Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm4034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:55:08

УДК 517.547.2

В. Б. Шерстюков

Представление обратной величины целой функции рядом простейших дробей и экспоненциальная аппроксимация

Изучаются условия, при которых обратная величина $1/L(\lambda)$ целой функции с простыми нулями λ_k может быть представлена рядом простейших дробей $c_k/(\lambda - \lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Возможность указанного представления охарактеризована в традиционных терминах определенного “асимптотически правильного” поведения функции $L(\lambda)$. Рассматриваются приложения к системам экспонент, полным на отрезке, и к представляющим системам экспонент в выпуклой области.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: целая функция, ряд простейших дробей, представляющая система экспонент.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

В 1947 г. вышла в свет статья М. Г. Крейна [1], в которой был введен и изучен один интересный класс целых функций, вызванный к жизни потребностями спектральной теории эрмитовых операторов и проблемой моментов (см. [2], [3]). Функция $L(\lambda)$, имеющая вещественные простые нули λ_k , $k = 1, 2, \dots$, принадлежит упомянутому классу Крейна, если при некотором $p \geq 0$ выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^p |L'(\lambda_k)|} < \infty, \quad (1)$$

$$\frac{1}{L(\lambda)} = R(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda}{\lambda_k^2} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda_k^p} \right\}, \quad (2)$$

где $R(\lambda)$ – некоторый многочлен.

Теорема Крейна (см. [1; теорема 4]) утверждает, что при выполнении условий (1) и (2) $L(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |L(x)|}{1+x^2} dx < \infty. \quad (3)$$

Как обычно, $\ln^+ a := \frac{1}{2}(|\ln a| + \ln a)$, $a > 0$. Разложение (2) с учетом (1) можно записать в эквивалентной форме (см. [1]):

$$\frac{1}{L(\lambda)} = R(\lambda) + \lambda^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

Работа выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/6827).

которая при $R(\lambda) \equiv 0$ и $p = 0$ принимает вид

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty, \quad (4)$$

и показывает, что функция из “класса Крейна” имеет вполне регулярный рост (в.р.р.), а ее индикаторная диаграмма – отрезок мнимой оси (см. [1], [4; гл. V, § 6]), содержащий начало координат.

Приведем более общий факт (см. [1; теорема 5]), доказательство которого, отличное от оригинального, читатель найдет в [4; гл. V, § 6, теорема 13].

ТЕОРЕМА КРЕЙНА. Пусть $L(\lambda)$ – целая функция, имеющая простые нули λ_k , $k = 1, 2, \dots$, для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k|}{|\lambda_k|^2} < \infty. \quad (5)$$

Если при этом

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\lambda_k} \right| < \infty, \quad (6)$$

то функция $L(\lambda)$ типа не выше экспоненциального, и для нее выполняется (3).

Целые функции, нули которых удовлетворяют условию (5) близости к вещественной оси, которое можно записать как $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_k}| < \infty$, принято называть функциями класса A (см. [4; гл. V]). Дальнейшие обобщения теоремы Крейна можно найти в [5; гл. VI, § 2], [6]. Различные свойства функций, допускающих представления вида (2), (4) или (6), изучались и использовались в ряде работ по теории функций и дифференциальных уравнений (кроме упоминавшихся уже статей [2], [3] и книги [4] см., например, [5; гл. V, § 6]–[7], [8; § 6]–[10]). Вместе с тем, важный вопрос об условиях, обеспечивающих возможность разложения обратной величины целой функции (более общо – мероморфной функции) в ряд простых дробей, представляется недостаточно изученным. Классическая теорема Миттаг-Леффлера или метод Коши разложения мероморфной функции на простые дроби не дают нам исчерпывающего ответа. В связи с этим в статье автора [9] поставлена следующая задача.

Пусть $L(\lambda)$ – целая функция класса A с простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$. Требуется найти критерий представимости обратной величины $1/L(\lambda)$ в виде ряда (6). В [9] эта задача решена только для функции с вещественными нулями, при этом необходимое и достаточное условие наличия разложения типа Крейна выписано фактически лишь в терминах последовательности $\{L'(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$. В настоящей работе указанная задача исследуется в более общей постановке.

Переходя к формулировке основных результатов, напомним, что множество на числовой оси называется *относительно плотным по мере* (см. [11]), если существуют такие положительные числа l и δ , что всякий отрезок $[x, x + l]$, $x \in \mathbb{R}$, содержит часть множества, имеющую меру Лебега, большую чем δ . Это определение естественным образом переносится (см. [10]) с числовой оси на произвольную прямую в $\mathbb{C}$.

