$

ЛЕММА 2.5. *Образ $\sigma(D_L)$ не содержится в $T_p Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы означает, что $q_1 = f_1 = z_{M+1}$ не обращается в нуль на $\sigma(D_L)$. Предположим противное. Тогда из (12) следует, что $\sigma(D_L) \subset \text{Bs } \Lambda_2^T$, но мы уже знаем, что это не так. Лемма доказана.

Рассмотрим эффективный цикл

$$D^\sharp = (D_L \circ \sigma^{-1}(T_p Q)).$$

Он имеет коразмерность четыре на V и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} D^\sharp > \frac{12}{\deg V}.$$

Можно считать цикл $D^\sharp$ неприводимым подмногообразием в V . Его образ $\Delta = \sigma(D^\sharp)$ есть подмногообразие на Q коразмерности четыре, удовлетворяющее оценке

$$\frac{\text{mult}_p}{\deg} \Delta > \frac{6}{\deg Q}.$$

Гиперповерхность Q удовлетворяет условию регулярности (R 2.1), поэтому, дословно повторяя рассуждения [16; раздел 4] (см. также [2]), получаем противоречие. Доказательство неравенства (2) для случая $p \in W$, когда гиперплоскость $B \subset E_V$ поднята с Q , завершено.

Отметим, что последнее противоречие, завершающее доказательство, можно получить непосредственно на V , не опуская $D^\sharp$ на Q , а наоборот, поднимая гиперкасательные системы

$$\Lambda_i^Q = \left| \sum_{j=1}^i s_{i-j} f_j = 0 \right|$$

на V , как это было сделано выше для второй гиперкасательной системы.

§ 3. Доказательство неравенства (2) для точки вне дивизора ветвления

Мы пользуемся обозначениями и соглашениями п. 1.1. Докажем неравенство (2) в предположении, что точка $o \in V$ лежит вне дивизора ветвления морфизма σ , т.е. $p = \sigma(o) \in Q$ лежит вне дивизора W . В этом случае рассуждаем в точности так же, как для гиперповерхностей Фано [1; § 2, п. 2.1]. Ввиду почти полного совпадения наших построений с построениями [1] укажем лишь основные моменты доказательства.

Пусть $\varphi: V^+ \rightarrow V$ и $\varphi_Q: Q^+ \rightarrow Q$ – раздутья точек o и p на V и Q соответственно, $E \subset V^+$ и $E_Q \subset Q^+$ – исключительные дивизоры. Морфизм σ продолжается до регулярного отображения $V^+ \setminus \{o_1\} \rightarrow Q^+$, отождествляющего E и E_Q , где $\sigma^{-1}(p) = \{o, o_1\}$. Это отождествление $E \cong E_Q \cong \mathbb{P}^{M-1}$ будет в дальнейшем подразумеваться без специальных оговорок. Предположим, что выполнено неравенство $\text{mult}_o D + \text{mult}_B D^+ > 2n$, где $B \subset E$ – некоторая гиперплоскость, $D \in |-nK_V|$, $D^+ \subset V^+$ – собственный прообраз. Дивизор D считаем неприводимым и приведенным. Пусть $B_Q \subset E_Q$ – соответствующая гиперплоскость в E_Q . Исключительный дивизор E_Q естественно отождествляется с проективизацией $\mathbb{P}(T_p Q)$. Пусть Λ_B – пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}$, отсекающих B на E_Q , и $\Lambda = \sigma^*(\Lambda_B|_Q)$ – подъем на V его ограничения на Q . Рассмотрим общий дивизор $R \in \Lambda$. Пусть $R^+ \subset V^+$ – его собственный прообраз. Дивизор R гладкий в точке o , причем

$$R^+ \cap E = B.$$

Положим $D_R = D|_R = (D \circ R)$. Это эффективный дивизор на многообразии R .

ЛЕММА 3.1. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_o D_R > 2n. \quad (13)$$

Доказательство дословно такое же, как доказательство леммы 3 в [1; § 2, п. 2.1].

ЛЕММА 3.2. Дивизор $T_R = \sigma^{-1}(T_p\sigma(R)) \cap R$ на многообразии R неприводим и имеет кратность точно два в точке o .

Доказательство дословно такое же, как доказательство леммы 4 в [1; § 2, п. 2.1], с использованием условия регулярности (R 1.2).

В силу лемм 3.1 и 3.2 можно считать дивизор D_R неприводимым и приведенным и, кроме того, отличным от T_R . Рассмотрим вторую гиперкасательную систему на Q :

$$\Lambda_2^Q = |s_0 f_2 + s_1 f_1 = 0|_Q,$$

где $s_i(z_*)$ – однородные многочлены степени i . Базисное множество ее ограничения $\Lambda_2^R = \sigma^* \Lambda_2^Q|_R$ на R

$$S_R = \{\sigma^* q_1|_R = \sigma^* q_2|_R = 0\}$$

имеет в силу условия регулярности (R 1.3) коразмерность два в R и либо неприводимо и имеет кратность шесть в точке o , либо распадается на два σ -прообраза плоских сечений гиперповерхности $\sigma(R)$, каждое кратности три в точке o . В любом случае для общего дивизора $L \in \Lambda_2^R$ имеем $D_R \not\subset L$, так что корректно определен эффективный цикл $D_L = (D_R \circ L)$ коразмерности два, удовлетворяющий оценке

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} D_L > \frac{3}{\deg V} = \frac{3}{2m}. \quad (14)$$

Заменяя цикл D_L его подходящей неприводимой компонентой, можно предполагать его неприводимым подмногообразием коразмерности два в R . Сравнивая оценку (14) с данным выше описанием множества S_R , видим, что $D_L \not\subset S_R$. Теперь рассуждения п. 2.1 в [1] показывают, что отсюда следует, что $D_L \not\subset T_R$ (аналогичные рассуждения использованы в настоящей работе в п. 2.3, см. доказательство леммы 2.5). Следовательно, корректно определен эффективный цикл

$$Y = (D_L \circ T_R)$$

коразмерности четыре на V , удовлетворяющий оценке

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y > \frac{6}{\deg V} = \frac{3}{m}. \quad (15)$$

Теперь получим противоречие, используя метод работы [3]. В силу линейности кратности и степени цикл Y можно считать неприводимым многообразием. В обозначениях п. 1.1 пусть

$$\Lambda_k = \left| \sum_{i=1}^k s_{k-i} f_i + \sum_{i=l}^k s_{k-i}^* (y - [\sqrt{g}])_i \right|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

– k -ая гиперкасательная система, где s_j, s_j^* – однородные многочлены от z_* степени j (для упрощения записи опускаем символ σ^* ; строго говоря, следовало бы писать $\Sigma \sigma^* s_{k-i} \sigma^* f_i$ и т.д.) Наконец, правая сумма в (16) считается равной нулю, если $k < l$. Система Λ_k есть подсистема полной системы $|-kK_V|$ и легко видеть, что $\text{mult}_o \Lambda_k \geq k + 1$.

Положим

$$\mathcal{M} = [1, m-1] \cap \mathbb{Z}_+ = \{1, \dots, m-1\}, \quad \mathcal{L} = [l, 2l-2] \cap \mathbb{Z}_+ = \{l, \dots, 2l-2\}.$$

В силу условия регулярности для коразмерности базисного множества гиперкасательной системы Λ_k имеем

$$\text{codim Bs } \Lambda_k = \# [1, k] \cap \mathcal{L} + \# [1, k] \cap \mathcal{M}.$$

Пусть

$$(D_1, \dots, D_{m-1}, D_l^*, \dots, D_{2l-2}^*) \in \prod_{k \in \mathcal{M}} \Lambda_k \times \prod_{k \in \mathcal{L}} \Lambda_k$$

– общий набор гиперкасательных дивизоров. Переупорядочим его в набор $(L_1, \dots, L_{M-1})$ таким образом, чтобы для всех дивизоров $L_i \in \Lambda_{k(i)}$ имело место неравенство $k(i+1) \geq k(i)$. Из условия регулярности теперь следует, что

$$\text{codim}_o Y \cap L_5 \cap \dots \cap L_k = k,$$

где codim_o означает коразмерность в окрестности точки o относительно V . Следовательно, можно осуществить стандартную процедуру построения неприводимых подмногообразий $Y = Y_4, Y_5, \dots, Y_{M-1}$ коразмерности $\text{codim } Y_i = i$, где Y_{i+1} – неприводимая компонента эффeктивного цикла $(Y_i \circ L_{i+1})$ с максимальным значением отношения $\text{mult}_o / \deg$. Подмногообразие $Y^* = Y_{M-1}$ есть неприводимая кривая на V , удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y^* \geq \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \cdot \left(\prod_{i=5}^{M-1} \frac{k(i)+1}{k(i)} \right). \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что значение произведения в скобках равно

$$\frac{m}{5} \cdot \frac{2l-1}{l} = \frac{m(2l-1)}{5l} > \frac{m}{3}$$

при $l \geq 4$, $3m/8$ при $l = 3$ и $m/3$ при $l = 2$. В любом случае это значение не меньше чем $m/3$. Поскольку левая часть неравенства (17) не превосходит единицы, получаем для отношения $(\text{mult}_o / \deg)Y$ оценку, противоположную неравенству (15). Этим противоречием доказательство неравенства (2) завершено.