Пусть $L(\lambda)$ – целая функция с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, γ – прямая, проходящая через начало координат, $R = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность положительных чисел, а $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$. Будем говорить,

что пара (γ, R) согласована с функцией L , если одновременно выполняются следующие три условия:

$$\text{множество } S = \gamma \setminus U \text{ относительно плотно по мере на } \gamma; \quad (7)$$

$$\exists \alpha > 0 : \frac{1}{L'(\lambda_k)r_k} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty; \quad (8)$$

$$\exists \beta > 0 : \frac{1}{L(\lambda)} = O(|\lambda|^\beta), \quad \lambda \in S. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ с простыми (всеми) нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ допускала разложение типа Крейна*

$$\frac{1}{L(\lambda)} = Q(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\lambda - \lambda_k} + P_k(\lambda) \right) \quad (10)$$

(ряд сходится абсолютно и равномерно внутри $\mathbb{C} \setminus \Lambda$; $Q(\lambda)$, $P_k(\lambda)$ – многочлены, степени которых ограничены в совокупности, $k = 1, 2, \dots$), необходимо и достаточно, чтобы L имела неотрицательный индикатор и нашлась пара (γ, R) , согласованная с L .

Естественно ожидать, что формулировка теоремы несколько упростится, если априори имеется дополнительная информация о расположении нулей функции $L(\lambda)$. Например, весьма вероятно, что при условии (5) возможность представления $1/L(\lambda)$ в виде ряда (10) может быть описана только через оценки скорости роста последовательности $\{L'(\lambda_k)\}_{k=1}^\infty$. Пока подтверждение этой гипотезы получено лишь для целой функции, все нули которой содержатся в некоторой горизонтальной полосе (очевидно, такая функция принадлежит классу A).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $L(\lambda)$ – целая функция с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, расположенными в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$, $h > 0$. Обратная величина $1/L(\lambda)$ раскладывается в ряд (10) в том и только том случае, когда одновременно выполняются следующие условия:*

- i) $L(\lambda)$ – ц.ф.э.т. с содержащей начало координат индикаторной диаграммой;
- ii) $\exists \alpha > 0 : \frac{1}{L'(\lambda_k)} = O(|\lambda_k|^\alpha), k \rightarrow \infty$.

§ 2. Доказательство основных результатов

Для сокращения доказательств теорем 1 и 2 выведем одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. *Пусть целая функция $L(\lambda)$ допускает разложение (10) в ряд типа Крейна. Тогда при некотором $\alpha > 0$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\frac{1}{L'(\lambda_k)} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что мероморфная функция $1/L(\lambda)$ может быть представлена абсолютно и равномерно сходящимся внутри области

$\mathbb{C} \setminus \Lambda$ рядом (10), в котором степени всех многочленов $P_k(\lambda)$ не превосходят некоторого натурального числа p . Это, в частности, дает $a_k = 1/L'(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Воспользуемся заимствованным из [1] приемом. Именно, домножим функцию $L(\lambda)$ на подходящий многочлен $T(\lambda)$, степень m которого по крайней мере на две единицы больше и числа p , и степени многочлена $Q(\lambda)$. Полагая $L_1(\lambda) = L(\lambda)T(\lambda)$, приходим к равенству

$$\frac{1}{L_1(\lambda)} = \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\lambda - \mu_j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\lambda_k|^2 < \infty. \quad (11)$$

Отметим, что получить заключение леммы 1 можно с помощью многочлена меньшей степени, приходя к разложению вида (4), однако в дальнейших рассуждениях удобно использовать именно (11). Прямой подсчет показывает, что

$$c_k = \frac{1}{L'(\lambda_k)T(\lambda_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь из ограничения на коэффициенты разложения (11) следует, что

$$\exists C > 0 : \frac{|\lambda_k|^2}{|L'(\lambda_k)|} \leq C |T(\lambda_k)|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда получаем нужное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Пусть для ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ найдется согласованная с ней пара (γ, R) . Выберем какой-нибудь многочлен $T(\lambda)$ степени m с простыми нулями $\{\mu_j\}_{j=1}^m$ так, чтобы $\{\mu_j\}_{j=1}^m \cap \Lambda = \emptyset$ и $m = \max\{\alpha] + 3, [\beta] + 1\}$. Здесь α и β взяты из условий (8) и (9) определения пары (γ, R) , согласованной с $L(\lambda)$, а символ $[x]$ обозначает целую часть числа x . Рассмотрим функцию $L_1(\lambda) = L(\lambda)T(\lambda)$. Для всех $k = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, m$ справедливы равенства $L'_1(\lambda_k) = L'(\lambda_k)T(\lambda_k)$ и $L'_1(\mu_j) = L(\mu_j)T'(\mu_j)$. Вспомогательная функция

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{L_1(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{L'_1(\mu_j)(\lambda - \mu_j)}$$

будет, как несложно видеть, ц.ф.э.т. Оценим $|\varphi(\lambda)|$ сверху на относительно плотном по мере на прямой γ множестве S из условия (7). При $\lambda \rightarrow \infty$, очевидно,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{L'_1(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} \rightarrow 0.$$

Далее, при $\lambda \in S$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'_1(\lambda_k)| |\lambda - \lambda_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|L'(\lambda_k)| |T(\lambda_k)| r_k} \leq B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^\alpha}{|T(\lambda_k)|},$$

где константа B не зависит от λ , а последний ряд сходится в силу выбора числа m и того, что $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^2 < \infty$. Наконец, при всех достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ выполняется оценка

$$\frac{1}{|L_1(\lambda)|} = \frac{1}{|L(\lambda)| |T(\lambda)|} \leq C \frac{|\lambda|^\beta}{|T(\lambda)|}$$