§ 4. Обоснование условий регулярности

В этом параграфе доказано предложение 1.1.

4.1. Условия регулярности вне дивизора ветвления. Условие (R 1.1) для общего накрытия V было доказано в [3]. Справедливость условия (R 1.2) для общей гиперповерхности Q доказывается дословно так же, как справедливость этого условия для общей гиперповерхности Фано в [1; § 2], потому что в этом условии участвуют только три компоненты q_1, q_2, q_3 . Однако условие (R 1.3) для двойного накрытия существенно отличается от соответствующего условия для гиперповерхности и поэтому требует специального рассмотрения.

Пусть сначала $m = 3$. Рассмотрим следующую общую ситуацию: $X \subset \mathbb{P}^N$ – неприводимое многообразие, $x \in X$ – гладкая точка, $\dim X = k \geq 2$.

ЛЕММА 4.1. *Замкнутое подмножество $\Xi(x) \subset \mathcal{P}_{2l}(x)$ в пространстве однородных многочленов степени $2l$ от однородных координат на $\mathbb{P}^N$, обращающихся в нуль в точке x , определяемое условием*

$$g \in \Xi(x) \iff g = h^2 \text{ в } \mathcal{O}_{x,X},$$

имеет коразмерность не меньше чем $\binom{2l+k-1}{k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u_1, \dots, u_N)$ – некоторая система аффинных координат на $\mathbb{P}^N$ с началом в точке x , причем $(u_1, \dots, u_k)$ есть система локальных параметров на X в этой точке. Рассмотрим стандартную проекцию

$$\pi: \mathcal{O}_{x,X} \rightarrow \mathcal{O}_{x,X} / \mathcal{M}_x^{2l+1} \cong \mathbb{C}[u_1, \dots, u_k] / (u_1, \dots, u_k)^{2l+1}, \quad (18)$$

где $\mathcal{M}_x = (u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{O}_{x,X}$ – максимальный идеал локального кольца. Последнюю алгебру в (18) обозначим символом $\mathcal{S}_{2l}$, а ее максимальный идеал обозначим символом $\mathcal{M}$. Пусть $\Xi \subset \mathcal{M}$ – множество полных квадратов,

$$\Xi = \{g \in \mathcal{M} \mid g = h^2 \text{ для некоторого } h \in \mathcal{M}\}.$$

Очевидно, $\Xi(x) \subset \pi^{-1}(\Xi)$. Далее, поскольку ограничение π на $\mathcal{P}_{2l}(x)$ есть линейное сюръективное отображение, имеет место оценка

$$\text{codim}_{\mathcal{P}_{2l}(x)} \Xi(x) \geq \text{codim}_{\mathcal{M}} \Xi.$$

Последнюю коразмерность нетрудно оценить снизу. Пусть

$$h = h_1 + \dots + h_{2l} \in \mathcal{M}$$

– произвольный элемент, разложенный на однородные компоненты, т.е. однородные многочлены от $u_1, \dots, u_k$. Для его квадрата имеем представление

$$h^2 = \sum_{i=2}^{2l} v_i(h_1, \dots, h_{i-1}),$$

где однородная компонента v_i степени i зависит только от $h_1, \dots, h_{i-1}$. В частности, h^2 не зависит от последней компоненты h_{2l} и потому

$$\dim \Xi \leq \dim \mathcal{M} / \mathcal{M}^{2l}.$$

Следовательно, $\text{codim}_{\mathcal{M}} \Xi$ не меньше размерности пространства $\mathcal{M}^{2l} / \mathcal{M}^{2l+1}$, которая есть $\binom{2l+k-1}{k-1}$. Лемма доказана.

Вернемся к условию регулярности (R1.3) для двойной кубики ($m = 3$). Пусть $Y \subset \mathbb{P}$ – неприводимая компонента замкнутого множества

$$\overline{\{q_1 = q_2 = q_3 = 0\}} \cap P,$$

где $P \ni p$ – некоторая гиперплоскость. Очевидно, Y есть конус с вершиной в точке p . Гиперповерхность W_{2l}^* , высекающая на Q дивизор ветвления, не содержит точку p . Поэтому

$$W^* \cap Y \not\subset \text{Sing } Y$$

и можно применить лемму 4.1 к $X = Y$. Получаем, что нарушение условия регулярности (R 1.3) в точке p накладывает на многочлен g не менее

$$\binom{2l + M - 4}{M - 4} = \binom{3M - 8}{M - 4} \quad (19)$$

независимых условий. С учетом произвольности точки p и гиперплоскости P , двойная кубика общего положения регулярна в каждой точке вне дивизора ветвления, если нарушение условия (R 1.3) в фиксированной точке при фиксированной гиперплоскости P накладывает на многочлен g не менее $2M$ независимых условий. Легко проверить, что при $M \geq 6$ правая часть больше чем $2M$ (существенно больше). Обоснование условий регулярности вне дивизора ветвления для $m = 3$ закончено.

4.2. Доказательство для $m \geq 4$. В этом случае доказательство разбивается на две части. Сначала нужно проверить, что множество $\{\overline{q_1 = q_2 = 0}\} \cap Q \cap P$ или неприводимо, или распадается на компоненты правильным образом (эта часть условия зависит только от многочлена f). Затем надо доказать, что прообраз каждой компоненты относительно σ неприводим (эта часть условия зависит только от g). Начнем с условия регулярности на Q .

Как будет видно из рассуждений ниже, оценка на множество нерегулярных гиперповерхностей Q тем сильнее, чем выше m . Поэтому достаточно рассмотреть случай $m = 4$. Положим

$$F_P = \{\overline{q_1 = q_2 = 0}\} \cap P.$$

Это квадрика размерности $M - 2$ в $\mathbb{P}^{M-1}$, а точнее – квадратичный конус с вершиной в p . Если F_P – конус над гладкой квадрикой размерности $M - 3 \geq 3$, то F_P – факториальное многообразие и приводимость дивизора

$$(q_3 + q_4)|_{F_P}$$

накладывает на многочлен $q_3 + q_4$ не менее чем

$$\binom{M + 2}{4} - M^2 + 3$$

независимых условий, что существенно больше чем $2M$. (Эта оценка получена для того типа распада, который дает наименьшую коразмерность нерегулярного множества, а именно, когда сечение квадрики F_P кватрикой с тройной точкой p распадается на гиперплоское сечение, содержащее точку p и сечение F_P кубикой с двойной точкой p . Для других типов распада коразмерность гораздо выше.)

Следовательно, можно предполагать, что F_P – квадратичный конус над особой квадрикой. Предположим, что F_P – неприводимая квадрика. В этом случае F_P замещается плоскостями размерности $k \geq M/2$. Более того, можно выбрать k -плоскости общего положения $L_1, L_2 \subset F_P$ так, что их линейная оболочка $\langle L_1, L_2 \rangle$ есть $(k + 1)$ -плоскость $L = \mathbb{P}^{k+1}$, т.е. $L_1 \cap L_2 = L_{12}$ есть $(k - 1)$ -плоскость, содержащая точку p и вершинное пространство конуса F_P , но не совпадающая с последним (это означает, что L_{12} – плоскость общего положения, строго содержащая вершинное пространство конуса F_P). Подсчитаем

количество независимых условий на многочлен $(q_3 + q_4)$, которые накладываются требованием приводимости каждого из многочленов $(q_3 + q_4)|_{L_i}$. Элементарные подсчеты дают коразмерность

$$\alpha_k = \frac{(k+5)(k+3)k(k-2)}{24} + 1$$

для распадаения $q_3 + q_4$, ограниченного на $L_i \cong \mathbb{P}^k$ (снова имеется в виду тот тип распадаения, который дает наименьшую коразмерность, а именно, на гиперплоскость в $\mathbb{P}^k$, содержащую точку p и кубику с двойной точкой p). Отсюда следует, что искомая коразмерность для распадаения обоих многочленов $(q_3 + q_4)|_{L_i}$, $i = 1, 2$, есть $2\alpha_k - \alpha_{k-1}$, и нетрудно проверить, что это число больше или равно $2M$. При $M \geq 7$ достаточно оценить приводимость многочлена $(q_3 + q_4)|_{L_1}$, ограниченного на одну k -плоскость: это уже дает требуемую оценку.