с не зависящей от λ константой C из условия (9). Таким образом, многочлен $T(\lambda)$ подобран так, что функция $\varphi(\lambda)$ ограничена на S . Это обстоятельство по

основной лемме из [11] влечет ограниченность $\varphi(\lambda)$ на прямой γ . Следовательно (см., например, [4; гл. V, § 4]), $\varphi(\lambda)$ – функция в.р.р. Положив

$$\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_1(\lambda)}{L'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{j=1}^m \frac{L_1(\lambda)}{L'_1(\mu_j)(\lambda - \mu_j)},$$

приходим к соотношению $1 = \psi(\lambda) + L_1(\lambda)\varphi(\lambda)$, в котором $\psi(\lambda)$ – ц.ф.э.т., индикатор $h_\psi(\theta)$ которой не превосходит индикатора $h_{L_1}(\theta)$ функции $L_1(\lambda)$. Из полной регулярности роста $\varphi(\lambda)$ следует, что при каждом $\theta \in [0, 2\pi)$ индикаторы функций $L_1(\lambda)\varphi(\lambda)$, $L_1(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ связаны равенством $h_{L_1\varphi}(\theta) = h_{L_1}(\theta) + h_\varphi(\theta)$. Поэтому с учетом неотрицательности $h_{L_1}(\theta)$ получим $h_{L_1}(\theta) + h_\varphi(\theta) \leq h_{L_1}(\theta)$ для всех θ , откуда видно, что $\varphi(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Будучи ограниченной на прямой γ , такая функция оказывается постоянной в силу известных теорем типа Фрагмена–Линделёфа. Кроме того, из приведенных выше оценок вытекает $\varphi(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in S$. Значит, $\varphi \equiv 0$ и

$$\frac{1}{L_1(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{L'_1(\mu_j)(\lambda - \mu_j)},$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем нулей функции $L_1(\lambda)$, поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|L'_1(\lambda_k)| < \infty$. Теперь уже достаточно просто получаем разложение (10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\lambda)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(\lambda)}{L'(\lambda_k)T(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{j=1}^m \frac{T(\lambda)}{L(\mu_j)T'(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{T'(\lambda_k)}{T(\lambda_k)} + \dots + \frac{T^{(m)}(\lambda_k)}{T(\lambda_k)m!} (\lambda - \lambda_k)^{m-1} \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \frac{1}{L(\mu_j)} \left\{ 1 + \frac{T''(\mu_j)}{2T'(\mu_j)} (\lambda - \mu_j) + \dots + \frac{T^{(m)}(\mu_j)}{T'(\mu_j)m!} (\lambda - \mu_j)^{m-1} \right\} \\ &= Q(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} + P_k(\lambda) \right), \end{aligned}$$

где $Q(\lambda)$ и $P_k(\lambda)$ – многочлены степени не выше $m-1$, $k = 1, 2, \dots$.

Необходимость. Выберем произвольно прямую γ , проходящую через начало, и положим

$$R = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad r_k = \frac{1}{|\lambda_k|^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из разложения (10) по лемме 1 получаем условие (8) как следствие представления (11). Из (11) также следует, что $h_L(\theta) \geq 0$. Так как $L(\lambda)$ имеет экспоненциальный тип, то $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$, поэтому множество кружков $U_k = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < r_k\}$ имеет нулевую линейную плотность (т.е. является C^0 -множеством), а $S = \gamma \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ относительно плотно по мере на γ . Пара (γ, R) согласована с $L(\lambda)$, поскольку тождество (11) наряду с (8) влечет оценку

$$\exists B > 0 : \quad \forall \lambda \in S \quad \frac{1}{|L(\lambda)|} \leq B|T(\lambda)|.$$

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $L(\lambda)$ — ц.ф.э.т. вполне регулярного роста с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и положительным индикатором $h_L(\theta)$. Для справедливости представления (10) необходимо и достаточно, чтобы имела место оценка

$$\exists \alpha > 0 : \frac{1}{L'(\lambda_k)} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. *Необходимость.* Пусть справедливо представление (10). Применяя лемму 1, получаем условие ii). Поскольку все нули функции $L(\lambda)$ лежат в горизонтальной полосе, то $L \in A$, и по теореме Крейна эта функция имеет экспоненциальный тип и лежащую на мнимой оси индикаторную диаграмму. Для получения условия i) осталось сказать, сославшись на теорему 1, что начало координат принадлежит этой индикаторной диаграмме. Впрочем, так как домножение на многочлен не меняет индикаторную диаграмму функции, то без ограничения общности можно вместо (11) работать с представлением

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Если $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| > h$, то

$$\frac{1}{|L(i\mu)|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{|i\mu - \lambda_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{|\mu - \operatorname{Im} \lambda_k|} \leq \frac{1}{|\mu| - h} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

откуда $h_L(\pm\pi/2) \geq 0$, и необходимость установлена.