Предположим, наконец, что квадрика F_P приводима, $F_P = L_1 \cup L_2$, где $L_i \cong \mathbb{P}^{M-2}$ суть $(M-2)$ -плоскости. Приводимость многочлена $q_3 + q_4$, ограниченного на одну из плоскостей L_i , дает в предыдущих обозначениях α_{M-2} независимых условий на многочлен $q_3 + q_4$ и это число (существенно) больше чем $2M$. Этим проверка Q -части условия (R 1.3) закончена.

Проверим W -часть условия (R 1.3). Пусть Y – неприводимая компонента замкнутого множества $\{q_1 = q_2 = 0\} \cap Q \cap P$. Необходимо оценить количество независимых условий, следующих из приводимости двойного накрытия $\sigma^{-1}(Y) \rightarrow Y$. Имеются две возможности: $W \cap Y \not\subset \text{Sing } Y$ (случай общего положения) и $W \cap Y \subset \text{Sing } Y$. Рассмотрим их по отдельности.

Если реализуется случай общего положения, то, применяя лемму 4.1, получаем не менее

$$\binom{2l + M - 4}{M - 4} \geq \binom{M}{4} > 2M$$

независимых условий на многочлен g , поскольку $\dim Y = M - 3$ и $l \geq 2$. Если реализуется второй случай, то гиперповерхность W_{2l}^* целиком содержит хотя бы одну неприводимую компоненту S множества особых точек $\text{Sing } Y$. В этом случае проще всего применить способ оценки коразмерности из работы [16]: пусть $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^k$, $k = M - 4 = \dim S$ – общая линейная проекция, тогда подъем на S любого нетривиального многочлена на $\mathbb{P}^k$ не обращается в нуль тождественно. Следовательно, искомая коразмерность не меньше чем размерность пространства однородных многочленов степени $2l$ на $\mathbb{P}^k$, т.е. снова

$$\binom{2l + k}{k} \geq \binom{M}{4} > 2M.$$

Этим проверка W -части условия (R 1.3) закончена.

Таким образом, общее двойное накрытие V регулярно в каждой своей точке вне дивизора ветвления.

4.3. Условия регулярности на дивизоре ветвления. Тот факт, что общее двойное накрытие V удовлетворяет условиям (R 2.2) и (R 2.3), доказывается точно так же, как доказывались условия (R 1.2) и (R 1.3) в случае, когда точка o не лежит на дивизоре ветвления. Условие (R 2.1) есть некоторое усиление стандартного условия регулярности для гиперповерхности $Q \cap \{z_{M+1} = 0\}$

в точке p : в нем участвует $(M - 1)$ -мерное дополнительное семейство квадратичных форм $\lambda^2(z_*) - \bar{w}_2$. Рассмотрим его подробнее.

Поскольку точка p лежит на дивизоре ветвления, для обоснования условия регулярности (R 2.1) достаточно показать, что нарушение этого условия накладывает на пару многочленов (f, g) не меньше чем $2M - 1$ условие. Для оценок на ранг квадратичных форм $\bar{w}_2$ и $\bar{q}_2$ это легко проверяется. Чтобы доказать первую часть условия (R 2.1), т.е. регулярность последовательности (4), воспользуемся следующим результатом (см. [17]).

Пусть $u_1, \dots, u_{N+1}$ – независимые переменные,

$$\mathcal{P} = \prod_{i=1}^{k+1} \mathcal{P}_{m_i} = \{(p_1, \dots, p_{k+1})\}$$

– пространство всех наборов однородных многочленов степени $m_1, \dots, m_{k+1}$ соответственно, $0 \leq k \leq N - 1$, $\mu = \min\{m_1, \dots, m_{k+1}\} \geq 2$. Множество $\mathcal{P}$ есть линейное пространство размерности

$$\dim \mathcal{P} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{m_i + N}{N}.$$

Каждому набору $(p_*) = (p_1, \dots, p_{k+1})$ поставим в соответствие множество его нулей $Z(p_*) \subset \mathbb{P}^N$. Таким образом, последовательность $p_1, \dots, p_{k+1}$ регулярна в $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{N+1}}$ тогда и только тогда, когда $\text{codim}_{\mathbb{P}^N} Z(p_*) = k + 1$. Пусть

$$Y = \{(p_*) \in \mathcal{P} \mid \text{codim}_{\mathbb{P}^N} Z(p_*) \leq k\}$$

– множество нерегулярных наборов (p_*) . Пусть $I = \{1, \dots, k + 1\}$. Положим

$$\mu_j = \min_{S \subset I, \#S=j} \left\{ \sum_{i \in S} m_i \right\} \geq j\mu.$$