Достаточность. Пусть целая функция $L(\lambda)$ с нулями в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$ удовлетворяет условиям i) и ii). Считая всюду далее, что $i\mathbb{R} \cap \Lambda = \emptyset$, запишем для $L(\lambda)$ ее представление Адамара–Вейерштрасса:

$$L(\lambda) = e^{a\lambda+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\lambda/\lambda_k}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Положив

$$\begin{aligned} \mu_k &= \operatorname{Re} \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ d &= a + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\mu_k} \right), \quad \chi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}, \\ L_1(\lambda) &= \chi(\lambda) e^{\lambda \operatorname{Re} d} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_k}\right) e^{\lambda/\mu_k}, \end{aligned}$$

имеем

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) e^{i\lambda \operatorname{Im} d + b}. \quad (12)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на одной лемме А. М. Седлецкого (см. [12; гл. 5, § 5.3]).

ЛЕММА 2. Пусть последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ лежат в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h < +\infty$ и не сгущаются, и пусть $\operatorname{Re} \lambda_k = \operatorname{Re} \mu_k$ для всех k . Тогда

$$\left| \prod' \frac{1 - \lambda/\lambda_k}{1 - \lambda/\mu_k} \right| \asymp 1, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \geq H > h$$

(знак ' показывает, что в бесконечное произведение не входят множители с $\lambda_k, \mu_k = 0$, а запись $\asymp 1$ означает, что это бесконечное произведение сходится вне полосы $|\operatorname{Im} \lambda| < H$ и ограничено там от нуля).

В нашей ситуации лемма Седлецкого нужна для оценки снизу $|\chi(\lambda)|$ на мнимой оси, что вместе с очевидным неравенством

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i\mu}{\mu_k} \right) e^{i\mu/\mu_k} \right| \geq 1, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

дает

$$\exists D > 0 : \quad |L_1(i\mu)| \geq D \quad \forall \mu \in \mathbb{R} : \quad |\mu| \geq H > h. \quad (13)$$

Учитывая ограничения ii) и $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq h, k = 1, 2, \dots$, из (12) получаем

$$\frac{1}{L'_1(\lambda_k)} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Условия (13) и (14) показывают, что к функции $L_1(\lambda)$ применима теорема 1, согласно которой обратная величина $1/L_1(\lambda)$ раскладывается в ряд вида (10). По теореме Крейна $L_1(\lambda)$ – функция в.р.р., а значит, вполне регулярный рост имеет и функция $L(\lambda)$. Кроме того, отсюда следует, что индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ является отрезком мнимой оси. Рассмотрим три возможные ситуации, вытекающие из условия i). Если начало координат не является концом отрезка, изображающего индикаторную диаграмму функции $L(\lambda)$, то $|L(i\mu)| \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \pm\infty$. В этом случае $1/L(\lambda)$ по теореме 1 представляется рядом типа Крейна (10), поскольку пара (γ, R) согласована с L при $\gamma = i\mathbb{R}$, $R = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}, r_k = 1, k = 1, 2, \dots$.

Пусть теперь одним из концов индикаторной диаграммы $L(\lambda)$ является начало координат; для определенности считаем эту диаграмму отрезком $[-i\delta, 0]$, $\delta > 0$. Тогда при всяком $\varepsilon \in (0, \delta)$ можно применить достаточную часть теоремы 1 к функции $L(\lambda)e^{-i\varepsilon\lambda}$. Будем для простоты предполагать (это не умаляет общности рассуждений), что число α из условия ii) не меньше 2 и получаемое отсюда разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{e^{i\varepsilon\lambda}}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{i\varepsilon\lambda_k}}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty. \quad (15)$$

Равномерная сходимостъ ряда в правой части (15) по ε при фиксированном λ (используются неравенства $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq h, k = 1, 2, \dots$) позволяет перейти в этом соотношении почленно к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ и установить представление

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Пусть, наконец, индикаторная диаграмма функции $L(\lambda)$ состоит из начала координат, т.е. $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Условия (12) и (13) показывают, что при $D_1 = De^{\operatorname{Re} b} > 0$ выполняется неравенство

$$|L(i\mu)| \geq D_1 e^{-\mu \operatorname{Im} d} \quad \forall \mu \in \mathbb{R} : \quad |\mu| \geq H > h.$$

Но функция нулевого экспоненциального типа может удовлетворять последнему неравенству только при $d = 0$. Значит, $L(\lambda) = e^b L_1(\lambda)$, а для $1/L_1(\lambda)$ разложение (10) получено выше. Этим доказательство теоремы 2 завершается.

Анализ проведенных рассуждений приводит к таким утверждениям.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ имеет простые нули $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, расположенные в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$, и при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{L'(\lambda_k)} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |L(x)|}{1+x^2} dx < \infty,$$

и, следовательно, L – функция в.р.р., индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси (возможно, вырождающийся в точку).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $L(\lambda)$ имеет нулевой экспоненциальный тип и простые нули $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq h$, $k = 1, 2, \dots$. Для наличия представления (10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ii) теоремы 2.