В [17] был доказан следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеет место оценка*

$$\text{codim}_{\mathcal{P}} Y \geq \min_{j \in \{0, \dots, k\}} \{(\mu_{j+1} - j)(N - j) + 1\}.$$

Применяя предложение 4.1 к нашему случаю при $N = M - 2$, $k + 1 = m$, $(m_1, \dots, m_{k+1}) = (2, 2, \dots, m)$, получим необходимую оценку на коразмерность множества пар (f, g) , не удовлетворяющих условию (R 2.1). Легко убедиться, что эта оценка (существенно) сильнее чем $2M - 1$. Этим обоснование условий регулярности (R 2.1)–(R 2.3) завершено.

§ 5. Приложение: пучки двойных накрытий Фано

В настоящем параграфе в качестве приложения изучаются подвижные линейные системы на расслоениях Фано $V/\mathbb{P}^1$, слои которых суть двойные гиперповерхности. Бирациональная геометрия этих многообразий была изучена в [4]–[6], где в качестве основного инструмента использовалась традиционная квадратичная техника метода максимальных особенностей [2], [18], восходящая к классической статье В. А. Исковских и Ю. И. Манина [19]. Здесь мы передоказываем основные результаты [4]–[6] линейным методом.

5.1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ – расслоение Фано, относительно которого предполагаем следующее:

(i) V – гладкое проективное многообразие с группой Пикара $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F$, где F – класс слоя проекции $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$;

(ii) каждый слой $F_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{P}^1$, есть двойная гиперповерхность Фано, $F_t \in \mathcal{F}$, причем F_t регулярна в каждой гладкой точке (в частности, любой гладкий слой $F_t \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$);

(iii) если $o \in F_t$ – особая точка, то o есть изолированная квадратичная особенность (в частности, таких точек конечное число), удовлетворяющая соответствующему условию регулярности (R 1.4) или (R 2.4) в зависимости от того, лежит точка o вне дивизора ветвления или на нем; условия (R 1.4) и (R 2.4) сформулированы ниже.

ТЕОРЕМА 3. (i) *Предположим, что $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ – подвижная линейная система на V и $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеет место равенство*

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma) = n.$$

(ii) *Предположим дополнительно, что расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K -условию*

$$-K_V \notin \text{Int } A_{\text{mov}}^1 V,$$

где $A_{\text{mov}}^1 V \subset A_{\mathbb{R}}^1 V \cong \mathbb{R}^2$ – замкнутый конус, порожденный классами подвижных дивизоров на V . Тогда расслоение $V/\mathbb{P}^1$ бирационально сверхжесткое. В частности, проекция $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ есть единственная нетривиальная структура рационально связного расслоения на V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить справедливость первого утверждения, так как второе утверждение из него следует непосредственно. Пусть $c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma)$. Тогда линейная система Σ имеет максимальную особенность $E \subset V^+$, где $\varphi: V^+ \rightarrow V$ – некоторый бирациональный морфизм, E – исключительный дивизор. Его центр $B = \varphi(E) \subset V$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности два или выше. Пусть $F = F_t$ – некоторый слой, пересекающий B . Если $B \cap F$ не есть особая точка слоя F , то, ограничивая систему Σ на слой F , получаем противоречие с теоремой 1: для общего дивизора $D \in \Sigma$ пара $(F, \frac{1}{n}D|_F)$ не канонична. Следовательно, можно предполагать, что $B = o \in F$ есть особая точка слоя. Как показано ниже в пп. 5.2, 5.3, эта возможность также не реализуется, если выполнено соответствующее условие регулярности (R 1.4) или (R 2.4). Таким образом, линейная система Σ не может иметь максимальных особенностей, что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как показывает приведенное доказательство, линейный метод не использует условия закрученности расслоения $V/\mathbb{P}^1$ по базе. По сути, все доказательство состоит в ограничении на некоторый слой и использовании свойства дивизориальности (лог) каноничности каждого слоя. Вся работа сосредоточена на доказательстве этого свойства, которое требует более сильных условий регулярности, чем бирациональная жесткость. Условия регулярности, обеспечивающие работу квадратичного метода, слабее и поэтому результаты, полученные квадратичным методом, точнее. Однако квадратичные конструкции значительно более трудоемкие.