§ 3. Полнота на отрезке

Одним из возможных направлений (далеко не единственным) применения разложений типа Крейна может служить изучение аппроксимативных свойств систем экспонент в различных функциональных пространствах. Как обычно, символом $C[a, b]$ обозначим банахово пространство всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с суп-нормой $\|f\|_{[a,b]} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, а $L^p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, – пространство (фактормножество) измеримых на (a, b) функций с интегрируемым в p -й степени модулем. В $L^p(a, b)$ вводится норма

$$\|f\|_{p,(a,b)} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

превращающая его в банахово пространство. Произвольная последовательность попарно различных точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ порождает систему экспонент $\mathcal{E}_\Lambda = \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$. Называем экспоненциальную систему *полной на отрезке* $[a, b]$, если она полна в пространстве $C[a, b]$, т.е. если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с $C[a, b]$. Задача полноты системы экспонент на отрезке имеет давнюю историю, частично ознакомиться с которой можно, например, по монографии [12] и обзору [13]. Приведем используемые ниже результаты, тесно связанные с указанной тематикой. К классу C (классу Картрайт) относят все ц.ф.э.т. $L(\lambda)$, для которых существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |L(x)|}{1+x^2} dx$, т.е. выполняется условие (3) из введения. Одним из важнейших результатов, примыкающих к теории полноты экспоненциальных систем на отрезке, является знаменитая теорема Бёрлинга–Мальявена о мультипликаторе (см. [14]), из которой легко следует условие полноты в терминах ц.ф.э.т. (см. [13; гл. 2, § 2.1, теорема 2.1.12]). Мы приведем его в несколько ослабленной форме: если L – ц.ф.э.т. класса C с индикатором $h_L(\theta)$ и простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, то система $\mathcal{E}_{i\Lambda}$ полна на отрезке $[a, b]$ и в $L^p(a, b)$ при условии $b - a < h_L(\frac{\pi}{2}) + h_L(-\frac{\pi}{2})$ и не полна на $[a, b]$ и в $L^p(a, b)$ при $b - a > h_L(\frac{\pi}{2}) + h_L(-\frac{\pi}{2})$. Иначе говоря, точная верхняя грань $\rho(\Lambda)$ радиусов отрезков, на которых полна система $\mathcal{E}_{i\Lambda}$ (радиус полноты последовательности Λ), равна $\frac{1}{2}(h_L(\frac{\pi}{2}) + h_L(-\frac{\pi}{2}))$. Сочетая последнее утверждение с теоремой Крейна, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $L(\lambda)$ – функция класса A с простыми нулями $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, обратная величина которой допускает разложение на простые дроби вида (10). Тогда радиус полноты последовательности Λ равен половине длины индикаторной диаграммы функции L .

Принимая во внимание следствие 2, имеем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть все нули λ_k ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ просты и расположены в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq h$. Пусть, далее, $|L'(\lambda_k)| \geq M|\lambda_k|^{-\alpha}$ при некоторых M , $\alpha > 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\rho(\Lambda) = \frac{1}{2}(h_L(\frac{\pi}{2}) + h_L(-\frac{\pi}{2}))$.

Отметим, что возможность разложения на простые дроби специальной функции $L(\lambda) = \lambda \prod' (1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}) e^{\lambda/\lambda_k}$, порождающей систему $\{e^{-ikz}\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda}$, $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{Z}$, $\lambda_0 = 0$, равносильна усиленной (в определенном смысле) полноте $\mathcal{E}_i(\mathbb{Z} \setminus \Lambda)$ в классе $L^2(-\pi, \pi)$ (подробности см. в [9]).

§ 4. Представляющие системы экспонент

Пусть G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$; $A(G)$ – пространство всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах из G ; $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности; $\mathcal{E}_\Lambda = \{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty$. Следуя общему определению (см. [15]), называем $\mathcal{E}_\Lambda$ абсолютно представляющей системой (АПС) в $A(G)$, если каждую функцию $f(z)$ из $A(G)$ можно представить (не обязательно единственным образом) в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

сходящегося абсолютно по топологии τ_G пространства $A(G)$. Будем также говорить, что $\mathcal{E}_\Lambda$ – эффективно абсолютно представляющая система (ЭАПС) в $A(G)$, если существует способ нахождения коэффициентов хотя бы одного разложения в ряд (см. (16)) каждой функции $f(z) \in A(G)$. Первые результаты об АПС и ЭАПС экспонент принадлежат А. Ф. Леонтьеву (см. [16]). Один из них мы сформулируем ниже, для чего возьмем какую-нибудь ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ с индикатрисой роста $h_L(\theta) = h(\theta)$ и простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$, и образуем систему функций

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

(интегрирование происходит по лучу $\arg \lambda = \varphi$). В [16; гл. IV, § 1] доказано, что $\psi_n(t)$ регулярны вне $\overline{G}$ и (17) – биортогональная к $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^\infty$ система. Далее, каждой функции $f(z)$, аналитической на $\overline{G}$ (т.е. функции $f(z) \in A(\overline{G})$), сопоставляется ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(t) \psi_k(t) dt, \quad k \geq 1, \quad (18)$$

где Γ – контур, охватывающий $\overline{G}$, на котором и внутри которого $f(z)$ – аналитическая функция. Символом $[1; h(\theta))$ обозначаем множество всех ц.ф.э.т., индикаторы которых меньше, чем $h(\theta)$; $[1; 0]$ – класс целых функций экспоненциального типа нуль.

ТЕОРЕМА ЛЕОНТЬЕВА (см. [16; дополнение]). Для того чтобы ряд (18) сходился в G к своей функции $f(z)$ (какова бы ни была $f(z) \in A(\overline{G})$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \quad \forall \Phi \in [1; h(\theta)). \quad (19)$$

В [16] указан также целый ряд других, равносильных (19), условий сходимости ряда (18) (абсолютно по топологии τ_G) именно к $f(z)$. В частности, это будет так, если L – функция вполне регулярного роста и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} + h(\arg \lambda_k) \right\} \leq 0 \quad (20)$$

(в терминологии работы [17] L – $(1, h(\theta))$ -интерполирующая функция).

Теорема Леонтьева доставляет пример ЭАПС в пространстве $(A(\overline{G}), \tau_G)$. Из результатов работ [16], [15] следует, что система экспонент с показателями в нулях $(1, h(\theta))$ -интерполирующей функции будет образовывать ЭАПС и в пространстве $A(G)$. Мы покажем, что для сходимости ряда (18) в G к своей функции $f(z)$ достаточно в условии (19) взять $\Phi(\lambda) \equiv 1$. Для удобства формулировок последующих результатов введем в рассмотрение некоторые классы целых функций. Положим

$$M(\Lambda; h) := \{L(\lambda) - \text{ц.ф.э.т. с } h_L(\theta) \leq h(\theta) : \text{все } \lambda_k - \text{простые нули } L\}.$$

Если $L \in M(\Lambda; h)$, то у $L(\lambda)$ могут быть нули, отличные от λ_k , причем произвольной кратности. Пусть еще

$$\widetilde{M}(\Lambda; h) := \{L \in M(\Lambda; h) : v(L) \setminus \Lambda - \text{множество не более чем нулевой плотности}\},$$

где $v(L)$ – совокупность всех нулей функции L .

ТЕОРЕМА КОРОВЕЙНИКА (см. [15; гл. III, § 1, теорема 6 при $\rho = 1$]). Пусть $M(\Lambda; h) \neq \emptyset$ и $L(\lambda) \in M(\Lambda; h)$. Система $\mathcal{E}_\Lambda$ является АПС в $A(G)$ в том и только том случае, если найдется функция $D(\lambda) \in [1; 0] \setminus \{0\}$ такая, что

$$D(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{D(\lambda_k)e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in G, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (21)$$

(ряд сходится абсолютно по топологии τ_G).

ТЕОРЕМА 3 (см. [10; теорема 6]). Для того чтобы система $\mathcal{E}_\Lambda$ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы Λ содержала подпоследовательность $\Lambda' \subset \Lambda$, удовлетворяющую условию: существует функция $L \in \widetilde{M}(\Lambda'; h)$ с индикатором $h(\theta)$ и нижним индикатором $h_{L,-}(\theta)$, для которой при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ выполнено $h_{L,-}(\theta_0) + h_{L,-}(\pi + \theta_0) > 0$ и

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |L'(\lambda_k)| - h(\arg \lambda_k) \right\} = 0.$$

Последняя теорема является уточнением соответствующего критерия А. В. Абанина (см. [18]), в котором вместо условия на нижний индикатор требовалась полная регулярность роста функции L . К настоящему моменту не ясно, можно ли полностью отказаться от этого условия. Возможно, полученные в настоящей работе результаты послужат шагом в направлении решения указанной проблемы. Во всяком случае, они, по-видимому, впервые столь рельефно выявляют важную роль, которую в теории АПС экспонент играют разложения на простые дроби порождающей функции.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{C}$, $0 \in G$, $h(-\theta)$ – ее опорная функция; $L(\lambda)$ – ц.ф.э.т. с индикатором $h(\theta)$ и простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$. Следующие условия равносильны:

- 1) ряд (18), составленный по произвольной функции $f(z) \in A(\overline{G})$, сходится абсолютно в $A(G)$ к своей функции $f(z)$;
- 2) $\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$, где $\left\{ \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет (20);
- 3) мероморфная функция $\varphi(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$ не имеет нулей (коэффициенты $\frac{1}{L'(\lambda_k)}$ ряда удовлетворяют условию (20)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Устанавливаем справедливость импликаций $2) \implies 1)$ и $3) \implies 2)$, поскольку 2) с очевидностью влечет 3), а $1) \implies 2)$ имеет место по теореме Леонтьева. Итак, пусть обратная величина $1/L(\lambda)$ представляется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

при условии (20). В заметке [6] установлено, что L имеет в.р.р. Отсюда уже следует (как отмечалось выше после формулировки теоремы Леонтьева) условие (19). Докажем $3) \implies 2)$. Из утверждения 3) легко выводится, что

$$\psi(\lambda) := \varphi(\lambda)L(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

– ц.ф.э.т. с $h_{\psi}(\theta) \leq h(\theta)$, не имеющая нулей. Следовательно, найдутся $a \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такие, что $\psi(\lambda) = Ae^{a\lambda}$, причем $\psi(\lambda_k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, т.е. $e^{a\lambda_k} = 1/A$ для всех k . Отсюда $\operatorname{Re}(a\lambda_k) = -\ln|A|$, $k = 1, 2, \dots$. При $a \neq 0$ предыдущие равенства означают, что точки λ_k лежат на одной прямой. В работе автора [6] показано, что в этом случае из оценки (20) следует отсутствие внутренних точек у индикаторной диаграммы функции $L(\lambda)$. Полученное противоречие заставляет признать, что $a = 0$. Но тогда $A = 1$ и $\psi(\lambda) \equiv 1$, т.е.

$$\frac{1}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Получено условие 2), что завершает доказательство теоремы 4.