5.2. Особые точки слоев. Пусть $o \in F = F_t$ – особенность слоя $\pi^{-1}(t)$. Будем говорить, что точка o есть особенность *первого типа*, если она лежит вне дивизора ветвления морфизма $\sigma: F \rightarrow G \subset \mathbb{P}$, т.е. $p = \sigma(o) \notin W$. В этом случае предполагаем, что гиперповерхность G в подходящих аффинных координатах с началом в точке p задается уравнением

$$f = q_2 + \dots + q_m = 0,$$

где $q_2(z_1, \dots, z_{M+1})$ – невырожденная квадратичная форма. Дивизор ветвления морфизма σ высекается на G гиперповерхностью

$$g = 1 + w_1 + \dots + w_{2l} = 0,$$

не проходящей через p . Будем говорить, что точка o есть особенность *второго типа*, если она лежит на дивизоре ветвления морфизма σ , т.е. $p = \sigma(o) \in W$. В этом случае G задается уравнением

$$f = q_1 + \dots + q_m = 0,$$

где $q_1 \equiv z_{M+1}$, а уравнение дивизора ветвления имеет вид

$$g = \alpha z_{M+1} + w_2 + \dots + w_{2l} = 0,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ – произвольная константа.

Рассмотрим сначала особенности первого типа. Будем говорить, что многообразие F *регулярно* в точке o первого типа, если (в принятых обозначениях) выполнено следующее условие:

(R 1.4) для любой ненулевой линейной формы $\lambda(z_1, \dots, z_{M+1})$ при $m \leq 2l$ последовательность

$$\lambda, q_2, \dots, q_m, h_{l+1}, \dots, h_{2l-1}$$

регулярна в локальном кольце $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{M+1}}$, а при $m > 2l$ последовательность

$$\lambda, q_2, \dots, q_{m-1}, h_{l+1}, \dots, h_{2l}$$

регулярна в кольце $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{M+1}}$ ($h_j(z_*)$ имеют тот же смысл, что и в условии регулярности (R 1.1)) и, более того, замкнутое множество $\sigma^{-1}(\{\lambda = q_2 = 0\} \cap G)$ неприводимо.

Поскольку особых точек конечное число, условие регулярности не требует специального обоснования (достаточно потребовать, чтобы система уравнений

$$q_2 = \dots = q_m = h_{l+1} = \dots = h_{2l-1} = 0$$

или система, получающаяся из данной путем замены q_m на h_{2l} , определяла замкнутое множество, ни одна компонента которого не содержится в гиперплоскости; вторая часть условия регулярности выполнена в точке общего положения очевидным образом).

Пусть $D \in |-nK_F|$ – некоторый простой дивизор, $\beta: F^+ \rightarrow F$ – раздутие точки o , $\beta_G: G^+ \rightarrow G$ – раздутие точки p на G , $E_F \subset F^+$ и $E_G \subset G^+$ – исключительные дивизоры (неособые квадратики), E_F естественно отождествляется с E_G . Пусть $B \subset E_F$ – гиперплоское сечение. Для собственного прообраза $D^+ \subset F^+$ имеем $D^+ \sim -nK_F - \nu E_F$, где $\nu \in \mathbb{Z}_+$ – некоторое число.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Имеет место неравенство*

$$\nu + \text{mult}_B D^+ \leq 2n. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $R \subset \mathbb{P}$ – единственная гиперплоскость, $R \ni p$, высекающая B на $E_G \cong E_F$, скажем, $R = \{\lambda(z_*) = 0\}$. Дивизор $T = \sigma^{-1}(R \cap G)$ удовлетворяет неравенству (20) с $n = 1$ и неприводим, так что $D \neq T$ и можно образовать теоретико-схемное пересечение $Y = (D \circ T)$, эффективный цикл коразмерности два, удовлетворяющий неравенству

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg}(D \circ T) > \frac{4}{\deg F} = \frac{2}{m}.$$

По линейности можно считать цикл Y неприводимым подмногообразием коразмерности два на F , или простым дивизором на T . Пусть D_2 – дивизор на F , высекаемый гиперповерхностью $q_2 = 0$. В силу условия регулярности $(D_2 \circ T)$ – простой дивизор на T , причем

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg}(D_2 \circ T) = \frac{3}{2m}.$$

Следовательно, $Y \neq (D_2 \circ T)$, так что $Y \not\subset D_2$ и можно образовать эффективный цикл $Y \circ D_2$, у которого найдется неприводимая компонента $Y^\sharp$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y^\sharp > \frac{3}{m}.$$

Подмногообразие $Y^\sharp$ имеет коразмерность два на T . Условие (R 1.4) можно понимать как условие регулярности многообразия T . Применяя технику гиперкасательных систем на T к подмногообразию $Y^\sharp$ стандартным образом, получаем противоречие (путем последовательных пересечений с гиперкасательными дивизорами строим кривую $C \subset T$, удовлетворяющую неравенству $(\text{mult}_o / \deg)C > 1$, что невозможно). Этим предложение 5.1 доказано и случай особенности первого типа исключен.

5.3. Особенности второго типа. Будем говорить, что многообразие F *регулярно* в точке o второго типа, если выполнено условие

(R 2.4) для любой линейной формы $\lambda(z_1, \dots, z_M)$ последовательность

$$\lambda^2(z_*) - \bar{w}_2, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m$$

регулярна в $\mathcal{O}_{0, \mathbb{C}^{M+1}}$, где $\bar{w}_i, \bar{q}_j$ означают ограничения многочленов w_i, q_j на гиперплоскость $z_{M+1} = 0$, причем квадратичные формы $\bar{w}_2$ и $\bar{q}_2$ имеют полный ранг, замкнутое множество $\{\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = 0\}$ в $\mathbb{C}^M$ неприводимо и его линейная оболочка есть все пространство $\mathbb{C}^M$, а замкнутое множество

$$\sigma^{-1}(\overline{\{\lambda(z_*) = q_1 = q_2 = 0\}} \cap G)$$

неприводимо и приведено.

Снова отметим, что поскольку особых точек конечное число, условие (R 2.4) не нуждается в специальном обосновании.

Пусть $D \in |-nK_F|$ – простой дивизор, $\beta: F^+ \rightarrow F$ и $\beta_G: G^+ \rightarrow G$ – раздутья точек o и $p = \sigma(o)$ соответственно, с исключительными дивизорами $E_F \subset F^+$ и $E_G \subset G^+$. Морфизм σ продолжается до двойного накрытия $\sigma^+: F^+ \rightarrow G^+$, причем $\sigma_E: E_F \rightarrow E_G$ реализует кваттику E_F как двойное накрытие $E_G \cong \mathbb{P}_{(z_1: \dots: z_m)}^{M-1}$ с дивизором ветвления $\{\bar{w}_2 = 0\}$. Пусть $D^+ \subset F^+$ – собственный прообраз дивизора D , число $\nu \in \mathbb{Z}_+$ определяется эквивалентностью $D^+ \sim -nK_F - \nu E_F$ и $B \subset E_F$ – гиперплоское сечение гладкой кватрики E_F . Дословно повторяя рассуждения § 2 (рассматривая по отдельности случаи, когда сечение B поднято и когда оно не поднято с G), получаем утверждение предложения 5.1. Этим исключен случай особенности второго типа. Теорема 3 полностью доказана.

Список литературы

- [1] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.
- [2] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия. I. Многообразия Фано”, *УМН*, **62**:5 (2007), 15–106; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties. I. Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **62**:5 (2007), 857–942.
- [3] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано”, *Матем. сб.*, **191**:6 (2000), 101–126; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano double hypersurfaces”, *Sb. Math.*, **191**:6 (2000), 883–908.
- [4] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. III”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 35–68; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties with a pencil of Fano double covers. III”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 335–368.
- [5] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. I”, *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 127–160; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties with a pencil of double Fano covers. I”, *Sb. Math.*, **195**:7 (2004), 1039–1071.
- [6] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II”, *Матем. сб.*, **195**:11 (2004), 119–156; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties with a pencil of Fano double covers. II”, *Sb. Math.*, **195**:11 (2004), 1665–1702.
- [7] A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections”, *Manuscripta Math.*, **121**:4 (2006), 491–526.
- [8] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
- [9] И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
- [10] I. A. Cheltsov, M. M. Grinenko, *Birational rigidity is not an open property*, [arXiv: math/0612159](https://arxiv.org/abs/math/0612159).
- [11] G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89**:2 (1987), 225–246.
- [12] J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **34**:4 (2001), 525–556.

- [13] A. M. Nadel, “Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature”, *Ann. of Math.* (2), **132**:3 (1990), 549–596.
- [14] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 139–182; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid iterated Fano double covers”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 555–596.
- [15] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984; рус. пер.: У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [16] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [17] A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
- [18] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces”, *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 115–155.
- [19] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, J. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.

А. В. Пухликов (A. V. Pukhlikov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

University of Liverpool, UK

E-mail: pukh@mi.ras.ru, pukh@liv.ac.uk

Поступила в редакцию

10.11.2007