Теперь мы усилим теорему Коробейника для области G , содержащей начало, доказав, что в соотношении (21) достаточно взять $z = 0$, а также дополним цитированный выше критерий Абанина–Шерстюкова соответствующим утверждением о разложении на простейшие дроби.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $L \in M(\Lambda; h)$ и $0 \in G$. Система $\mathcal{E}_\Lambda$ является АПС в $A(G)$ тогда и только тогда, когда с некоторой отличной от тождественного нуля функцией $D(\lambda) \in [1; 0]$ справедливо разложение

$$\frac{D(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad (22)$$

причем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{D(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \right| + h(\arg \lambda_k) \right\} \leq 0. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказывается просто. Если в предположениях теоремы 5 $\mathcal{E}_\Lambda$ – АПС в $A(G)$, то справедливо разложение (21) из критерия Коробейника. В частности, при $z = 0 \in G$ получается разложение (22), причем условие (23) равносильно абсолютной сходимости по топологии τ_G ряда в правой части равенства (21) при фиксированном $\lambda \notin \Lambda$.

Обратно, пусть при условии (23) имеется разложение (22); $v(L) \setminus \Lambda \neq \emptyset$ и $\lambda_0 \in v(L) \setminus \Lambda$. Легко видеть, что в точке λ_0 функция $D(\lambda)$ должна обратиться в нуль, откуда $v(L) \setminus \Lambda \subseteq v(D)$. Следовательно, множество $v(L) \setminus \Lambda$ имеет нулевую плотность и $L \in \widetilde{M}(\Lambda; h)$. Рассмотрим, далее, вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda, z) := D(\lambda)e^{\lambda z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{\lambda_k z},$$

которая (см. (23)) является аналитической в области G при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$, а также ц.ф.э.т. (по λ при фиксированном $z \in G$) с индикатором, не превосходящим $h(\theta)$. Важно, что $\varphi(\mu, z) = 0 \quad \forall \mu \in v(L), \forall z \in G$. Последнее соотношение позволяет заключить, что при фиксированном $z \in G$

$$\psi(\lambda, z) := \frac{\varphi(\lambda, z)}{L(\lambda)} = \frac{D(\lambda)}{L(\lambda)} e^{\lambda z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda - \lambda_k}$$

– ц.ф.э.т. переменной λ . Мы покажем, что $\psi(\lambda, z) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in G$. Обозначим через U объединение кружков $U_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta|\lambda_k|}\}$, $k = 1, 2, \dots$, которые при любом $\delta > 0$ имеют конечную сумму радиусов. Поскольку $0 \in G$, то можно выбрать отрезок K мнимой оси, лежащий в G ; пусть $h_K(-\theta)$ – его опорная функция. В дальнейшем считаем, что $\delta > 0$ взято исходя из условия $h_K(\theta) + 2\delta < h(\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$. На основании представления (22) с учетом неравенства (23) и выбора δ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus U$ и $z \in K$ можно записать

$$|\psi(x, z)| \leq \left| \frac{D(x)}{L(x)} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(2\delta - h(\arg \lambda_k) + h_K(\arg \lambda_k))|\lambda_k|} \leq M,$$

причем константа M не зависит от аргументов функции ψ . Этого достаточно, чтобы по схеме, разработанной в [10; теоремы 3, 5], вывести при фиксированном $z \in K$ следующую цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} |\psi(x, z)| \text{ ограничен на } \mathbb{R} \setminus U &\implies |\psi(x, z)| \text{ ограничен на } \mathbb{R} \\ \implies \psi(\lambda, z) - \text{функция в.р.р.} &\implies \psi(\lambda, z) \in [1; 0] \\ \implies \psi(\lambda, z) \equiv c_z = \text{const.} \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\forall z \in K \quad \psi(x, z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $x \notin U$, так как

$$|\psi(x, z)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_k)(e^{xz} - e^{\lambda_k z})}{L'(\lambda_k)(x - \lambda_k)} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{|\lambda_k|(\delta - h(\arg \lambda_k) + |z|)}}{|x - \lambda_k|}.$$

Итак, $c_z = 0$ для всех $z \in K$, а по теореме единственности и для всех $z \in G$. В результате проведенных рассуждений оказалось, что $\varphi(\lambda, z) = 0 \quad \forall z \in G$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, откуда для тех же z и λ

$$D(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{\lambda_k z}.$$

Согласно критерию Коробейника $\mathcal{E}_{\Lambda}$ – АПС в $A(G)$. Теорема 5 доказана.

Мы закончим описание показателей абсолютно представляющих систем экспонент в терминах разложений на простейшие дроби доказательством основного утверждения этого параграфа.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, содержащая начало. Для того чтобы система экспонент $\mathcal{E}_{\Lambda}$ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись $\Lambda' \subset \Lambda$, $L(\lambda) \in \widetilde{M}(\Lambda'; h)$ и $D(\lambda) \in [1; 0] \setminus \{0\}$ такие, что

$$\frac{D(\lambda)}{L(\lambda)} = \sum_{\lambda_k \in \Lambda'} \frac{d_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (24)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |d_k| + h(\arg \lambda_k) \right\} \leq 0. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в представлении (24) $d_k = D(\lambda_k)/L'(\lambda_k)$, $\lambda_k \in \Lambda'$.

Достаточность. Из (24) и (25) по теореме 5 получаем, что $\mathcal{E}_{\Lambda'}$ – АПС в пространстве $A(G)$. Этим свойством и подавно обладает система $\mathcal{E}_{\Lambda}$.

Необходимость. Пусть $\mathcal{E}_{\Lambda}$ – АПС в $A(G)$. Из цитированной выше теоремы Абанина вытекает существование подпоследовательности $\Lambda' \subset \Lambda$ и функции в.р.р. $L(\lambda) \in \widetilde{M}(\Lambda'; h)$ с индикатором $h(\theta)$, причем

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \lambda_k \in \Lambda'}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |L'(\lambda_k)| - h(\arg \lambda_k) \right\} = 0.$$

Но тогда $\mathcal{E}_{\Lambda'}$ – тоже АПС в $A(G)$, и мы находимся в условиях теоремы 5, применяя которую, получаем (24), (25). Доказательство завершено.

Список литературы

- [1] М. Г. Крейн, “К теории целых функций экспоненциального типа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:4 (1947), 309–326.
- [2] М. Г. Крейн, “Об одном замечательном классе эрмитовых операторов”, *Докл. АН СССР*, **44**:5 (1944), 191–195.
- [3] H. L. Hamburger, “Hermitian transformations of deficiency-index (1, 1), Jacobi matrices and undetermined moment problems”, *Amer. J. Math.*, **66**:4 (1944), 489–522.

- [4] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr., **236**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [6] В. Б. Шерстюков, “О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 119–130; англ. пер.: V. B. Sherstyukov, “On some criteria for completely regular growth of entire functions of exponential type”, *Math. Notes*, **80**:1–2 (2006), 114–126.
- [7] Ю. Ф. Коробейник, “Граничные свойства аналитических решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка”, *Матем. сб.*, **115**(157):3(7) (1981), 364–390; англ. пер.: Ju. F. Korobeinik, “Boundary properties of analytic solutions of differential equations of infinite order”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:3 (1982), 323–345.
- [8] Л. С. Маергойз, “Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля–Лапласа”, *Алгебра и анализ*, **12**:2 (2000), 1–63; англ. пер.: L. S. Maergoiz, “The indicator diagram of an entire function of proximate order and its generalized Borel–Laplace transforms”, *St. Petersburg Math. J.*, **12**:2 (2001), 191–232.
- [9] В. Б. Шерстюков, “О разложении мероморфных функций специального вида на простейшие дроби”, *Anal. Math.*, **33**:1 (2007), 63–81.
- [10] В. Б. Шерстюков, “Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 301–313; англ. пер.: V. B. Sherstyukov, “On a problem of Leont’ev and representing systems of exponentials”, *Math. Notes*, **74**:1–2 (2003), 286–298.
- [11] Б. Я. Левин, “Почти периодические функции с ограниченным спектром”, *Актуальные вопросы математического анализа*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1978, 112–124.
- [12] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [13] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2006.
- [14] A. Beurling, P. Malliavin, “On Fourier transforms of measures with compact support”, *Acta Math.*, **107**:3–4 (1962), 291–309.
- [15] Ю. Ф. Коробейник, “Представляющие системы”, *УМН*, **36**:1 (1981), 73–126; англ. пер.: Yu. F. Korobeinik, “Representing systems”, *Russian Math. Surveys*, **36**:1 (1981), 75–137.
- [16] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [17] Ю. Ф. Коробейник, “Уравнения свертки в комплексной области”, *Матем. сб.*, **127**(169):2(6) (1985), 173–197; англ. пер.: Yu. F. Korobeinik, “Convolution equations in the complex domain”, *Math. USSR-Sb.*, **55**:1 (1986), 171–194.
- [18] А. В. Абанин, “Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент”, *Докл. РАН*, **323**:5 (1992), 807–810; англ. пер.: A. V. Abanin, “Geometric criteria for representation of analytic functions by series of generalized exponentials”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **45**:2 (1992), 407–411.

В. Б. Шерстюков (V. B. Sherstyukov)
 Московский инженерно-физический институт
 (Национальный исследовательский ядерный университет)
E-mail: shervb73@gmail.com

Поступила в редакцию
 12.11.2007 и 31.07.2008